

# Vizualna matematika

---

**Klobučarić, Melisa**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:491629>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-08**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Melisa Klobučarić

**VIZUALNA MATEMATIKA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, veljača, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se svojoj mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić na suradnji, pomoći i stručnom vodstvu tijekom pisanja ovog rada.*

*Hvala svim prijateljima i rodbini koji su bili uz mene tijekom studiranja, a posebno zaručniku koji mi je uvijek bio podrška i motivacija.*

*Najveće hvala mojim roditeljima što su mi omogućili da postignem nešto u životu. Hvala na strpljenju, uloženom trudu i vjeri u mene.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Planimetrijski identiteti</b>	<b>4</b>
1.1 Pitagorin poučak . . . . .	4
1.2 Lunule . . . . .	8
1.3 Vivanijev teorem . . . . .	15
<b>2 Algebarski identiteti</b>	<b>19</b>
2.1 Rastav zbroja dvaju kvadrata . . . . .	19
2.2 Produkt četiri (pozitivna) broja u aritmetičkoj progresiji . . . . .	21
2.3 Zbroj dva specifična kvadrata . . . . .	22
<b>3 Trigonometrijski identiteti</b>	<b>24</b>
3.1 Sinus zbroja . . . . .	24
3.2 Poučak o sinusima . . . . .	27
3.3 Poučak o kosinusu . . . . .	29
<b>4 Sume</b>	<b>36</b>
4.1 Suma prvih $n$ prirodnih brojeva . . . . .	36
4.2 Suma umnožaka dvaju uzastopnih prirodnih brojeva . . . . .	38
4.3 Suma umnožaka $n$ -te faktorijele i prirodnog broja $n$ . . . . .	40
<b>5 Nejednakosti</b>	<b>42</b>
5.1 A-G nejednakost . . . . .	42
5.2 C-S-B nejednakost . . . . .	45
5.3 Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dva broja . . . . .	49
<b>6 Infinitesimalni račun</b>	<b>51</b>
6.1 Nula kao limes funkcije . . . . .	51

<i>SADRŽAJ</i>	v
6.2 Parcijalna integracija . . . . .	53
6.3 Youngova nejednakost . . . . .	56
<b>Bibliografija</b>	<b>60</b>

# Uvod

Izraz „slika vrijedi tisuću riječi” dobro je poznati idiom koji tvrdi da se složena ideja ili poruka može učinkovitije prenijeti kroz jednu sliku ili ilustraciju nego kroz dugačak opis ili objašnjenje. Dobro odabrana slika ili vizualni prikaz mogu prenijeti dubok ili zamršen koncept brže i živopisnije nego velika količina teksta. Ova izreka naglašava snagu vizualne komunikacije i sposobnost slika da prenesu informacije i ideje na neposredniji i većoj populaciji razumljiv način.

U ovom radu, baviti ćemo se slikama, odnosno vizualizacijom u matematici. Vizualizacija u matematici odnosi se na proces korištenja vizualnih prikaza za pomoć u razumijevanju i komuniciranju matematičkih koncepata i odnosa.

Osvrnemo li se u prošlost, vidimo da je razvoj matematike kao grane od samog početka do danas uvelike obilježen crtežima. Ljudi su oduvijek pokušavali objasniti, opisati i prikazati svoje spoznaje na najjednostavniji način. Kako je ljudska percepcija izrazito vizualna, to je nerijetko, osim riječi i simbola, uključivalo i vizualne prikaze.

U moderno doba, kod učenja matematike ili bavljenja matematičkim istraživanjem, pozornost se sve više posvećuje razvoju vizualnog mišljenja. Rudolf Arnheim opisao je vizualno mišljenje kao „aktivno istraživanje, odabir, shvaćanje bitnoga, pojednostavljenje, apstrakcija, analiza i sinteza, dovršavanje, ispravljanje, uspoređivanje, rješavanje problema, kao i kombiniranje, razdvajanje, stavljanje u kontekst, . . .“

Vizualizacija ima razne svrhe. Najprije, vizualizacija matematičkih ideja služi kao prvi korak u rješavanju problema ili matematičke situacije. Zatim, vizualne reprezentacije olakšavaju prepoznavanje i objašnjavanje matematičkih koncepata. Matematičari koriste vizualizaciju za istraživanje novih matematičkih ideja, testiranje pretpostavki i stjecanje uvida u složene strukture i odnose. U matematičkom obrazovanju, vizualizacije su izrazito bitne za poučavanje. One učenicima pomažu da izgrade geometrijsku intuiciju, shvate apstraktne koncepte, uoče odnose koji možda nisu odmah vidljivi iz simboličkih prikaza i cijene ljepotu matematičkih struktura. Zbog toga možemo zaključiti da je vizualizacija

vrlo bitna za istraživanje, komuniciranje i razumijevanje matematičkih ideja te da zbog toga ima važnu ulogu u stvaranju matematičkog dokaza.

U ovom radu naglasak će biti na takozvanim *dokazima bez riječi*. Dokazi bez riječi, također poznati kao *vizualni dokazi* ili *dokazi slikom*, predstavljaju matematičke dokaze ili demonstracije matematičkih koncepata koji se oslanjaju isključivo na vizualne elemente, dijagrame i geometrijske ilustracije kako bi potvrdili svoju valjanost. Ovi dokazi koriste intuitivne, grafičke prikaze kako bi pokazali da je matematička izjava ili teorem istinit. U radu ćemo prikazati nekoliko slikovnih dokaza zanimljivih teorema i identiteta, a spomenute dokaze slikom upotpunit ćemo dodatnim objašnjenjima i simboličkim zapisima. Navest ćemo i klasične dokaze istih teorema radi usporedbe različitih pristupa takvih i vizualnih dokaza.

Za razliku od vizualnih dokaza, klasični dokazi su strukturirani argumenti koji slijede niz logičkih koraka sa svrhom potvrde valjanosti i istinitosti matematičkih tvrdnji. Oni su temeljeni na tekstu, a oslanjaju se na formalni matematički jezik, rigorozne zapise i adekvatna obrazloženja.

Dokaz bez riječi, osim što pomaže čitatelju da vizualno razumije zašto je određena matematička tvrdnja točna, također daje ideju o tome kako bi se ta tvrdnja mogla formalno dokazati. Kao što je Jurij Ivanovič Manin rekao, „Dobar dokaz nas čini mudrijima.” Ova misao je nadopunjena riječima Andrewa Gleasona koji je istaknuo da „Dokazi nisu tu da nas uvjere da je nešto istinito - oni su tu da nam pokažu zašto je to istinito.”

Iako slični koncepti postoje unazad stoljećima, sam izraz „dokazi bez riječi” relativno je moderan. Prvi takvi dokazi potječu iz stare Grčke i Kine te su se kasnije razvili u islamskom svijetu i tijekom renesanse u Italiji. Porast popularnosti u suvremenom matematičkom obrazovanju, ovaj koncept je doživio zbog svoje učinkovitosti u prenošenju složenih matematičkih ideja. Dokazi bez riječi, pod tim nazivom, pojavili su se u časopisu *Mathematics Magazine* oko 1975. godine i deset godina kasnije u studentskom časopisu *College Mathematics Journal*, a danas ih redovito objavljuje organizacija *Mathematical Association of America*.

Budući da ih često susrećemo popraćene jednadžbama i kratkim algebarskim opisima ili objašnjenjima, neki kritičari smatraju da dokazi bez riječi nisu pravi „dokazi” i da nisu potpuno „bez riječi”. Jean Dieudonne je jedan svoj rad započeo rečenicom: „Odlučio sam, uz tekst, ne uključiti ni jednu ilustraciju.” Za njega je, kao i za mnoge druge matematičare, jedini ispravan način prikazivanja matematičkih tvrdnji korištenjem isključivo formalnog jezika. Oni vjeruju da slike mogu dati lažnu percepciju stvarnosti. S druge strane, postoje matematičari kao što je George Polya, čiji je stav upravo suprotan. Polya je smatrao da



je rješavanje matematičkih problema najbolje započeti upravo vizualnom reprezentacijom, odnosno slikom. Još jedan pobornik ilustracija kao dokaza bio je Martin Gardner. On je u svojoj popularnoj kolumni „Matematičke igre” u časopisu Scientific American iz listopada 1973. istaknuo da se „u mnogim slučajevima dosadan dokaz može nadopuniti geometrijskim analogonom tako jednostavnim i lijepim da se istinitost teorema vidi gotovo na prvi pogled.“

Važno je napomenuti da iako su korisni za ilustraciju koncepata, vizualni dokazi obično ne ispunjavaju stroge kriterije klasičnih dokaza i možda neće zadovoljiti zahtjeve matematičkog dokaza u svim slučajevima. Stoga ih je, za jačanje razumijevanja i geometrijske intuicije, najbolje koristiti u kombinaciji s tradicionalnijim matematičkim dokazima. Unatoč tome, ovi dokazi predstavljaju vrijedan pedagoški alat zbog čega matematičari i dalje nastavljaju istraživati nove i inovativne metode vizualnog prikazivanja matematičkih istina.

# Poglavlje 1

## Planimetrijski identiteti

U ovom poglavlju predstaviti ćemo dokaze bez riječi nekih zanimljivih teorema i tvrdnji iz planimetrije, odnosno područja elementarne geometrije koje se bavi proučavanjem geometrijskih likova u ravnini i njihovih odnosa. U planimetriji je prirodno uz klasičan dokaz uključiti slike te neke tvrdnje ni nema smisla dokazivati bez njih.

### 1.1 Pitagorin poučak

Pitagorin teorem jedan je od najpoznatijih i najcitiranijih teorema u matematici, s poviješću koja se proteže tisućama godina i uključuje doprinose različitih kultura i matematičara. Iako je nazvan po starogrčkom matematičaru Pitagori, teorem i njegova svojstva poznavalo je i primjenjivalo nekoliko civilizacija prije njega.

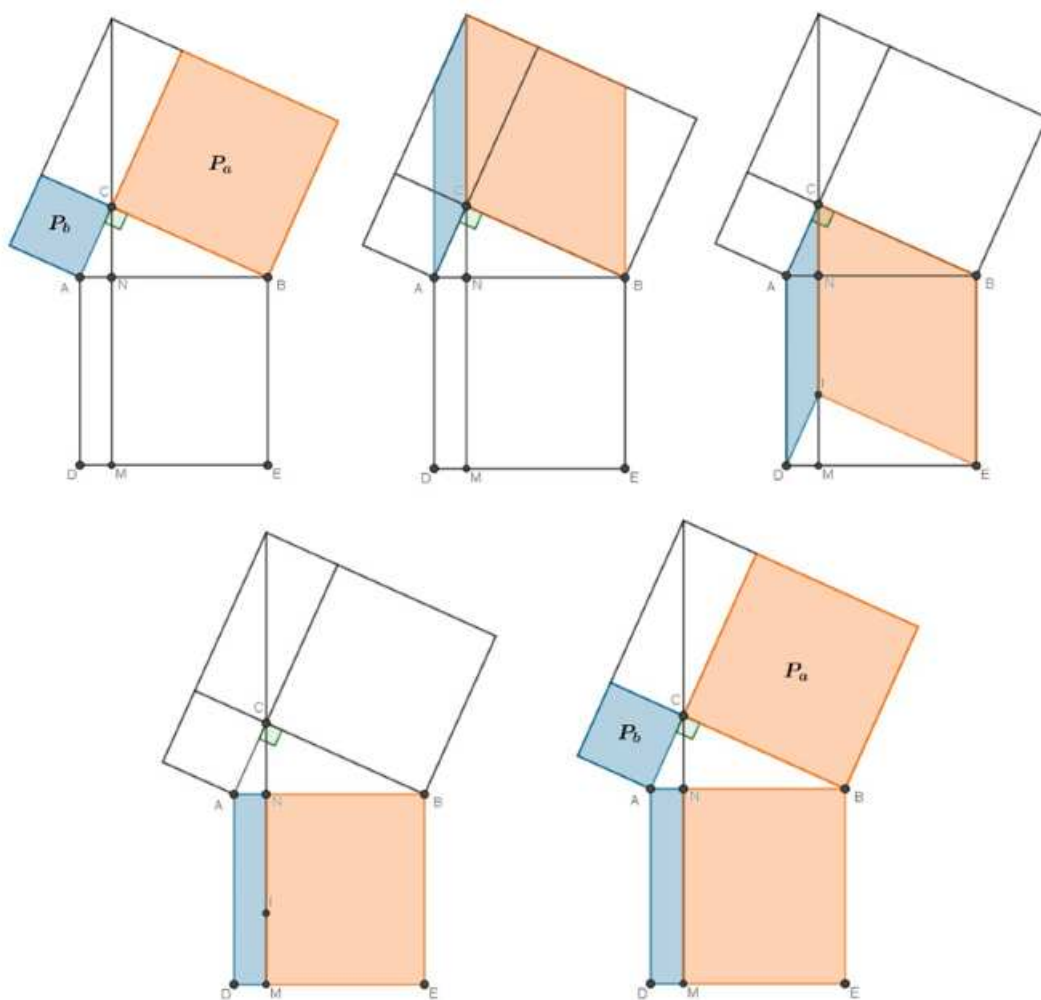
Pitagorin poučak glasi: *Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

Ako duljine kateta u pravokutnom trokutu označimo s  $a$  i  $b$ , a duljinu hipotenuze s  $c$ , onda poučak zapisujemo kao jednakost

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.1)$$

Postoji više stotina dokaza Pitagorinog poučka, od kojih se velik dio može provesti bez riječi. U nastavku ćemo opisati nekoliko njih.

