

# Razvoj prostornog zora u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi

---

**Kuhar, Lucija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:880696>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lucija Kuhar

**RAZVOJ PROSTORNOG ZORA**  
**U NASTAVI MATEMATIKE**  
**U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI**

Diplomski rad

Voditeljica rada:

prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, veljača 2024.



Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik/ca

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_,

2. \_\_\_\_\_,

3. \_\_\_\_\_,



*Zahvaljujem se svojoj mentorici prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji na podršci i savjetima te uloženom trudu i pomoći za vrijeme izrade ovog rada, ali i cijelog diplomskog studija.*

*Također se želim zahvaliti svim svojim učiteljima, nastavnicima i profesorima koji su za vrijeme mog školovanja uvelike utjecali na mene te mi na taj način pomogli u odabiru zanimanja, a danas sa sigurnošću mogu reći mog poziva.*

*Zahvaljujem se svojoj obitelji koja me je bezuvjetno pratila i koja me prati na mom putu te uvijek puna ljubavi, podrške i razumijevanja stoji uz mene. Hvala i svim kolegama i prijateljima na svakoj upućenoj lijepoj riječi, pomoći, savjetu i podršci.*

*I na kraju se želim zahvaliti svim svojim sadašnjim i budućim učenicima jer bez njih ovaj rad ne bi imao smisla. Veselim se što ćemo zajedno istraživati i uživati u čarima matematike.*



# SADRŽAJ

<b>UVOD</b> .....	1
<b>1. GEOMETRIJA</b> .....	3
1.1. Povijesni razvoj .....	4
1.2. Glavne ideje .....	5
1.3. Prostorni zor .....	6
1.4. Geometrija u matematičkom kurikulumu .....	7
<b>2. VAN HIELE TEORIJA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA</b> .....	21
2.1. Razine geometrijskog mišljenja .....	22
2.2. Primjena u nastavi matematike .....	26
<b>3. MATEMATIČKI MODELI, UČILA I SLAGALICE</b> .....	27
3.1. Geoploča .....	28
3.2. Tangram .....	30
3.2. Graditeljske slagalice .....	34
<b>4. RAZVOJ PROSTORNOG ZORA U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI</b> .....	36
4.1. Oblici i svojstva .....	36
4.1.1. Aktivnost <i>Sortiranje oblika</i> .....	37
4.1.2. Aktivnost <i>Prepoznavanje likova</i> .....	40
4.1.3. Aktivnost <i>Dodirni</i> .....	42
4.1.4. Aktivnost <i>Umjetnost na geoploči</i> .....	43
4.1.5. Aktivnost <i>Svojstva geometrijskih likova</i> .....	44
4.1.6. Aktivnost <i>Opseg i površina</i> .....	45
4.1.7. Aktivnost <i>Crtanje četverokuta</i> .....	47
4.1.8. Aktivnost <i>Slični trokuti</i> .....	52
4.2. Transformacije .....	56
4.2.1. Aktivnost <i>Dovrši sliku</i> .....	56
4.2.2. Aktivnost <i>Sastavljanje konveksnih mnogokuta</i> .....	58
4.2.3. Aktivnost <i>Prepoznaj i izračunaj</i> .....	59
4.2.4. Aktivnost <i>Složi</i> .....	61
4.2.5. Aktivnost <i>Podijeli i izračunaj površinu</i> .....	62



4.2.6.	Aktivnost <i>Površina paralelograma, trokuta i trapeza</i> .....	64
4.2.7.	Aktivnost <i>Rotacijska tijela</i> .....	66
4.2.8.	Aktivnost <i>Pentomino</i> .....	70
4.3.	Lokacija.....	73
4.3.1.	Aktivnost <i>Tko, što i gdje?</i> .....	73
4.3.2.	Aktivnost <i>Potruga za blagom.</i> .....	74
4.3.3.	Aktivnost <i>Skrivena pozicija</i> .....	78
4.3.4.	Aktivnost <i>Potapanje brodova</i> .....	79
4.4.	Vizualizacija.....	81
4.4.1.	Aktivnost <i>Idemo u prostor</i> .....	81
4.4.2.	Aktivnost <i>Mreže geometrijskih tijela</i> .....	82
4.4.3.	Aktivnost <i>Vrhovi kocke</i> .....	84
4.4.4.	Aktivnost <i>Ostali presjeci</i> .....	87
4.4.5.	Aktivnost <i>Oplošje kugle</i> .....	91
4.4.6.	Aktivnost <i>Volumen piramide</i> .....	93
4.4.7.	Aktivnost <i>Gradimo</i> .....	95
4.4.8.	Aktivnost <i>Brojimo kockice</i> .....	96
4.4.9.	Aktivnost <i>Pogledi</i> .....	97
4.4.10.	Aktivnost <i>Crtamo u ravnini</i> .....	99
<b>5.</b>	<b>3D PRINTANJE U NASTAVI MATEMATIKE</b> .....	<b>105</b>
	<b>LITERATURA</b> .....	<b>114</b>
	<b>SAŽETAK</b> .....	<b>116</b>
	<b>SUMMARY</b> .....	<b>117</b>
	<b>ŽIVOTOPIS</b> .....	<b>118</b>



## UVOD

„Nema kraljevskih putova u geometriji“, rečenica je koju je Euklid davno izgovorio, a sigurno je aktualna i danas. Uočivši da velik broj učenika ima upravo poteškoća u učenju geometrije, Pierre van Hiele i Dina van Hiele-Geldof su razvili teoriju geometrijskog mišljenja u kojoj pružaju uvid u razlike u geometrijskom razmišljanju pojedinaca te kako te razlike nastaju te su dali prijedlog kako učenicima olakšati učenje geometrije.

Teoriju i njene karakteristike ćemo opisati u drugom poglavlju ovog rada, a prije toga u prvom poglavlju ćemo ukratko opisati razvoj geometrije, njene glavne ideje te se osvrnuti na zastupljenost geometrije u kurikulumu predmeta Matematika u osnovnim i srednjim školama u Hrvatskoj u sadržajnim domenama Oblik i prostor i Mjerenje.

U nastavku rada ćemo dati prijedlog aktivnosti za učenike osnovnih i srednjih škola koje će učenicima olakšati prelazak s jedne razine geometrijskog mišljenja na drugu. Pomoći će im u razvijanju prostornog zora s osobitim naglaskom na kvalitativna svojstva i povezivanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih geometrijskih objekata te njihove transformacije.

U zadnjem poglavlju ćemo opisati ulogu 3D printanja i 3D crtanja u nastavi matematike te dati prijedlog nekoliko ideja na koji način iskoristiti 3D tehnologiju u nastavi matematike.

Nizozemski matematičar i edukator Hans Freudenthal je rekao: “Geometrija je opipljivi prostor, to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istraživati i osvajati, kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se.“ Geometrija se vrlo često zanemaruje u nastavi matematike, a njen značaj je jako važan. Svi sigurno znamo barem jednu osobu koja se „ne snalazi“ kad dođe u neki novi grad ili novo mjesto. Možda se i nama nekad dogodilo da se nalazimo u trgovačkom centru, uđemo u neku trgovinu i pri izlasku iz te trgovine nismo sigurno s koje smo strane došli. To su samo neke od situacije iz svakodnevnog života u kojima je važan prostorni zor.

U nastavi matematike učenicima treba osigurati što više mogućnosti razvoja prostornog zora primjerenim aktivnostima, učilima i digitalnim alatima i sadržajima pomoću kojih će vidjeti, osjećati i razumjeti geometriju. Uloga nastavnika je organizacija i upravljanje nastavnim procesom, odnosno stvaranje pozitivnog ozračja u kojem će učenici istraživati i primjenjivati matematičke ideje i koncepte te surađivati s drugim učenicima. Svakog nastavnika u njegovom radu treba voditi poznata rečenica velikog Alberta Einsteina: „Ja nikad ne podučavam svoje učenike; ja im samo pokušavam pružiti uvjete u kojima oni mogu učiti.“

# 1. GEOMETRIJA

Riječ geometrija dolazi iz grčkog jezika, a u povijesti upravo su Grci vrlo značajni u razvoju ove grane matematike. Etimološki gledano ova riječ je složenica riječi *geo* (gē (γῆ)), odnosno zemlja i riječi *metria* (μέτρον) značenja mjerenje. Doslovan prijevod na hrvatski jezik bio bi zemljomjerstvo, odnosno mjerenje zemlje. Iz samog podrijetla i značenja riječi geometrija možemo uočiti potrebu za razvojem ove grane matematike u povijesti. Geometrija je grana matematike koja se bavi proučavanjem položaja i svojstava oblika i tijela u ravnini ili prostoru te njihovih međusobnih odnosa, a s vremenom predmet njenog proučavanja postaje sve širi i apstraktniji. Smatra se jednom od najstarijih grana matematike.

U ovom poglavlju ćemo najprije ukratko predstaviti povijesni razvoj geometrije. Naglasak ćemo staviti na najznačajnije trenutke i matematičare koji su pridonijeli njenom razvoju i aksiomatizaciji ove grane matematike. Nakon toga ćemo opisati glavne ideje geometrije, razjasniti što je to prostorni zor te napraviti kratki pregled geometrije u Nacionalnom matematičkom kurikulumu.

## 1.1. Povijesni razvoj

Geometrija se počela razvijati iz vrlo praktičnih razloga, iz potrebe za rješavanjem problema iz svakodnevnog života, odnosno preživljavanjem. Temelj prve geometrije je bila praktičnost i empirija. Osim u antičkoj Grčkoj u kojoj je doživjela najveći procvat, pojavila se i u Egiptu i Mezopotamiji. Geometrija tog doba uglavnom se bavila duljinama, površinom i volumenom te joj je svrha bila olakšati svakodnevni život. Uglavnom se vezala uz poljodjelstvo, gradnju i trgovinu, a nešto kasnije postala je vrlo značajna u razvoju astronomije.

Jedan od najznačajnijih matematičara tog doba svakako je bio Euklid koji je u svojim *Elementima* (oko 300. godina prije Krista) sistematski i strogo deduktivno prikazao svu do tad poznatu matematiku te aksiomatizirao geometriju. Njegovo djelo je bilo toliko značajno da se sve do 19. stoljeća koristilo kao osnovni udžbenik iz geometrije. Najveća vrijednost ovog djela je što je Euklid dao osnove za razvoj matematike kao egzaktnih znanosti, odnosno matematike kakvu danas poznajemo.

Razvojem ostalih znanosti i ostalih grana matematike predmet geometrije postaje sve širi te su se počele razvijati različite geometrijske poddiscipline. U 17. stoljeću Rene Descartes je uvođenjem koordinatnog sustava u ravnini povezo algebru i geometriju te utemeljio analitičku geometriju, a Desargues se smatra utemeljiteljem projektivne geometrije. U 19. stoljeću počinje razvoj neeuclidskih geometrija. Nikolaj Ivanovič Lobačevski razvio je hiperboličku, a Riemann sfernu, odnosno eliptičnu geometriju. Razvojem infinitezimalnoga računa počela se razvijati i dobivati sve više na značaju diferencijalna geometrija, dok se razvojem algebarskih metoda razvila algebarska geometrija. Diferencijalna geometrija je jedna od grana geometrije koja se najviše razvija u današnje doba. Kao rezultat proučavanja apstraktnih geometrijskih struktura nastala je najmlađa grana geometrije topologija.

Danas geometrija ima mnogo poddisciplina koje se stalno razvijaju i koriste i u drugim znanostima. Suvremeni razvoj geometrije svakako se veže uz korištenje tehnologije koja svakim danom sve više napreduje te omogućava nove pristupe i nove mogućnosti.

## 1.2. Glavne ideje

Glavne ideje geometrije školske matematike možemo podijeliti na 5 razina:

1. Što oblike u ravnini ili prostoru čini različitima ili nalik jednih drugima određuju njihova geometrijska svojstva. Na primjer:

- usporedne (paralelne) stran(ice), okomite stran(ice) ili ništa od toga
- osna simetričnost, centralna simetričnost, rotacijska simetričnost ili ništa od toga
- sličnost, sukladnost, homotetičnost ili ni jedno ni drugo...

2. Oblike možemo opisati pomoću njihovog položaja (lokacije) u ravnini ili prostoru. Za precizni opis njihova položaja (lokacije) koristimo prikladne koordinatne sustave.

3. Obratno, koordinatni pogled na oblike omogućava razumijevanje:

- njihovih geometrijskih svojstava
- promjene njihovog položaja (transformacije)
- njihovog izgleda i promjene veličine (vizualizacije).

4. Oblici se mogu pomicati u ravnini ili prostoru. Tu promjenu možemo opisati u terminima izometrija ravnine/prostora, tj. translacije, osne i centralne simetrije te rotacije.

5. Oblike možemo gledati iz različitih perspektiva. Sposobnost sagledavanja iz različitih točaka gledanja pridonosi:

- razumijevanju odnosa između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika
- misaonom predočavanju (vizualizaciji) promjene položaja i veličine oblika.

### 1.3. Prostorni zor

Razvoj geometrijskog mišljenja usko je vezan uz razvoj prostornog zora. Prostorni zor (eng. spatial ability, spatial sense) je intuitivni osjećaj za oblike u prostoru i njihove međusobne odnose, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje te oblike koje formiraju objekti oko nas. Uključuje sposobnost misaone vizualizacije objekata i prostornih odnosa (npr. misaono okretanje ili transformaciju objekta) i okretnost u geometrijskim opisima objekata (npr. njihovih geometrijskih svojstava) i njihove lokacije (u odnosu na neki fiksni objekt, npr. koordinatni sustav u prostoru).

Osobe s razvijenim prostornim zorom uočavaju i poštuju geometrijske oblike u prirodi i umjetnosti, posebice arhitekturi, i znaju upotrijebiti geometrijske ideje za opis i analizu svijeta oko sebe. Stoga je razvoj prostornog zora izuzetno važan dio matematičkog obrazovanja i čini jezgru geometrijskog mišljenja, a time i sadržajne domene Oblik i prostor u kurikulumu predmeta Matematika u osnovnoj i srednjim školama u Hrvatskoj.

Neki ljudi vjeruju da je posjedovanje prostornog zora uvjetovano rođenjem. Ili ga imaš ili nemaš. Istraživanja su pokazala da se bogatim iskustvima s oblicima i prostornim odnosima s vremenom prostorni zor razvija. No, znanstveno je pokazano da muškarci imaju bolje razvijen prostorni zor od žena. Postižu značajno bolje rezultate u rješavanju geometrijskih zadataka i problema. Što na primjer nije slučaj kod logičkog zaključivanja.

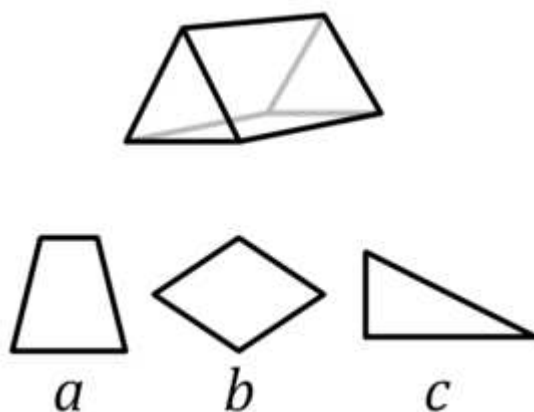
Postoji nekoliko testova pomoću kojih se mjeri stupanj prostornog zora. Neki od njih su test misaonih rotacija (Mental Rotations Test), test misaonih presjeka (Mental Cutting Test) i kognitivni testovi VZ-1 (Form Board), VZ-2 (Paper Folding) i VZ-3 (Surface Development).<sup>1</sup> Primjer jednog od zadataka na testu misaonih presjeka možemo vidjeti na Slici 1.3.1. Točan odgovor je C).

---

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Spatial\\_visualization\\_ability](https://en.wikipedia.org/wiki/Spatial_visualization_ability)



Prizmu čiji se plašt sastoji od tri pravokutnika i dva jednakostranična trokuta na krajevima (kao što se vidi nadesno) presjeći će ravnina. Koji od sljedećih presjeka mogu nastati?<sup>2</sup>



A) samo  $a$  i  $b$

B) samo  $b$  i  $c$

C) samo  $a$  i  $c$

D)  $a$ ,  $b$ , i  $c$

E) nijedan

*Slika 1.3.1. Primjer zadatka za Mental Cutting Test*

## 1.4. Geometrija u matematičkom kurikulumu

Geometriju u Nacionalnom matematičkom kurikulumu možemo pronaći u dvije domene: Oblik i prostor (oznaka C) i Mjerenje (oznaka D). „Domena Oblik i prostor dio je geometrije koji se bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Rastavljanjem i sastavljanjem oblika uspoređuju se njihova svojstva i uspostavljaju veze

<sup>2</sup> <https://userpages.uni-koblenz.de/~quaiser/files/Publikationen/IJT0303pp219-231.pdf>

<sup>3</sup> [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6e/Mental\\_cutting\\_test.png/435px-Mental\\_cutting\\_test.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6e/Mental_cutting_test.png/435px-Mental_cutting_test.png)

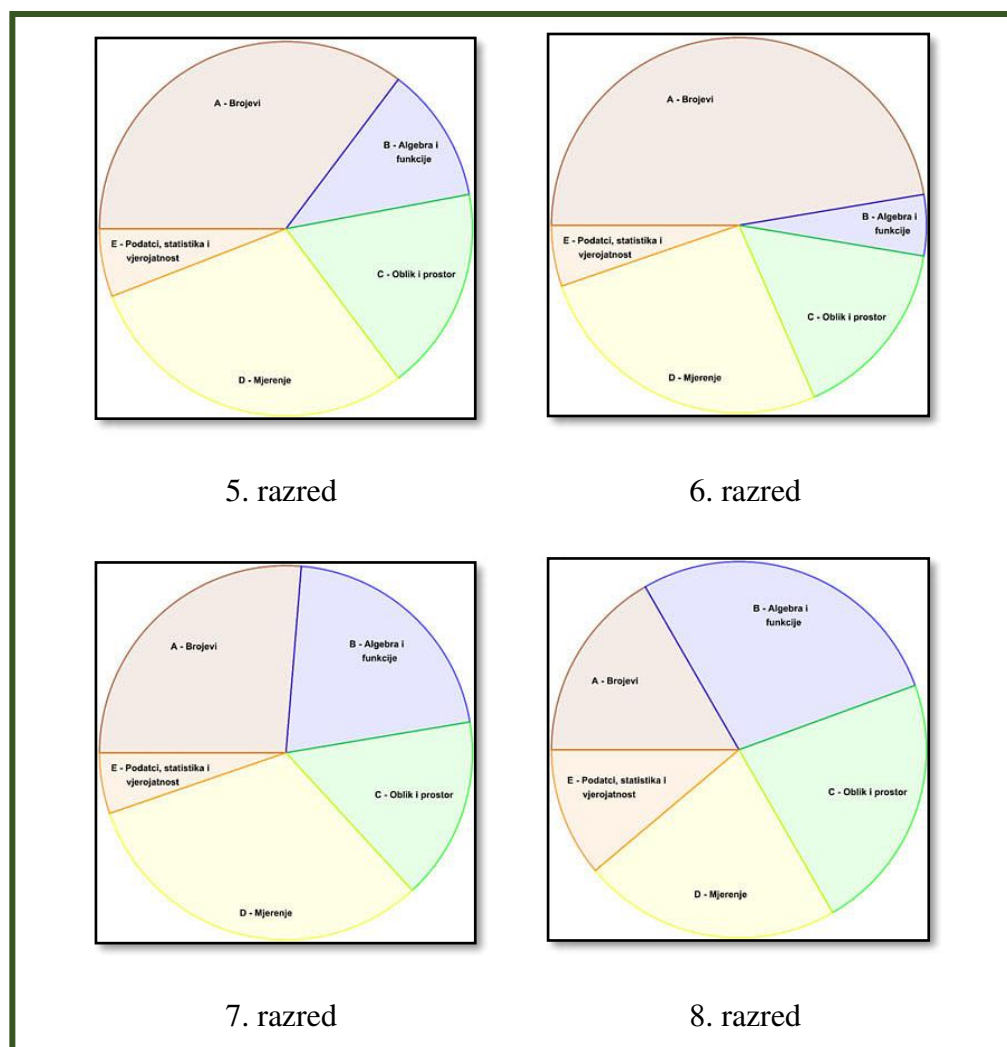
među njima. Iz uočenih svojstava i odnosa izvode se pretpostavke i tvrdnje koje se dokazuju crtežima i algebarskim izrazima. Koristeći se geometrijskim priborom i tehnologijom, učenici će izvoditi geometrijske transformacije, istraživati i primjenjivati njihova svojstva te razviti koncepte sukladnosti i sličnosti. Interakcijom s ostalim domenama i matematičkim argumentiranjem prostornih veza, rabeći prostorni zor i modeliranje, učenici pronalaze primjenu matematičkih rješenja u različitim situacijama. Prepoznaju ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnome okružju te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.“ „Mjerenje je uspoređivanje neke veličine s istovrsnom veličinom koja je dogovorena jedinica mjere. U domeni Mjerenje usvajaju se standardne mjerne jedinice za novac, duljinu, površinu, volumen, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu te ih se mjeri odgovarajućim mjernim uređajima i kalendarom. Procjenjivanjem, mjerenjem, preračunavanjem i izračunavanjem veličina određuju se mjeriva obilježja oblika i pojava uz razložnu i učinkovitu upotrebu alata i tehnologije. Rezultati se interpretiraju i izražavaju u jedinici mjere koja odgovara situaciji. Učenici će mjerenjem povezati matematiku s drugim odgojno-obrazovnim područjima, s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnome mjestu, prepoznati mjeriva obilježja ravninskih i prostornih oblika u umjetnosti te ih upotrebljavati za opis i analizu svijeta oko sebe.“<sup>4</sup>

Ako uspoređujemo odgojno-obrazovne ishode možemo uočiti da je zastupljenost ovih dviju domena u odnosu na preostale tri (Brojevi, Algebra i funkcije i Podatci, statistika i vjerojatnost) poprilično smanjena. Analizirajući odgojno-obrazovne ishode za 4. razrede srednjih škola možemo vidjeti da se domena Mjerenje uopće ne spominje, a Oblik i prostor se nalazi u samo jednom ishodu i to ne samostalno, već u paru s domenom Brojevi (MAT SŠ A.4.4.; MAT SŠ C.4.1. Interpretira računске operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini.) Na Slici 1.4.1. možemo vidjeti grafički prikaz organizacije matematičkog kurikuluma za 5., 6., 7. i 8. razred osnovne škole, a na Slici 1.4.2. za 1. (210 sati godišnje), 2. (210 sati godišnje), 3. (245 sati godišnje) i 4. (25 sati godišnje) razred gimnazije prema domenama. Uočimo da ove dvije domene zajedno u nijednom razredu nisu zauzele više od 50%. Proučavajući ishode možemo uočiti da se

---

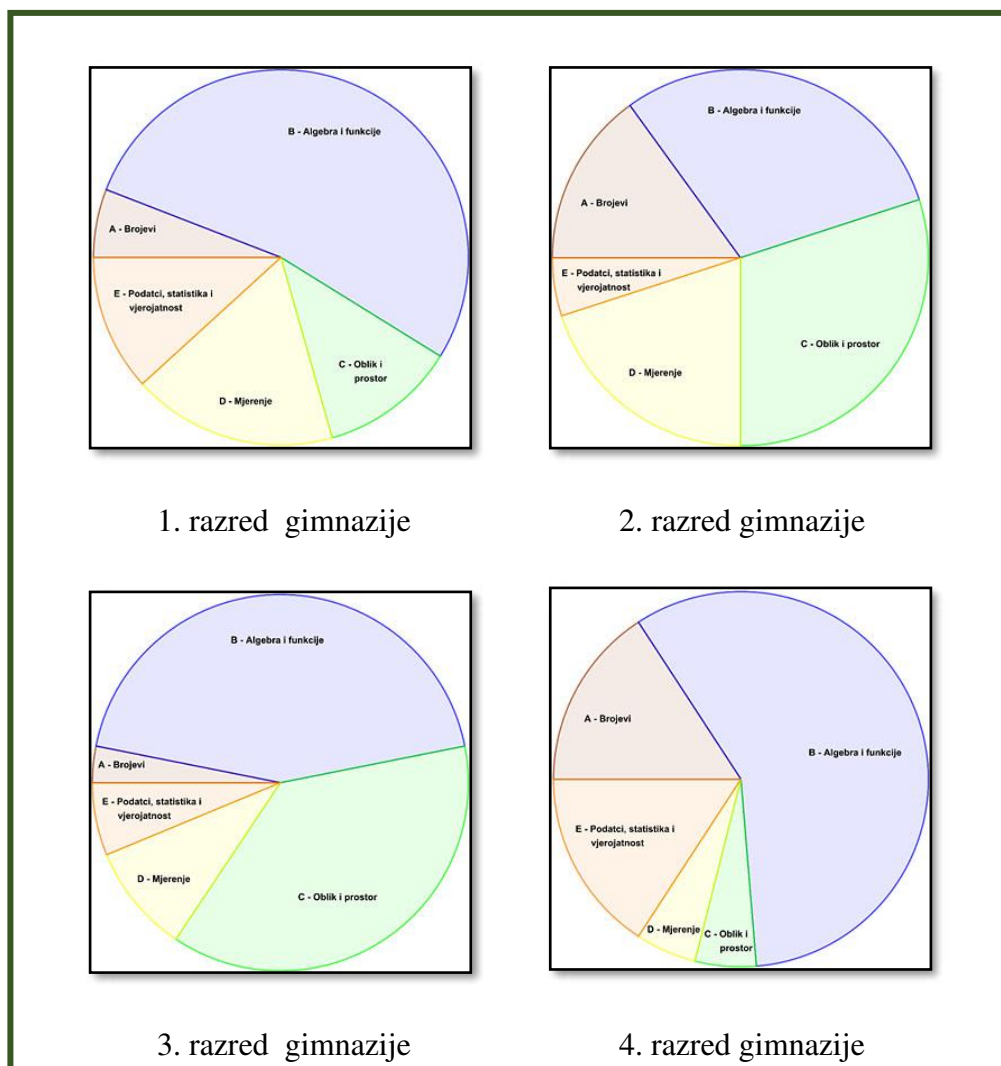
<sup>4</sup> [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)

u našem obrazovnom sustavu ne potiče intuitivni osjećaj za oblike i njihove odnose ni vještina misaone vizualizacije kod učenika. Nacionalni matematički kurikulum uvelike zanemaruje razvoj prostornog zora.