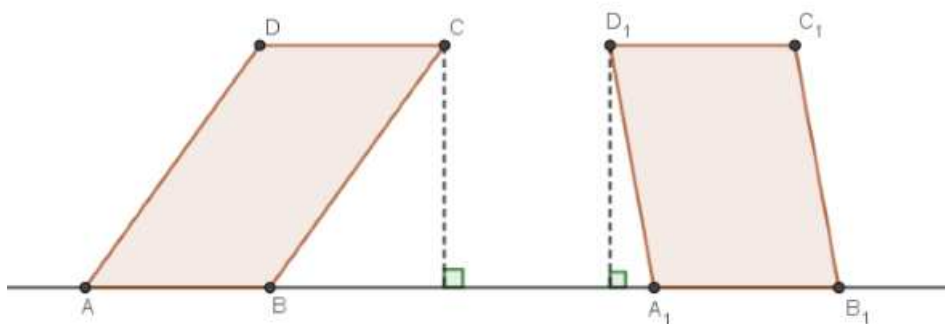
**1. način:**



Slika 1.1: Prvi dokaz Pitagorinog poučka

Slika 1.1 prikazuje dokaz kroz pet sličica zasnovan na sljedećoj geometrijskoj činjenici koja proistječe iz same formule za površinu: *Dva paralelograma kojima su duljine dviju stranica jednake i kojima su jednake visine na te stranice, imaju jednake površine.*

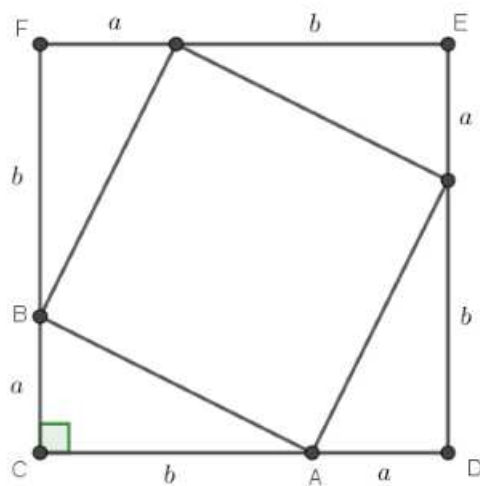
Uočimo da, prema prethodnoj činjenici, prikazanoj na Slici 1.2, klizanjem jedne stranice kvadrata s prve slike dokaza dobivamo paralelogram jednake površine na drugoj slici dokaza. Na isti način nastavljamo postupak sve do zadnje sličice. Na kraju možemo zaključiti da je



Slika 1.2: Paralelogrami jednakih površina

$$P_a + P_b = P(MEBN) + P(DMNA) = P(ADEB) = P_c. \quad (1.2)$$

**2. način:**



Slika 1.3: Drugi dokaz Pitagorinog poučka

Trokutu  $ABC$  produžimo katete  $\overline{CA}$  i  $\overline{CB}$  preko vrha  $A$ , odnosno  $B$ , za duljine druge katete, tj. tako da je  $|CD| = |CF| = a + b$ . Neka je  $E$  četvrti vrh kvadrata  $CDEF$ . Taj kvadrat podijelimo, kao na Slici 1.3, na četiri sukladna trokuta i kvadrat. Sada površinu većeg kvadrata možemo zapisati na dva načina, tj. vrijedi

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2, \quad (1.3)$$

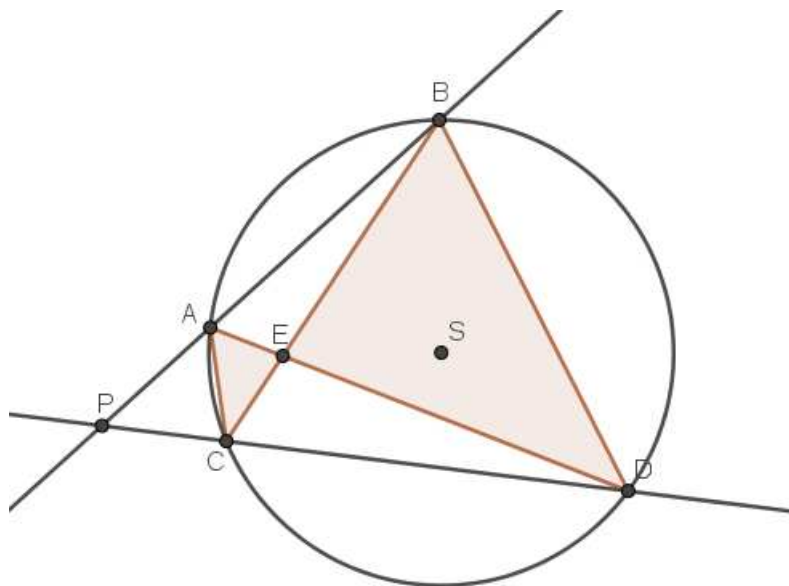
odakle je

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.4)$$

### 3. način:

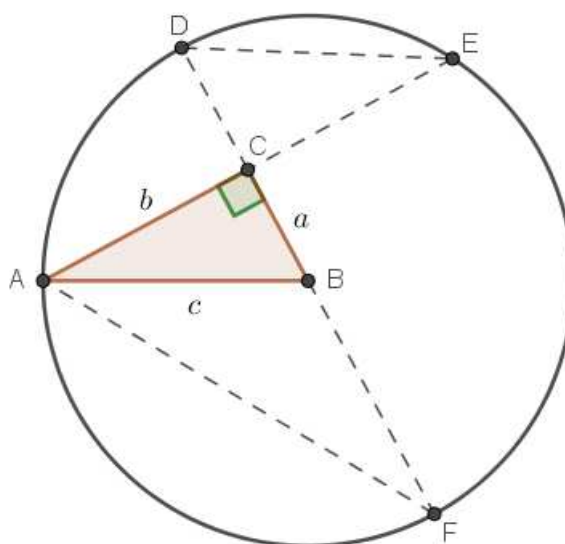
Ovaj dokaz Pitagorinog poučka provodi se uz primjenu sljedeće činjenice: *Položimo točkom  $P$  pravce koji sijeku kružnicu sa središtem  $S$  u točkama  $A$  i  $B$ , odnosno  $C$  i  $D$ . Označimo  $E$  sjecište pravca  $AD$  i  $BC$ . Tada vrijedi jednakost*

$$|AE| \cdot |ED| = |CE| \cdot |EB|. \quad (1.5)$$



Slika 1.4: Trokuti unutar kružnice

Promotrimo trokute  $ACE$  i  $BED$  sa Slike 1.4. Kutovi  $\angle CEA$  i  $\angle BED$  su vršni, a kutovi  $\angle ACB$  i  $\angle ADB$  su sukladni jer se radi o kutovima nad tetivom  $\overline{AB}$ . Zaključujemo da su trokuti  $ACE$  i  $BED$  slični prema Poučku o sličnosti trokuta  $K-K$  iz čega proistječe činjenica.



Slika 1.5: Treći dokaz Pitagorinog poučka

Promotrimo pravokutni trokut  $ABC$  na Slici 1.5. Oko vrha  $B$  opisana je kružnica polumjera  $c$ . Produžimo li katete trokuta do sjecišta s kružnicom, dobivamo prije opisanu situaciju. Zaključujemo da uz oznake na slici vrijedi

$$|AC| \cdot |CE| = |FC| \cdot |CD|, \quad (1.6)$$

odnosno

$$b^2 = (c + a) \cdot (c - a) = c^2 - a^2. \quad (1.7)$$

## 1.2 Lunule

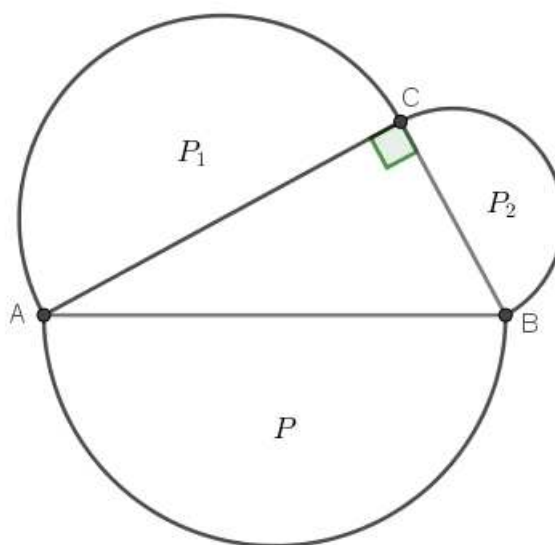
Lunule su mjesecoliki likovi omeđeni dvjema ekscentričnim kružnicama različitih polumjera. Matematičari su se njima bavili pri pokušajima rješavanja problema kvadrature kruga. Taj problem bavi se izvedivosti klasične konstrukcije kvadrata koji bi površinom

bio jednak danom krugu, a pri tome konstrukcija mora biti izvediva isključivo ravnalom i šestarom. Danas je poznato da takvo rješenje problema kvadrature kruga nije moguće.

Prva zabilježena osoba koja je točno odredila kvadraturu lika obrubljenog krivuljama bio je Hipokrat s Hiosa (5. st. pr. Kr.). Hipokrat je, pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga, otkrio da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti posebni likovi dobili su naziv po njemu i danas su poznati kao *Hipokratovi mjeseci*.

Proučavanjem lunula, matematičari su došli do mnogo novih spoznaja i zaključaka. Prvi koji ćemo ovdje pokazati odnosi se na jedan od niza poopćenja Pitagorina poučka koje glasi: *Zbroj površina polukrugova konstruiranih nad katetama pravokutnog trokuta jednak je površini polukruga konstruiranog nad hipotenuzom.*

Tvrdnja je prikazana sljedećom slikom.



Slika 1.6: Prikaz polukrugova nad katetama pravokutnog trokuta

Neka su  $P_1$  i  $P_2$  površine polukrugova nad katetama pravokutnog trokuta, a  $P$  površina tog pravokutnog trokuta. Tada tvrdnju možemo zapisati kao

$$P_1 + P_2 = P. \quad (1.8)$$

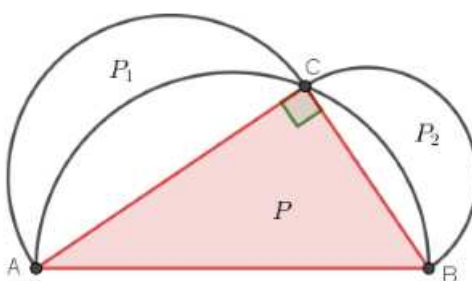
Kako je trokut pravokutan, znamo da za duljine njegovih stranica vrijedi

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (1.9)$$

gdje su  $a$  i  $b$  duljine kateta, a  $c$  duljina hipotenuze. Množenjem ove jednakosti s  $\frac{\pi}{8}$  dobijemo

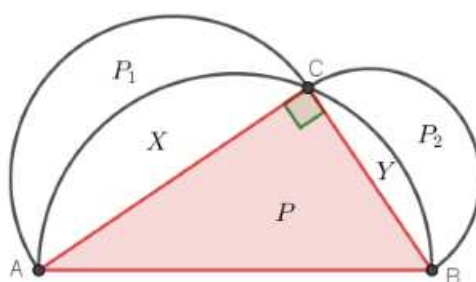
$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi, \quad (1.10)$$

a to je upravo postavljena tvrdnja.



Slika 1.7: Mjeseci nad katetama pravokutnog trokuta

Sljedeća tvrdnja vezana uz lunule glasi: *Zbroj površina dva mjeseca nad katetama jednak je površini pravokutnog trokuta.* Prikaz ove tvrdnje vidimo na Slici 1.7, a njezin dokaz proistječe izravno iz prethodno dokazane tvrdnje.



Slika 1.8: Površine mjeseca nad katetama pravokutnog trokuta

Neka su  $P_1$  i  $P_2$  površine mjeseca nad katetama pravokutnog trokuta, a  $P$  površina tog pravokutnog trokuta. Tada slijedi da je



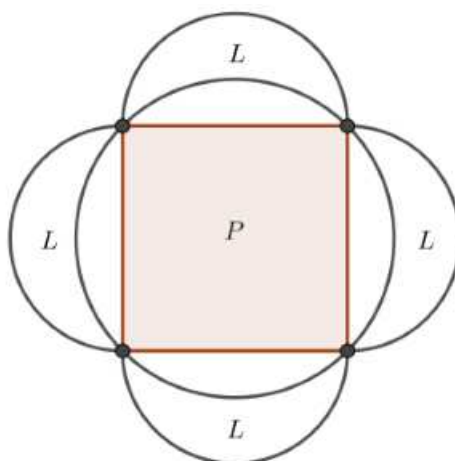
$$(P_1 + X) + (P_2 + Y) = P + X + Y, \quad (1.11)$$

a odatle je

$$P_1 + P_2 = P. \quad (1.12)$$

Posljedica dokazane tvrdnje bit će još jedna zanimljivost koju ćemo dokazati. Ona glasi: *Zbroj četiriju mjeseca jednak je površini kvadrata* (Slika 1.9). Odnosno, zapisano simbolima:

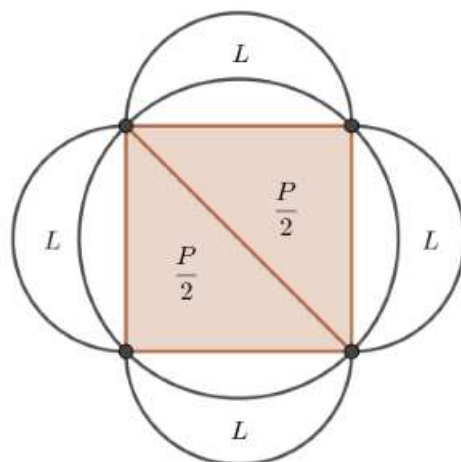
$$4L = P. \quad (1.13)$$



Slika 1.9: Površine mjeseca i površina kvadrata

Neka je  $P$  površina kvadrata te neka je  $L$  površina mjeseca nad stranicom kvadrata. Povučemo li dijagonalu kvadrata, dobivamo dva pravokutna jednakokračna trokuta s konstruiranim mjesecima nad katetama. Prema prethodno dokazanoj tvrdnji, vidimo da za oba trokuta vrijedi

$$L + L = \frac{P}{2}. \quad (1.14)$$

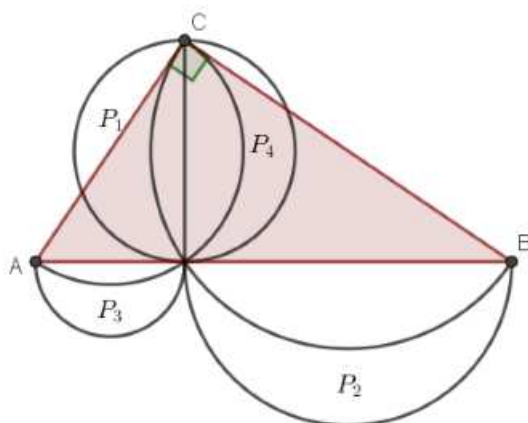


Slika 1.10: Površine mjeseca i površina dva trokuta

Udvostručenjem ove jednakosti dobivamo

$$4L = P. \quad (1.15)$$

Sljedeća tvrdnja koju ćemo dokazati prikazana je Slikom 1.11.



Slika 1.11: Podjela površine pravokutnog trokuta na dva manja pravokutna trokuta

Pripadni zapis simbolima je

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P(\triangle ABC), \quad (1.16)$$

pri čemu su  $P_1$  i  $P_2$  te  $P_3$  i  $P_4$  u parovima oznake za površinu mjeseca nad katetama pripadajućeg pravokutnog trokuta. Primjenom prije dokazane tvrdnje sa Slike 1.7, tj. da je zbroj površina dva mjeseca konstruirana nad katetama pravokutnog trokuta jednak površini tog pravokutnog trokuta, imamo da je

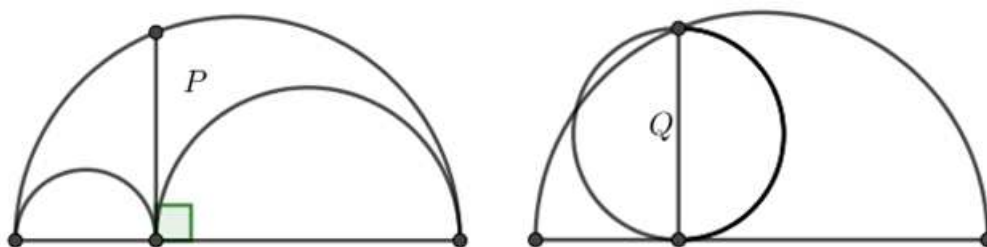
$$P_1 + P_2 = P(\triangle BCD), \quad (1.17)$$

i

$$P_3 + P_4 = P(\triangle ADC). \quad (1.18)$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo željenu jednakost.

Posljednji problem vezan uz lunule, odnosno dijelove ravnine omeđene kružnim lukovima, koji ćemo opisati pripisuje se Arhimeđu i prikazan je na Slici 1.12.



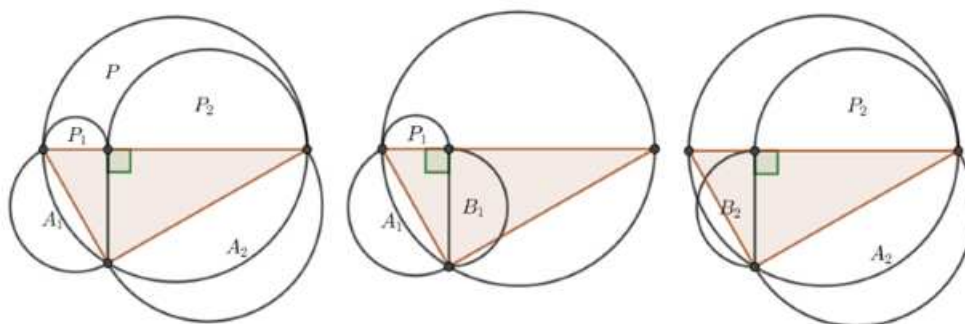
Slika 1.12: Krznarski nož

Ovo je primjer jednog od najpoznatijih klasičnih geometrijskih zadataka, a poznat je pod nazivom *krznarski nož*. Zadatak zahtijeva dokaz da je površina noža jednaka površini kruga, pri čemu je nož naziv za lik kojeg određuju tri polukruga čiji su centri kolinearni i koji se dodiruju kao na Slici 1.12. Prema tome, uz oznake sa slike, treba dokazati da vrijedi

$$P = Q. \quad (1.19)$$

Slijedi rješenje zadatka koje je dao američki matematičar Roger Nelsen. Nelsen je objavio čitav niz dokaza bez riječi od kojih su, osim ovog, još neki prikazani u ovome radu.

Slikovni dokaz (Slika 1.13) ovog problema sastoji se od triju slika.



Slika 1.13: Jednakost površina  $P$  i  $Q$

Kako je zbroj površina polukrugova konstruiranih nad katetama pravokutnog trokuta jednak površini polukruga konstruiranog nad hipotenuzom, slijedi da je

$$P + P_1 + P_2 = A_1 + A_2, \quad (1.20)$$

što je prikazano na prvoj slici,

$$A_1 = P_1 + B_1, \quad (1.21)$$

što je prikazano na drugoj slici, i

$$A_2 = P_2 + B_2, \quad (1.22)$$

što je prikazano na trećoj slici.

Iz posljednjih dviju jednakosti iskazane površine  $A_1$  i  $A_2$  uvrstimo u prvu jednakost i dobijemo

$$P + P_1 + P_2 = P_1 + B_1 + P_2 + B_2, \quad (1.23)$$

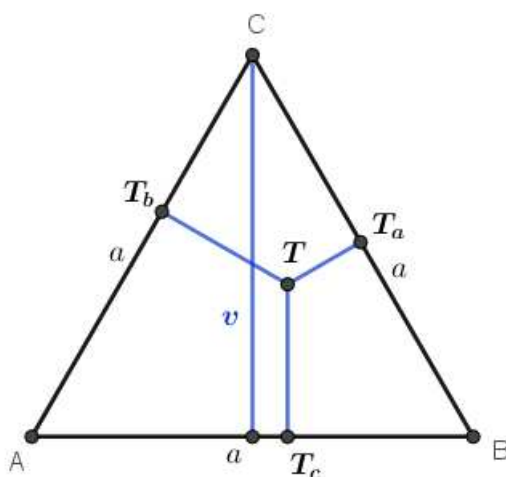
odakle je

$$P = B_1 + B_2 = Q. \quad (1.24)$$

### 1.3 Vivanijev teorem

Vivanijev teorem jedan je od novijih otkrića. Otkriven je tek prije nešto više od 300 godina, a otkrio ga je Firenčanin Vincenzo Viviani, učenik, tajnik i pomoćnik Galilea. Osim što je pomogao Galileu u nastanku njegove knjige *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica*, Viviani je objavio mnogo svojih knjiga o matematičkim i znanstvenim temama te je uređivao prvo izdanje Galileovih prikupljenih djela.

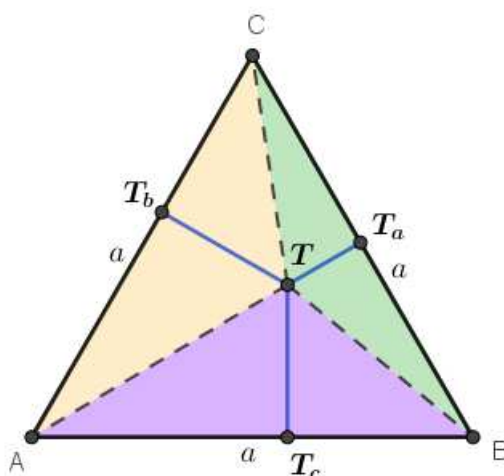
Vivanijev teorem glasi: *Neka je dan jednakostraničan trokut ABC. Tada je za bilo koju točku T trokuta ABC zbroj udaljenosti točke T od stranica trokuta ABC jednak visini tog trokuta.*



Slika 1.14: Vivanijev teorem

U literaturi postoji velik broj dokaza ove tvrdnje, od algebarskih, geometrijskih dokaza, dokaza pomoću vektora i vizualnih dokaza. U nastavku ćemo navesti najprije algebarski dokaz koji uključuje vizualizaciju za bolje razumijevanje, a zatim nekoliko dokaza gdje nisu potrebne riječi.

Algebarski dokaz:



Slika 1.15: Algebarski dokaz Vivanijevog teorema

Neka su  $T_a$ ,  $T_b$  i  $T_c$  nožišta iz točke  $T$  na stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$ , a  $v$  visina trokuta  $ABC$ . Prikažimo površinu trokuta  $ABC$  pomoću zbroja površina tri trokuta

$$P(ABC) = P(TBC) + P(TCA) + P(TAB), \quad (1.25)$$

$$\frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot |TT_a|}{2} + \frac{a \cdot |TT_b|}{2} + \frac{a \cdot |TT_c|}{2}. \quad (1.26)$$

Iz toga slijedi jednakost

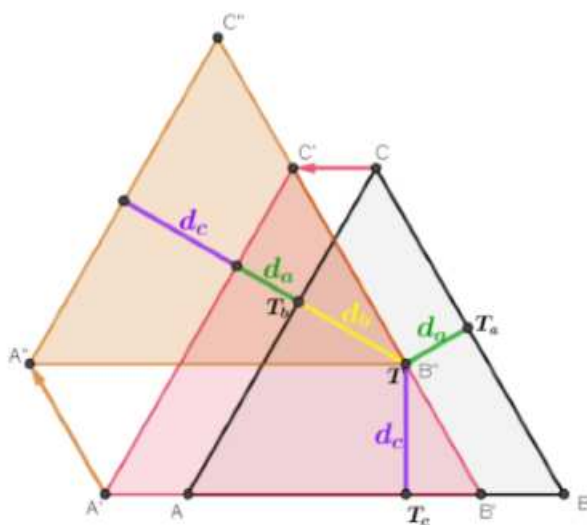
$$|TT_a| + |TT_b| + |TT_c| = v. \quad (1.27)$$

Slijede dokazi bez riječi.

### 1. način:

Neka su  $T_a$ ,  $T_b$  i  $T_c$  nožišta iz točke  $T$  na stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  te neka su  $d_a = |TT_a|$ ,  $d_b = |TT_b|$  i  $d_c = |TT_c|$  udaljenosti točke  $T$  od stranica trokuta.

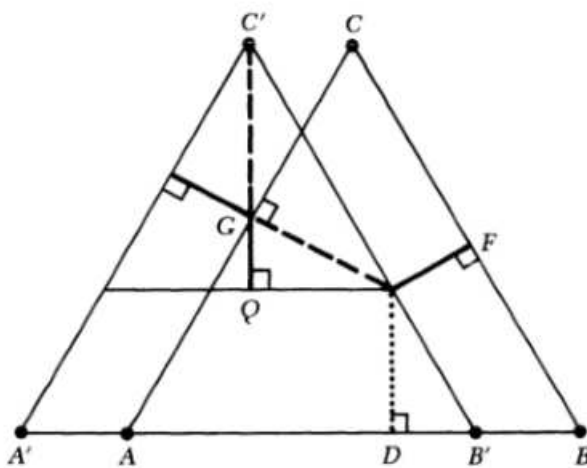
Translatiramo li trokut  $ABC$  dva puta kao što je prikazano na Slici 1.16 tako da se dužine  $d_a$ ,  $d_b$  i  $d_c$  nastavljaju, vidimo da one zajedno određuju visinu jednakostraničnog trokuta.



Slika 1.16: Dokaz Vivanijevog teorema pomoću translacije

**2. način:**

Ovaj dokaz dao je Samuel Wolf.



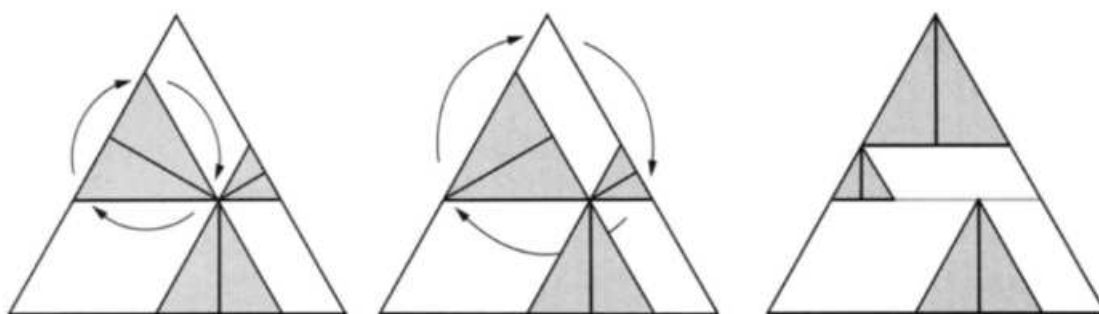
Slika 1.17: Dokaz Vivanijevog teorema

Zbog prirode dokaza bez riječi, ne možemo znati kako je Wolf očekivao da će čitatelj

doći do Vivianijevog rezultata, ali upotreba podebljanih, isprekidanih i točkastih linija sugerira put. U pokušaju da se tri okomice zbroje do visine trokuta, vidimo da je točkasta linija već na dobrom mjestu. Ostaje nam da se uvjerimo da je podebljana okomica u točki  $F$  sukladna podebljanoj dužini  $\overline{QG}$  i da je isprekidana okomica u točki  $G$  sukladna isprekidanoj dužini  $\overline{GC'}$ . Tri dužine su sada naslagane paralelno s visinom trokuta  $ABC'$ , koja se podudara s visinom trokuta  $ABC$ , čime je dokaz gotov.

### 3. način:

Sljedeći elegantan dokaz Vivanijevog teorema dao je Ken-ichiroh Kawasaki. U njemu se vidi početna točka u dokazu i nekoliko transformacija što slijede nakon.



Slika 1.18: Dokaz Vivanijevog teorema pomoću rotacije

Uočimo najprije da su u trokut konstruirana tri manja trokuta kojima su visine upravo okomice iz zadane točke unutar trokuta na njegove stranice. Nadalje, Kawasaki koristi rotacije trokuta kako bi došao do zadnje situacije u kojoj su sve visine trokuta poslagane paralelno što znači da u zbroju daju visinu izvornog jednakostraničnog trokuta.



## Poglavlje 2

# Algebarski identiteti

Tijekom školovanja susrećemo se s mnogim algebarskim identitetima kao što su kvadrat binoma, trinoma ili razlike, kub zbroja, razlika kvadrata ili kubova i sličnima. U ovom dijelu teksta bit će prikazani neki manje poznati identiteti koji generalizacijom proizlaze iz općih svojstava brojeva, a imaju vrlo intuitivne vizualne dokaze.

### 2.1 Rastav zbroja dvaju kvadrata

Za zbroj dvaju kvadrata pozitivnih brojeva  $x$  i  $y$  vrijedi:

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y). \quad (2.1)$$

Dokažimo identitet algebarski primjenom kvadrata binoma. Kako je

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (2.2)$$

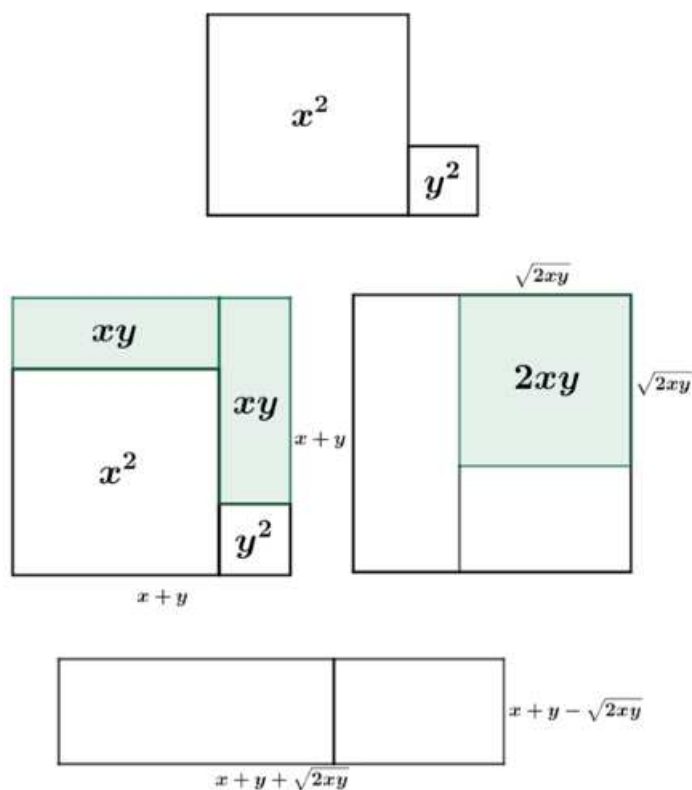
slijedi da je

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy. \quad (2.3)$$

Faktorizacijom razlike kvadrata s desne strane dobivamo

$$x^2 + y^2 = (x + y + \sqrt{2xy})(x + y - \sqrt{2xy}). \quad (2.4)$$

Na Slici 2.1 prikazan je dokaz bez riječi po koracima u četiri slike.



Slika 2.1: Rastav zbroja dvaju kvadrata

Izraz  $x^2 + y^2$  se može predstaviti kao zbroj površina dvaju kvadrata sa stranicama duljine  $x$ , odnosno duljine  $y$ . Kvadrata položimo jedan uz drugoga. Tako dobiveni lik nadopunimo pomoću dva pravokutnika sa stranicama duljina  $x$  i  $y$  do kvadrata sa stranicom duljine  $x + y$ . Unutar dobivenog kvadrata stranice  $x + y$ , pravokutnici površine  $xy + xy$  zamijene se kvadratom površine  $2xy$ . Očito je duljina stranice dobivenog kvadrata jednaka  $\sqrt{2xy}$ . Preostali dio kvadrata, onaj s površinom  $x^2 + y^2$ , presložimo u pravokutnik sa stranicama duljina  $x + y + \sqrt{2xy}$  i  $x + y - \sqrt{2xy}$ . Površina novonastalog pravokutnika jednaka je  $(x + y + \sqrt{2xy})(x + y - \sqrt{2xy})$ . Prema tome, vrijedi

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y). \quad (2.5)$$

## 2.2 Produkt četiri (pozitivna) broja u aritmetičkoj progresiji

Aritmetička progresija ili aritmetički niz je niz brojeva takvih da je razlika  $d$  između bilo koja dva susjedna člana niza konstantna.