Slika 1.4.1. Grafički prikaz organizacije matematičkog kurikuluma za 5., 6., 7. i 8. razred<sup>5</sup>

<sup>5</sup> [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)



Slika 1.4.2. Grafički prikaz organizacije matematičkog kurikuluma za matematičku gimnaziju<sup>6</sup>

U nastavku ćemo navesti odgojno-obrazovne ishode iz Nacionalnog matematičkog kurikuluma koji su povezani sa razvojem prostornog zora, odnosno njihovim ostvarenjem doprinosi se njegovom razvoju. Navest ćemo šifru odgojno-obrazovnog ishoda, njegov sadržaj i razradu. Prikazani su ishodi za 5., 6., 7. i 8. razred osnovne škole te 1., 2., 3. i 4. razred matematičke gimnazije. U aktivnostima koje ćemo opisivati u 4. poglavlju ovog rada, pri povezivanju tih aktivnosti s odgojno-obrazovnim ishodima iz Nacionalnog matematičkog kurikuluma koristit ćemo šifre ishoda.

<sup>6</sup> [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)

## **5. razred:**

**MAT OŠ C.5.1.** Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose.

- Služeći se geometrijskim priborom, matematičkim jezikom proučava, opisuje, definira, skicira, crta i označava skupove točaka u ravnini (točke, pravci, polupravci, dužine, kutovi) i njihove međusobne odnose. Opisuje sukladnost dužina i kutova. Crta usporedne i okomite pravce, susjedne i vršne kutove te kutove uz presječnicu usporednih pravaca. Analizira kutove s usporednim kracima. Prepoznaje vrste kutova, od šiljastoga do punoga. Konstruira i definira simetralu dužine, opisuje i primjenjuje njezina svojstva.

**MAT OŠ C.5.2.** Opisuje i crta /konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.

- Precizno i uredno crta/konstruira, skicira geometrijske likove (kvadrat, pravokutnik, trokut, kružnicu, krug i njegove dijelove). Opisuje trokut, kvadrat i pravokutnik (vrhovi, stranice, dijagonale i njihovi odnosi, kutovi). Definira kružnicu i krug te opisuje njihove elemente (polumjer, promjer, tetiva). Opisuje i crta dijelove kruga (kružni isječak, kružni odsječak, kružni vijenac).

**MAT OŠ C.5.3.** Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini.

- Osnosimetrično i centralnosimetrično preslikava skupove točaka u ravnini (točku, dužinu, pravac, trokut, četverokut, krug i kružnicu). Prepoznaje osnosimetrični/centralnosimetrični lik i određuje os/centar simetrije.

**MAT OŠ D.5.1.** Mjeri i crta kutove, određuje mjere susjednih i vršnih kutova.

- Mjeri i crta kutove s pomoću kutomjera. Klasificira kutove od šiljastoga do punoga. Računa mjeru kuta u stupnjevima i minutama te crta kutove zadane svojom mjerom. Opisuje susjedne (sukute) i vršne kutove. Određuje mjere susjednih i vršnih kutova.

**MAT OŠ D.5.4.** Računa i primjenjuje opseg i površinu geometrijskih likova.

- Opisuje i računa opseg geometrijskoga lika ili geometrijskih oblika sastavljenih od osnovnih geometrijskih likova (kvadrata, pravokutnika, trokuta). Opisuje i računa površinu kvadrata i pravokutnika. Otkriva i obrazlaže formule za opseg i površinu. Povezuje umnožak dvaju jednakih brojeva s pojmom kvadrata broja i mjernom jedinicom za površinu. Poznaje mjerne jedinice za površinu (kilometar kvadratni, metar kvadratni, decimetar kvadratni, centimetar kvadratni, milimetar kvadratni).

**MAT OŠ D.5.5.** Računa i primjenjuje volumen kocke i kvadra.

- Objašnjava volumen kocke i kvadra kao broj istovrsnih jediničnih kocaka od kojih je sastavljen. Otkriva i obrazlaže formulu za volumen kocke i kvadra. Procjenjuje i računa volumen kocke i kvadra u problemskim situacijama. Povezuje umnožak triju jednakih prirodnih brojeva s pojmom kuba prirodnoga broja i mjernom jedinicom za volumen. Poznaje mjerne jedinice za volumen (metar kubni, decimetar kubni, centimetar kubni).

## **6. razred:**

**MAT OŠ C.6.1.** Konstruira kut i njegovu simetralu.

- Prepoznaje i opisuje kut, vrh kuta i krak kuta te kutni stupanj. Konstruira kutove od  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  i njihove kombinacije primjenjujući svojstva simetrale kuta. Prenosi kut. Procjenjuje mjeru nacrtanih kutova.

**MAT OŠ C.6.2.** Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.

- Otkriva i obrazlaže postojanje trokuta. Klasificira trokute s obzirom na mjere kutova. Skicira i konstruira trokute prema poučcima o sukladnosti. Opisuje sukladnost trokuta. Otkriva i crta visine svih vrsta trokuta. Istražuje odnos stranica i kutova u trokutu te odnos vanjskih i unutarnjih kutova trokuta.

**MAT OŠ C.6.3.** Konstruira četverokute, analizira njihova svojstva i odnose.

- Na osnovi uočenih svojstava i odnosa stranica, kutova i dijagonala paralelograma, opisuje, skicira i konstruira kvadrat, pravokutnik, paralelogram i romb. Opisuje

kružnicu kvadratu i pravokutniku. Klasificira četverokute s obzirom na paralelnost njihovih stranica.

**MAT OŠ D.6.2.** Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.

- Opisuje i računa opseg i površinu geometrijskoga lika ili geometrijskih oblika sastavljenih od osnovnih geometrijskih likova (trokuta i paralelograma). Istražuje i primjenjuje zbroj mjera kutova u trokutu i četverokutu.

**MAT OŠ D.6.4.** Pridružuje cijele i pozitivne racionalne brojeve točkama brojevnoga pravca.

- Pridružuje točke pravca cijelim i racionalnim brojevima (ishodište, jedinična dužina, jedinična točka, koordinata točke). Očitava koordinatu točke, opisuje njezin položaj na brojevnome pravcu te matematički zapisuje.

**MAT OŠ D.6.5.** U pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini crta točke zadane cjelobrojnim koordinatama.

- Organizira pravokutni koordinatni sustav u ravnini (ishodište, jedinične dužine, koordinate točke, koordinatne osi, kvadranti). Povezuje koordinate točke i uređeni par cijelih brojeva. Očitava i crta točke zadane cjelobrojnim koordinatama uz odgovarajući zapis matematičkim jezikom. Prepoznaje i tumači pripadnost točke kvadrantima i koordinatnim osima. Crta likove određene točkama s cjelobrojnim koordinatama. Grafički rješava matematičke probleme.

## **7. razred:**

**MAT OŠ C.7.1.** Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.

- Prepoznaje mnogokute u prostoru. Opisuje mnogokut (stranice, unutarnje i vanjske kutove, dijagonale, središnji kut pravilnoga mnogokuta). Razlikuje pravilne i nepravilne mnogokute, konveksne i nekonveksne. Opisuje središnji kut i crta karakteristični trokut. Konstruira pravilne mnogokute. Pronalazi i opisuje

particije (trokut, paralelogram) nepravilnoga mnogokuta. Skicira, crta ili konstruira nepravilni mnogokut.

**MAT OŠ C.7.2.** Crta, zbraja i oduzima vektore.

- Crta i opisuje vektor, njegov smjer, orijentaciju i duljinu. Opisuje odnose između dvaju ili više vektora matematičkim jezikom. Prepoznaje i crta jednake i suprotne vektore, opisuje nulvektor. Zbraja i oduzima vektore u ravnini.

**MAT OŠ C.7.3.** Translatira skupove točaka u ravnini.

- Translatira točke, dužine, pravce i ostale skupove točaka u ravnini (trokut, četverokut, krug i kružnicu) za zadani vektor. Prepoznaje i opisuje lik nastao translacijom. Translacijom stvara složene slike.

**MAT OŠ D.7.1.** Pridružuje točke pravca racionalnim brojevima.

- Pridružuje točke pravca racionalnim brojevima. Očitava i zapisuje koordinatu točke te opisuje njezin položaj u koordinatnome sustavu na pravcu matematičkim jezikom. Organizira koordinatni sustav na pravcu. Procjenjuje položaj racionalnoga broja u odnosu na najbliže cijele brojeve.

**MAT OŠ D.7.2.** U koordinatnome sustavu u ravnini crta točke s racionalnim koordinatama i stvara motive koristeći se njima.

- Crta i opisuje koordinatni sustav u ravnini. Crta i očitava točke s pomoću njihovih koordinata. Crta geometrijske oblike određene koordinatama točaka koje ih određuju. Dopunjava i stvara transformirane slike (osna i centralna simetrija, translacija). Grafički rješava matematičke probleme.

**MAT OŠ D.7.3.** Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.

- Opisuje i računa opseg i površinu nepravilnih i pravilnih mnogokuta. Otkriva, obrazlaže i primjenjuje formulu za površinu pravilnoga mnogokuta koristeći se površinom karakterističnoga trokuta. Argumentira odabir strategije za računanje opsega i površine mnogokuta u problemskoj situaciji.



**MAT OŠ D.7.4.** Računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova.

- Istražuje i računa opseg i površinu kruga i njegovih dijelova. Objašnjava ulogu i svojstva broja  $n$ . Modelira površinama i opsezima geometrijskih oblika (krug i dijelovi, kružnica i dijelovi, kružni vijenac, mnogokuti) rješavanje problemske situacije.

## **8. razred:**

**MAT OŠ C.8.1.** Skicira prikaz uspravnoga geometrijskog tijela u ravnini.

- Prostoručno skicira uspravna geometrijska tijela u ravnini (kocka, kvadar, pravilna četverostrana prizma, pravilna četverostrana piramida, valjak i stožac). Matematičkim jezikom opisuje geometrijsko tijelo. Na crtežu skicira i matematičkim jezikom opisuje elemente geometrijskoga tijela (plošna i prostorna dijagonala, visina pobočke, visina tijela, polumjer i promjer baze, izvodnice). U ravnini skicira prikaze geometrijskih oblika.

**MAT OŠ C.8.2.** Analizira i izrađuje modele i mreže uspravnih geometrijskih tijela.

- Prema modelu uspravnoga geometrijskog tijela (kocka, kvadar, pravilna četverostrana prizma i pravilna četverostrana piramida, valjak i stožac) opisuje plohe koje ga omeđuju i na osnovi toga izrađuje mrežu tijela koja će mu biti potrebna za određivanje njegova oplošja. Izrađuje modele uspravnih geometrijskih tijela. Promatra tijela koja ga okružuju, imenuje ih, opisuje, analizira i crta njihove mreže.

**MAT OŠ C.8.3.** Primjenjuje Talesov poučak.

- Otkriva i izriče Talesov poučak. Primjenom Talesova poučka dijeli dužinu na sukladne dijelove i točkom u zadanome omjeru. Primjenjuje Talesov poučak za crtanje trokuta i pravokutnika. Matematičkim jezikom opisuje sličnost trokuta i mnogokuta. Opisuje svojstva sličnih likova. Primjenjuje Talesov poučak za rješavanje problemske situacije.

**MAT OŠ C.8.4.** Prikazuje međusobne odnose dviju kružnica u ravnini.

- Opisuje i konstruira koncentrične kružnice. Opisuje kružni vijenac, diralište i sjecište. Konstruira motive primjenom različitih odnosa kružnica u ravnini. Razlikuje međusobne odnose kružnica u ravnini. Konstruira dvije kružnice koje se dodiruju. Istražuje odnose polumjera kružnica i udaljenosti njihovih središta pa donosi zaključke.

**MAT OŠ D.8.1.** Primjenjuje Pitagorin poučak.

- U problemskim/geometrijskim situacijama uočava pravokutni trokut. Izriče Pitagorin poučak. Objašnjava i primjenjuje Pitagorin poučak na pravokutni trokut, kvadrat, pravokutnik, jednakostranični i jednakokrani trokut, romb. Istražuje i otkriva obrat Pitagorina poučka i primjenjuje ga.

**MAT OŠ D.8.2.** Primjenjuje oplošje i volumen geometrijskih tijela.

- Opisuje oplošje i volumen nacrtanoga geometrijskog tijela. Oplošje povezuje s mrežom geometrijskoga tijela. Uočava i opisuje elemente tijela i veze među njima (uključujući visinu i izvodnice). Objašnjava volumen kao mjeru prostora koje zauzima tijelo. Primjenjuje računanje oplošja i volumena geometrijskih tijela u problemskim situacijama. Istražuje i otkriva odnose volumena prizme i piramide. Prošireni sadržaj: Kugla.

**MAT OŠ D.8.3.** Prikazuje pravce i analizira njihove međusobne položaje u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini.

- Crta pravac zadan jednadžbom oblika  $y = ax + b$ , gdje su  $a$  i  $b$  racionalni brojevi, u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini. Čita i tumači koeficijente jednadžbe pravca. Određuje jednadžbu pravca određenoga dvjema točkama ili grafičkim prikazom. Određuje i očitava koordinate presjeka pravaca. Međusobne odnose pravaca u ravnini povezuje s njihovim jednadžbama (usporednost, podudarnost). Primjenjuje međusobne odnose pravaca za tumačenje broja rješenja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznicama.

**MAT OŠ C.8.** Primjenjuje kompoziciju preslikavanja u ravnini. (IZBORNI ISHOD)

- Odabire dva preslikavanja u ravnini i konstruira njihovu kompoziciju. Obrazlaže postupak i svojstva kompozicije preslikavanja u ravnini. Kreira motiv zadanom kompozicijom više od dva preslikavanja. Određuje os simetrije, centar simetrije, vektor translacije, središte i kut rotacije u nacrtanoj kompoziciji. Analizira kompoziciju preslikavanja.

### **1. razred matematičke gimnazije – 210 sati godišnje:**

**MAT SŠ C.1.1.** Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.

- Definiira i konstruira simetralu dužine, simetralu kuta, visinu i težišnicu te karakteristične točke trokuta. Uočava svojstva težišta. Analizira položaj karakterističnih točaka ovisno o vrsti trokuta. Otkriva Eulerov pravac. Otkriva formule za površinu trokuta sa zadanim polumjerom upisane i opisane kružnice.

**MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2.** Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.

- Izriče i ilustrira teoreme o sukladnosti i sličnosti trokuta te Talesov teorem o proporcionalnosti dužina, primjenjuje ih u modeliranju problema. Određuje, obrazlaže i primjenjuje odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim trokutima. Primjenjuje Heronovu formulu pri računanju površine trokuta. Rješavajući primjere zadataka, upoznaje povijest matematike. Rješava probleme koristeći se Euklidovim poučkom o pravokutnome trokutu. Dokazuje tvrdnje rabeći poučke o sukladnosti i sličnosti.

**MAT SŠ D.1.3.** Primjenjuje trigonometrijske omjere.

- Primjenjuje trigonometrijske omjere pri modeliranju problemskih situacija i rješavanju problema u planimetriji (trokut, kvadrat, pravokutnik, paralelogram, romb, trapez, mnogokut, deltoid).

## **2. razred matematičke gimnazije – 210 sati godišnje:**

**MAT SŠ C.2.3. MAT SŠ D.2.1.** Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu

- Povezuje trigonometrijske omjere u pravokutnome trokutu s koordinatama točke na kružnici. Primjenjuje poučak o sinusima, uočava mogućnost i nalazi dva rješenja. Primjenjuje poučak o kosinusu. Računa površinu proizvoljnoga trokuta. Primjenjuje poučke u planimetriji, stereometriji i problemskim zadacima.

**MAT SŠ C.2.4. MAT SŠ D.2.2.** Primjenjuje znanja o kružnici i krugu.

- Opisuje elemente kružnice i kruga te ih prikazuje u ravnini. Konstruira tangentu na kružnicu. Primjenjuje poučak o obodnome i središnjemu kutu pri dokazu Talesova poučka. S pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnoga luka, površinu kružnoga isječka i površinu kružnoga odsječka. Povezuje duljinu kružnoga luka s radijanskom mjerom kuta.

**MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3.** Analizira položaj pravaca i ravnina u prostoru te računa udaljenost i mjeru kuta.

- Razlikuje točku, pravac, ravninu te analizira i objašnjava međusobne položaje. Određuje ortogonalnu projekciju geometrijskoga objekta. Računa udaljenosti točkaka do pravaca i ravnina te udaljenost pravaca i ravnina. Računa mjeru kuta između dvaju pravaca, pravca i ravnine, dviju ravnina.

**MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.** Računa volumen i oplošje geometrijskih tijela.

- Prepoznaje, opisuje i skicira prizmu, piramidu, valjak, stožac i kuglu. Računa elemente (duljine bridova, volumen, oplošje, polumjer baze...) uspravnih i kosih prizmi, valjaka, piramida, stožaca te kugle i rotacijskih tijela. Računa elemente krnjih tijela.

## **3. razred matematičke gimnazije – 245 sati godišnje:**

**MAT SŠ C.3.6. MAT SŠ D.3.1.** Primjenjuje račun s vektorima.

- Prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora. Računa s vektorima u ravnini i prostoru (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu. Određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak

vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora. Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički). Dijeli dužinu u zadanome omjeru. Računa i geometrijski interpretira vektorski umnožak i mješoviti umnožak. Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadacima i dokazuje tvrdnje u analitičkoj geometriji ravnine i prostora.

**MAT SŠ C.3.7. MAT SŠ B.3.10. MAT SŠ D.3.2. MAT SŠ E.3.1.** Primjenjuje jednadžbu pravca.

- Prepoznaje, opisuje i crta, pravac u koordinatnome sustavu iz njegove jednadžbe i izvodi jednadžbu pravca iz grafičkoga prikaza ili zadanih parametara. Određuje parametarsku i vektorsku jednadžbu pravca. Jednadžba pravca u prostoru. Računa mjeru kuta pravca s pozitivnim dijelom apscise i povezuje s koeficijentom smjera. Crta i određuje pravce paralelne s koordinatnim osima. Računa udaljenost točke od pravca (u ravnini i prostoru) i mjeru kuta između pravaca. Određuje vektor normale pravca, simetralu para pravaca, simetralu kuta. Modeliranje: Interpretira podatke s pomoću pravca regresije. Razlikuje/uočava linearni trend danih podataka. Dane podatke opisuje linearnom vezom po mogućnosti uz uporabu tehnologije.)

**MAT SŠ B.3.11. MAT SŠ C.3.9. MAT SŠ D.3.3.** Primjenjuje jednadžbu kružnice.

- Prepoznaje kanonski oblik jednadžbe kružnice i iz nje očitava duljinu polumjera i koordinate središta kružnice i obratno. Iz grafičkoga prikaza određuje jednadžbu kružnice. Određuje grafički ili računski jednadžbu kružnice u posebnome položaju (dodiruje jednu ili obje koordinatne osi) ili koncentrične kružnice. Iz općega oblika jednadžbe kružnice prelazi u kanonski oblik i obratno. Određuje jednadžbu kružnice kroz tri točke. Ispituje međusobni položaj dviju kružnica. Ispituje međusobni položaj dviju kružnica.

**MAT SŠ B.3.13. MAT SŠ C.3.10.** Primjenjuje jednadžbu tangente kružnice.

- Nabraja i opisuje odnose pravca i kružnice. Određuje grafički i računski presjek pravca i kružnice. Izvodi uvjet dodira pravca i kružnice. Određuje jednadžbu tangente na kružnicu iz točke kružnice i izvan kružnice. Određuje jednadžbu

normale. Određuje mjeru kuta pod kojim pravac siječe kružnicu i mjeru kuta pod kojim se sijeku dvije kružnice. Određuje pol i polaru kružnice.

**MAT SŠ B.3.14. MAT SŠ C.3.11.** Primjenjuje jednadžbe elipse, hiperbole i parabole.

- Prepoznaje jednadžbu elipse, hiperbole i parabole i iz nje pronalazi nepoznate elemente krivulje i obratno. Iz grafičkoga prikaza ili zadanih uvjeta pronalazi jednadžbu elipse, hiperbole i parabole. Određuje parametarske i vršne jednadžbe krivulja drugoga reda.

**MAT SŠ C.3.12.** Primjenjuje jednadžbu tangente elipse, hiperbole i parabole.

- Nabraja i opisuje odnose pravca i krivulja drugoga reda. Određuje grafički i računski presjek pravca i krivulje. Izvodi uvjet dodira pravca i krivulje. Određuje jednadžbu tangente na krivulju iz točke krivulje i izvan krivulje. Određuje presjek i mjeru kuta između krivulja.

#### **4 razred matematičke gimnazije – 245 sati godišnje:**

**MAT SŠ A.4.4. MAT SŠ C.4.1.** Interpretira računske operacije s kompleksnim brojevima u Gaussovoj ravnini.

- Prikazuje kompleksni broj u Gaussovoj ravnini, određuje i prikazuje konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnoga broja. Rješenja jednadžbi i nejednadžbi grafički prikazuje u Gaussovoj ravnini. Interpretira geometrijsko značenje zbroja, razlike, umnoška ili modula razlike dvaju kompleksnih brojeva. Rješenja jednadžbe, primjerice  $z^5 = 2$ , prikazuje u Gaussovoj ravnini.

## 2. VAN HIELE TEORIJA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

Svaki čovjek možda misli i razmišlja na svoj način, no svima nam je zajedničko da se naše sposobnosti razmišljanja i rasuđivanja konstantno razvijaju. Supružnici Pierre van Hiele i Dina van Hiele-Geldof su 1960.-ih razvili teoriju geometrijskog mišljenja u kojoj pružaju uvid u razlike u geometrijskom razmišljanju pojedinaca te kako te razlike nastaju. Svaka razina opisuje misaone procese koji se koriste u geometrijskim kontekstima. Van Hiele teorija također pokušava objasniti zašto veliki dio učenika ima problema u učenju geometrije te daje savjete kako učenicima olakšati njeno učenje. Važno je naglasiti da razine ne opisuju količinu geometrijskog znanja koje imamo, već opisuju kako i o kojem tipu geometrijskih ideja mislimo.

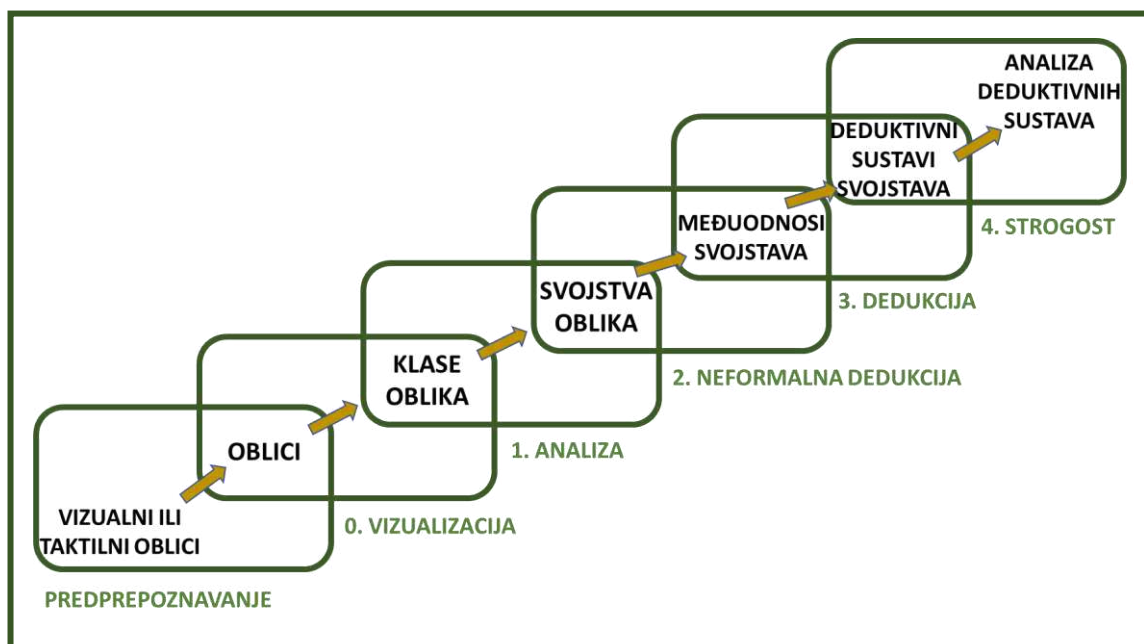
Ključnu razliku među razinama predstavljaju objekti o kojima smo u stanju geometrijski misliti. Produkt mišljenja na svakoj od razina je isti kao objekt mišljenja na sljedećoj razini. Objekti mišljenja na jednoj razini trebaju biti osmišljeni tako da odnosi među tim objektima postanu fokus sljedeće razine. Da bismo dosegнули bilo koju od razina, moramo proći sve prethodne razine, a da bi prošli neku razinu moramo iskusiti geometrijsko mišljenje primjereno toj razini i u svojoj glavi stvorili objekte i veze

karakteristične za tu razinu. Dob čovjeka nije povezana s razinom na kojoj se on nalazi. Osoba srednje dobi može na primjer biti na prvoj razini, a neki ljudi za cijelog svog života ne uspiju prijeći na drugu razinu.

Napredovanje razinama iziskuje geometrijsko iskustvo. Djeca bi trebala istraživati, razgovarati i komunicirati o sadržaju sa sljedeće razine dok povećavaju svoje iskustvo na svojoj trenutnoj razini. Kada su upute ili jezik na višoj razini od razine djeteta, dijete neće moći razumjeti koncept koji se razvija. Zapamtit će činjenice, ali neće povezati odnose između uključenih svojstava.

## 2.1. Razine geometrijskog mišljenja

Van Hiele teorija geometrijskog mišljenja sastoji se od 5 razina koje se najčešće označavaju brojevima od nula do četiri (ponekad brojevima od jedan do pet). Na Slici 2.1.1. možemo vidjeti grafički prikaz Van Hiele teorije, a sada ćemo opisati razine od kojih se sastoji.



Slika 2.1.1. Van Hiele teorija geometrijskog mišljenja

### Razina predprepoznavanja

Učenici na ovoj razini nisu u mogućnosti prepoznati i razlikovati uobičajene objekte. Mogu primijetiti samo neka vizualna svojstva što onemogućava razlikovanje



nekih oblika. Na primjer mogu razlikovati krug od kvadrata, no ne razlikuju kvadrat i trokut. Ovu razinu možemo usporediti s učenjem riječi. Dijete nauči neku riječ ispravno izgovarati, no ne zna što ta riječ znači niti je može staviti u kontekst. Ova razina nije izvorno dio Van Hiele teorije, no uočivši da su neka djeca ispod razine vizualizacije kasnije su je uveli Clements and Battista (1992). Objekt mišljenja na razini predprepoznavanja su specifični vizualni i taktilni oblici, a proizvod mišljenja su oblici i njihov izgled (čemu su nalik).

### **Razina 0. Vizualizacija**

Na ovoj razini učenici pri prepoznavanju geometrijskih oblika te uspoređivanju, klasificiranju i opisivanju često koriste nevažna vizualna svojstva. Obično se pozivaju na vizualne prototipove geometrijskih oblika i lako se zbunjuju njihovom orijentacijom, odnosno položajem u ravnini/prostoru. Nisu sposobni pojmiti beskonačno mnogo varijacija određenog tipa geometrijskog oblika (npr. u terminima njegove orijentacije i oblika). Nekonzistentno klasificiraju geometrijske oblike (npr. koriste neuobičajena ili nevažna svojstva kao kriterije sortiranja oblika). Nepotpuno opisuju (definiraju) geometrijske oblike tako što nužne uvjete (često vizualne) smatraju dovoljnim. Objekt mišljenja na razini vizualizacije su oblici i njihov izgled (čemu su nalik), a proizvod mišljenja klase ili grupe oblika koji izgledaju “slično”.

### **Razina 1. Analiza**

Na razini analize učenici eksplicitno uspoređuju geometrijske oblike u terminima njihovih bitnih svojstava. Izbjegavaju inkluzije među različitim klasama geometrijskih oblika (npr. kvadrate i pravokutnike ili trapeze i paralelograme smatraju disjunktne klasama). Sortiraju geometrijske oblike samo s obzirom na jedno svojstvo (npr. s obzirom na svojstva stranica, dok svojstva poput simetrije, kutova i dijagonala ignoriraju). Za opisivanje (definiranje) geometrijskih oblika neekonomično koriste sva njihova svojstva umjesto samo dovoljnih. Eksplicitno odbijaju definicije koje daju drugi ljudi (npr. nastavnik, udžbenik) i prednost daju definicijama koje su sami osmislili. Empirijski se uvjeravaju u istinitost tvrdnje (npr. na temelju skice, odnosno nekoliko

mjerenja ili primjera). Objekt mišljenja na razini analize su klase oblika umjesto pojedinačnih oblika s razine 0., a proizvod mišljenja su svojstva oblika.

### **Razina 2. Neformalna dedukcija**

Na ovoj razini učenici formuliraju korektne i ekonomične definicije geometrijskih oblika. Mogu nepotpune definicije transformirati u potpune i spontanije prihvaćaju i koriste definicije novih pojmova. Prihvaćaju različite ekvivalentne definicije istog pojma. Hijerarhijski klasificiraju geometrijske oblike (npr. četverokute). Eksplicitno koriste logički oblik ako ... onda pri formuliranju pretpostavki i baratanju njima, te implicitno koriste osnovna logička pravila zaključivanja (npr. modus ponens). Nesigurni su i ne razumiju ulogu aksioma, definicija, teorema i dokaza (njima su to sve pravila). Objekt mišljenja na razini neformalne dedukcije su svojstva oblika, a proizvod mišljenja su odnosi među svojstvima geometrijskih oblika.

### **Razina 3. Dedukcija**

Na ovoj razini učenici s razmišljanja i razumijevanja odnosa geometrijskih oblika prelaze na zaključivanje i generalizaciju. Razumiju uloge aksioma, definicija, teorema i dokaza te spontano stvaraju pretpostavke i samoinicijativno ih deduktivno provjeravaju. Objekt mišljenja na razini dedukcije su odnosi među svojstvima geometrijskih oblika, a proizvod mišljenja su deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora).

### **Razina 4. Strogost**

Na najvišoj razini učenici, odnosno studenti u stanju su razumjeti, analizirati, uspoređivati i kritički evaluirati različite aksiomatske sustave geometrija. Objekt mišljenja na razini strogosti su deduktivni aksiomatski sustavi geometrije, a proizvod mišljenja je usporedba i suprotnosti među različitim aksiomatskim sustavima geometrije (euklidska i neeuklidske geometrije).

U planiranju nastave geometrije kako bi učenici što lakše savladali razine geometrijskog mišljenja, Dina van Hiele Geldof predlaže korištenje 5 faza učenja:

### **Faza 1. Informiranje**

Ova faza se temelji na dijalogu nastavnika i učenika. Cilj je ispitati postojeće znanje o geometrijskim oblicima i pojmovima te postaviti temelje za kasnije učenje. Na početku podučavanja treba procijeniti predznanje učenika. To možemo učiniti na primjer aktivnostima sortiranja. Na taj način ćemo moći procijeniti kako učenici misle o geometrijskim oblicima, ali i vidjeti kako se koriste matematičkim jezikom.

### **Faza 2. Usmjereno vođenje**

Ovu fazu karakteriziraju aktivnosti koje su strukturirane tako da izazivaju učenike na formalno prepoznavanje i verbaliziranje razumijevanja novih geometrijskih koncepata koji su uvedeni u fazi informiranja. Nastavnikovim usmjeravanjem, učenici bi trebali steći mogućnost uspostavljanja veza među svojstvima i karakteristikama geometrijskih oblika te njihovom razumijevanju.

### **Faza 3. Objašnjavanje**

U ovoj fazi učenja učenici se uključuju u verbalizaciju njihovog razumijevanja geometrijskih koncepata koje su promatrali u prethodnoj fazi. Uloga nastavnika tijekom ove faze je olakšati dijalog koji omogućuje učenicima da objasne i opišu svoje razumijevanje geometrijskih koncepata služeći se odgovarajućim matematičkim jezikom.

### **Faza 4. Slobodno usmjeravanje**

U ovoj fazi učenici razvijaju vlastiti način dovršavanja geometrijskih zadataka. Dobivaju teže i izazovnije zadatke u kojima otkrivaju vlastite načine za njihovo rješavanje. Poboljšavaju sposobnost formuliranja svog geometrijskog znanja što im omogućava da kritički razmišljaju o geometrijskim oblicima koji su im već od prije poznati.

### **Faza 5. Integriranje**

U ovoj fazi učenici vrednuju ono što su naučili te stvaraju pregled geometrijskih koncepata. Osim vrednovanja svog znanja, kritički vrednuju i zaključke drugih učenika. Dakle, u stanju su kritički vrednovati svoja i tuđa znanja.

## 2.2. Primjena u nastavi matematike

Za učenike koji su na razini vizualizacije cilj je doći do razine analize. Kako bi to postigli u nastavi treba provoditi aktivnosti s puno sortiranja i klasificiranja. Nastava treba uključivati dovoljno raznolikih primjera oblika kako njihove nebitne osobine ne bi previše dobile na važnosti. Učenici trebaju dobiti mnoštvo prilika za crtanje, izgradnju, sastavljanje i rastavljanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika. Aktivnosti se fokusiraju na specifične osobine ili svojstva kako bi učenici razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti. Treba koristiti modele i učila (fizičke materijale).

Kako bi učenici na razini analize došli do razine neformalne dedukcije aktivnosti na nastavi trebaju biti fokusirane na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje. Uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste broj svojstava oblika, a ideje se primjenjuju na cijele klase oblika (npr. svi četverokuti, sve prizme), a ne na pojedinačne modele. Nova se svojstva određuju analizom klasa oblika (npr. pronaći načine na koje se trokuti mogu sortirati u grupe i na temelju tih grupa definirati vrste trokuta). Također treba koristiti modele i učila (fizičke materijale), ali i alate dinamične geometrije.

Za prelazak s razine neformalne dedukcije na razinu dedukcije učenike treba poticati na stvaranje i provjeru hipoteza (npr. Vrijedi li to uvijek?, Je li to istina za sve trokute ili samo za pravokutne?) Ispitivati svojstva oblika kako bi se odredili nužni i dovoljni uvjeti za oblike ili koncepte (na primjer: Što misliš, koje će svojstvo dijagonala garantirati da se radi o kvadratu?). Koristiti jezik neformalne dedukcije: za svaki, za neke, ni za jedan, ako...onda, što ako i slično. Poticati učenike da se okušaju u izvođenju neformalnih dokaza i zahtijevati da se uvjere u smislenost neformalnih dokaza koje ponudi nastavnik ili drugi učenici.

### 3. MATEMATIČKI MODELI, UČILA I SLAGALICE

U razvoju prostornog zora jako je važno koristiti matematičke modele, učila i slagalice. Moramo naglasiti da modeli i učila ne smiju služiti samo za nastavnikovu demonstraciju matematičkih pojmova i koncepata, već za samostalno istraživanje i podršku učenicima u izgradnji novih matematičkih znanja. Matematički model je objekt, slika ili crtež koji predstavlja neki matematički koncept na temelju kojeg učenici mogu istraživati, povezivati i donositi zaključke o tom konceptu. Primjeri nekih matematičkih modela su: model temperature ili duljine za cijele brojeve, model površine kruga za razlomke te modeli geometrijskih tijela.

Za razliku od matematičkih modela, učila su fizički objekti koji predstavljaju konkretne matematičke koncepte i pojmove. Učila možemo držati u ruci i pomoću njih istraživati i otkrivati nova matematička znanja. Ona čine ključnu ulogu u razumijevanju i razvijanju geometrijskog mišljenja kod djece, a vrlo su koristan alat u rješavanju problema. Neka od učila koja se često koriste u nastavi matematike su: geometrijske i algebarske pločice, cuisenaireovi štapići, vaga jednakih krakova i geoploča koja je od

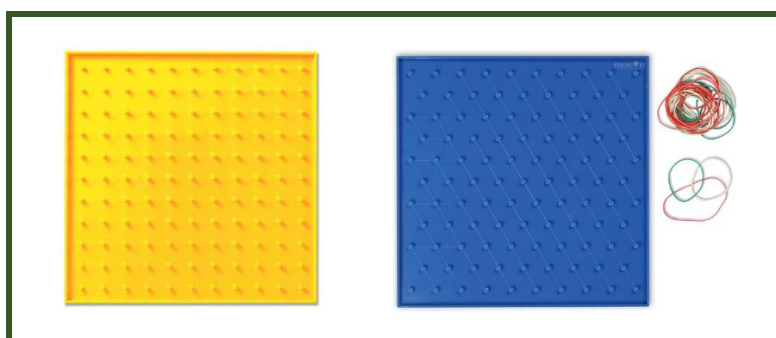
iznimne važnosti u razvoju prostornog mišljenja. Mnogo matematičkih učila danas je dostupno i u digitalnim verzijama, stoga postoji mogućnost i njihovog uključivanja u nastavu. U ovom poglavlju opisat ćemo i predstaviti geoploču, tangram i neke njegove inačice te graditeljske slagalice.

### 3.1. Geoploča

1952. godine egipatski matematičar Caleb Gattegno (1911. – 1988.), osmislio je jedan vrlo vrijedan alat, odnosno učilo koje se u današnje vrijeme sve češće koristi u školama i pomaže u unaprjeđivanju nastave matematike. Osmislio je geoploču. Geoploča je ploča s čavlicima koji su raspoređeni u kvadratnu, kružnu ili izometričku mrežu i oko kojih je moguće rastezati elastične gumice. Postoji više tipova geoploča, no najčešće se primjenjuju kvadratne s 5x5 i 11x11 čavlicima, kružna s 24 čavlića te izometrička u kojoj su čavlići raspoređeni u mrežu rombova sa šiljastim kutom veličine 60°. Tipove najčešćih geoploča možemo vidjeti na Slikama 3.1.1. i 3.1.2.



Slika 3.1.1. Kvadratna geoploča s 5x5 čavlicima (plava) i kružna s 24 čavlića (narančasta)<sup>7</sup>



Slika 3.1.2. Kvadratna s 11x11 čavlicima (žuta)<sup>8</sup> i izometrička geoploča (plava)<sup>9</sup>

<sup>7</sup> [https://95d0560153dc1f143d11-d446871382b5e7d4f35e6c4cecf7d007.ssl.cf2.rackcdn.com/CTU7748\\_L.jpg](https://95d0560153dc1f143d11-d446871382b5e7d4f35e6c4cecf7d007.ssl.cf2.rackcdn.com/CTU7748_L.jpg)

Geoploča je vrlo korisno učilo u nastavi matematike u osnovnoj školi jer učenicima:

- pomaže pri istraživanju matematičkih koncepata vezanih uz brojeve i algebru (npr. koncept razlomka, decimalnog broja i postotka) te geometriju (npr. koncepti opsega i površine, svojstva geometrijskih likova, koncept i primjena koordinatnog sustava u ravnini, mjerne jedinice za duljinu i površinu)
- olakšava vizualizaciju i omogućava im da „rade matematiku”
- pruža mogućnost da samostalno otkrivaju matematiku te razmjenjuju matematičke ideje, čime razvijaju svoje komunikacijske vještine i matematički rječnik
- omogućava postavljanje i rješavanje matematičkih problema i potiče ih na istraživanje, sustavnost, kreativnost i ustrajnost u radu, tako da oni postaju aktivni sudionici u procesu učenja.

U ovom radu ćemo se fokusirati na razumijevanje i istraživanje koncepata iz geometrije.

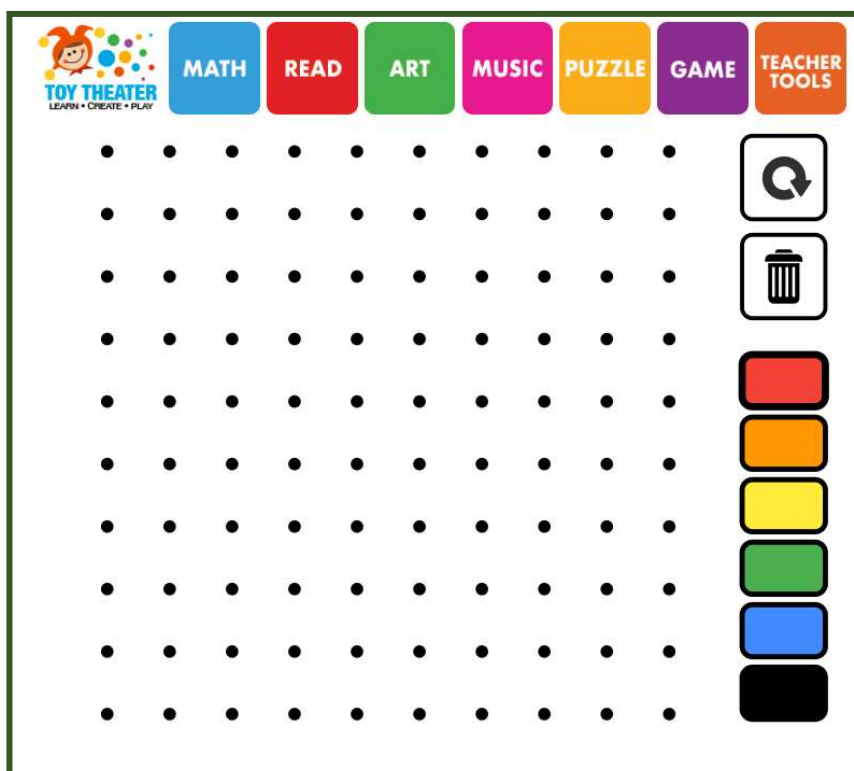
Ako nismo u mogućnosti nabaviti geoploču ili je sami izraditi, možemo koristiti i samo točkasti papir, a na internetu je dostupno više besplatnih aplikacija koje možemo koristiti u tu svrhu. Aktivnosti na geoploči u ovom radu su osmišljene tako da pomažu u razvoju prostornog zora te u razumijevanju koncepata iz područja geometrije i metrike. Slike u aktivnostima su napravljene na stranici Toy Theater; Educational Games for Kids, a geoploče koje ćemo koristiti su kvadratne s 5x5 i 10x10 čavličima. Prikaz digitalne geoploče možemo vidjeti na Slici 3.1.3.

Treba naglasiti da pri prvom susretu učenika s geopločom svakako im treba dati dovoljno vremena za upoznavanje s njom. Razrednom diskusijom ih treba potaknuti na uočavanje kakvog je oblika, od čega se sastoji, koliko čavlića ima u retku, a koliko u stupcu te koliko ih ukupno ima.

---

<sup>8</sup> <https://ryseltoys.com.sg/wp-content/uploads/2017/08/geobard-11pins.jpg>

<sup>9</sup> <https://www.lsscambodia.com/images/catalog/product/122665016110IsometricGridPatternGeoboard.jpg>



Slika 3.1.3. Digitalna geoploča<sup>10</sup>

## 3.2. Tangram

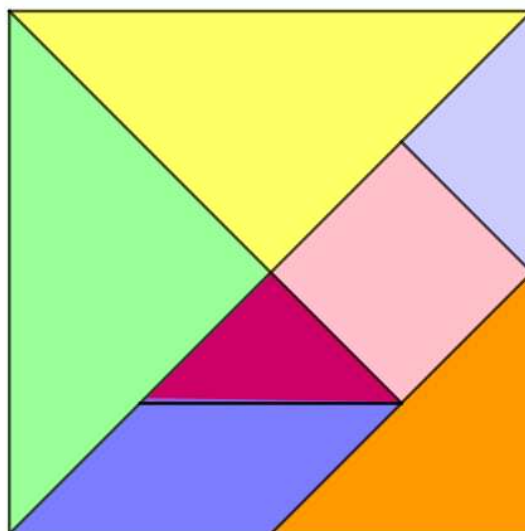
Jedna od najstarijih, ali i najpoznatijih slagalica s kojom se vrlo često susrećemo je Tangram. Slagalica je potekla iz Kine te je u Europu i Ameriku došla početkom 19. stoljeća. Dolaskom na ove prostore, zaludila je čovječanstvo, a činjenica da je i danas često prisutna govori o njenom neizmjernom značaju. Zanimljiv je podatak da je upravo ova slagalica bila najdraža rasonoda velikog Napoleona Bonaparte, a u slobodno vrijeme su je voljeli slagati i poznati engleski pisci: Lewis Carrol, Edgar Allan Poe, Hans Christian Anderson i znanstvenik Michael Faraday te John Quincy Adams, šesti predsjednik Sjedinjenih američkih država.

Tangram je dvodimenzionalna slagalica koja je napravljena tako da je kvadrat razrezan na sedam dijelova (2 velika jednakokračna pravokutna trokuta, 2 mala jednakokračna pravokutna trokuta, 1 srednji jednakokračan pravokutan trokut, 1 kvadrat i 1 paralelogram). Cilj igre je od svih sedam dijelova složiti neki zadani oblik. Oblici koji

<sup>10</sup> <https://toytheater.com/geoboard/>



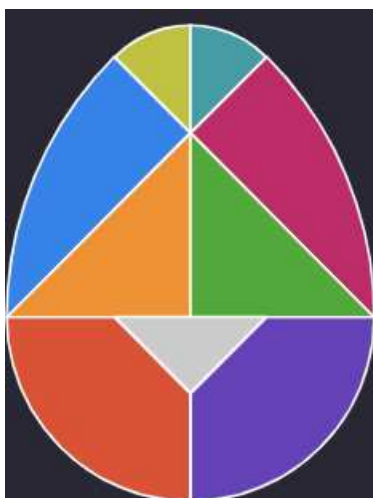
se mogu složiti su raznovrsni: od ljudi, životinja, predmeta, slova, brojeva, geometrijskih oblika, građevina... Pri slaganju uvijek se mora iskoristiti svih sedam dijelova te se ti dijelovi ne smiju međusobno preklapati ni postavljati jedan na drugi.



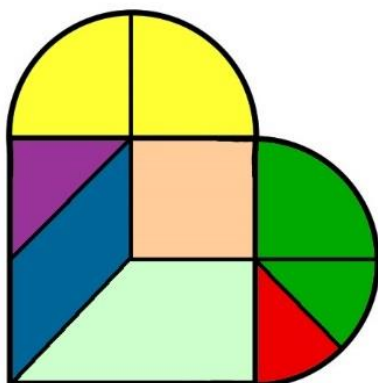
*Slika 3.2.1. Tangram*

Probleme vezane uz tangram učenici će rješavati naslućivanjem rješenja, odnosno Metodom pokušaja i pogrešaka. Jednom od prvih strategija koje naučimo u životu, učenje vlastitim iskustvom, odnosno učenje na vlastitim pogreškama. Metoda pokušaja i pogrešaka vrlo je značajna u rješavanju problema te je potrebno razvijati je od najmlađe dobi. Ova strategija ne iziskuje uvijek dublje razumijevanje problema i matematičkih koncepata u čijem se kontekstu primjenjuje, no pomaže u razvijanju logičkog razmišljanja i kreativnosti. Upravo se mnogi umjetnici koriste Metodom pokušaja i pogrešaka kad im ponestane inspiracije.

Osim klasičnog tangrama u novije vrijeme nastale su i mnoge moderne inačice ove igre. Dvije najpoznatije su magično jaje (u nekim izvorima se naziva još i Kolumbovo jaje) koje možemo vidjeti na Slici 3.2.2. i tangram srce, odnosno slomljeno srce prikazano na Slici 3.2.3.