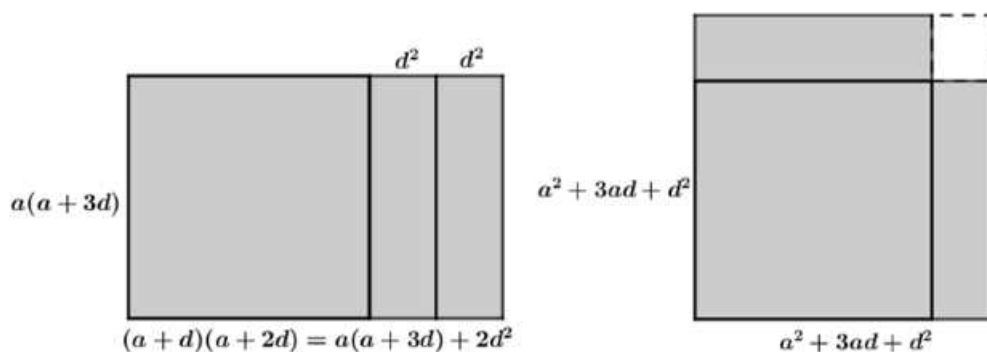
Za brojeve  $a$ ,  $a + d$ ,  $a + 2d$  i  $a + 3d$  vrijedi:

$$a(a + d)(a + 2d)(a + 3d) = (a^2 + 3ad + d^2)^2 - (d^2)^2. \quad (2.6)$$

Sređivanjem izraza s lijeve strane jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} a(a + d)(a + 2d)(a + 3d) &= (a^2 + 3ad)(a^2 + 3ad + 2d^2) \\ &= (a^2 + 3ad)^2 + (a^2 + 3ad) \cdot 2d^2 \\ &= (a^2 + 3ad)^2 + (a^2 + 3ad) \cdot 2d^2 + d^4 - d^4 \\ &= (a^2 + 3ad + d^2)^2 - (d^2)^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Taj identitet također ima svoj vizualni prikaz koji nam može olakšati njegovo razumijevanje.



Slika 2.2: Produkt četiri (pozitivna) broja u aritmetičkoj progresiji

Pravokutnik sa stranicama duljina  $a(a + 3d)$  i  $(a + d)(a + 2d)$  podijelimo na tri dijela: kvadrat sa stranicom duljine  $a(a + 3d)$  i dva sukladna pravokutnika čije su stranice duljine  $a(a + 3d)$  i  $d^2$ . Površina tog pravokutnika jednaka je umnošku duljina njegovih stranica, tj.  $a(a + d)(a + 2d)(a + 3d)$ .

Premijestimo sada dva pravokutnika uz stranice manjeg kvadrata kao što je prikazano na Slici 2.2, te nadopunimo lik do kvadrata sa stranicom duljine  $a(a+3d)+d^2 = a^2+3ad+d^2$ . Vidimo da se ista površina može zapisati kao razlika manjeg kvadrata i većeg.

Izjednačavanjem dviju dobivenih površina, dobivamo identitet:

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d) = (a^2+3ad+d^2)^2 - (d^2)^2. \quad (2.8)$$

### 2.3 Zbroj dva specifična kvadrata

U ovom dijelu prikazat ćemo još jedan identitet koji se geometrijski interpretira pomoću površina.

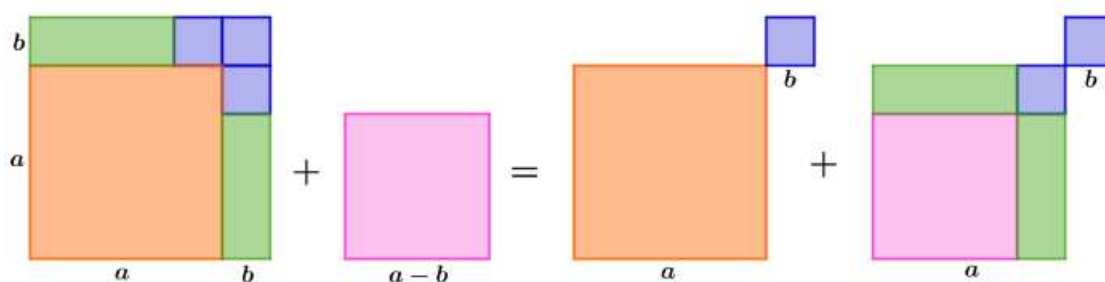
Za brojeve  $a$  i  $b$  takve da je  $a > b > 0$  vrijedi

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2). \quad (2.9)$$

Kvadriranjem dobijemo

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Jednakost možemo pokazati i vizualno.



Slika 2.3: Zbroj dva kvadrata

Neka je  $a > b > 0$ . Izraz  $(a+b)^2 + (a-b)^2$  možemo prikazati kao zbroj površina dvaju kvadrata sa stranicama duljina  $a+b$  i  $a-b$ . Kvadrat čija je stranica duljine  $a+b$

podijelimo na šest likova: kvadrat sa stranicom duljine  $a$ , tri kvadrata sa stranicama duljine  $b$  i dva pravokutnika sa stranicama duljina  $b$  i  $a - b$ . Razmještanjem tih likova i kvadrata sa stranicom duljine  $a - b$ , dobijemo četiri kvadrata: dva kvadrata sa stranicom duljine  $a$  i dva kvadrata sa stranicom duljine  $b$ . Površina tih četiriju kvadrata jednaka je  $2a^2 + 2b^2$ . Opisana jednakost prikazana je na Slici 2.3.

## Poglavlje 3

# Trigonometrijski identiteti

Omjere stranica pravokutnog trokuta sinus, kosinus, tangens i kotangens možemo interpretirati kao duljine dužina. Na taj se način neki trigonometrijski identiteti mogu vizualno prikazati pomoću površina likova omeđenih tim dužinama. U nastavku slijedi nekoliko primjera.

### 3.1 Sinus zbroja

Adicijska formula za sinus, odnosno sinus zbroja kutova, je formula

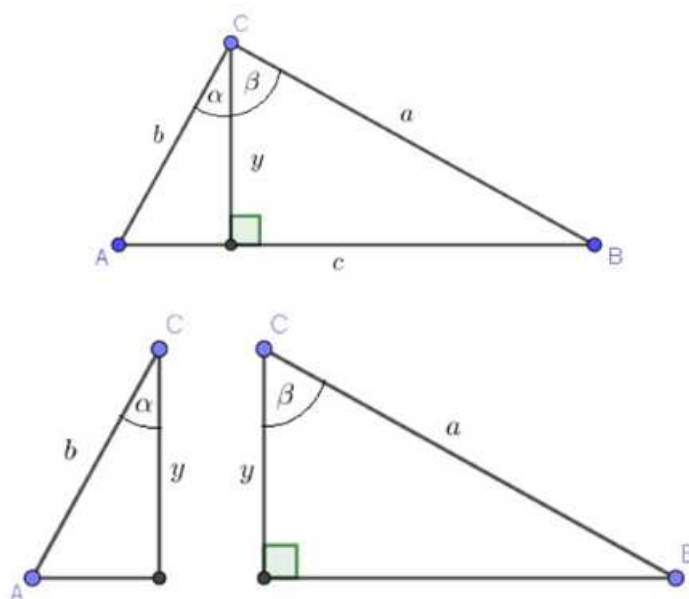
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha. \quad (3.1)$$

Postoje brojni dokazi bez riječi ove jednakosti, a mi ćemo pokazati dva.

#### 1. način:

Na Slici 3.1 vidimo trokut  $ABC$  kojem je iz jednog vrha nacrtana visina  $y$ . Visina  $y$  dijeli trokut na dva pravokutna trokuta i kut  $\angle ACB$  na kutove  $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Prema tome, površinu trokuta  $ABC$  možemo odrediti na dva načina: formulom za određivanje površine trokuta pomoću dviju njegovih stranica i sinusa kuta među njima i kao zbroj površina dvaju trokuta na koje je trokut  $ABC$  podijeljen. Površinu tih dvaju trokuta dobijemo primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta. Stoga vrijedi

$$P(ABC) = \frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) \quad (3.2)$$



Slika 3.1: Dokaz sinusa zbroja

$$P(ABC) = \frac{1}{2}ya \sin \beta + \frac{1}{2}yb \sin \alpha = \frac{1}{2}ab \cos \alpha \sin \beta + \frac{1}{2}ab \cos \beta \sin \alpha, \quad (3.3)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}ab \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{2}ab \cos \beta \sin \alpha + \frac{1}{2}ab \cos \alpha \sin \beta, \quad (3.4)$$

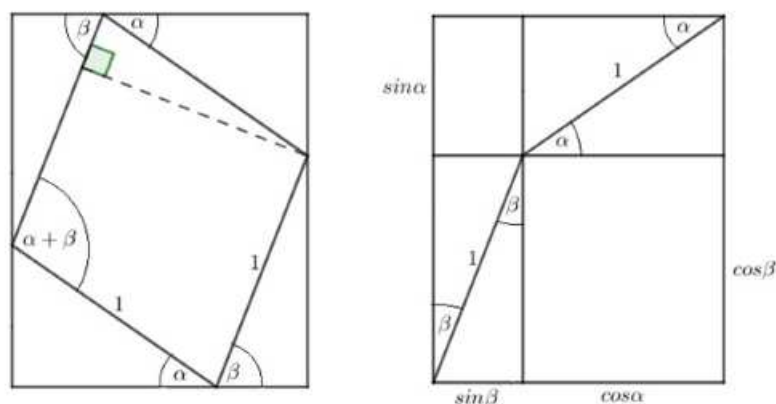
te konačno

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \quad (3.5)$$

Vidimo da smo u ovom dokazu limitirani samo na  $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ , a slično je i u ostalim primjerima.

## 2. način:

Na Slici 3.2 su prikazana dva sukladna pravokutnika. Pravokutnik s lijeve strane je podijeljen na pet dijelova: romb čija je duljina stranice jednaka 1 i četiri pravokutna tro-



Slika 3.2: Još jedan dokaz sinusa zbroja

kuta čije su hipotenuze ujedno stranice romba. Međusobno nasuprotni trokuti imaju sve sukladne kutove: jedan par ima kutove veličina  $90^\circ$ ,  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$ , a drugi  $90^\circ$ ,  $\beta$  i  $90^\circ - \beta$ . Zaključujemo da su trokuti u parovima sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta  $K-S-K$ .

Pravokutnik s desne strane je podijeljen na šest dijelova: dva pravokutnika različitih veličina i četiri pravokutna trokuta. Po dva trokuta imaju zajedničku hipotenuzu duljine 1 i sve kutove sukladne: jedan par ima kutove veličina  $90^\circ$ ,  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$ , a drugi  $90^\circ$ ,  $\beta$  i  $90^\circ - \beta$ . Zaključujemo da su trokuti u parovima sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta  $K-S-K$ .

Uočimo da trokuti obaju pravokutnika spadaju u jednu od dviju opisanih skupina, tj. da su trokuti iz iste skupine prema poučku o sukladnosti trokuta  $K-S-K$  međusobno sukladni.

Kako su površine obaju pravokutnika jednake, a zbroj površina četiriju trokuta s lijevog pravokutnika jednak je zbroju površina četiriju trokuta s desnog pravokutnika, slijedi da površina romba na lijevoj slici treba biti jednaka zbroju površina dvaju pravokutnika na desnoj slici. Površina romba jednaka je  $\sin(\alpha + \beta)$ , a površina pravokutnika jednaka je umnošku stranica koje odredimo primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta.

Konačno dobijemo

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \quad (3.6)$$



## 3.2 Poučak o sinusima

Neke od veza osnovnih elemenata trokuta iskazane su poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu. Radi se o vezi kutova i stranica trokuta. Njihova povezanost omogućuje nam da iz zadanih podataka odredimo nepoznate elemente.

Poučak o sinusima glasi: *Omjer duljina stranica trokuta jednak je omjeru sinusa tim stranicama nasuprotnih kutova, odnosno*

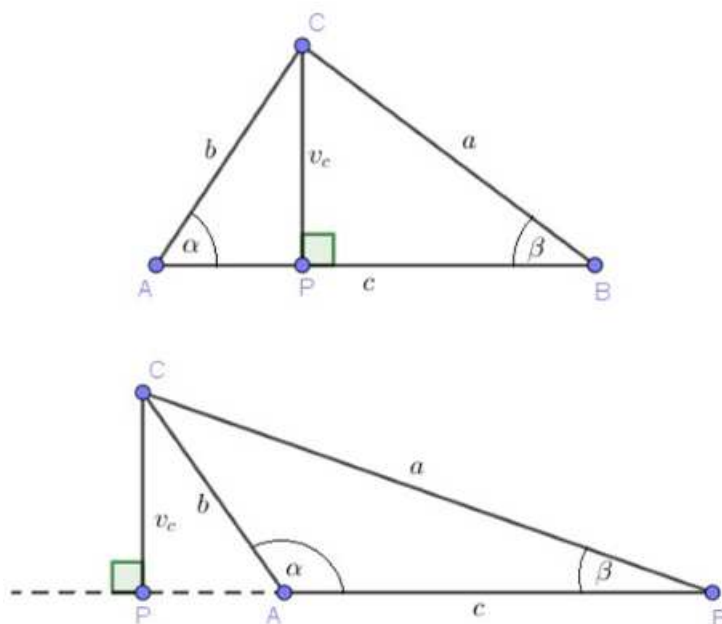
$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \quad (3.7)$$

U nastavku ćemo dokazati ekvivalentnu jednakost:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta. \quad (3.8)$$

### 1. način:

Neka je dan trokut  $ABC$ .



Slika 3.3: Poučak o sinusima

Trokut i visina na jednu njegovu stranicu određuju dva pravokutna trokuta kao na Slici 3.3. Za svaki od dobivenih trokuta izrazimo visinu  $v$  koristeći definiciju sinusa kuta, odnosno da je sinus kuta omjer duljine njemu nasuprotne stranice i duljine hipotenuze. Ako je kut šiljasti, onda iz trokuta  $APC$  slijedi

$$\sin \alpha = \frac{v}{b} \Rightarrow v = b \sin \alpha, \quad (3.9)$$

a ako je tup, onda je

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{v}{b} \Rightarrow v = b \sin \alpha. \quad (3.10)$$

Iz trigonometrije trokuta  $BPC$  slijedi

$$\sin \beta = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \sin \beta. \quad (3.11)$$

Izjednačavanjem rezultata dobivamo zapis poučka o sinusima:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta. \quad (3.12)$$

Uz ovaj dokaz poučka, pokazat ćemo još jedan.

## 2. način:

Promotrimo Sliku 3.4. Osnovica trokuta produžena je za jediničnu dužinu s obje strane. Nad produljenjima su konstruirani paralelogrami čija je druga stranica upravo stranica trokuta. Označimo njihove površine s  $P_1$  i  $P_2$ . Površine  $P_1$  i  $P_2$  su jednake zato što dva paralelograma kojima su duljine dviju stranica jednake i kojima su jednake visine na te stranice imaju jednake površine. Kako se radi o kutovima uz presječnicu para paralelnih pravaca, uočimo da su kutovi dvaju paralelograma jednaki  $\alpha$  i  $\beta$ . Prema tome, površinu tih paralelograma možemo izraziti pomoću duljina njegovih stranica i sinusa kuta među njima. Imamo da je površina paralelograma sa stranicama duljina  $b$  i 1 te kutom  $\alpha$  među njima jednaka

$$P_1 = b \sin \alpha, \quad (3.13)$$

a površina paralelograma sa stranicama duljina  $a$  i 1 te kutom  $\beta$  među njima jednaka

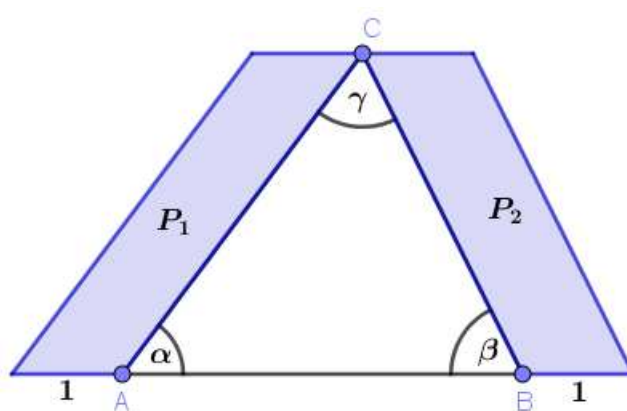
$$P_1 = a \sin \beta. \quad (3.14)$$

Sada iz jednakosti

$$P_1 = P_2 \quad (3.15)$$

slijedi

$$b \sin \alpha = a \sin \beta. \quad (3.16)$$



Slika 3.4: Još jedan prikaz poučka o sinusima

### 3.3 Poučak o kosinusu

Poučak o kosinusu glasi: *Ako su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica trokuta, kut  $\gamma$  kut nasuprot stranici  $c$ , kut  $\alpha$  kut nasuprot stranici  $a$  i kut  $\beta$  kut nasuprot stranici  $b$ , onda vrijede jednakosti*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad (3.17)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad (3.18)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta. \quad (3.19)$$

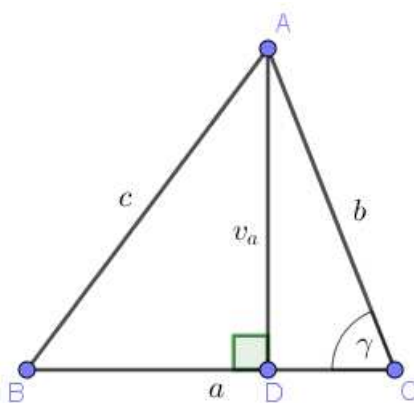
Dokazat ćemo samo prvi identitet, a ostala dva se dokazuju potpuno analogno.

Opisat ćemo četiri dokaza ovog poučka. Kao i poučak o sinusima, poučak o kosinusu također je uvijek popraćen slikama.

### 1. način:

Neka je  $ABC$  bilo kakav trokut. Kao i pri izvodu poučka o sinusima, razmotrit ćemo sljedeće dvije situacije:

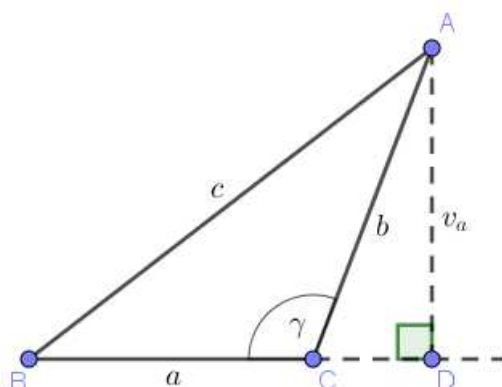
1. kut  $\gamma$  je šiljast,
2. kut  $\gamma$  je tup.



Slika 3.5: Šiljastokutan trokut

1. Sa Slike 3.5 čitamo

$$\begin{aligned}
 c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\
 &= (a - |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\
 &= a^2 - 2a \cdot |CD| + |CD|^2 + b^2 - |CD|^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot |CD| \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$



Slika 3.6: Tupokutan trokut

2. Sa Slike 3.6 čitamo

$$\begin{aligned}
 c^2 &= |BD|^2 + |AD|^2 \\
 &= (a + |CD|)^2 + b^2 - |CD|^2 \\
 &= a^2 + 2a \cdot |CD| + |CD|^2 + b^2 - |CD|^2 \\
 &= a^2 + b^2 + 2a \cdot |CD| \\
 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \gamma) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

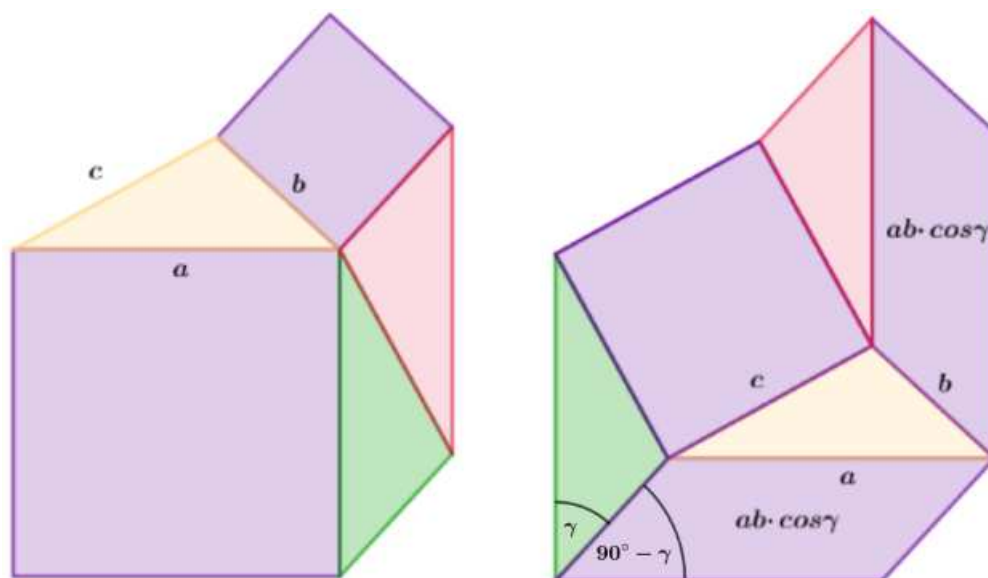
## 2. način:

Slika 3.7 prikazuje dva sukladna mnogokuta sastavljena od više dijelova, svaki na drugačiji način. Uočimo da svaki od njih sadrži tri trokuta. Svi trokuti imaju stranice duljina  $a$ ,  $b$  i  $c$  pa su sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta  $S$ - $S$ - $S$  koji kaže da su dva trokuta sukladna ako su im sukladne sve tri odgovarajuće stranice. Prema tome, mak-nemo li trokute, preostale površine dvaju mnogokuta su jednake. Konkretno, vrijedi da je zbroj površina kvadrata nad stranicama  $a$  i  $b$  prvog mnogokuta jednak zbroju površina kvadrata nad stranicom  $c$  i dvaju paralelograma nad stranicama  $a$  i  $b$  drugog mnogokuta.

Zapisano simbolima:

$$a^2 + b^2 = c^2 + ab \cos \gamma + ab \cos \gamma, \tag{3.22}$$

odnosno dobivamo poučak o kosinusu:



Slika 3.7: Poučak o kosinusu pomoću sukladnih mnogokuta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (3.23)$$

**3. način:**

Vrijedi

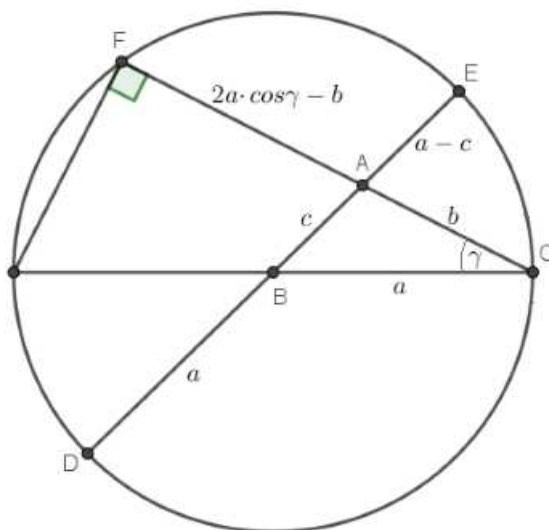
$$|AD| \cdot |AE| = |AC| \cdot |AF|. \quad (3.24)$$

Uz oznake kao na Slici 3.8, dobivamo

$$(a + c) \cdot (a - c) = b(2a \cos \gamma - b), \quad (3.25)$$

odakle slijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (3.26)$$



Slika 3.8: Dokaz poučka o kosinusu pomoću kružnice

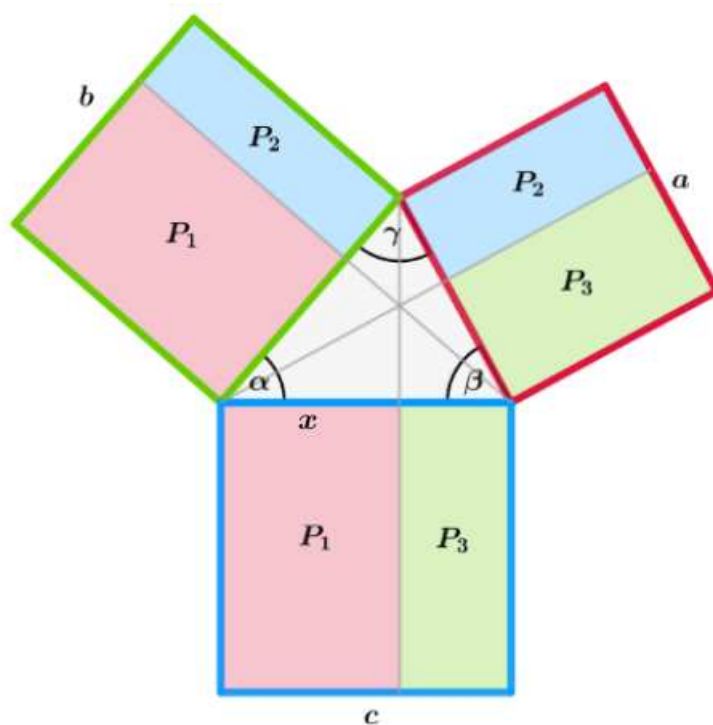
**4. način:**

Ovaj zanimljivi dokaz u bojama i simbolima je djelo američkog matematičara Dona McConnella objavljen na mrežnom portalu *Cut-the-knot* [4].

Možemo uočiti da je dokaz vrlo sličan dokazu Pitagorinog poučka, što nije neobično budući da je Pitagorin poučak specijalan slučaj poučka o kosinusu.

Neka je nasuprot kuta  $\alpha$  stranica  $a$ , nasuprot kuta  $\beta$  stranica  $b$  i nasuprot kuta  $\gamma$  stranica  $c$ . Nad sve tri stranice trokuta konstruirani su kvadrati. Nadalje, ucrtane su dužine koje sadrže visine trokuta od vrhova trokuta do nasuprotnih stranica kvadrata nad tim vrhovima nasuprotnim stranicama.

Te dužine dijele kvadrate na po dva pravokutnika. Promotrimo pravokutnik kojemu je površina na Slici 3.9 označena s  $P_1$ . Jedna stranica tog pravokutnika je ujedno i stranica kvadrata, odnosno stranica  $c$ . Duljinu  $x$  druge stranice pravokutnika dobivamo primjenom definicije kosinusa kuta kao omjera duljina priležeće katete i hipotenuze pravokutnog trokuta:



$$P = P_1 + P_3 = (P_2 - P_4) + (P_3 - P_4) = P_2 + P_3 - 2P_4$$

Slika 3.9: Prikaz poučka o kosinusu

$$\cos \alpha = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cos \alpha. \quad (3.27)$$

Dakle, vrijedi

$$P_1 = bc \cos \alpha. \quad (3.28)$$

Analogno je

$$P_2 = ab \cos \gamma \quad (3.29)$$

i



$$P_3 = ac \cos \beta. \quad (3.30)$$

Sada je

$$P_1 + P_3 = (b^2 - P_2) + (a^2 - P_2). \quad (3.31)$$

Kako je

$$P_1 + P_3 = c^2, \quad (3.32)$$

onda je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2P_2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (3.33)$$

# Poglavlje 4

## Sume

U ovom poglavlju bavit ćemo se tvrdnjama o prirodnim brojevima koje su jasne kad se izraze algebarski, no vidjet ćemo da dubljem razumijevanju pridonosi prikazivanje tih brojeva kao skupova objekata. Objekti koje obično koristimo za geometrijsko prikazivanje prirodnih brojeva su točke, kvadrati, kugle, kocke i slični jednostavni oblici. Mi ćemo koristiti kvadratiće.

### 4.1 Suma prvih $n$ prirodnih brojeva

*Za sumu prvih  $n$  uzastopnih prirodnih brojeva vrijedi:*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.1)$$

U nastavku ćemo pokazati geometrijsku predodžbu poznatog postupka kojim je, kao dječak, poznati matematičar Karl Fridrich Gauss izračunao zbroj prvih 100 prirodnih brojeva. On je brojeve združivao u parove: prvi s posljednjim, drugi s preposljednjim i tako dalje redom. Takvih je parova 50:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (49 + 52) + (50 + 51). \quad (4.2)$$

Kako je zbroj članova svakog takvog para 101, konačan rezultat jednak je  $50 \cdot 101 = 5050$ .

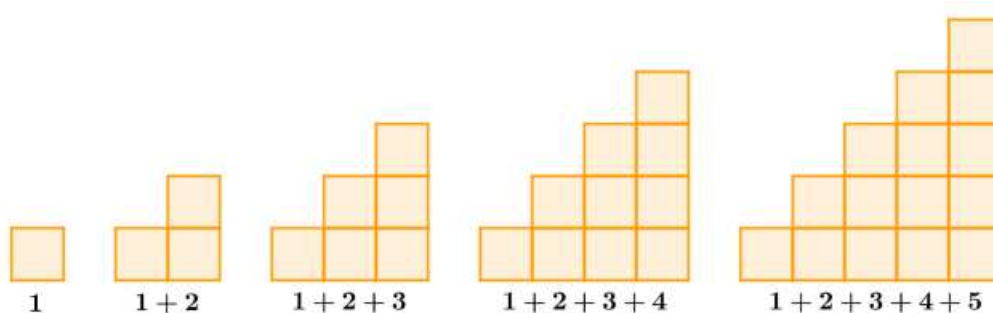
Zbrojimo sada na isti način prvih  $n$  prirodnih brojeva, gdje je  $n$  paran prirodan broj. Grupiramo dva po dva broja na već opisani način te ih u parovima zbrojimo. Uočimo da ima ukupno  $\frac{n}{2}$  parova:

$$(1 + n) + (2 + (n - 1)) + (3 + (n - 2)) + \dots + \left(\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2} + 2\right)\right) + \left(\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right). \quad (4.3)$$

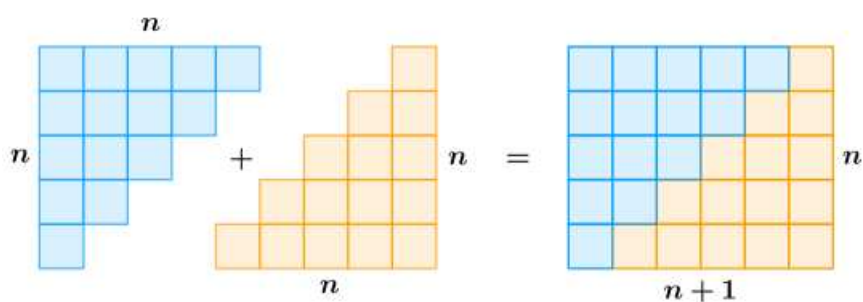
Zbroj članova svaka dva para jednak je  $n + 1$ . Prema tome, vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}. \quad (4.4)$$

Prikažimo sada isti taj dokaz geometrijski pomoću kvadratića.