*Slika 3.2.2. Tangram magično jaje<sup>11</sup>*

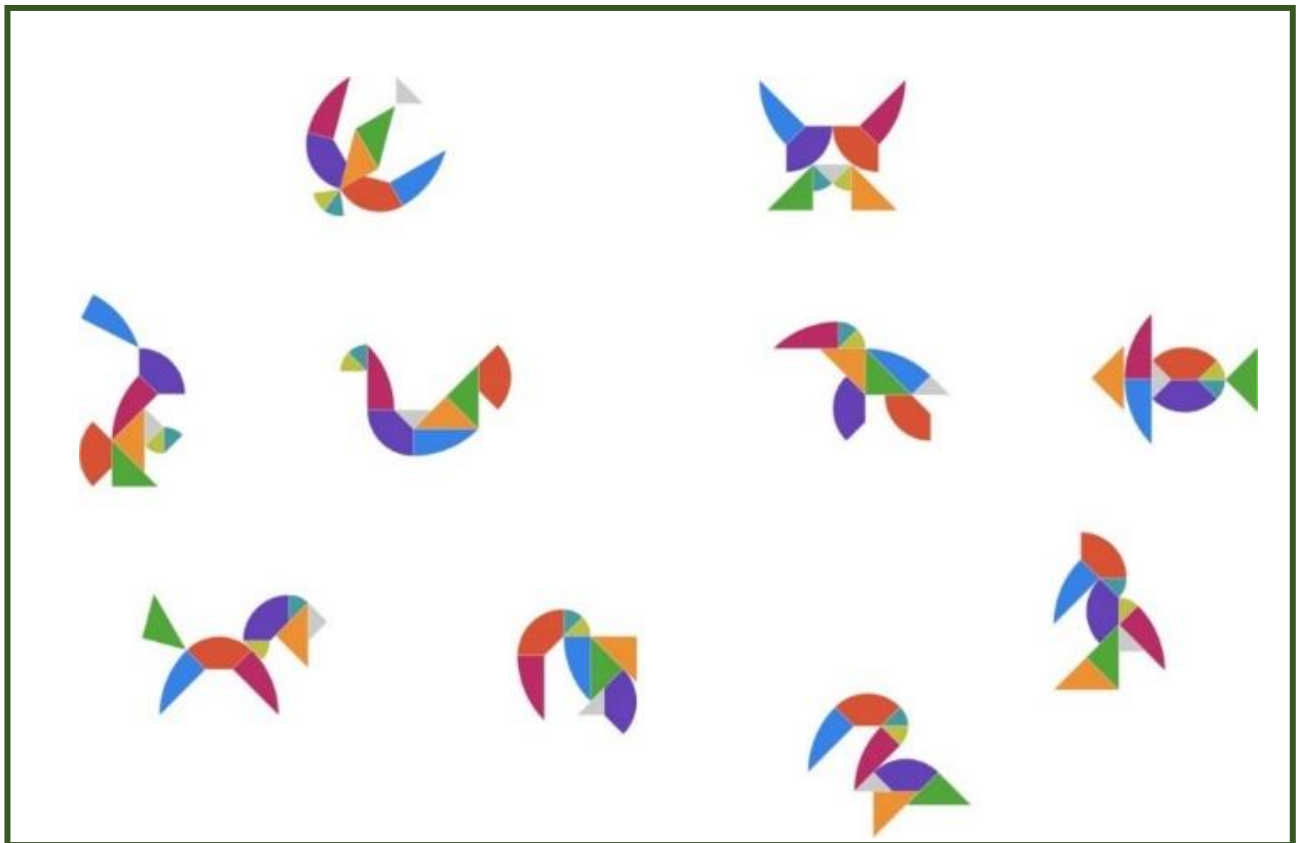


*Slika 3.2.3. Tangram srce<sup>12</sup>*

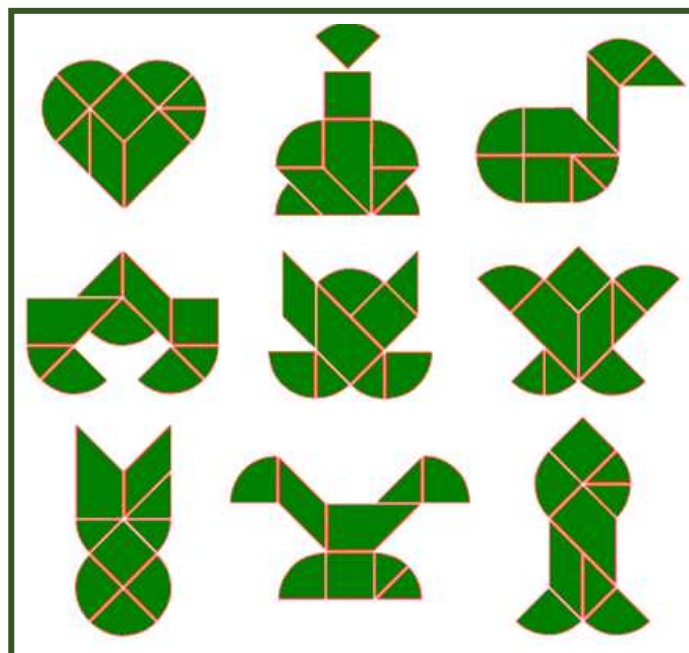
Pravila za slaganje ovih slagalica su ista kao i kod klasičnog tangrama. Potrebno je iskoristiti svih 9 dijelova slagalica koje je potrebno složiti tako da se ne preklapaju u zadani oblik. Na Slikama 3.2.4. i 3.2.5. možemo vidjeti neke od oblika koji se mogu složiti od ovih inačica igre tangram. S učenicima svakako treba komentirati od kakvih se dijelova sastoje ove slagalice. Cilj je da učenici što preciznije definiraju te dijelove. Što su učenici starije dobi, više je mogućnosti na koje se ove slagalice mogu implementirati u nastavu. Moći će računati površine i opsege dijelova ovih slagalica ili oblika koje su složili te konstruirati magično jaje.

<sup>11</sup> <https://static.mathigon.org/cms/ff01cfaafdd64240e913b3d5f130ace.png>

<sup>12</sup> <https://www.juegotangram.com.ar/IDS/EN/tipostangram/VariantesImagFull/cardiotangram.jpg>



Slika 3.2.4. Primjer nekih oblika koje možemo složiti od tangrama magično jaje<sup>13</sup>



Slika 3.2.5. Primjer nekih oblika koje možemo složiti od tangrama srce<sup>14</sup>

<sup>13</sup> <https://static.mathigon.org/cms/434835f949f41181e443f739a35182ac.png>

<sup>14</sup> <https://www.juegotangram.com.ar/IDS/EN/tipostangram/CardioTangram/CardioTangram.gif>

## 3.2. Graditeljske slagalice

U nastavu matematike, a posebice geometrije korisno je uključiti različite slagalice koje učenicima omogućavaju vizualizaciju matematičkih objekata i koncepata. Predstaviti ćemo neke od njih.

JOVO Click'n Construct su plastične slagalice pomoću kojih možemo vrlo lako slagati mreže geometrijskih tijela. To su zapravo jednakokranični trokuti, peterokuti, šesterokuti i kvadrati koji dolaze u raznim bojama te se lako mogu međusobno spajati. Pomoću njih učenici mogu slagati različite 3D modele. Ove slagalice možemo vidjeti na Slici 3.3.1.



*Slika 3.3.1. JOVO Click'n Construct slagalice<sup>15</sup>*

Zome Tool su slagalice koje se sastoje od kuglica za spajanje i štapića koji dolaze u 3 boje i 3 različite veličine. Svaka kuglica ima 62 rupe (30 u obliku kvadrata, 20 u obliku trokuta i 12 u obliku peterokuta). Plavi štapići idu u rupe u obliku kvadrata, žuti u trokutaste rupe, a crveni u rupe oblika peterokuta. Pomoću ovih slagalica mogu se slagati modeli raznih geometrijskih tijela, od najjednostavnijih do Platonovih i Arhimedovih, a

---

<sup>15</sup> [https://www.ozstock.com.au/images/201106/14528\\_0.jpg](https://www.ozstock.com.au/images/201106/14528_0.jpg)

vrlo se često koriste u nastavi kemije za slaganje modela molekula. Zome tool slagalice možemo vidjeti na Slici 3.3.2.



*Slika 3.3.2. Zome Tool slagalice<sup>16</sup>*

Slagalica koju također možemo uključiti u nastavu matematike su drvene kocke (Slika 3.3.3.) pomoću kojih učenici mogu slagati građevine i određivati poglede. A osim drvenih kocaka, možemo koristiti i drvene slagalice raznih oblika (Slika 3.3.4.)



*Slika 3.3.3. Drvene kocke<sup>17</sup>*



*Slika 3.3.4. Drvene slagalice različitih oblika<sup>18</sup>*

<sup>16</sup> <https://d1jqecz1iy566e.cloudfront.net/large/zt007.jpg>

<sup>17</sup> <https://dudica.com/wp-content/uploads/385-1517Drvene-kocke.jpg>

<sup>18</sup> [https://www.igrackeshop.hr/upload\\_files/products/drvene-kocke-za-gradnju-50-kom.jpg](https://www.igrackeshop.hr/upload_files/products/drvene-kocke-za-gradnju-50-kom.jpg)

## 4. RAZVOJ PROSTORNOG ZORA U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

U ovom poglavlju dat ćemo prijedlog aktivnosti za učenike osnovnih i srednjih škola koje pomažu u razvoju prostornog zora kod učenika te ih potiču na kreativnost i razmišljanje izvan okvira. Fokusirat ćemo se na predmetnu nastavu matematike. Aktivnosti su primjerene za učenike koji se nalaze na 0., 1. i 2. Van Hiele razini geometrijskog mišljenja te im pomažu da prijeđu s jedne razine na drugu. Aktivnosti koje slijede podijeljene su u 4 kategorije: Oblici i svojstva, Transformacije, Lokacija i Vizualizacija. Svaku od kategorija ćemo najprije ukratko opisati, a nakon toga krenuti s aktivnostima namijenjenim učenicima osnovnih, a potom srednjih škola. Svaku aktivnost povezat ćemo s odgojno-obrazovnim ishodima iz Nacionalnog matematičkog kurikuluma. Na kraju ćemo navesti nekoliko zadataka s natjecanja Klokkan bez granica.

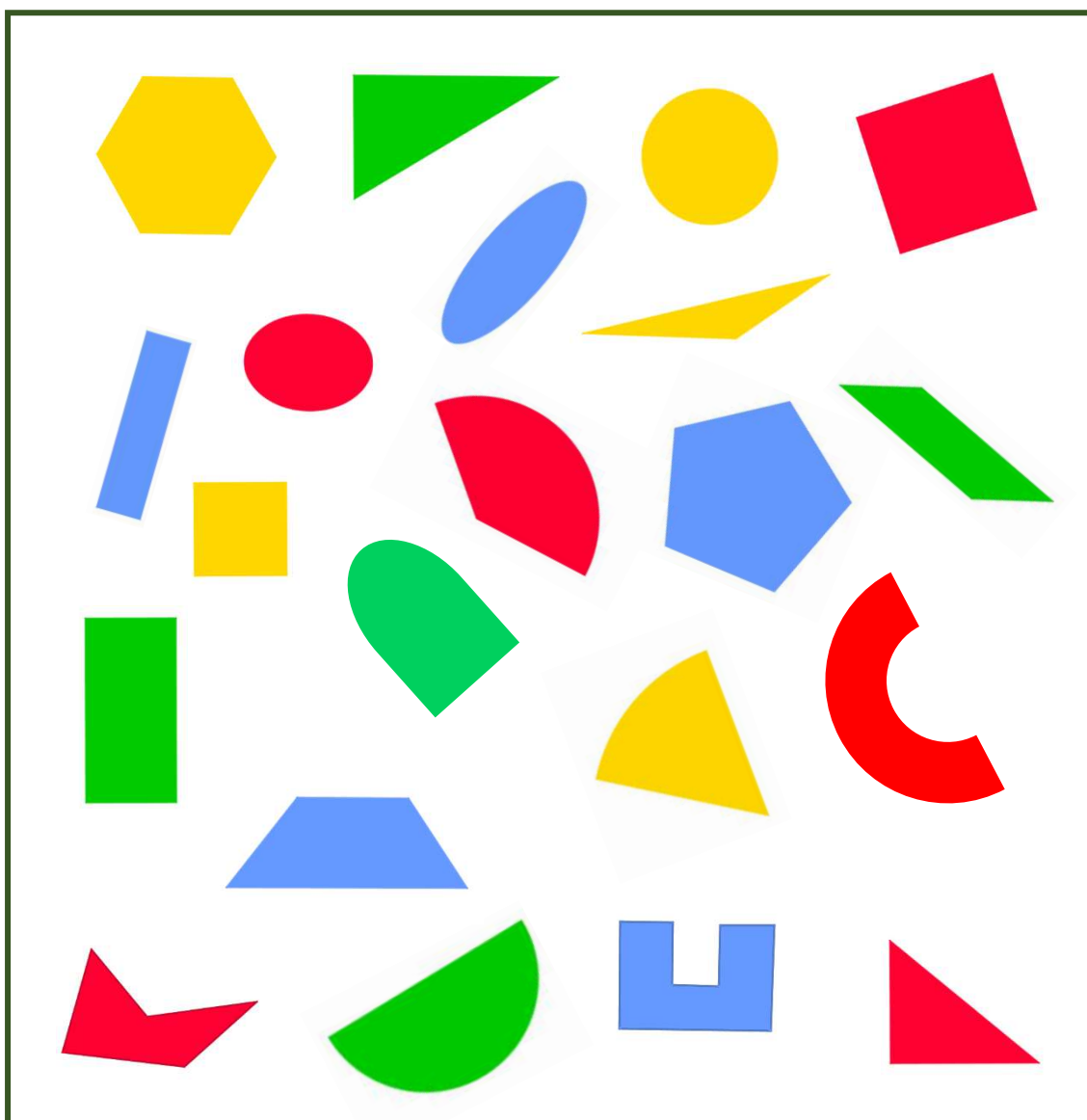
### 4.1. Oblici i svojstva

U ovom poglavlju ćemo predstaviti aktivnosti u kojima će učenici proučavati dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike te njihove međusobne odnose na temelju

njihovih svojstava. Učenici će sortirati, vizualno i taktilno prepoznavati oblike, istraživati njihova svojstva na geoploči te računati njihove opsege i površine.

#### 4.1.1. Aktivnost *Sortiranje oblika*

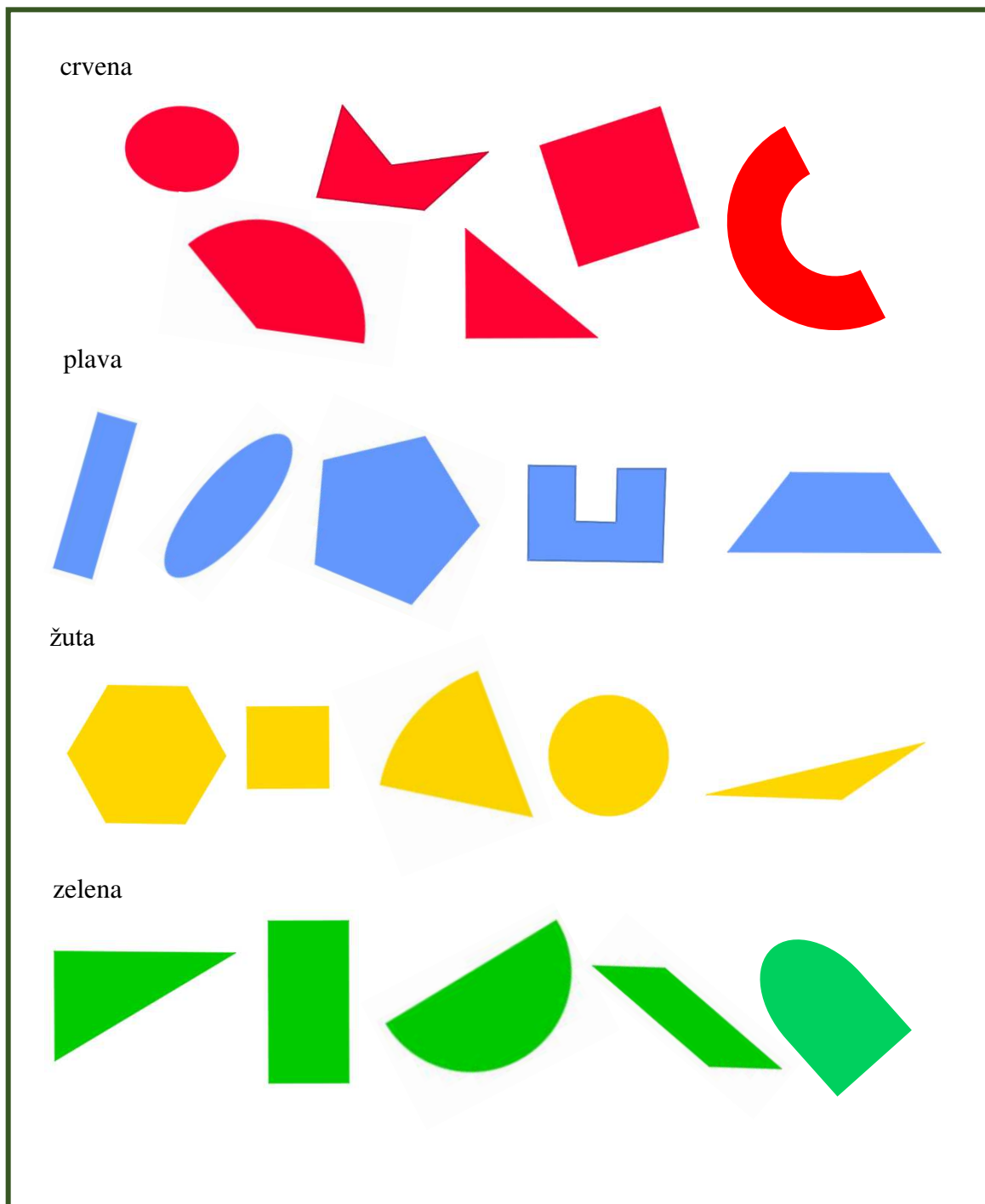
Ovu aktivnost mogu provoditi učenici raznih uzrasta. Cilj aktivnosti je prema vlastitom nahođenju sortirati zadane dvodimenzionalne ili trodimenzionalne oblike.



*Slika 4.1.1.1. Primjer dvodimenzionalnih oblika za sortiranje*

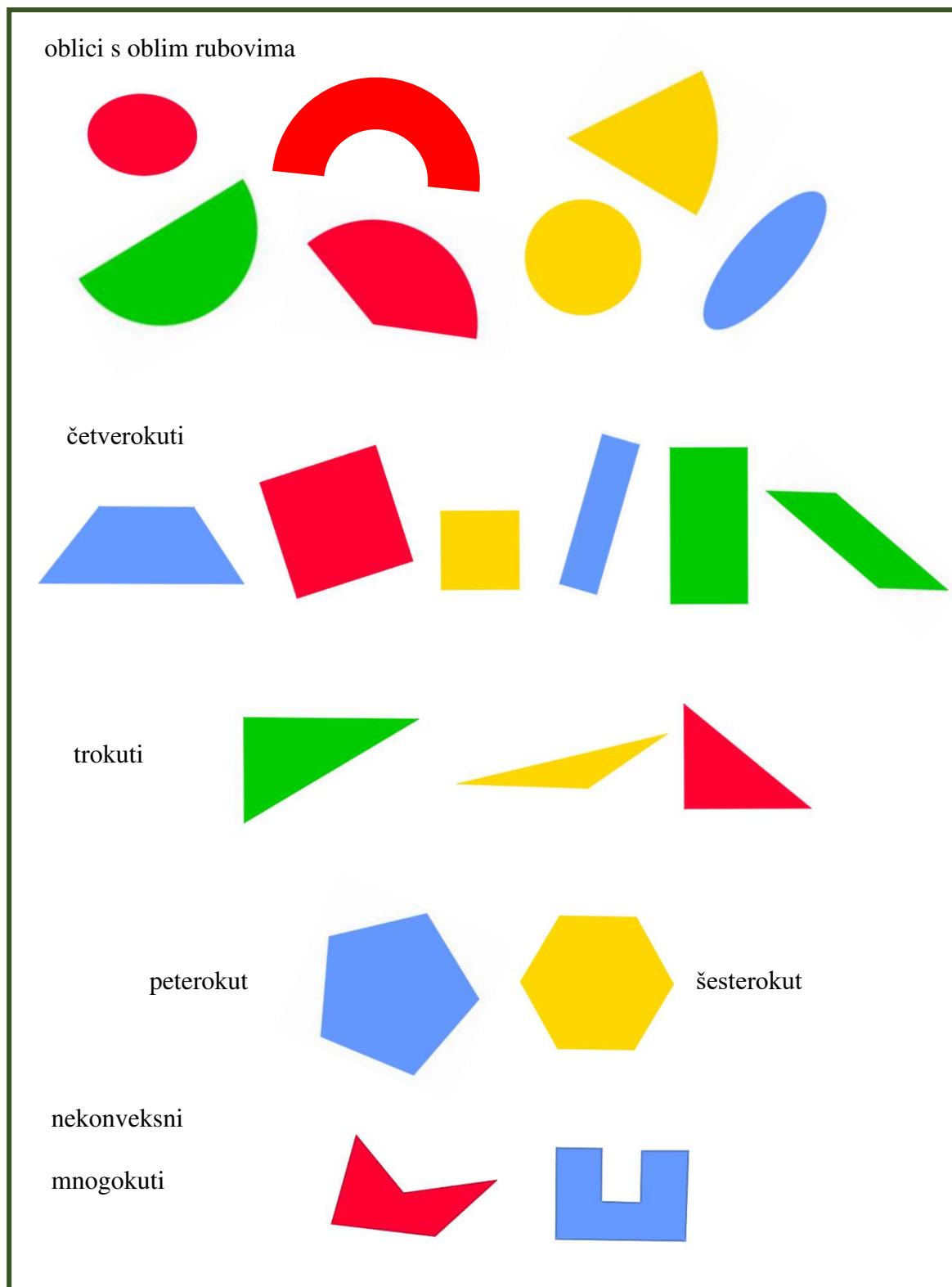


Jako važno je da učenici sami, a ne nastavnik, biraju kriterij prema kojem će razvrstavati dane oblike. Na taj način omogućavamo učenicima da koriste vlastite ideje, a nastavnik će vidjeti koja svojstva učenici znaju i na koji način razmišljaju o tim oblicima.



*Slika 4.1.1.2. Primjer sortiranja oblika prema boji (učenici mlađeg uzrasta)*



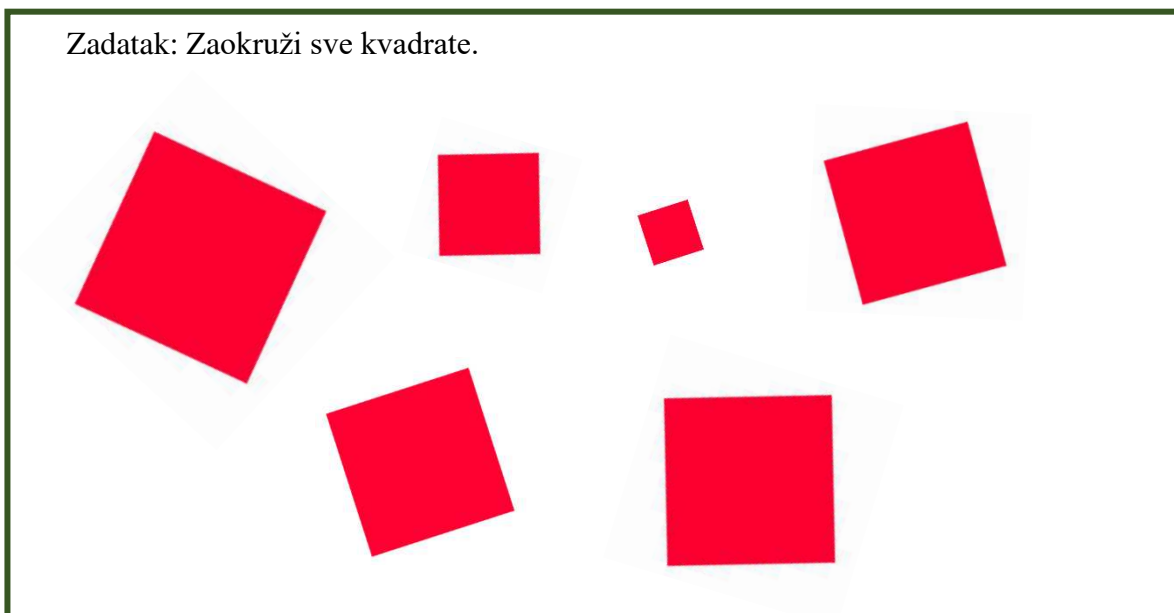


Slika 4.1.1.3. Primjer sortiranja oblika učenika starijeg uzrasta

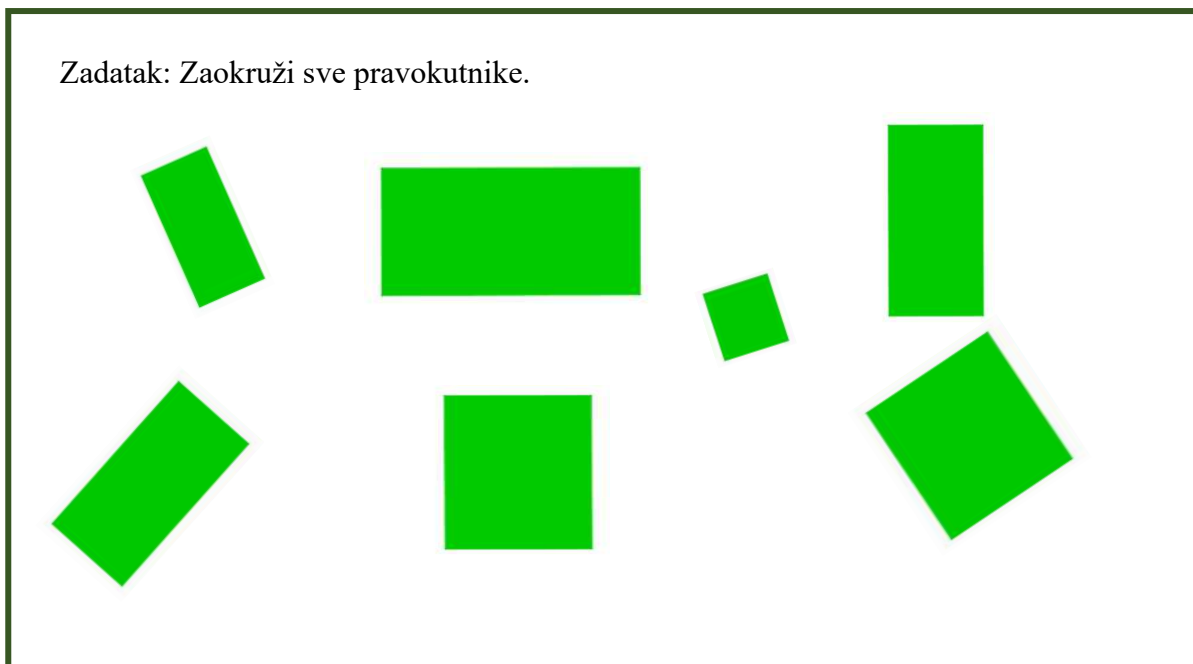
Ova aktivnost je Van Hieleve razine 0. iz razloga što učenici proučavaju oblike koje vide direktno ispred sebe i promatraju njihove sličnosti i razlike. Proizvod mišljenja u ovoj aktivnosti su klase ili grupe oblika koji izgledaju “slično”, a do kojih su učenici došli sami koristeći vlastite kriterije i vlastita znanja. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda učenja: MAT OŠ C.5.1. i MAT OŠ C.5.2.