Slika 4.1: Suma prvih nekoliko prirodnih brojeva



Slika 4.2: Suma prvih nekoliko prirodnih brojeva

Neka jedan kvadratić predstavlja broj 1, dva kvadratića broj 2, tri kvadratića broj 3 i tako dalje. Organizacija ovih kvadratića kao što je prikazano na Slici 4.1 rezultira formiranjem jednakokračnog pravokutnog trokuta s nazubljenom hipotenuzom. U  $n$ -tom takvom trokutu bit će ukupno  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  kvadratića. Uzmemo još jedan ovome sukladan lik

i položimo ih tako da zajedno određuju pravokutnik. Taj pravokutnik se sastoji od  $n(n+1)$  kvadratića što je dvostruko više od tražene sume. Dakle, vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Suma umnožaka dvaju uzastopnih prirodnih brojeva

Za sumu umnožaka dvaju uzastopnih prirodnih brojeva vrijedi

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}. \quad (4.6)$$

Ova jednakost se obično dokazuje matematičkom indukcijom, ali može se pokazati i koristeći dva poznata identiteta:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad (4.7)$$

i

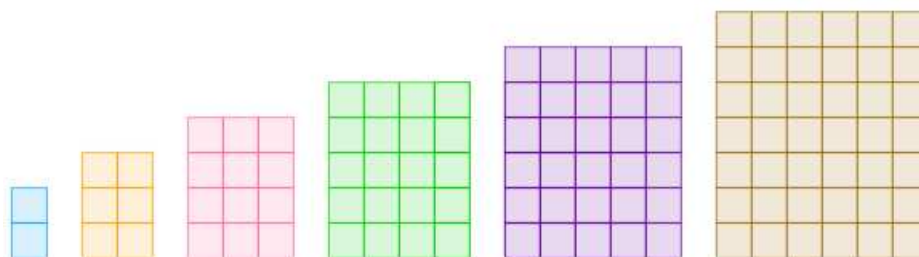
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}. \quad (4.8)$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

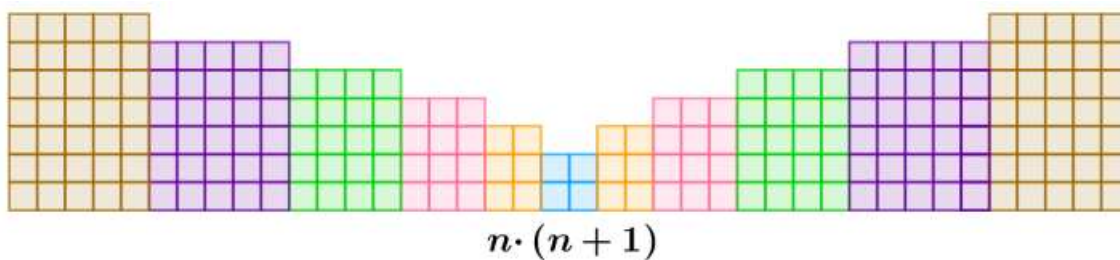
Izraz  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)$  je prikazan pomoću kvadratića na Slici 4.3.

Kao i u prvom primjeru, jedan kvadratić predstavlja broj 1, dva kvadratića predstavljaju broj  $2 = 1 \cdot 2$ , šest kvadratića broj  $6 = 2 \cdot 3$  itd. Složimo dobivene pravokutnike jedan do

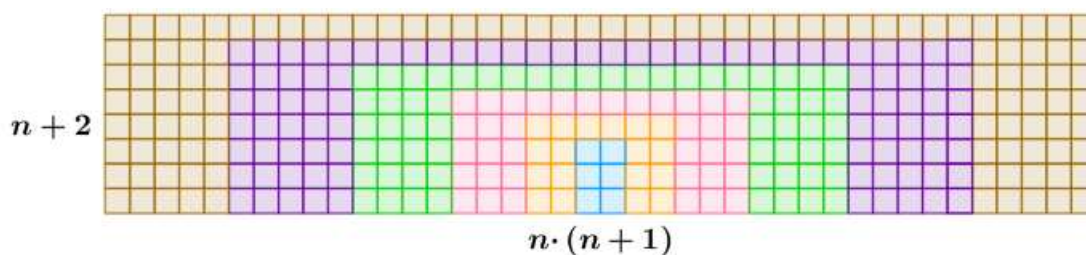


Slika 4.3: Suma  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)$

drugog i to dva puta kao što je pokazano na Slici 4.4.



Slika 4.4: Suma  $2 \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)]$



Slika 4.5: Dokaz jednakosti  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}$

Kako bi lik sa Slike 4.4 dopunili do pravokutnika, potrebno je i po treći puta dodati kvadratiće sa Slike 4.3. Slika 4.5 prikazuje dobiveni pravokutnik. Uočimo da broj kvadratića od kojih je sastavljen pravokutnik možemo prebrojati na dva načina pa vrijedi

$$3 \cdot [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)] = n(n + 1)(n + 2), \quad (4.10)$$

odnosno

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}. \quad (4.11)$$

### 4.3 Suma umnožaka $n$ -te faktorijele i prirodnog broja $n$

*Pokažat ćemo da vrijedi*

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1, \quad (4.12)$$

gdje je  $n!$  oznaka za umnožak prvih  $n$  prirodnih brojeva koji nazivamo  $n$  faktorijela.

Pokažimo to.

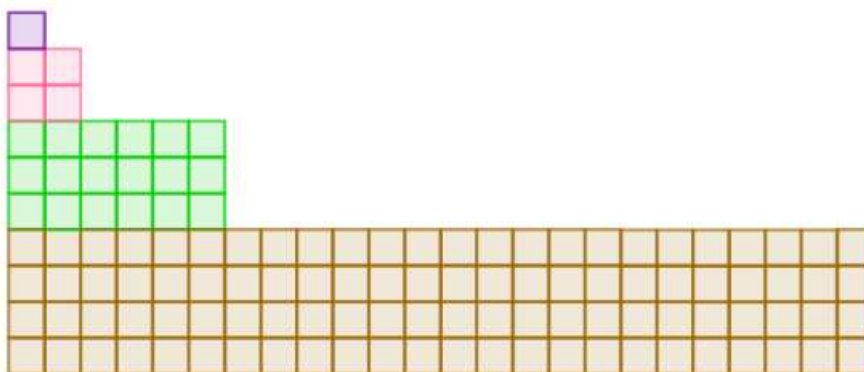
Izraz  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$  možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} & (2 - 1) \cdot 1! + (3 - 1) \cdot 2! + \cdots + (n + 1 - 1) \cdot n! \\ &= [2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + \cdots + (n + 1) \cdot n!] - [1 \cdot 1! + 1 \cdot 2! + \cdots + 1 \cdot n!] \\ &= 2! + 3! + \cdots + (n + 1)! - 1! - 2! - \cdots - n! \\ &= (n + 1)! - 1! \\ &= (n + 1)! - 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

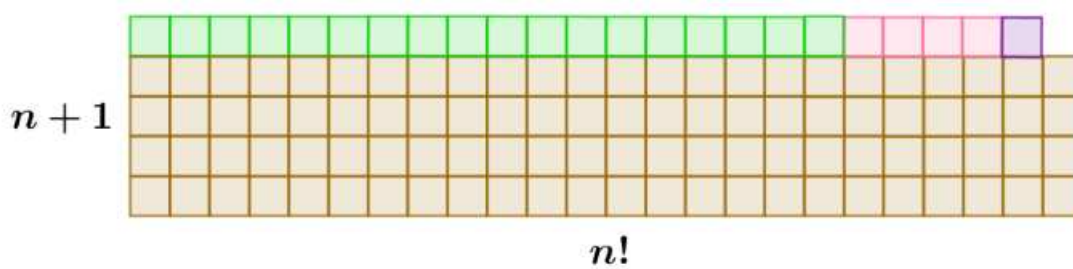
Na Slici 4.6 je isti izraz od prije, prikazan pomoću kvadratića. Jedan kvadratić predstavlja broj  $1 = 1 \cdot 1!$ , četiri kvadratića poslaganih u pravokutnik sa stranicama duljina 2 i  $2! = 2$  predstavljaju broj  $4 = 2 \cdot 2!$ , osamnaest kvadratića poslaganih u pravokutnik sa stranicama duljina 3 i  $3! = 6$  predstavljaju broj  $18 = 3 \cdot 3!$  itd. Posljednji pravokutnik bit će sastavljen od  $n \cdot n!$  kvadratića tako da je duljina jedne stranice pravokutnika jednaka  $n$ , a druge  $n!$ . Složimo dobivene pravokutnike jedan na drugi od većeg prema manjemu.

Premještanjem kvadratića možemo dobiti lik prikazan na Slici 4.7. Uočimo da nedostaje jedan kvadratić kako bi dobiveni lik bio pravokutnik površine  $(n + 1) \cdot n!$ , odnosno da je broj kvadratića jednak  $(n + 1) \cdot n! - 1 = (n + 1)! - 1$ . Dakle, isti broj kvadratića prebrojali smo na dva različita načina. Izjednačavanjem tih dvaju izraza dobivamo

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1. \quad (4.14)$$



Slika 4.6: Suma  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$



Slika 4.7: Dokaz jednakosti  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

# Poglavlje 5

## Nejednakosti

U ovom dijelu prikazani su dokazi bez riječi nekoliko poznatih algebarskih nejednakosti.

### 5.1 A-G nejednakost

Jedna od poznatijih nejednakosti je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih realnih brojeva.

Aritmetičko-geometrijska (AG) nejednakost za dva broja glasi:

*Za pozitivne (realne) brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (5.1)$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ .*

Algebarski dokaz je trivijalan:

Za bilo koja dva pozitivna broja  $a$  i  $b$  očito vrijedi nejednakost

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \quad (5.2)$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ . Kvadriranjem i daljnjim transformacijama ove nejednakosti dobivamo

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \quad (5.3)$$



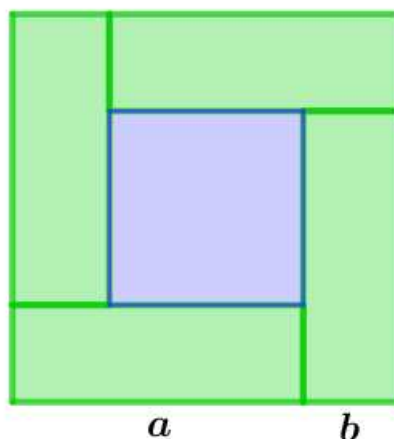
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad (5.4)$$

odnosno

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (5.5)$$

Pogledajmo sada geometrijske dokaze.

**1. način:**



Slika 5.1: Dokaz AG nejednakosti pomoću površina

Uočimo kvadrat sa stranicom duljine  $a + b$  koji je podijeljen na četiri pravokutnika sa stranicama duljina  $a$  i  $b$  te kvadrat sa stranicom duljine  $a - b$ . Površina kvadrata sa stranicom duljine  $a + b$  očito je veća ili jednaka zbroju površina četiriju pravokutnika, odnosno vrijedi

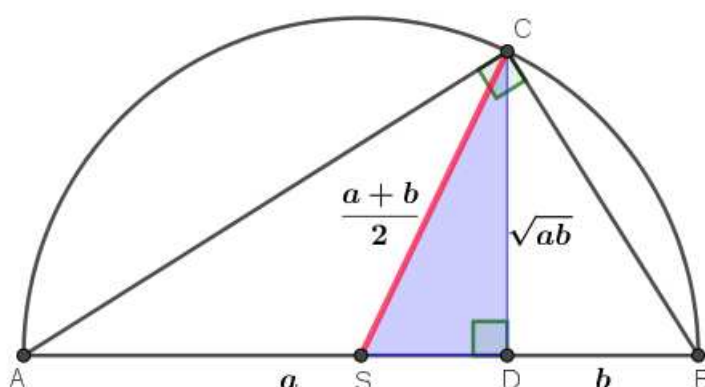
$$(a + b)^2 \geq 4ab. \quad (5.6)$$

Prema tome je

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (5.7)$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je površina velikog kvadrata jednaka površini četiriju pravokutnika, odnosno ako i samo ako kvadrat u sredini figure iščezava, a to se događa ako i samo ako je  $b - a = 0$ .

## 2. način:



Slika 5.2: Dokaz AG nejednakosti pomoću duljina dužina

Kako je prema Talesu obodni kut nad promjerom kružnice pravi, trokut  $ABC$  sa Slike 5.2 je pravokutan. Prisjetimo se Euklidovog poučka:

*Duljina visine iz vrha pravog kuta pravokutnog trokuta jednaka je geometrijskoj sredini odsječaka što ih visina određuje na hipotenuzi.*

Označimo li  $|AD| = a$ ,  $|BD| = b$ , onda je prema Euklidovom poučku  $|CD| = \sqrt{ab}$ .

S druge strane, polumjer kružnice opisane pravokutnom trokutu  $ABC$  jednak je polovini duljine hipotenuze, tj.

$$|CS| = \frac{a+b}{2}. \quad (5.8)$$

U pravokutnom trokutu  $SCD$  je dužina  $\overline{CS}$  hipotenuza, a dužina  $\overline{CD}$  kateta pa je zbog toga  $|CS| \geq |CD|$ , odnosno

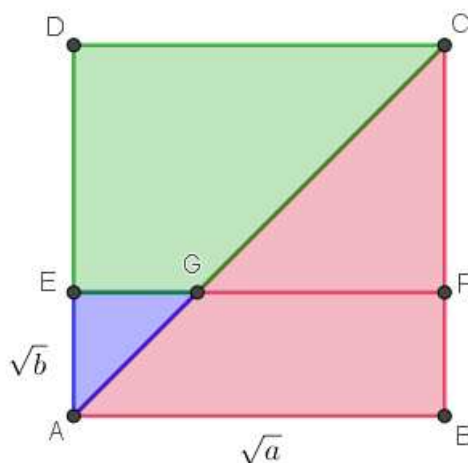
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (5.9)$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ , odnosno ako je trokut  $ABC$  jednakokračan.

### 3. način:

Kvadrat  $ABCD$  ima stranicu duljine  $\sqrt{a}$ , a pravokutnik  $ABFE$  ima stranice duljina  $\sqrt{a}$  i  $\sqrt{b}$ ,  $b \leq a$ . Sada imamo

$$\sqrt{ab} = P(ABFE) = P(AGE) + P(ABFG) \leq P(AGE) + P(ABC) = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}. \quad (5.10)$$



Slika 5.3: Još jedan dokaz AG nejednakosti pomoću površina

## 5.2 C-S-B nejednakost

Cauchy-Schwarz-Bunjakovski (CSB) nejednakost za dva vektora glasi:

*Neka su dani vektori  $x = (a, b)$  i  $y = (c, d)$ , gdje su  $a, b, c$  i  $d$  realni brojevi. Tada vrijedi*

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2. \quad (5.11)$$

Riješimo li se zagrada s lijeve i desne strane dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$(ad)^2 + (bc)^2 \geq 2abcd. \quad (5.12)$$

Nejednakost koju smo dobili upravo je AG nejednakost za dvije varijable.

CSB nejednakost također slijedi iz Fermatovog teorema o dva kvadrata. On kaže da je produkt sume dva kvadrata opet suma dva kvadrata, odnosno vrijedi

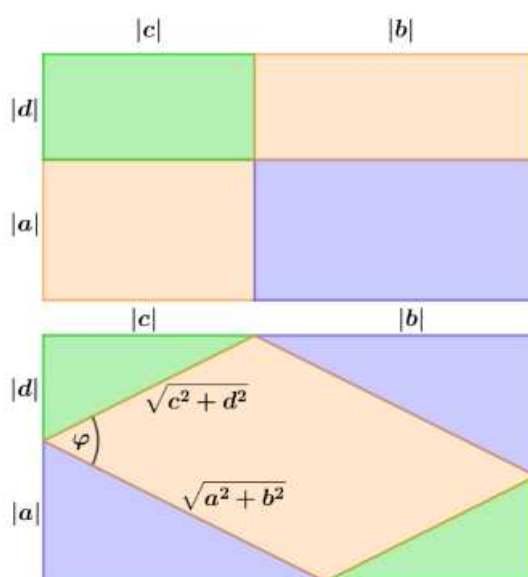
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \quad (5.13)$$

Imamo da je

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \geq (ac + bd)^2. \quad (5.14)$$

Pogledajmo sada dva elegantna vizualna dokaza CSB nejednakosti za dva vektora.

### 1. način:



Slika 5.4: Dokaz CSB nejednakosti

Pravokutnik sa stranicama duljina  $|a| + |d|$  i  $|b| + |c|$  može se podijeliti na likove na dva načina. Prvi način je podjela na četiri manja pravokutnika: pravokutnik sa stranicama duljina  $|a|$  i  $|b|$ , pravokutnik sa stranicama duljina  $|a|$  i  $|c|$ , pravokutnik sa stranicama duljina  $|b|$  i  $|d|$  i pravokutnik sa stranicama duljina  $|c|$  i  $|d|$ . Drugi način je podjela na četiri pravokutna trokuta i paralelogram: dva pravokutna trokuta s katetama duljina  $|a|$  i  $|b|$ , dva pravokutna trokuta s katetama duljina  $|c|$  i  $|d|$  i paralelogram sa stranicama duljina  $\sqrt{a^2 + b^2}$  i  $\sqrt{c^2 + d^2}$  i kuta među njima čiju veličinu ćemo označiti s  $\varphi > 0$ . Površina pravokutnika sa stranicama duljina  $|a|$  i  $|b|$  jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta s katetama  $|a|$  i  $|b|$ , a površina pravokutnika sa stranicama duljina  $|c|$  i  $|d|$  jednaka je zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta s katetama  $|c|$  i  $|d|$ . Prema tome, površina preostalih dvaju pravokutnika iz prve podjele jednaka je površini paralelograma iz druge podjele, odnosno

$$|a||c| + |b||d| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sin \varphi. \quad (5.15)$$

Kako je

$$\sin \varphi \leq 1 \quad (5.16)$$

i vrijedi nejednakost trokuta

$$|ac + bd| \leq |a||c| + |b||d|, \quad (5.17)$$

slijedi

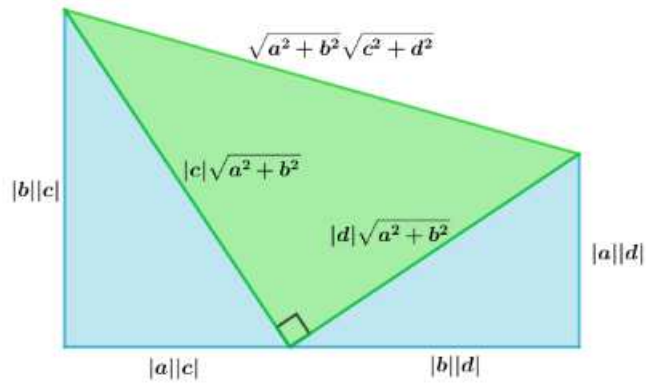
$$|ac + bd| \leq |a||c| + |b||d| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sin \varphi \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}. \quad (5.18)$$

Kvadriranjem dobijemo

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \quad (5.19)$$

## 2. način:

Dva pravokutna trokuta položena su jedan do drugog tako da njihove katete pripadaju istom pravcu kao na Slici 5.5. Trokut s lijeve strane ima katete duljina  $|a||c|$  i  $|b||c|$ , a trokut s desne strane ima katete duljina  $|a||d|$  i  $|b||d|$ . Uočimo da su trokuti slični prema poučku o sličnosti trokuta *S-K-S* koji kaže da ako se dva trokuta podudaraju u jednom kutu, a duljine



Slika 5.5: Još jedan dokaz CSB nejednakosti

odgovarajućih stranica uz taj kut su proporcionalne, onda su ti trokuti slični. Prema tome, pravci koji sadrže hipotenuze tih dvaju trokuta uz njihov zajednički vrh određuju pravi kut. Crtanjem dužine iz preostalih krajeva hipotenuza dvaju trokuta dobijemo pravokutni trokut kojemu su katete hipotenuze prethodno opisanih trokuta. Primjenom Pitagorinog poučka dobijemo duljine hipotenuza:

$$\sqrt{(|a||c|)^2 + (|b||c|)^2} = |c| \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5.20)$$

$$\sqrt{(|a||d|)^2 + (|b||d|)^2} = |d| \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.21)$$

i

$$\sqrt{(|c| \sqrt{a^2 + b^2})^2 + (|d| \sqrt{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}. \quad (5.22)$$

Uočimo pravokutni trapez sačinjen od triju pravokutnih trokuta. Možemo zaključiti da je duljina jedne njegove katete veća ili jednaka duljini katete koja je pod pravim kutom, odnosno vrijedi

$$|a||c| + |b||d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}. \quad (5.23)$$

Primjenom nejednakosti trokuta

$$|ac + bd| \leq |a||c| + |b||d| \quad (5.24)$$

dobijemo

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}. \quad (5.25)$$

### 5.3 Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dva broja

Za pozitivne realne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi nejednakost

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}, \quad (5.26)$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ .

Slijedi algebarski dokaz.

Kako za  $a$  i  $b$  očito vrijedi

$$(a - b)^2 \geq 0, \quad (5.27)$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (5.28)$$

tada imamo

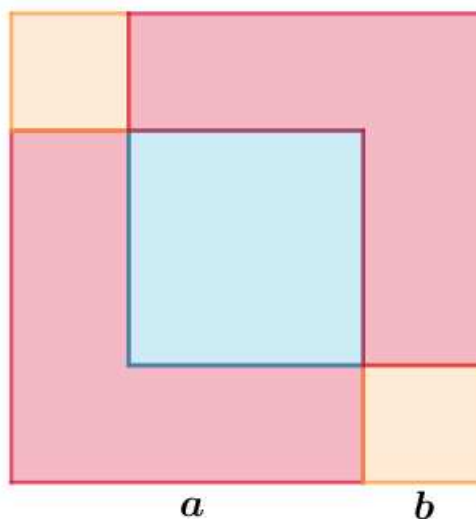
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2). \quad (5.29)$$

Kako su  $a$  i  $b$  pozitivni brojevi, slijedi

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad (5.30)$$

Budući da jednakost u  $(a - b)^2 \geq 0$  vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ , slijedi da posljednja jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a = b$ .

Geometrijski se ova nejednakost dokazuje uspoređivanjem površina dijelova na koje je izrezan kvadrat sa Slike 5.6.



Slika 5.6: Dokaz nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine brojeva

Uočimo kvadrate sa stranicama duljine  $b$  i kvadrate sa stranicama duljine  $a$  koji se preklapaju. Očito je zbroj njihovih površina veći od površine kvadrata sa stranicom duljine  $a + b$ . Vrijedi

$$2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2, \quad (5.31)$$

što je ekvivalentno

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2. \quad (5.32)$$



# Poglavlje 6

## Infinitesimalni račun

Kod prvog susretanja s infinitesimalnim računom uvijek je korisno vidjeti zorno što se opisuje. Funkcije prikazujemo u pravokutnom koordinatnom sustavu, odnosno crtamo njihov graf, čime na lakši način možemo odrediti njihova svojstva. U pravokutnom koordinatnom sustavu također prikazujemo određene integrale i to u obliku likova obrubljenih grafovima funkcija. Stoga za odnose vezane uz njih postoje zgodne vizualizacije koje pridonose njihovom boljem razumijevanju.

### 6.1 Nula kao limes funkcije

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0. \quad (6.1)$$

Najprije ćemo pokazati kako odrediti ovaj limes algebarski te zatim koristeći vizualizaciju.

U algebarskom dokazu ćemo koristiti L'Hospitalovo pravilo koje kaže:

*Neka je  $I$  otvoren interval oko točke  $x_0$  takav da su funkcije  $f$  i  $g$  derivabilne na  $I \setminus \{x_0\}$  i neka vrijedi  $g'(x) \neq 0$ , za sve  $x \in I \setminus \{x_0\}$  i*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (6.2)$$

*ili*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty. \quad (6.3)$$

Ako postoji  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  i element je skupa  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , onda postoji i  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (6.4)$$

Analogna tvrdnja vrijedi i u slučaju  $x_0 = \pm\infty$ .

Dokažimo sada početnu jednakost. Uočimo najprije da se u brojniku i nazivniku nalaze funkcije derivabilne u svim  $x \in \mathbb{R}$  čije su derivacije  $(x)' = 1$  i  $(e^x)' = e^x \neq 0$  te da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$  pa je traženi limes neodređenog oblika  $\frac{\infty}{\infty}$ . Kako je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0, \quad (6.5)$$

tj. postoji  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'}$ , možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo. Sada vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0. \quad (6.6)$$

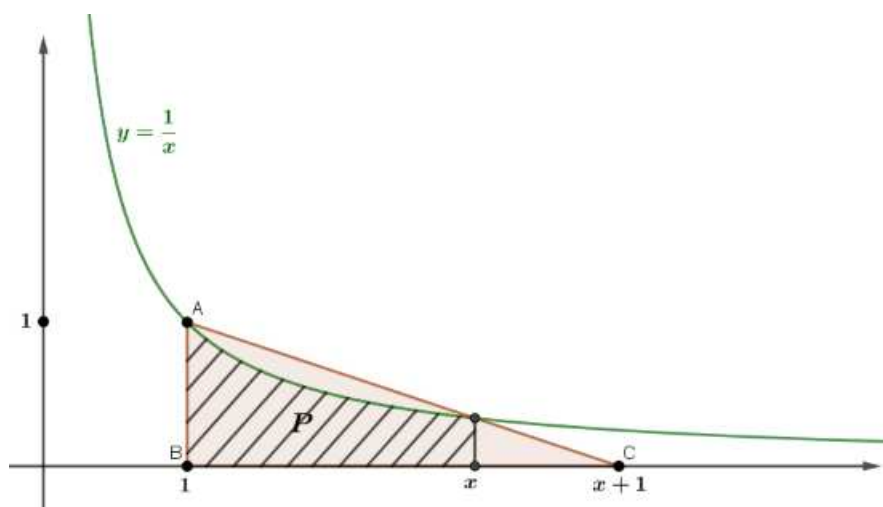
Slijedi vizualni dokaz.

Pri ovom dokazu koristimo činjenicu da je površina ispod grafa funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  omeđena s  $x$  osi i pravcima  $x = a$  i  $x = b$ , gdje je  $b > a > 0$ , jednaka

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a. \quad (6.7)$$

Sa Slike 6.1 vidimo da je površina  $P$  ispod grafa funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  manja od površine pravokutnog trokuta  $ABC$  čija je površina jednaka  $\frac{1}{2}x$ . Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 < P < P(ABC) &\Rightarrow 0 < \int_1^x \frac{1}{t} dt < \frac{1}{2}x \\ &\Rightarrow 0 < \ln x < \frac{1}{2}x \\ &\Rightarrow \ln e^0 < \ln x < \ln e^{\frac{x}{2}} \\ &\Rightarrow 1 < x < e^{\frac{x}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{e^x} < \frac{x}{e^x} < \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$



Slika 6.1: Dokaz limesa usporedbom površina

Predzadnja ekvivalentnost vrijedi zbog činjenice da je funkcija  $\ln$  strogo rastuća na  $\mathbb{R}^+$ .

Prisjetimo se sada Teorema o sendviču koji glasi:

Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoren interval,  $c \in I$  i  $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  za koje postoje  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ . Ako je  $h : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da vrijedi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in I \setminus \{c\}$  i  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ , onda funkcija  $h$  ima limes u  $c$  i  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ .

Kako je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ , prema Teoremu o sendviču slijedi da postoji limes funkcije  $\frac{x}{e^x}$  i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0. \quad (6.9)$$

## 6.2 Parcijalna integracija

Ako su funkcije  $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidno derivabilne na intervalu  $I$ , onda vrijedi formula parcijalne integracije

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \quad (6.10)$$

Dokažimo to. Kako su  $f$  i  $g$  derivabilne, za svaki  $x \in I$  vrijedi

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (6.11)$$

Integriranjem obje strane jednakosti dobivamo

$$(fg)(x) = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx. \quad (6.12)$$

Zbog neprekidnosti funkcija  $f'$  i  $g'$  na  $I$ , slijedi da su neprekidne i funkcije  $f'g$  i  $fg'$  pa su i integrabilne. Slijedi

$$(fg)(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx, \quad (6.13)$$

odnosno

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \quad (6.14)$$

Odgovarajuća formula za računanje određenog integrala na segmentu  $[a, b]$  metodom parcijalne integracije glasi

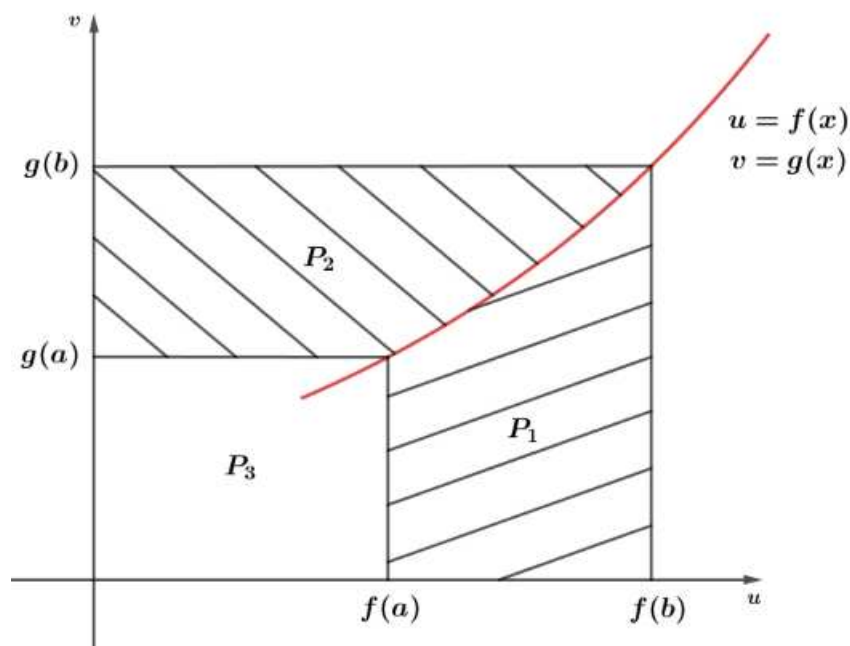
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (6.15)$$

Ovu formulu možemo vizualizirati i dokazati na intuitivniji način gdje nam nije potrebno toliko predznanja kao kod klasičnog dokazivanja.