#### 4.1.2. Aktivnost *Prepoznavanje likova*

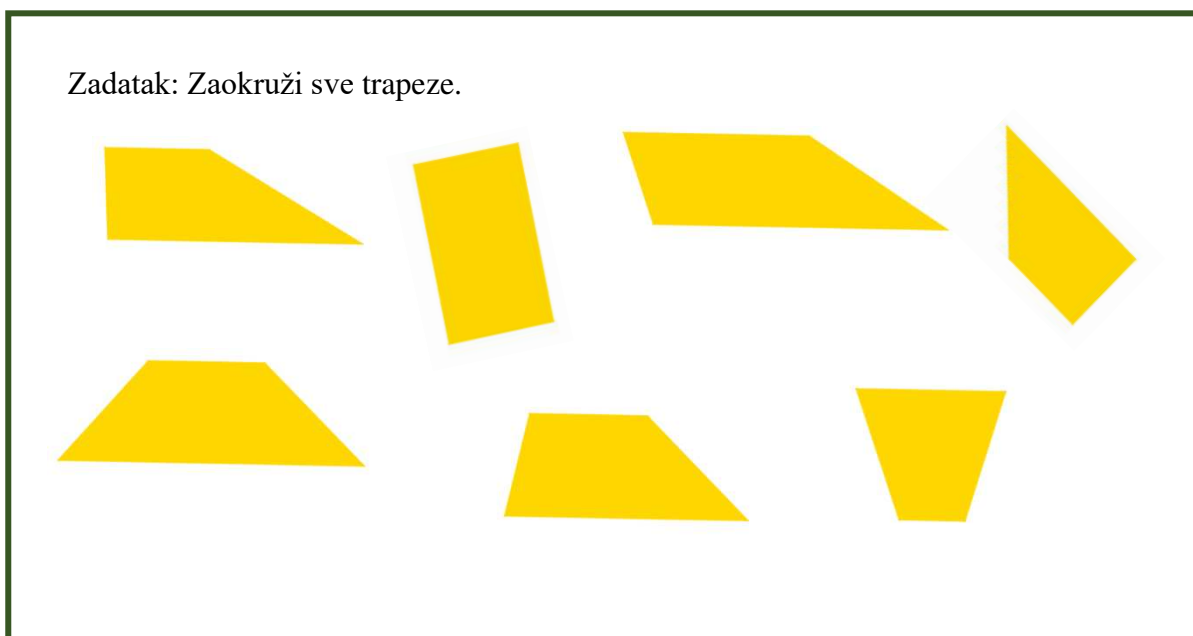
U ovoj aktivnosti učenici koriste svojstva geometrijskih oblika koja su prethodno naučili. To uključuje klasifikaciju kutova, simetrije, paralelnost, okomitost te sukladnost. Cilj aktivnosti je od nacrtanih likova prepoznati neki zadani lik. Likove zadajemo sukladno dobi učenika. Na primjer, kvadrate i pravokutnike mogu prepoznavati učenici u nižim razredima osnovne škole, dok je recimo prepoznavanje pravokutnih, jednakostraničnih i jednakokračnih trokuta primjerenije za učenike petih razreda, a paralelogram i trapez bismo mogli zadati tek u šestom razredu. Kod zadavanja likova važno ih je staviti u različite položaje, a njihove veličine trebaju biti različite. Primjere nastavnih listića za učenike nižih razreda, petog i šestog razreda možemo vidjeti na Slikama 4.1.2.1., 4.1.2.2., 4.1.2.3.



*Slika 4.1.2.1. Primjer nastavnog listića za učenike nižih razreda*



*Slika 4.1.2.2. Primjer nastavnog listića za učenike petog razreda*



*Slika 4.1.2.3. Primjer nastavnog listića za učenike šestog razreda*

Učenici, ali i odrasli ljudi su ne baš tako rijetko skloni prepoznavati na primjer kvadrat samo kad se nalazi u vodoravnom položaju. Čim se malo zarotira, neki ljudi nisu u mogućnosti prepoznati da je to taj isti kvadrat samo u drugom položaju. Poteškoća s kojom bi se također mogli susresti je prepoznavanje kvadrata kao klase pravokutnika. Kao i u prošloj aktivnosti, učenici promatraju oblike koji se nalaze direktno ispred njih i provjeravaju zadovoljavaju li svi oblici u kategoriji ista svojstva. Upravo zbog toga ova je aktivnost razine 0. prema Van Hieleg teoriji razvoja geometrijskog mišljenja. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda učenja: MAT OŠ C.5.1., MAT OŠ C.5.2., MAT OŠ C.6.2. i MAT OŠ C.6.3. Aktivnost možemo modificirati tako da umjesto dvodimenzionalnih stavimo trodimenzionalne oblike te se preseliti u prostor.

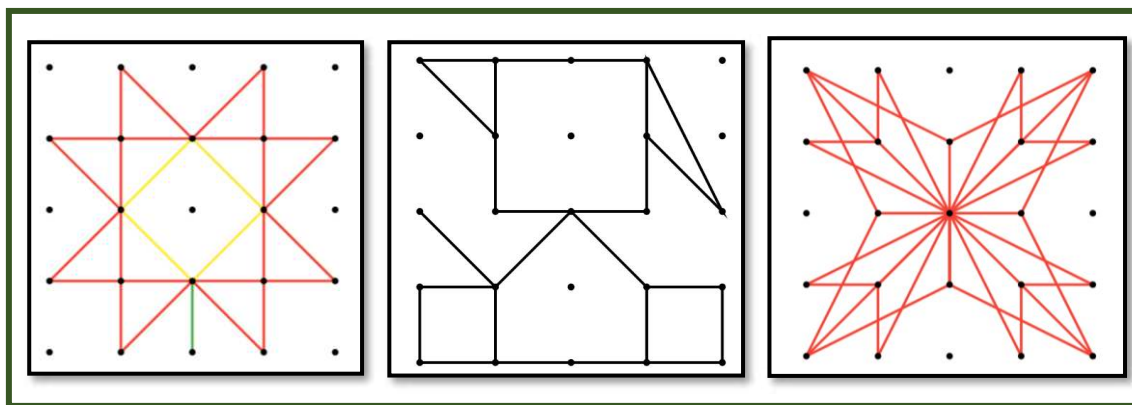
### 4.1.3. Aktivnost *Dodirni*

U ovoj aktivnosti učenici se koriste osjetilom dodira. Od čvrstog papira ili kartona izradimo razne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike. Učenici mlađeg uzrasta će prepoznavati dvodimenzionalne, a stariji i trodimenzionalne oblike. Aktivnost možemo provesti tako da učenik stavi povez na oči, a u ruke uzme neki od zadanih geometrijskih oblika te pokuša odgonetnuti koji lik mu se nalazi u ruci. Drugi način provođenja aktivnosti je da nabavimo kutiju na kojoj napravimo rupe za ruke. U kutiju stavimo jedan od likova te ju zatvorimo. Učenik stavlja ruke u kutiju i pokušava odgonetnuti koji se oblik u njoj nalazi. Dodirom će uspoređivati duljine stranica, procjenjivati veličine kutova, prepoznavati zaobljenost, odnosno uglatost zadanog oblika. Povezat će svoja stečena znanja s osjetilom dodira. Umjesto kutije možemo koristiti i vrećicu.

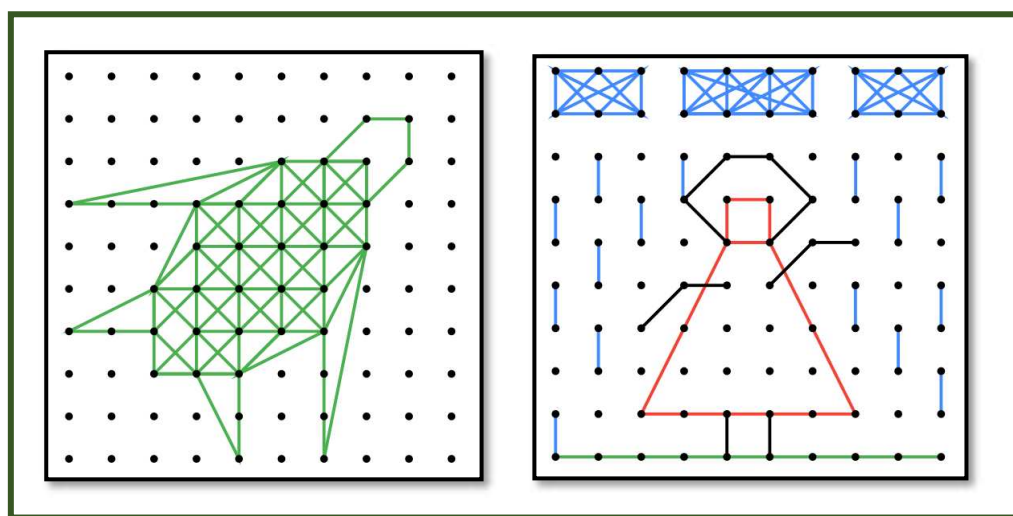
Aktivnost možemo nadograditi i tako da učenik koji pogađa koji lik mu se nalazi u ruci opisuje kako taj lik izgleda na temelju dodira, a ostali učenici u razredu na temelju njegovog opisa pogađaju o kojem se liku ili tijelu radi. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda učenja: MAT OŠ C.5.2., MAT OŠ C.6.3., MAT OŠ C.7.1. u slučaju dvodimenzionalnih oblika, a MAT OŠ C.8.1. i MAT SŠ C.2.6. u slučaju trodimenzionalnih oblika.

#### 4.1.4. Aktivnost *Umjetnost na geoploči*

U ovoj aktivnosti učenici će se upoznati s geopločom i načinom na koji se koristi. Cilj aktivnosti je potaknuti učenike da se umjetnički izraze i svoj umjetnički uradak povežu s matematikom. Svaki učenik dobiva svoju geoploču i set gumica pomoću kojih se treba likovno izraziti. Nakon što završe, slijedi zajednička diskusija u kojoj će komentirati dobivene oblike, simetrije i rotacije te međusobno uspoređivati dobivene slike, tražiti matematiku na njima. Učenici ne moraju imati velika matematička znanja kako bi mogli provesti ovu aktivnost, a kriteriji na temelju kojih će uspoređivati i opisivati slike ovisit će o dobi učenika. Primjere nekih mogućih rješenja dobivenog problema možemo vidjeti na Slikama 4.1.4.1., 4.1.4.2.



Slika 4.1.4.1. Primjer radova na kvadratnoj geoploči s 5x5 čavličima



Slika 4.1.4.2. Primjer radova na kvadratnoj geoploči s 10x10 čavličima

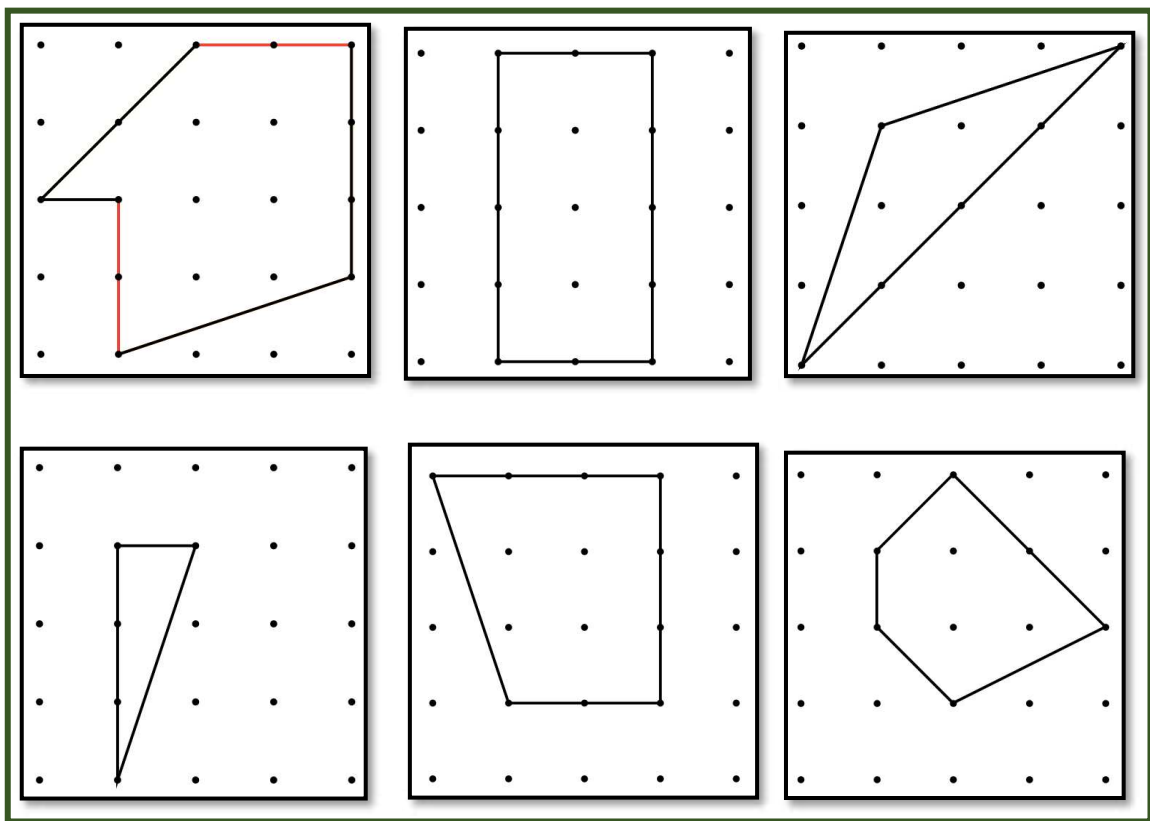
Ova aktivnost primjerena je za učenike svih generacija te nam može pokazati koliko su učenici maštoviti, ali i kako se njihova mašta razvija tijekom godina. Stoga ovu aktivnost možemo provesti u bilo kojem razredu kao uvod u korištenje geoploče bez obzira na to koje matematičke koncepte planiramo na njoj proučavati. S obzirom na to da nam je danas tehnologija lako dostupna, možemo u svakom razredu fotografirati uratke učenika te ih spremiti kako bi mogli uspoređivati njihove radove tijekom godina. Ako postoji mogućnost, radovi se mogu izložiti na školskoj izložbi. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda učenja: MAT OŠ C.5.1., MAT OŠ C.5.2., MAT OŠ C.5.3., MAT OŠ C.6.1., MAT OŠ C.6.2., MAT OŠ C.6.3., MAT OŠ C.7.1. i MAT OŠ C.7.3.

#### 4.1.5. Aktivnost *Svojstva geometrijskih likova*

U ovoj aktivnosti učenici će pomoću geoploče istraživati svojstva geometrijskih likova. Prema preciznim uputama samostalno će prikazivati zadane likove. Upute na primjer mogu biti:

- Prikaži lik koji ima dvije stranice jednake duljine.
- Prikaži pravokutnik koji nije kvadrat.
- Prikaži jednakokračan trokut koji nije šiljastokutan.
- Prikaži pravokutan trokut koji nije jednakokračan.
- Prikaži lik koji ima četiri stranice i točno dva prava kuta.
- Prikaži lik koji ima pet stranica i najmanje jedan tupi kut.

Po jedan primjer rješenja za svaku od uputa prikazan je na Slici 4.1.5.1. Učenici će u ovoj aktivnosti pokazati svoje razumijevanje geometrijskih koncepata, ali i kreativnost. Nakon što učenici završe sa zadacima, u razrednoj diskusiji treba komentirati i opisati što su i kako radili te međusobno usporediti dobivene rezultate. Učenici koji su na Van Hiele razini 0. bi mogli imati poteškoća u rješavanju ovih zadataka. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnih ishoda učenja: MAT OŠ C.5.1., MAT OŠ C.5.2., MAT OŠ C.5.3., MAT OŠ C.6.1., MAT OŠ C.6.2., MAT OŠ C.6.3., MAT OŠ C.7.1. i MAT OŠ C.7.3.



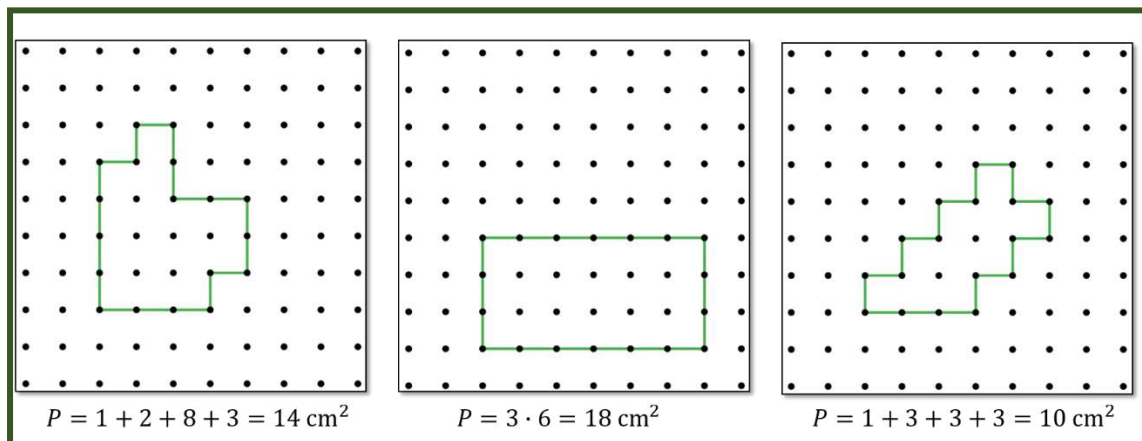
Slika 4.1.5.1. Primjer rješenja zadataka

Osim za proučavanje svojstava likova geoploča je važan alat i za razumijevanje koncepta opsega i površine, a jako je važna u prevladavanju miskonceptija vezanih uz ove koncepte. Jedna od vrlo čestih učeničkih miskonceptija je da se povećanjem (smanjenjem) opsega lika nužno povećava (smanjuje) i njegova površina, odnosno da se povećanjem (smanjenjem) površine nužno povećava (smanjuje) opseg. Još jedna tipična miskonceptija je da jednaka površina znači i jednak opseg. Sljedeća aktivnost je primjer kako učenici mogu prevladati ove miskonceptije.

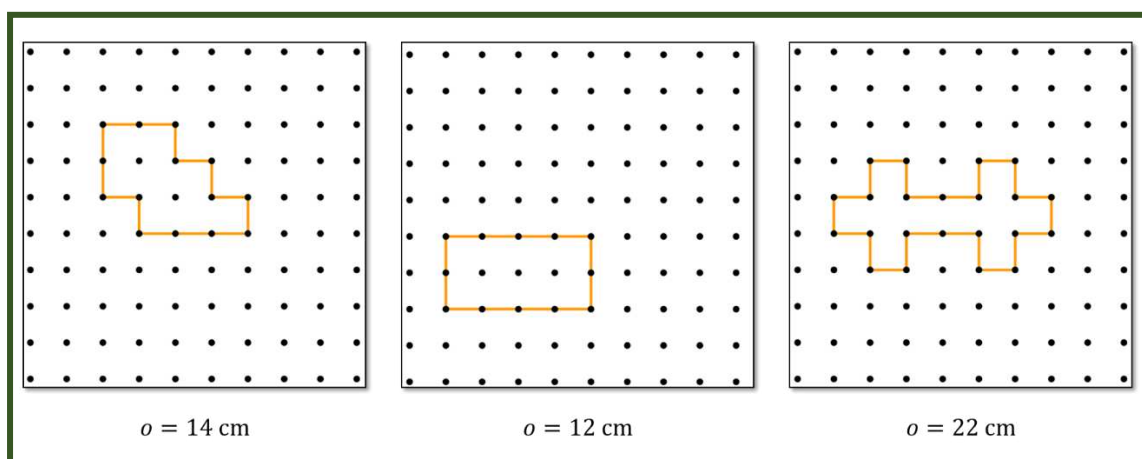
#### 4.1.6. Aktivnost *Opseg i površina*

Cilj aktivnosti je prevladati prethodno navedene miskonceptije, odnosno razlikovati opseg od površine te otkriti neovisnost jedne veličine o drugoj. Učenici će prema preciznim uputama na geoploči prikazivati likove i računati njihove opsege i površine. Učenicima na raspolaganju treba biti dovoljan broj analognih primjera kako bi nepotpunom indukcijom mogli doći do zaključaka i prevladati miskonceptije ako su ih imali. Jedan od zadataka za učenike može biti da na geoploči prikažu što više likova

opsega 18 cm te za svaki od tih likova odrede njegovu površinu. Primjer nekoliko takvih likova možemo vidjeti na Slici 4.1.6.1. Idući zadatak za učenike je na geoploči prikazati što više likova površine na primjer  $8 \text{ cm}^2$  te odrediti njihove opsege. Primjere rješenja ovog zadatka možemo vidjeti na Slici 4.1.6.2.



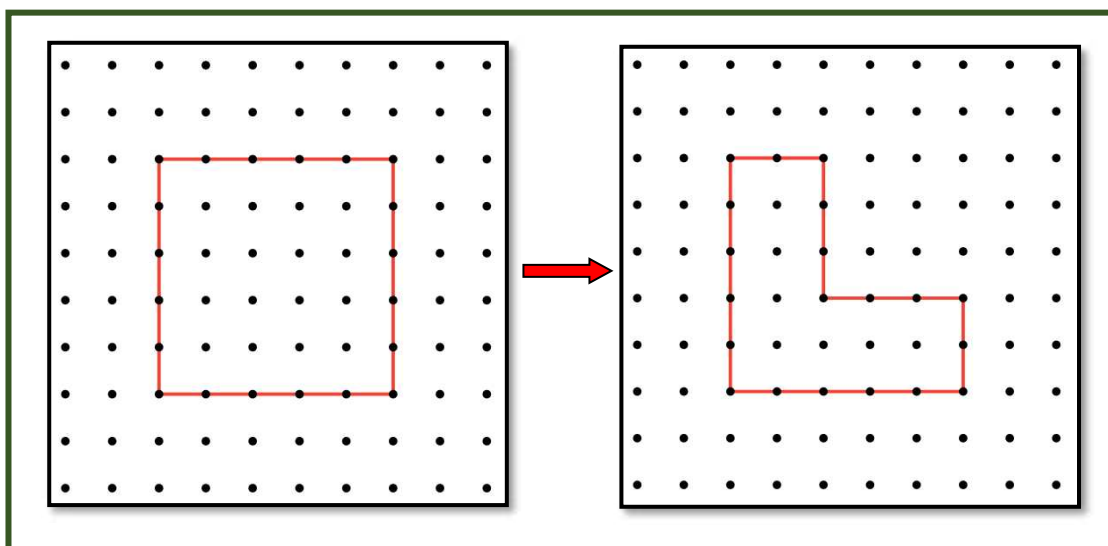
*Slika 4.1.6.1. 3 primjera rješenja prvog zadatka*



*Slika 4.1.6.2. 3 primjera rješenja drugog zadatka*

Još jedan vrlo važan tip zadatka je da na geoploči prikažu kvadrat opsega na primjer 20 cm te potom premjeste jednu gumicu tako da novonastali lik ima opseg jednak opsegu polaznog kvadrata, no površina mu mora biti veća od površine kvadrata. Primjer jednog rješenja ovog zadatka možemo vidjeti na Slici 4.1.6.3. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.2. i MAT OŠ D.7.3.





*Slika 4.1.6.3. Primjer rješenja prethodnog zadatka*

#### 4.1.7. Aktivnost *Crtanje četverokuta*

Cilj aktivnosti je osvijestiti pojmove nužnih i dovoljnih uvjeta za jednoznačno određivanje četverokuta. Učenici će dio aktivnosti provesti individualno, a dio suradnički u skupinama. Podijelit će se u šest skupina. Svaka skupina dobiva po 5 kartica sa svojstvima četverokuta pri čemu svaka skupina kartica opisuje jedan četverokut. Svaki učenik dobiva Nastavni listić 4.1.7.1. Samostalno odabiru jednu skupinu kartica sa svojstvima i rješavaju nastavni listić. Potom radeći suradnički u skupinama, uz razmjenu ideja i mišljenja, učenici rješavaju nastavni listić i za preostalih pet skupina kartica sa svojstvima. Na Slikama 4.1.7.2, 4.1.7.4., 4.1.7.6., 4.1.7.8., 4.1.7.10. i 4.1.7.12. možemo vidjeti primjere kartica koje učenici dobivaju, a na Slikama 4.1.7.3, 4.1.7.5., 4.1.7.7., 4.1.7.9., 4.1.7.11. i 4.1.7.13. rješenja zadataka za svaki skup kartica. Neke od tipičnih ueničkih miskonceptija koje će prevladati ovom aktivnošću su: razumijevanje različitih vrsta četverokuta kao disjunktnih klasa umjesto postavljanja u odnose rod – vrsta, pretpostavljanje da nasuprotne stranice romba nisu paralelne, pretpostavljanje da svaki deltoid ima paralelne stranice, pretpostavljanje da ako se dijagonale četverokuta raspolavljaju, onda se sijeku pod pravim kutom i pretpostavljanje da se dijagonale jednakokračnog trapeza raspolavljaju. Kako bi ih učenici uspješno prevladali važno je da nastavnik postavlja pitanja kojima ih potiče da razmišljaju na pravi način. Neka od pitanja za učenike na kraju aktivnosti u razrednoj diskusiji mogu biti: Postoji li neki drugi

skup kartica koje jednoznačno određuju dani četverokut? Jesu li sve izdvojene kartice potrebne za jednoznačno određivanje danog četverokuta? Koji je četverokut određen ukoliko iz „najmanje skupine” maknemo neku (konkretnu) karticu? Možemo li za dani četverokut odrediti duljine svih njegovih stranica i veličine svih njegovih kutova? Koji je četverokut bilo najlakše nacrtati? Zašto? Koji je četverokut bilo najteže nacrtati? Zašto? Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.6.3.

### Crtanje četverokuta

1. Nacrtaj četverokut koji je opisan pomoću svih pet dobivenih kartica.

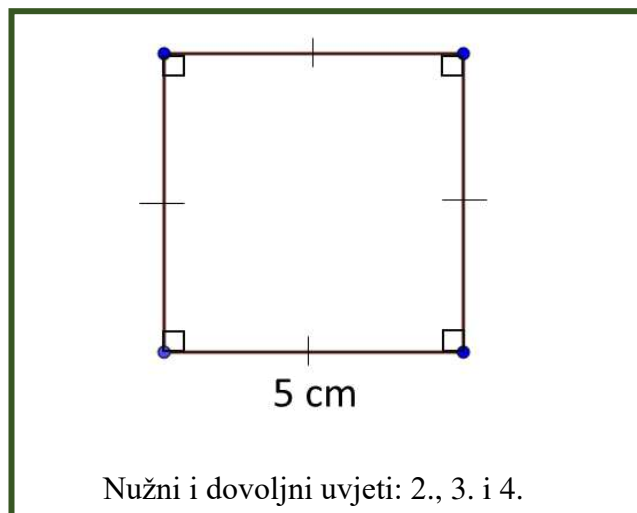
Imenuj dobiveni četverokut.

2. Odredi koliko bi kartica bilo dovoljno za jednoznačno određivanje tog četverokuta. Koje su to? Objasni zašto su baš one potrebne za jednoznačno određivanje ovog četverokuta.

*Nastavni listić 4.1.7.1.*

1. Četverokut ima sukladne dijagonale.	3. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 5 cm.
2. Dijagonale četverokuta se međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.	4. Četverokut ima četiri sukladna kuta.
	5. Četverokut ima dva para paralelnih stranica.

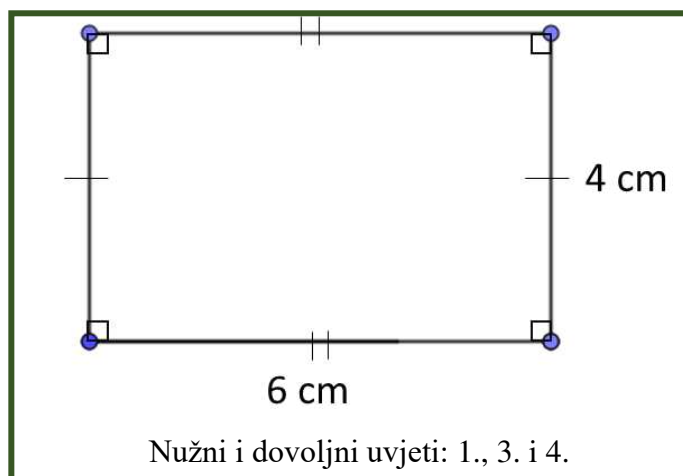
*Slika 4.1.7.2. Kartice „Kvadrat“*



Slika 4.1.7.3. Rješenje za kartice „Kvadrat“

1. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 6 cm.	3. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 4 cm.
2. Dijagonale četverokuta se međusobno raspolavljaju.	4. Četverokut ima četiri sukladna kuta.
	5. Nasuprotne stranice četverokuta su sukladne.

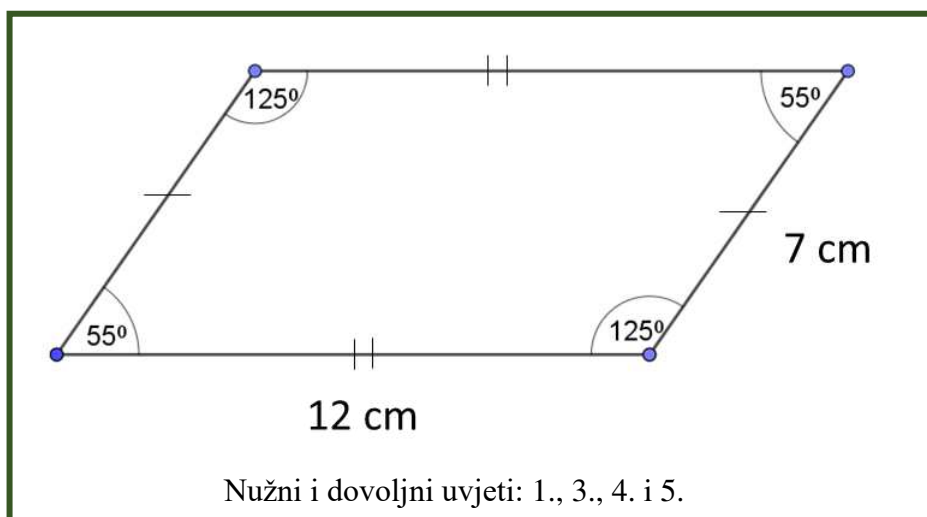
Slika 4.1.7.4. Kartice „Pravokutnik“



Slika 4.1.7.5. Rješenje za kartice „Pravokutnik“

1. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 7 cm.	3. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 12 cm.
2. Dijagonale četverokuta nisu sukladne.	4. Četverokut ima barem jedan kut veličine $55^\circ$ .
	5. Nasuprotne stranice četverokuta su paralelne.

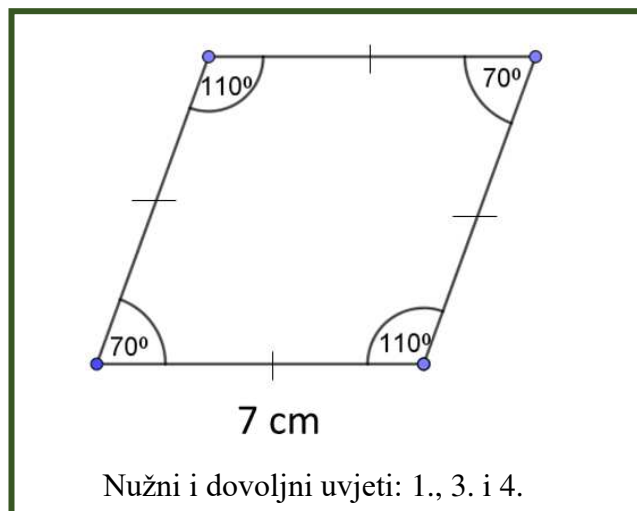
Slika 4.1.7.6. Kartice „Paralelogram“



Slika 4.1.7.7. Rješenje za kartice „Paralelogram“

1. Sve četiri stranice četverokuta su sukladne.	3. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 7 cm.
2. Dijagonale četverokuta se međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.	4. Četverokut ima barem jedan kut veličine $70^\circ$ .
	5. Nasuprotne stranice četverokuta su paralelne.

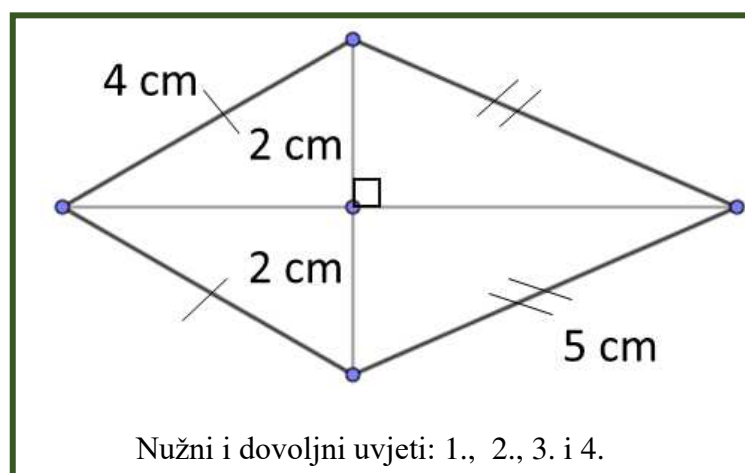
Slika 4.1.7.8. Kartice „Romb“



*Slika 4.1.7.9. Rješenje za kartice „Romb“*

1. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 4 cm.	3. Četverokut ima barem jednu stranicu duljine 5 cm.
2. Jedna od dijagonala četverokuta dijeli preostalu dijagonalu na dva dijela duljine 2 cm.	4. Dijagonale četverokuta se sijeku pod pravim kutom.
	5. Četverokut ima dva para sukladnih stranica.

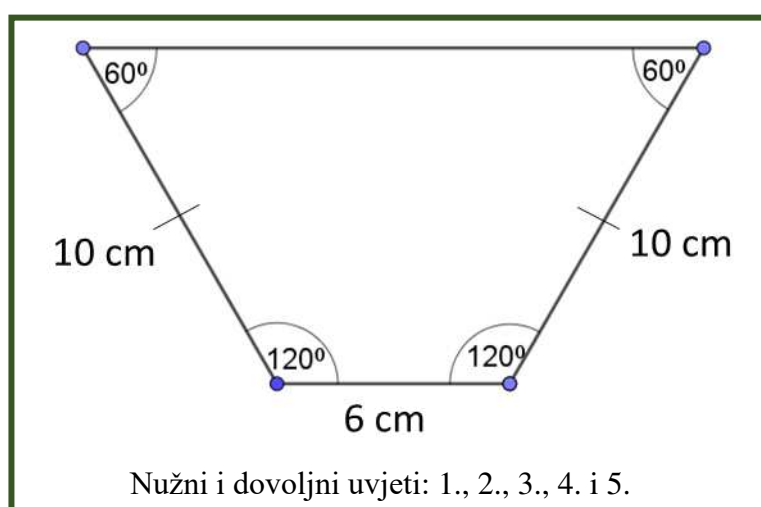
*Slika 4.1.6.10. Kartice „Deltoid“*



*Slika 4.1.7.11. Rješenje za kartice „Deltoid“*

1. Četverokut ima više od jedne stranice duljine 10 cm.	3. Četverokut ima stranicu duljine 6 cm.
2. Četverokut ima par nasuprotnih stranica koje su sukladne.	4. Četverokut ima barem jedan kut veličine $60^\circ$ .
	5. Četverokut ima točno jedan par paralelnih stranica.

Slika 4.1.6.12. Kartice „Trapez“

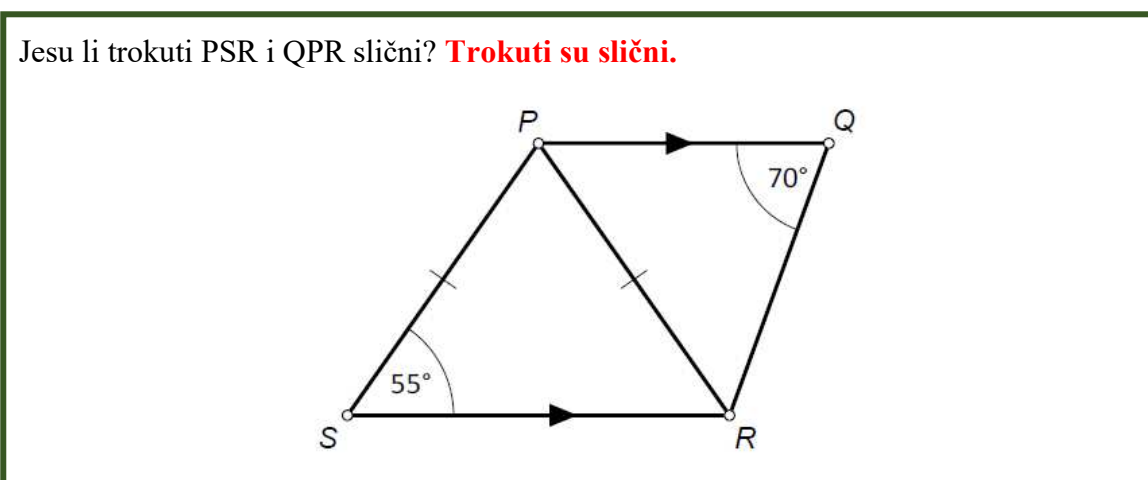


Slika 4.1.7.13. Rješenje za kartice „Trapez“

#### 4.1.8. Aktivnost *Slični trokuti*

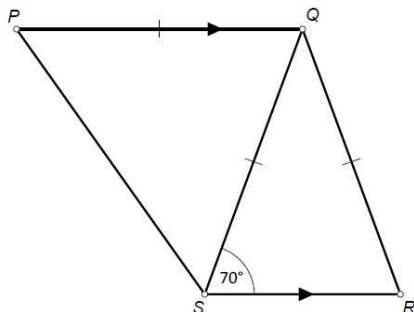
Cilj ove aktivnosti je primjenom matematičkih svojstava odrediti jesu li zadani trokuti slični. Neki će učenici samo na temelju vizualnog dojma zaključiti da trokuti izgledaju različito (ili slično) te da među njima nema (ili ima nekih) sličnih. Važno je da nastavnik naglasi da niti jedna slika koju će promatrati nije vjerna, nego je samo skica, što znači da valjane zaključke neće moći donijeti na temelju vizualnog dojma ili mjerenja. Dakle, pri utvrđivanju sličnosti trokuta učenici će morati primjenjivati matematička svojstva i matematički način razmišljanja. Učenici će raditi u paru ili tročlanim skupinama. Svaka skupina dobije komplet kartica A – H s nacrtanim i označenim trokutima, nekoliko praznih kartica Tvoj primjer, prazan papir formata A0, flomastere (markere), selotejp i škare. Svaki član skupine naizmjenice („u krug“) odabire

po jednu karticu i utvrđuje kojoj skupini pripadaju zadani trokuti na kartici: Trokuti su slični, Trokuti nisu slični ili Ne može se utvrditi, objašnjavajući pritom svoje zaključivanje te utvrđuje veličine što je moguće većeg broja nepoznatih kutova na kartici. Svaki od ostalih članova skupine treba suprotstaviti svoje zaključivanje ukoliko se ne slaže sa zaključkom, odnosno dati svoje obrazloženje ukoliko se slaže. Nakon što usklade svoje zaključke, članovi skupine lijepe karticu na poster (papir formata A0) i uz nju pišu zaključak, odnosno klasu kojoj kartica pripada, te objašnjenje za svoje zaključivanje. Na posteru na opisani način treba razvrstati sve kartice A – H. Članovi skupine nakon toga na kartice Tvoj primjer mogu nacrtati i svoje parove trokuta kojima će „izazvati” ostale članove svoje ili drugih skupina. Nakon rada u skupinama slijedi razmjena ideja među skupinama (gostionica): jedan učenik iz svake skupine odlazi u neku od preostalih skupina i u njoj prezentira zaključivanje i rješenja svoje skupine te sluša zaključivanje i rješenja skupine u kojoj „gostuje”. Učenici koji ne napuštaju svoju skupinu imaju zadatak „gostujućem” učeniku objasniti svoje zaključivanje i zaključke. Ukoliko se zaključci druge skupine razlikuju od vlastitih, učenici ne smiju a priori misliti da su oni pogriješili (a da su tuđa rješenja korektna), nego trebaju propitati svoje zaključivanje (refleksija). Aktivnost završava prezentacijom plakata te razrednom diskusijom o različitim pristupima i zaključcima. Primjere kartica koje učenici dobivaju i rješenja možemo vidjeti na Slikama 4.1.8.1., 4.1.8.2., 4.1.8.3., 4.1.8.4., 4.1.8.5., 4.1.8.6., 4.1.8.7. i 4.1.8.8. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.8.3. i MAT SŠ C.1.2. MAT SŠ D.1.2.



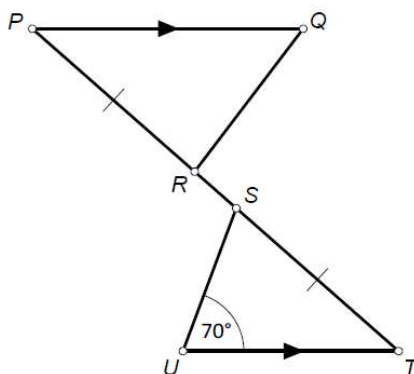
Slika 4.1.8.1. Kartica A

Jesu li trokuti PSR i QSR slični? **Trokuti nisu slični.**



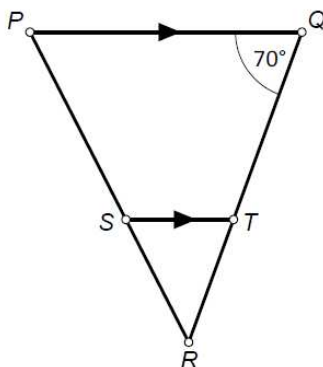
Slika 4.1.8.2. Kartica B

Jesu li trokuti PRQ i SUT slični? **Ne može se utvrditi.**



Slika 4.1.8.3. Kartica C

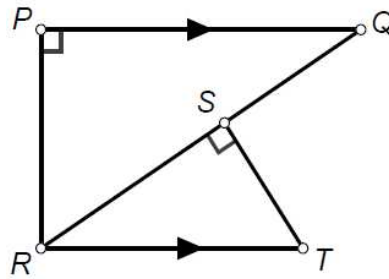
Jesu li trokuti PRQ i SRT slični? **Trokuti su slični.**



Slika 4.1.8.4. Kartica D

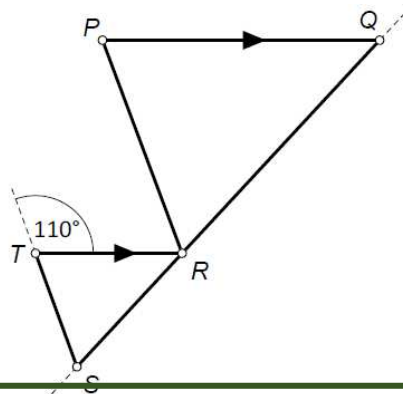


Jesu li trokuti PRQ i SRT slični? **Trokuti su slični.**



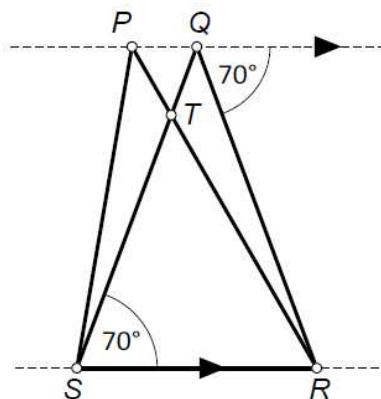
Slika 4.1.8.5. Kartica E

Jesu li trokuti PRQ i RTS slični? **Ne može se utvrditi.**



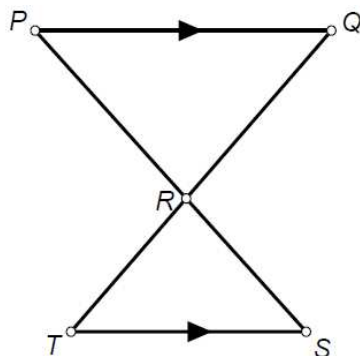
Slika 4.1.8.6. Kartica F

Jesu li trokuti PSR i QSR slični? **Trokuti nisu slični.**



Slika 4.1.8.7. Kartica G

Jesu li trokuti PRQ i RTS slični? **Trokuti su slični.**



Slika 4.1.8.8. Kartica H

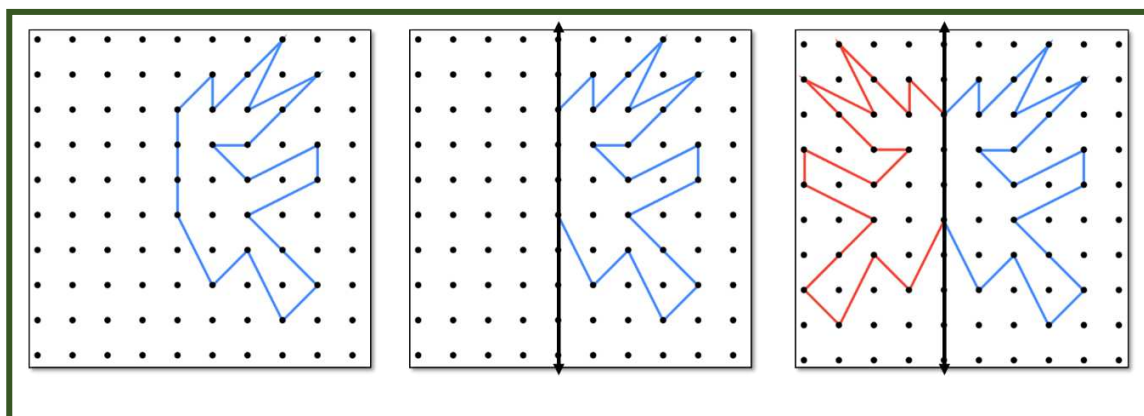
## 4.2. Transformacije

Transformacije su sljedeća kategorija prema kojoj smo razvrstali aktivnosti. Ovaj aspekt uključuje translacije, rotacije, zrcaljenja, homotetiju, simetrije i koncept sličnosti. U nastavku ćemo opisati aktivnosti u kojima će učenici istraživati i raditi s oblicima koje će transformirati i preslagivati u ravnini ili prostoru te na taj način razvijati prostorni zor.