Promotrimo parametarsku krivulju  $(u, v) = (f(x), g(x))$  na Slici 6.2, odnosno graf složene funkcije  $x \mapsto (f(x), g(x))$ ,  $a \leq x \leq b$ , u  $uv$  ravnini. Funkcija  $v$  je integrabilna na segmentu  $[f(a), f(b)]$ , a funkciju  $u$  je integrabilna na segmentu  $[g(a), g(b)]$ . Tada je površina  $P_1$  područja u koordinatnoj ravnini koje je omeđeno odozdo s  $u$  osi, odozgo grafom funkcije, lijevo pravcem  $u = f(a)$  i desno pravcem  $u = f(b)$  jednaka određenom integralu

$$P_1 = \int_{f(a)}^{f(b)} v du. \quad (6.16)$$

S druge strane je površina  $P_2$  područja u koordinatnoj ravnini koje je omeđeno odozdo



Slika 6.2: Dokaz parcijalne integracije

pravcem  $v = g(a)$ , odozgo pravcem  $v = g(b)$ , lijevo s  $v$  osi i desno grafom funkcije jednaka određenom integralu

$$P_2 = \int_{g(a)}^{g(b)} u dv. \quad (6.17)$$

Sa Slike 6.2 se lako vidi da je

$$P_1 + P_2 = P_4 - P_3, \quad (6.18)$$

gdje je  $P_4$  površina pravokutnika sa stranicama duljina  $f(b)$  i  $g(b)$ , a  $P_3$  površina pravokutnika sa stranicama duljina  $f(a)$  i  $g(a)$ . Prema tome, vrijedi

$$\int_{f(a)}^{f(b)} v du + \int_{g(a)}^{g(b)} u dv = f(b)g(b) - f(a)g(a) = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b}. \quad (6.19)$$

Uvažavanjem oznaka  $u = f(x)$  i  $v = g(x)$  dobijemo

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (6.20)$$

### 6.3 Youngova nejednakost

Britanski matematičar William Henry Young je 1912. godine u članku “On classes of summable functions and their Fourier series” iskazao teorem, danas poznat kao *Youngova nejednakost*. Youngova nejednakost ima nekoliko varijanti, a ovdje ćemo iskazati i dokazati jednu od njenih generalizacija: *Youngovu nejednakost za rastuće funkcije*.

Neka je  $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i strogo rastuća funkcija takva da je  $f(0) = 0$  i neka je  $f^{-1} : [0, f(c)] \rightarrow [0, c]$  inverzna funkcija funkcije  $f$ . Tada za sve  $a \in [0, c]$  i  $b \in [0, f(c)]$  vrijedi

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx. \quad (6.21)$$

Pri tome jednakost vrijedi ako i samo ako je  $b = f(a)$ .

Dokaz Youngove nejednakosti za rastuće funkcije primjer je korektnog vizualnog dokaza popraćenog adekvatnim logičkim objašnjenjima.

Promotrimo graf funkcije  $f$  u pravokutnom koordinatnom sustavu. Funkcija  $f$  je integrabilna na segmentu  $[0, a]$ , a funkcija  $f^{-1}$  je integrabilna na segmentu  $[0, b]$ . Stoga je površina  $P_1$  područja u koordinatnoj ravnini koje je omeđeno odozdo s  $x$  osi, odozgo grafom funkcije, lijevo s  $y$  osi i desno pravcem  $x = a$  jednaka određenom integralu

$$P_1 = \int_0^a f(x)dx. \quad (6.22)$$

S druge strane je površina  $P_2$  područja u koordinatnoj ravnini koje je omeđeno odozdo s  $x$  osi, odozgo pravcem  $y = b$ , lijevo s  $y$  osi i desno grafom funkcije jednaka određenom integralu

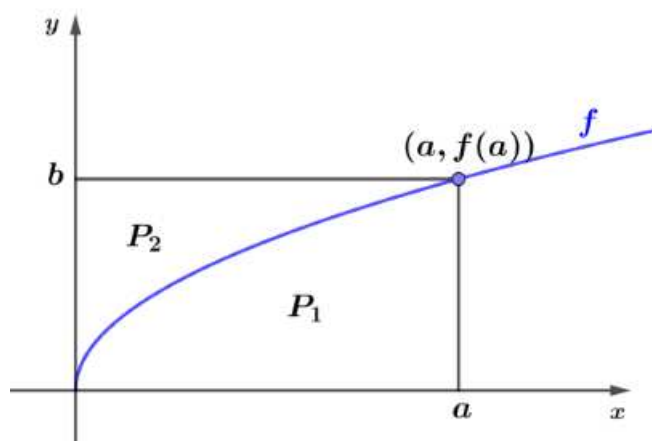
$$P_2 = \int_0^b f^{-1}(x)dx. \quad (6.23)$$

Razlikujemo tri slučaja:

1.  $b = f(a)$ ,
2.  $b < f(a)$ ,
3.  $b > f(a)$ .

*Slučaj 1.* Sa Slike 6.3 se lako vidi da je površina pravokutnika čije su stranice duljina  $a$  i  $b$  jednaka zbroju površina  $P_1$  i  $P_2$ , odnosno vrijedi

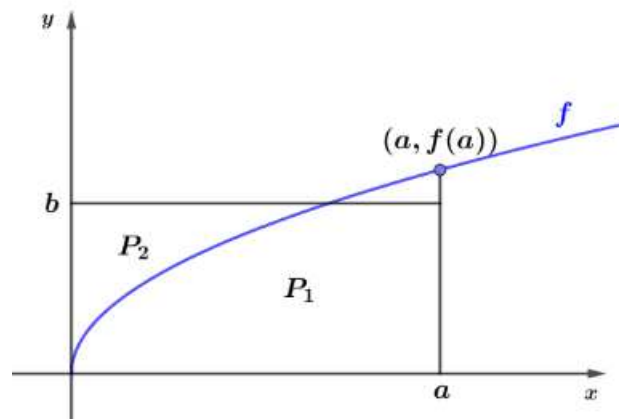
$$ab = P_1 + P_2. \quad (6.24)$$



Slika 6.3:  $ab = P_1 + P_2$

*Slučaj 2.* Sa Slike 6.4 se lako vidi da je površina pravokutnika čije su stranice duljina  $a$  i  $b$  manja od zbroja površina  $P_1$  i  $P_2$ , odnosno vrijedi

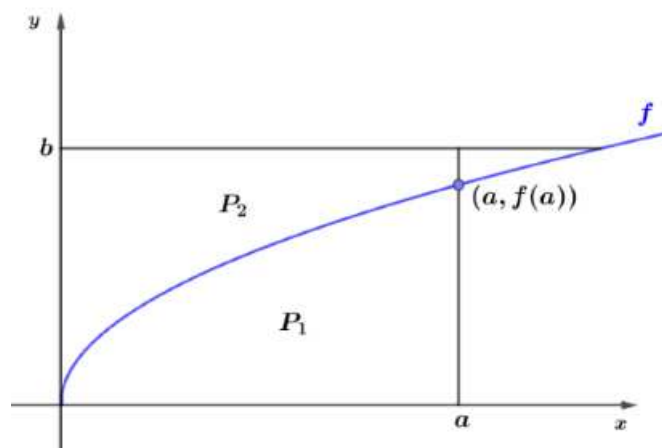
$$ab < P_1 + P_2. \quad (6.25)$$



Slika 6.4:  $ab < P_1 + P_2$

*Slučaj 3.* Sa Slike 6.5 se lako vidi da je površina pravokutnika čije su stranice duljina  $a$  i  $b$  manja od zbroja površina  $P_1$  i  $P_2$ , odnosno vrijedi

$$ab < P_1 + P_2. \quad (6.26)$$



Slika 6.5:  $ab < P_1 + P_2$

Uvažavanjem svih triju slučajeva dobivamo

$$ab \leq P_1 + P_2 \quad (6.27)$$



te konačno

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx. \quad (6.28)$$

# Bibliografija

- [1] *An Algebraic Areas Identity (visual proof)*, <https://www.youtube.com/watch?v=P9RojjVRumA&list=PLZh9gzIvXQUvTKwSq0VcqgPzCFUimh70z&index=1>.
- [2] *Cauchy Bunyakovsky Schwarz Inequality I (visual proof)*, [https://www.youtube.com/watch?v=mKg\\_gVagHy8](https://www.youtube.com/watch?v=mKg_gVagHy8).
- [3] *Factorial Sums wordlesswednesday (visual proof)*, <https://www.youtube.com/watch?v=JWB9juPixb8&list=PLZh9gzIvXQUt4CPNV9Rc7x-Yrhl50sVJI&index=5>.
- [4] *The Illustrated Law of Cosines*, <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/DonMcConnell.shtml>.
- [5] *Integration by parts Visual proof (mathocube)*, <https://www.youtube.com/watch?v=uPgDU547dJ4>.
- [6] *Limes funkcije i neprekidnost funkcije*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~rus/nastava/ma1/3-limes.pdf>.
- [7] *Viviani's Theorem (visual proof via rotation)*, [https://www.youtube.com/watch?v=5r2jLt0\\_PLM&t=0s](https://www.youtube.com/watch?v=5r2jLt0_PLM&t=0s).
- [8] C. Alsina i R. B. Nelsen, *Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, 2006.
- [9] \_\_\_\_\_, *An Invitation to Proofs Without Words*, European journal of pure and applied mathematics **3** (2010), br. 1, 118–127.
- [10] T. Bekeshie, *A New Proof of Young's Inequality Using Multivariable Optimization*, European journal of pure and applied mathematics **7** (2021), br. 4, 54–58.
- [11] F. M. Brückler, *Povijest matematike*, PMF - Matematički odsjek, Zagreb, 2020.
- [12] B. Dakić, *Matematika u boji – dokazi bez riječi*, Element, Zagreb, 2018.

- [13] \_\_\_\_\_, *Gaussova dosjetka*, [http://ss-delnice.skole.hr/upload/ss-delnice/images/static3/681/attachment/Gaussova\\_dosjetka\\_-\\_Clanak.pdf](http://ss-delnice.skole.hr/upload/ss-delnice/images/static3/681/attachment/Gaussova_dosjetka_-_Clanak.pdf).
- [14] B. Dakić i N. Elezović, *MATEMATIKA 2, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element, Zagreb, 2014.
- [15] M. de Guzman, *The Role of Visualization – In the Teaching and Learning of Mathematical Analysis*, Univerzidad Complutense de Madrid, 2002.
- [16] Z. Dekanović i S. Varošaneć, *Dokazi i primjene AG nejednakosti*, Hrvatski matematički elektronički časopis (2006), br. 9.
- [17] T. Doyle, L. Kutler, R. Miller i A. Schueller, *Proofs Without Words and Beyond – Proofs Without Words 2.0*, Mathematical Association of America, Washington, 2014.
- [18] M. Duk i M. J. Bokun, *L'Hospitalovo pravilo*, Poučak **13** (2012), br. 51, 4–16.
- [19] Z. Kolar-Begović i V. Ždralović, *Vivanijev teorem*, Osječki matematički list **19** (2019), 31–41.
- [20] A. Marić, *Poučci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 2000.
- [21] R. B. Nelsen, *Proofs without words II: more exercises in visual thinking*, Mathematical Association of America, Washington, 2000.
- [22] E. Tolsted, *An Elementary Derivation of the Cauchy, Holder and Minkowski Inequalities from Young's Inequality*, Mathematics Magazine **37** (1964), 2–12.
- [23] Z. Trstenjak, *Određeni integral i primjene u geometriji*, <https://www.mathos.unios.hr/~mdjmic/uploads/diplomski/TRS02.pdf>.
- [24] D. Veljan i I. Marušić, *Vizualni i kratki dokazi – prilog kreativnoj nastavi matematike (1.dio)*, Hrvatski matematički elektronički časopis **32** (2017), br. 1.
- [25] \_\_\_\_\_, *Vizualni i kratki dokazi – prilog kreativnoj nastavi matematike (2.dio)*, Hrvatski matematički elektronički časopis **33** (2018), br. 1.

# Sažetak

U ovom radu su prikazani slikovni i klasični dokazi nekih matematičkih tvrdnji. Naglasak je na vizualnim dokazima poznatijima pod nazivom „dokazi bez riječi“. Općenito, dokaz bez riječi je jedna ili niz slika koji pomažu čitatelju da vizualno razumije zašto je određena matematička tvrdnja točna. Istodobno, on daje ideju o tome kako bi se ta tvrdnja mogla formalno dokazati. Iako vrlo intuitivni, slikovni dokazi znaju imati nedostatke kao što su nepokrivanje svih slučajeva, manjak sistematičnosti ili naprosto pogrešna čitateljeva interpretacija. Zbog toga će se vizualni dokazi pokazati u svom punom sjaju kada je uz njih kvalitetan popratni tekst i analiza slike. Cilj ovog rada je pokazati da se formalni i vizualni dokazi nadopunjuju i da zajedno čine najinformativniju i većini najlakše shvatljivu cjelinu.

# Summary

In this thesis, visual and classical proofs of certain mathematical statements are presented. The emphasis is on visual proofs, more commonly known as "proofs without words." Generally, a proof without words consists of one or a series of images that help the reader visually understand why a specific mathematical statement is true. At the same time, it provides an idea of how that statement could be formally proven. Although very intuitive, visual proofs may have drawbacks such as not covering all cases, lacking systematicity or simply being subject to the reader's misinterpretation. Therefore, visual proofs shine in their full glory when accompanied by a high-quality supporting text and image analysis. The goal of this paper is to demonstrate that formal and visual proofs complement each other, creating the most informative and easily understandable whole when presented together.

# Životopis

Rođena sam 26. studenog 1996. godine u Čakovcu. Pohađala sam OŠ Ivana Gorana Kovačića, Sv. Juraj na Bregu. Godine 2015. sam završila opći smjer Gimnazije Josipa Slavenskog u Čakovcu, nakon čega sam iste godine upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematike nastavnčkog smjera na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike stekla sam 2021. godine te sam iste godine upisala Diplomski sveučilišni studij Matematike nastavnčkog smjera na istom fakultetu. Od studenog 2023. godine radim u Graditeljskoj školi Čakovec na zamjeni kao nastavnica matematike.