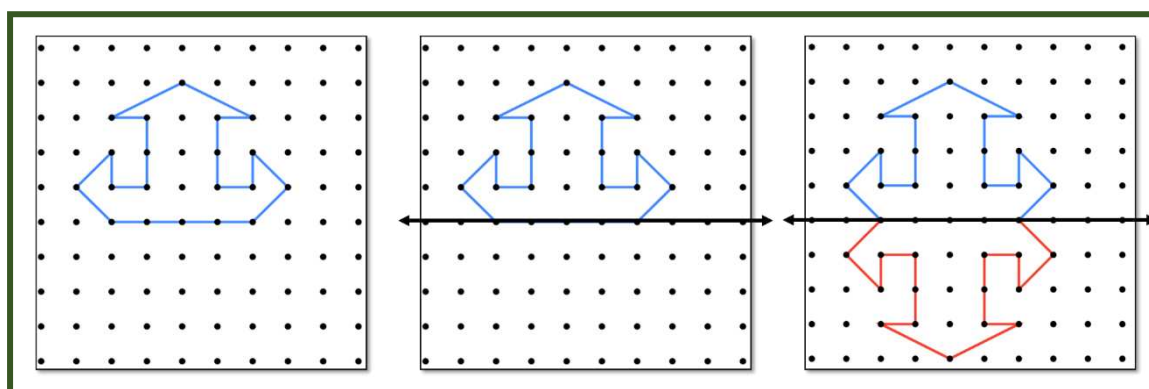
### 4.2.1. Aktivnost *Dovrši sliku*

Geoploča je učilo pogodno za proučavanje i istraživanje simetrija. Cilj ove aktivnosti je dovršiti sliku na geoploči. Pola slike učenici dobivaju na geoploči te trebaju dovršiti crtež. Ovu aktivnost učenici provode samostalno, svako na svojoj geoploči. Umjesto izrade polovice slike na svakoj geoploči nastavnik može pripremiti fotografiju polovice slike koju želi da učenici dovrše. Učenici najprije trebaju kopirati tu polovicu na geoploču, a potom dovršiti sliku, odnosno preslikati je osnom ili centralnom simetrijom. Prije nego krenu s preslikavanjem slike, moraju odrediti os ili centar simetrije. Učenicima će biti lakše odraditi zadatak ako je os simetrije vertikalna kao u primjeru na Slici 4.2.1.1. Stoga treba krenuti sa ovakvim primjerima. Nakon toga treba zadati primjer u kojem je os simetrije horizontalna kao u primjeru na Slici 4.2.1.2. te dijagonalna kao u primjeru na Slici 4.2.1.3. Na Slici 4.2.1.5. možemo vidjeti primjer preslikavanja

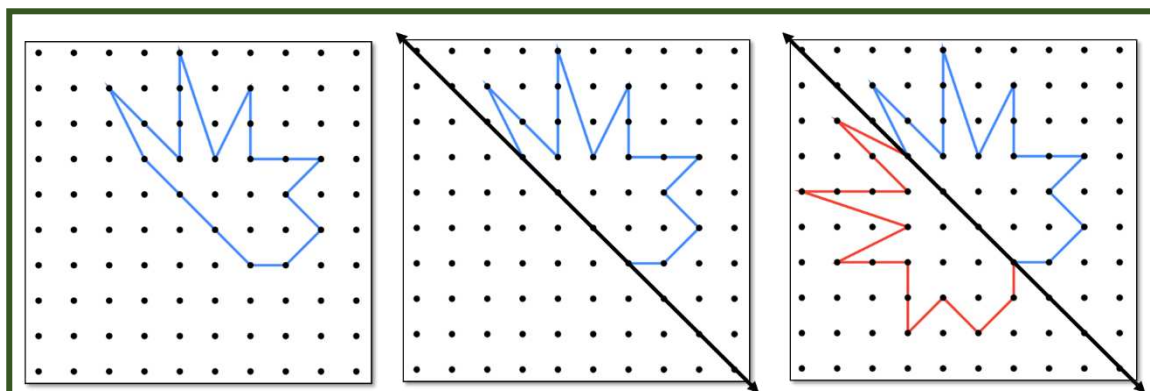
centralnom simetrijom. Aktivnost možemo proširiti tako da učenicima zadamo četvrtinu slike koju trebaju dovršiti kao u primjeru na Slici 4.2.1.4. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.5.3., MAT OŠ D.7.2. i MAT OŠ C.8.



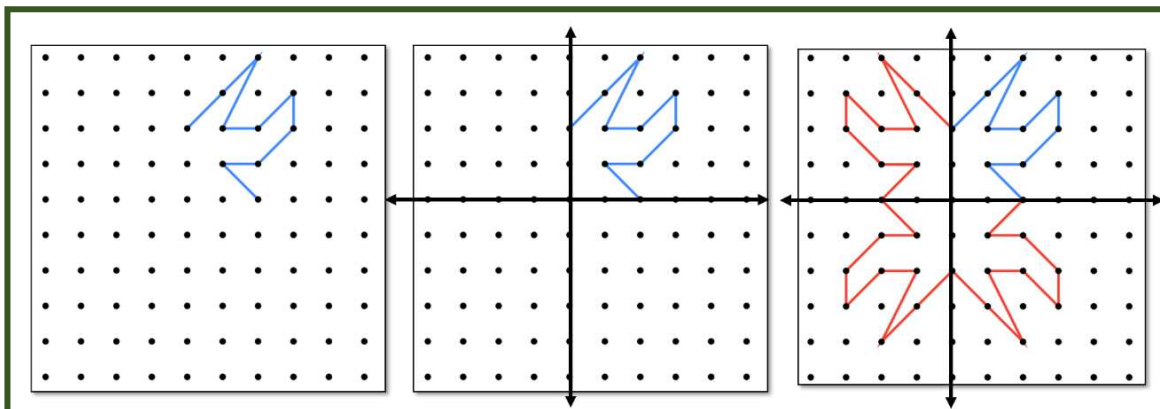
*Slika 4.2.1.1. Primjer u kojem je os simetrije vertikalna*



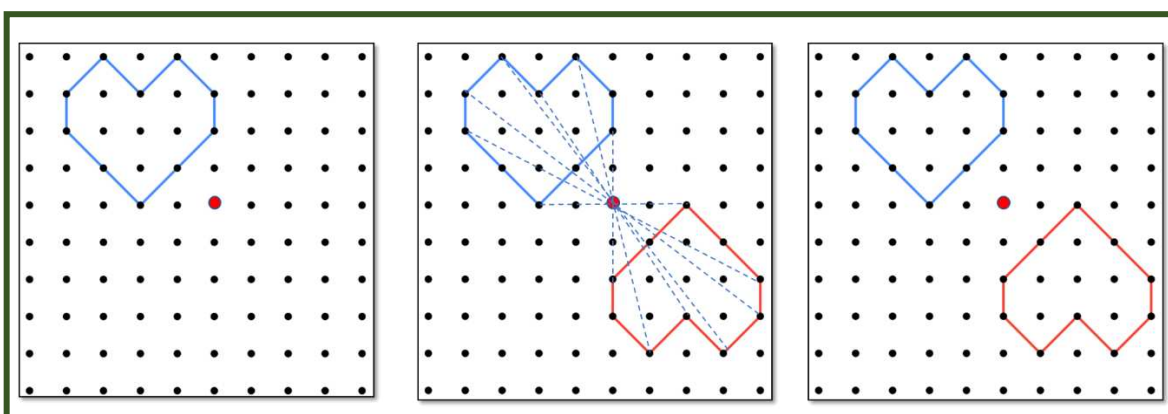
*Slika 4.2.1.2. Primjer u kojem je os simetrije horizontalna*



*Slika 4.2.1.3. Primjer u kojem je os simetrije dijagonalna*



Slika 4.2.1.4. Primjer u kojem je zadana četvrtina dizajna

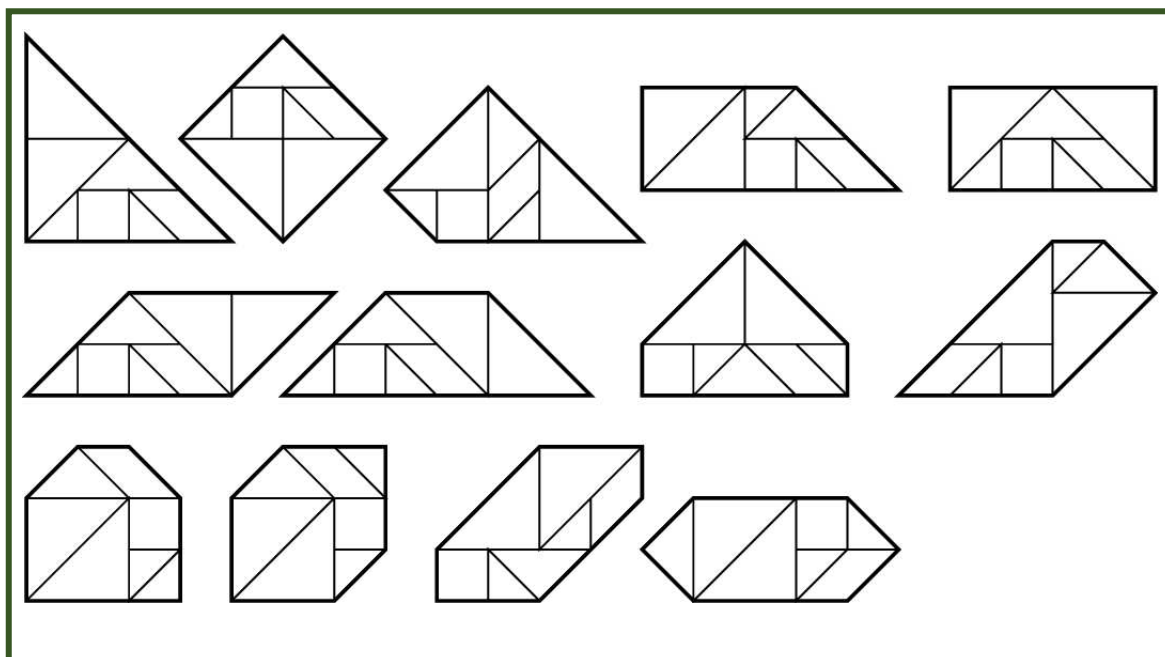


Slika 4.2.1.5. Primjer preslikavanja centralnom simetrijom

## 4.2.2. Aktivnost *Sastavljanje konveksnih mnogokuta*

U ovoj aktivnosti učenici će pomoću tangrama slagati konveksne mnogokute poštujući pravila slaganja ove slagalice. Učenici će koristiti već spomenutu metodu pokušaja i pogrešaka uz koju će primjenjivati svoja znanja o konveksnim mnogokutima. Učenici mogu raditi u paru. Ova aktivnost je najprikladnija za učenike koju su na kraju osnovne škole ili na početku srednje škole, no može se vrlo lako prilagoditi i za učenike mlađe dobi tako da učenici dobe sličice likova koje trebaju složiti. Na taj način im nisu neophodna znanja o konveksnim mnogokutima. Wang and Hsiung je 1942. godine dokazao da postoji točno 13 takvih konveksnih mnogokuta (1 trokut, 6 četverokuta, 2 peterokuta i 4 šesterokuta), a možemo ih vidjeti na Slici 4.2.2.1. Ova aktivnost doprinosi

ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.7.3., MAT OŠ D.7.2., MAT OŠ C.8. i MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3.

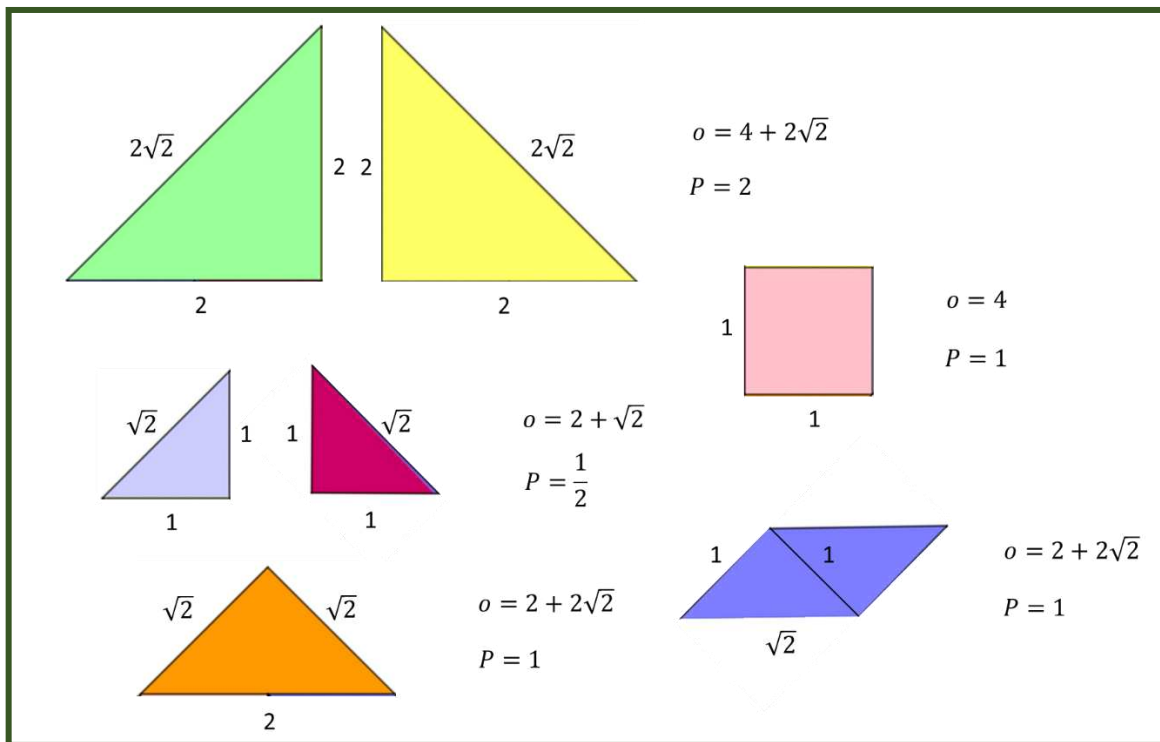


Slika 4.2.2.1. 13 mogućih konveksnih mnogokuta<sup>19</sup>

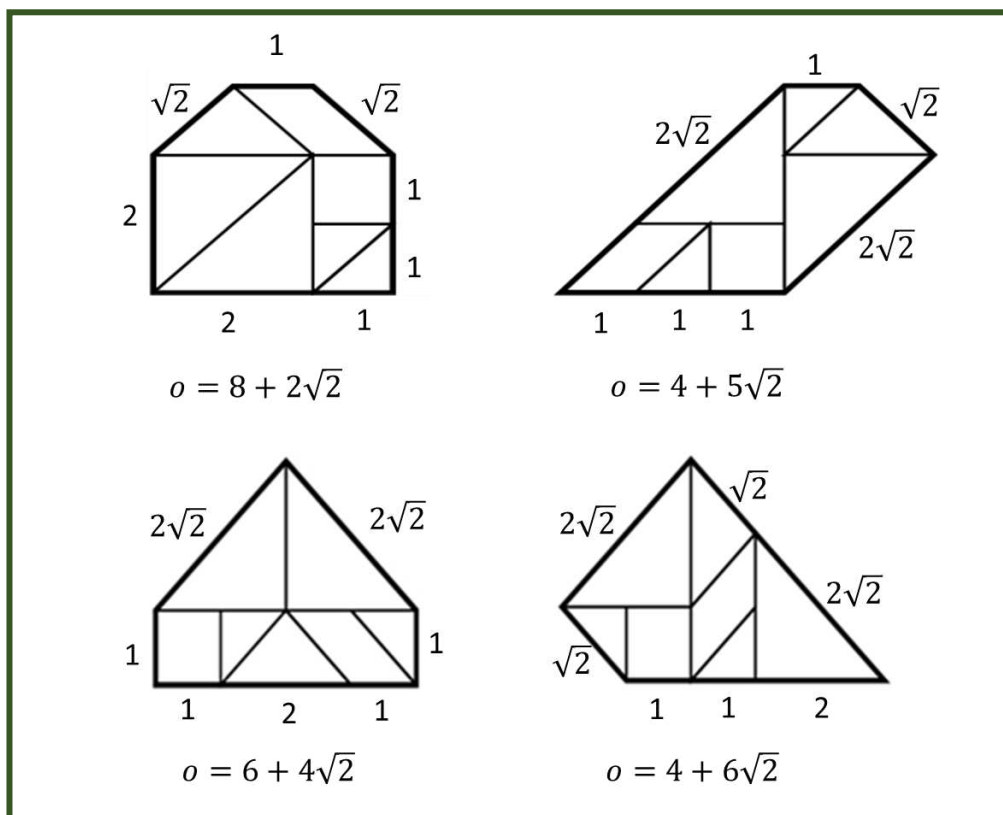
### 4.2.3. Aktivnost *Prepoznaj i izračunaj*

U ovoj aktivnosti učenici će najprije precizno imenovati svih sedam dijelova od kojih se sastoji tangram. Potom će tražiti i imenovati ostale mnogokute u tangramu. Među njima će tražiti sličnosti i razlike. Učenici će računati površine i opsege dijelova od kojih se tangram sastoji. Pretpostavit će da je tangram kvadrat duljine stranica 2. Također mogu računati opsege i površine likova iz prethodne aktivnosti. Uočiti će da je površina uvijek jednaka dok se opseg mijenja. Oblik rada je suradnički rad u skupinama. Na Slici 4.2.3.1. možemo vidjeti od kojih se dijelova sastoji tangram i površine i opsege njegovih dijelova, a na Slici 4.2.3.2. opsege nekih mnogokuta iz prethodne aktivnosti. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.2. i MAT OŠ D.7.3.

<sup>19</sup> <https://link.springer.com/article/10.1007/s13366-020-00528-1>



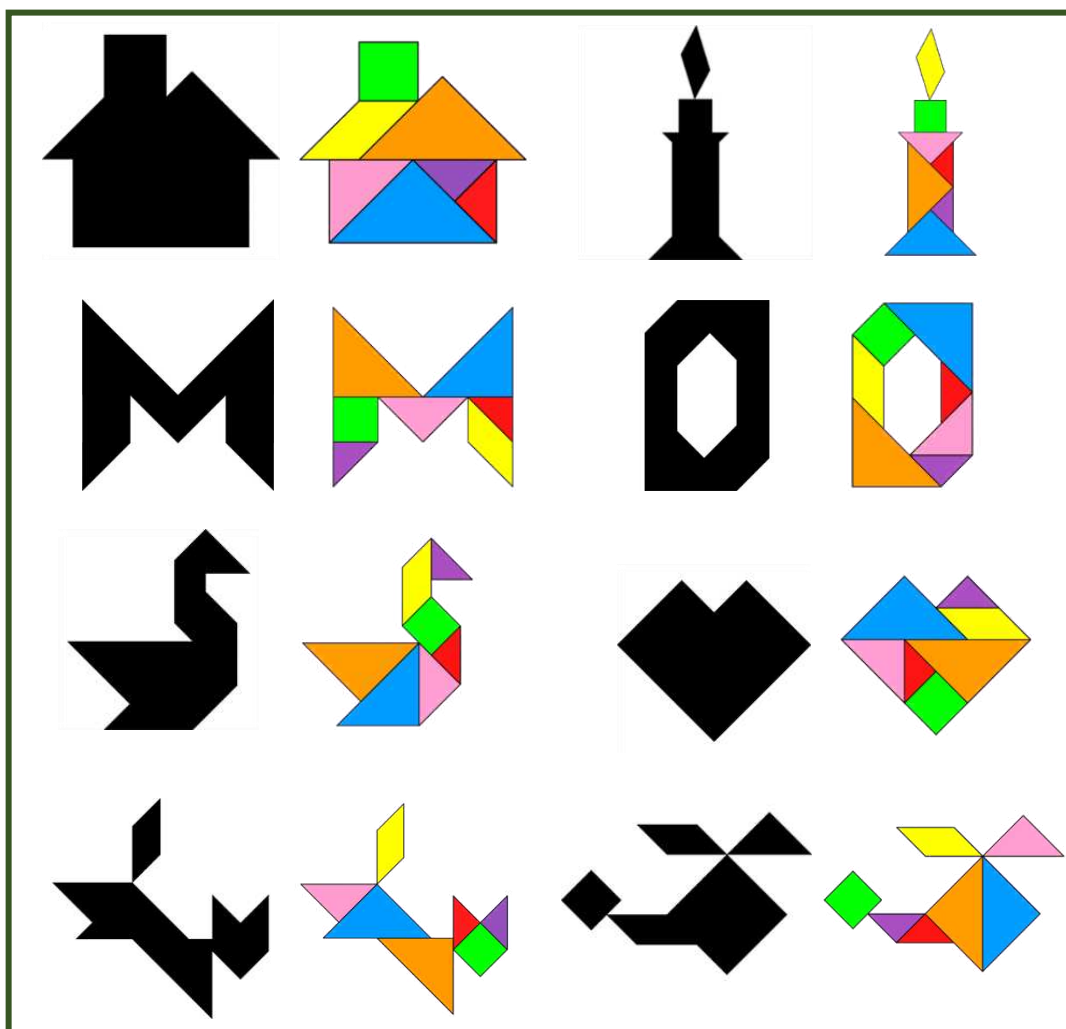
Slika 4.2.3.1. Opsezi i površine dijelova tangrama



Slika 4.2.3.2. Opsezi nekih konveksnih mnogokuta

#### 4.2.4. Aktivnost Složi

Kao što je već spomenuto, pomoću tangrama se mogu složiti razni zanimljivi oblici. U ovoj aktivnosti učenici će slagati neke od njih. Na slici 4.2.4.1. možemo vidjeti primjer oblika koje učenici mogu slagati. Učenicima također treba dati mogućnost i potaknuti ih da sami slože neki svoj oblik. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.7.3., MAT OŠ D.7.2., MAT OŠ C.8. i MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3.



Slika 4.2.4.1. Primjer zadanih oblika i rješenja

(kućica, svijeća, slovo M, znamenka 0, labud, srce, mačka i helikopter)<sup>20</sup>

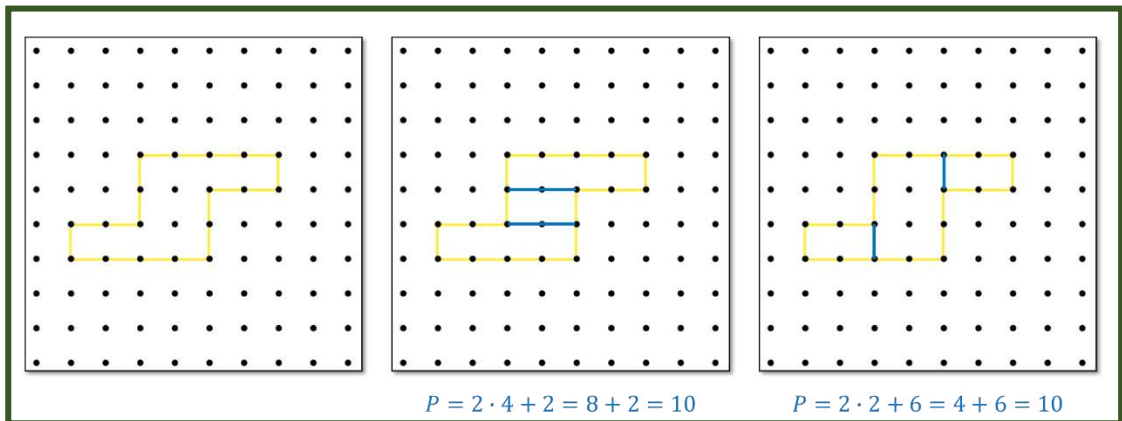
<sup>20</sup> <https://www.tangram-channel.com/>

#### 4.2.5. Aktivnost *Podijeli i izračunaj površinu*

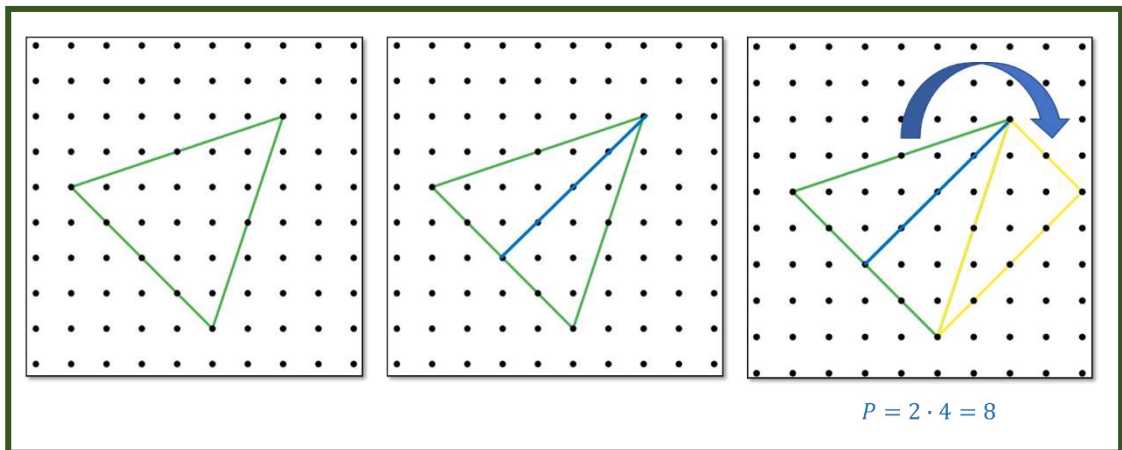
U ovoj aktivnosti učenici će određivati površine zadanih likova na geoploči. Svaki zadani oblik morat će najprije podijeliti na manje dijelove čije površine znaju izračunati. Potom će zbrojiti površine svih manjih dijelova i odrediti ukupnu površinu zadanog lika na geoploči. Učenici samostalno rješavaju zadatke te potom u paru uspoređuju na koji su način računali površine. Ovom zadatku učenici mogu pristupiti raznim strategijama. U razrednoj diskusiji treba komentirati pristupe i strategije koje su učenici koristili. Uspoređujući strategije važno je da uoče koje su bile efikasnije, odnosno brže, a koji pristup je možda otežao rješavanje zadatka.

Likove koje zadajemo učenicima odabiremo sukladno dobi učenika. Za učenike mlađeg uzrasta zadajemo jednostavnije oblike čije površine trebaju pronaći, a s učenicima starijeg uzrasta također počinjemo s jednostavnijim oblicima, no postupno dodajemo i kompliciranije oblike. Jednostavniji oblici su recimo oni koje možemo podijeliti na primjer na 3 dijela kako bi odredili njihovu površinu (kao u primjeru na Slici 4.2.5.1.) te nije potrebno preslagivanje dijelova već treba samo zbrojiti površine. Potom možemo zadati oblik kao na Slici 4.2.5.2. Površinu ovog oblika će većina učenika najvjerojatnije izračunati tako da primijeni formulu za površinu trokuta, no ovo je prilika za demonstriranje rješenja primjenom preslagivanja dijelova kao što je prikazano na slici. Složeniji oblici su na primjer oni koje trebamo podijeliti na više dijelova te je u rješavanju zadatka korisno misaono presložiti neke dijelove ili je potrebno znati formule za računanje površine trokuta, paralelograma ili romba. Na primjer kao u primjeru na Slici 4.2.5.3. Ova aktivnost je jako važna jer učenici na površinu uglavnom gledaju samo algebarski, a na ovaj način, brojenjem kvadratnih jedinica zapravo razumiju što uopće površina jest. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.2. i MAT OŠ D.7.3.

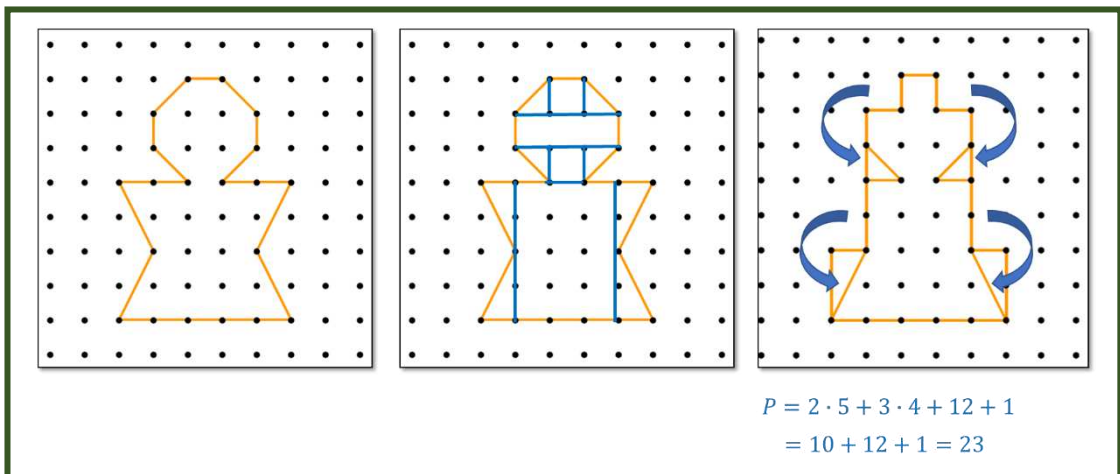




Slika 4.2.5.1. Primjer jednostavnog oblika i dva načina određivanja njegove površine



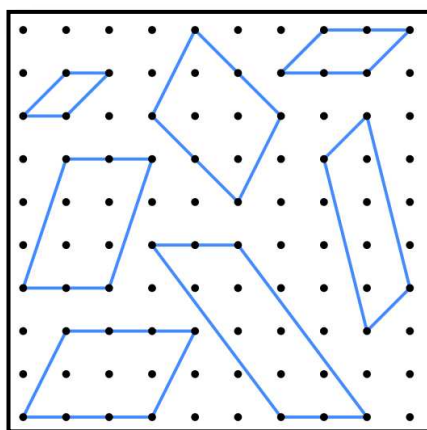
Slika 4.2.5.2. Primjer jednostavnog oblika i dva načina određivanja njegove površine



Slika 4.2.5.3. Primjer složenijeg oblika i jednog načina određivanja njegove površine  
misaonim prebacivanjem njegovih dijelova

#### 4.2.6. Aktivnost *Površina paralelograma, trokuta i trapeza*

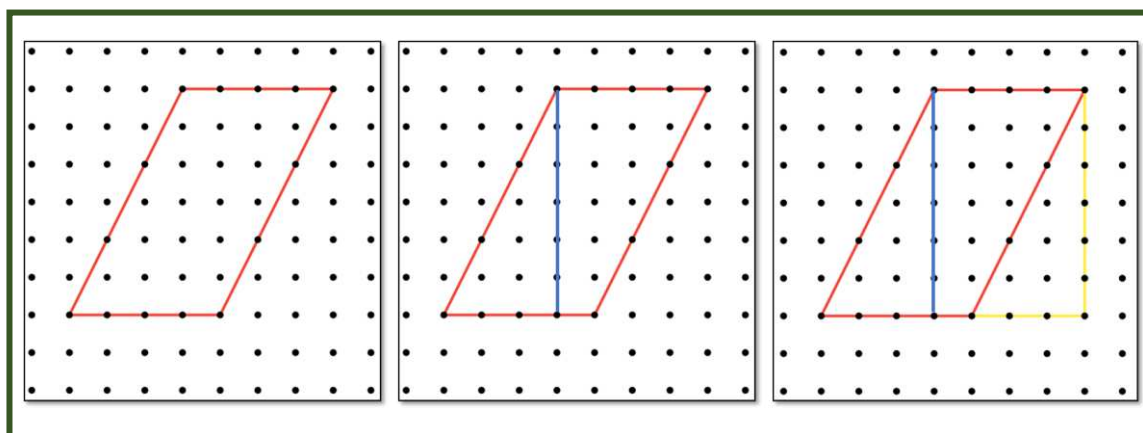
U ovoj aktivnosti učenici će otkriti formulu za površinu paralelograma, trokuta i trapeza povezujući ih s površinom pravokutnika. Učenici dobivaju više analognih primjera paralelograma koje prikazuju na geoploči. Kod zadavanja paralelograma moramo voditi računa o tome da su paralelogrami različitih veličina, različitih unutarnjih kutova i u različitim položajima (na primjer ne smiju svi paralelogrami biti takvi da im je jedan par nasuprotnih stranica uvijek u horizontalnom položaju). To vrijedi i za trokute i trapeze koje će kasnije proučavati. Moramo se odmaknuti od „klasičnih“ položaja na koje su učenici navikli gledati. Primjer takvog položaja možemo vidjeti na Slici 4.2.6.4. kod trapeza, a primjere nekih paralelograma za ovu aktivnost možemo vidjeti na Slici 4.2.6.1. Ovu aktivnost možemo organizirati tako da učenici rade u skupinama u obliku radnih centara. Za svaki radni centar pripremimo po jedan različit paralelogram kojeg će učenici zajednički istraživati i donositi zaključke.



*Slika 4.2.6.1. Primjer zadanih paralelograma*

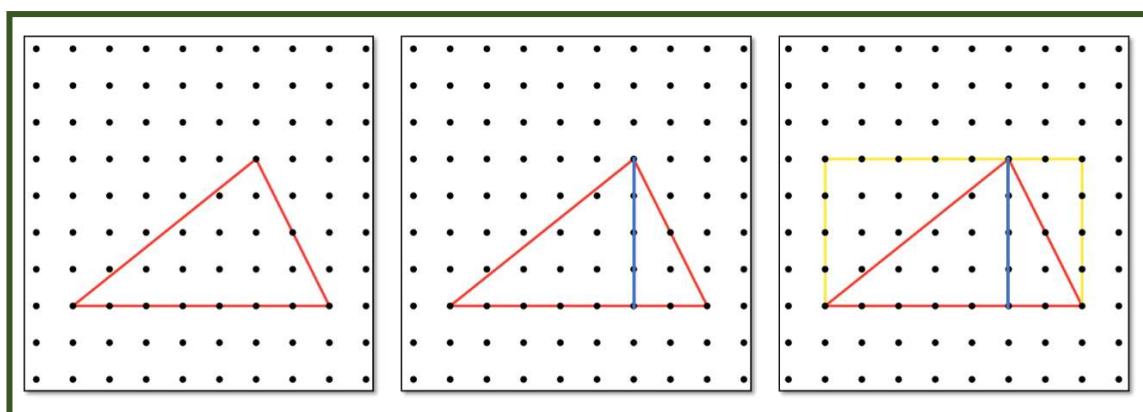
Zadatak učenika je odrediti površine zadanih paralelograma. To će učiniti pomoću gumica na geoploči. Podijelit će zadane paralelograme na manje dijelove te preslagivanjem tih dijelova složiti pravokutnike jednakih površina. Na dovoljnom broju analognih primjera zaključit će da je površina paralelograma jednaka umnošku njegove duljine i visine, odnosno jednaka je površini pravokutnika kojem je jedna stranica jednaka jednoj stranici paralelograma, a druga stranica je jednaka visini tog

paralelograma. Jedan primjer paralelograma i rješenja zadatka možemo vidjeti na Slici 4.2.6.2.



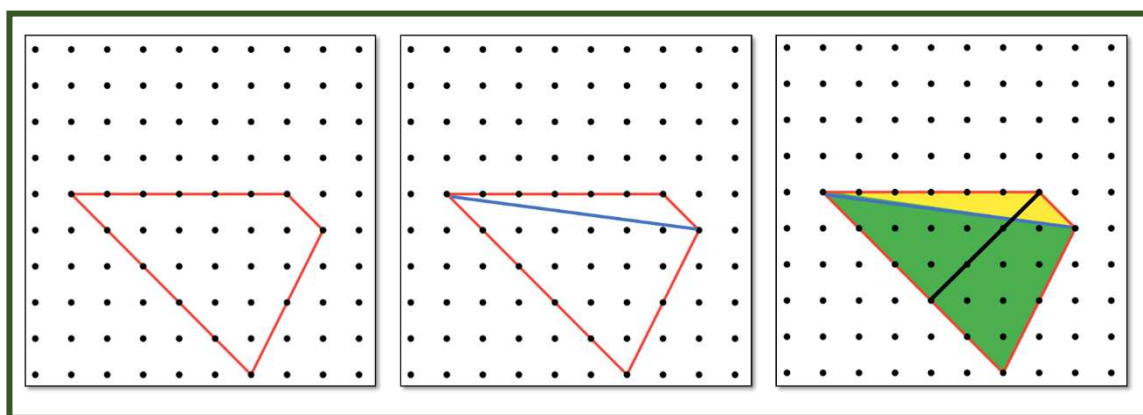
*Slika 4.2.6.2. Primjer određivanja površine paralelograma*

Nakon proučavanja paralelograma učenici će istraživati trokute. Na dovoljnom broju analognih primjera učenici će uočiti da svaki trokut okomicom možemo podijeliti na dva manja trokuta te možemo dočrtati takva ista dva manja trokuta na stranice trokuta tako da dobijemo dva pravokutnika čija je jedna dijagonala jednaka stranici trokuta. Odnosno dobivamo pravokutnik kojem je jedna stranica jednaka jednoj stranici trokuta, a druga stranica je jednaka duljini visine trokuta na tu stranicu. Zaključuju da je površina trokuta jednaka polovici površine tog pravokutnika. Primjer jednog trokuta i rješenja zadatka možemo vidjeti na Slici 4.2.6.3. Kod zadavanja trokuta trebamo obuhvatiti jednakostranične, jednakokračne, raznostranične trokute kao i šiljastokutne, tupokutne i pravokutne. U svaki radni centar možemo staviti po jednu vrstu trokuta.



*Slika 4.2.6.3. Primjer određivanja površine trokuta*

Na kraju će analogno istraživati površine trapeza. Primijetiti će da svaki trapez možemo podijeliti na dva trokuta. Uočavaju da ti trokuti imaju jednake visine koje padaju na stranice trokuta koje su zapravo osnovice trapeza, a visina tih trokuta je ujedno i visina trapeza. U primjeru na Slici 4.2.6.4. je ta visina označena crnom bojom. Zaključiti će da je površina trapeza jednaka zbroju površina tih dvaju trokuta od kojih se trapez sastoji, a površinu trokuta su naučili određivati u prethodnom dijelu aktivnosti stoga su zadatak sveli na „poznati teren“. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.2. i MAT OŠ D.7.3.



Slika 4.2.6.4. Primjer određivanja površine trapeza

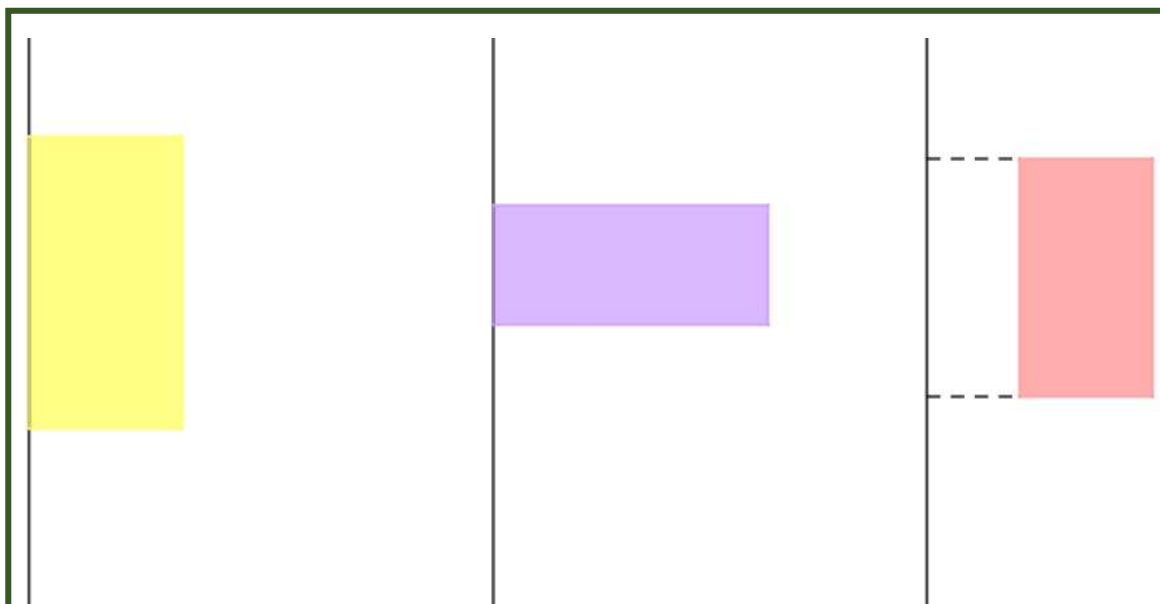
#### 4.2.7. Aktivnost *Rotacijska tijela*

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti rotacijska tijela. Aktivnost organiziramo u 5 radnih centara. Učenici u skupinama obilaze radne centre i istražuju. Likove koje će proučavati na radnim centrima su krug, pravokutan trokut, općeniti trokut, pravokutnik i trapez. Na svakom radnom centru dobivaju po tri geometrijska lika iste vrste na kartonu ili tvrđem papiru pričvršćena na štapiću. Zadatak im je da zavrte štapić i ispune listić. Primjer listića kojeg popunjavaju na svakom radnom centru možemo vidjeti na Slici 4.2.7.1., a primjer likova na štapićima za radni centar u kojem istražuju pravokutnike na Slici 4.2.7.2. Umjesto štapića, likove možemo staviti na električnu miješalicu za kavu čijim će uključivanjem učenici jasno vidjeti koje tijelo nastaje rotacijom oko fiksne osi. Primjer možemo vidjeti na Slici 4.2.7.3.

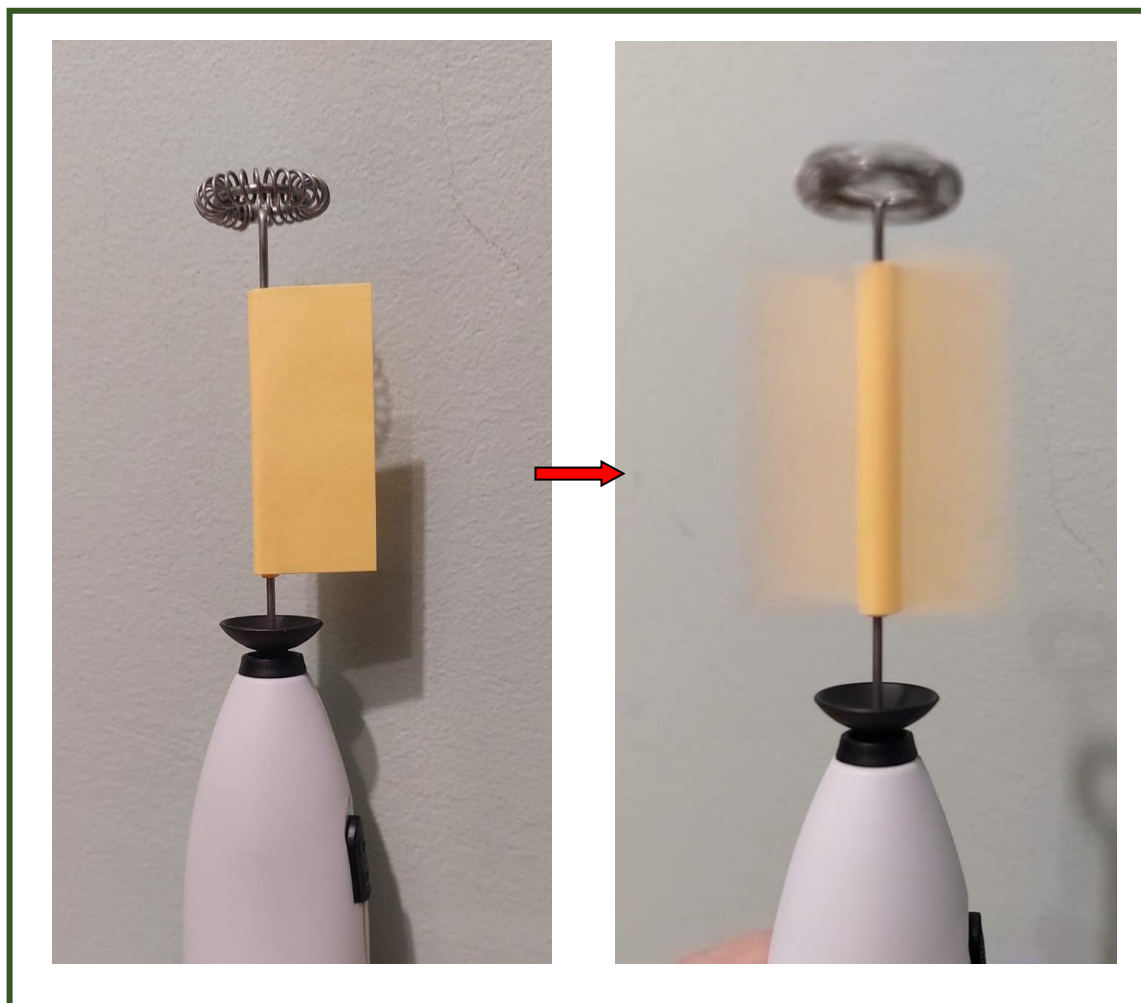
Nastavni listić – Radni centar 1

1. Koji geometrijski lik ste rotirali oko štapića?
2. Što je taj štapić tom liku?
3. Opišite koje tijelo ste dobili rotacijom prvog lika. Skicirajte tijelo te na skici označite lik koji ste rotirali.
4. Opišite koje tijelo ste dobili rotacijom prvog lika. Skicirajte tijelo te na skici označite lik koji ste rotirali.
5. Opišite koje tijelo ste dobili rotacijom prvog lika. Skicirajte tijelo te na skici označite lik koji ste rotirali.

*Nastavni listić 4.2.7.1. Primjer nastavnog listića za radni centar 1*

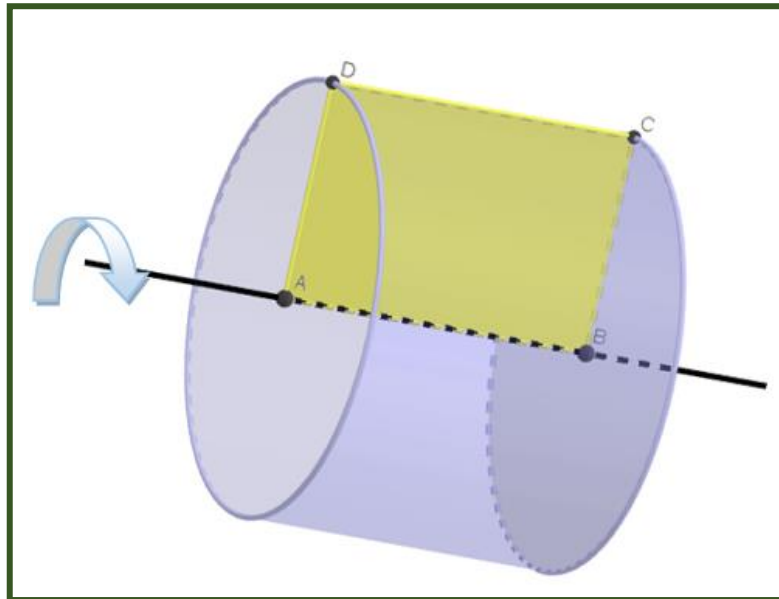


*Slika 4.2.7.2. Primjer likova na štapićima za radni centar pravokutnici*

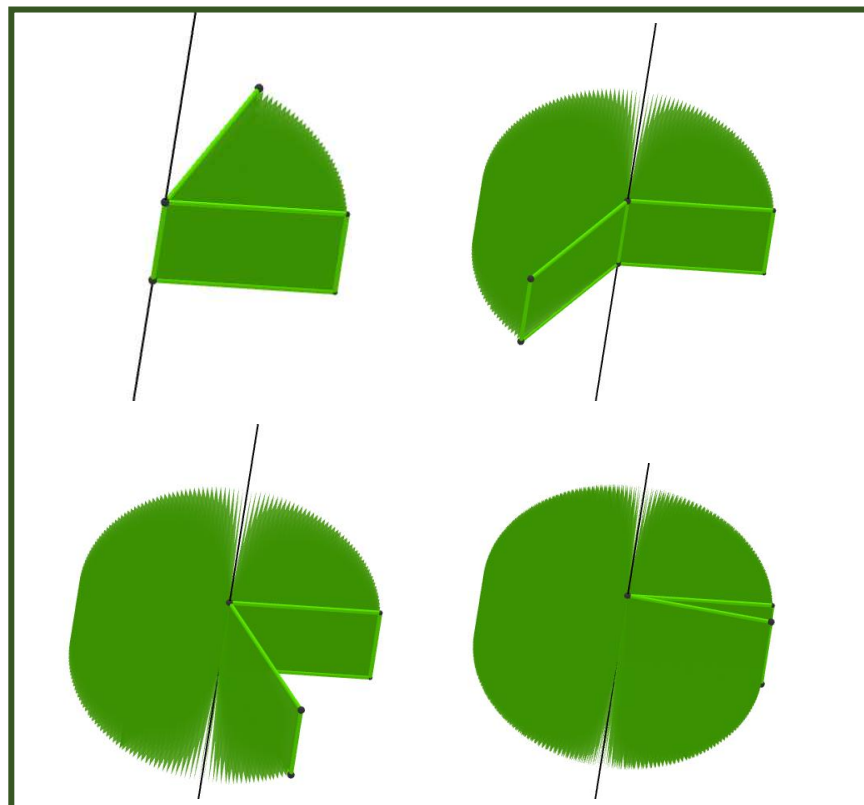


*Slika 4.2.7.3. Pravokutnik na miješalici za kavu*

Na Slici 4.2.7.4. možemo vidjeti što će učenici vidjeti ako zavrte prvi štapić. Na kraju aktivnosti, nastavnik u alatu dinamičke geometrije demonstrira rotacije likova oko fiksne osi. Primjer rotacije pravokutnika možemo vidjeti na Slici 4.2.7.5. Korištenje alata dinamičke geometrije u ovoj aktivnosti uvelike pomaže u vizualizaciji objekata i razumijevanju koncepta rotacijskih tijela. Važno je da dobivena geometrijska tijela pogledamo sa svih strana što se u alatu dinamičke geometrije može vrlo lako. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.



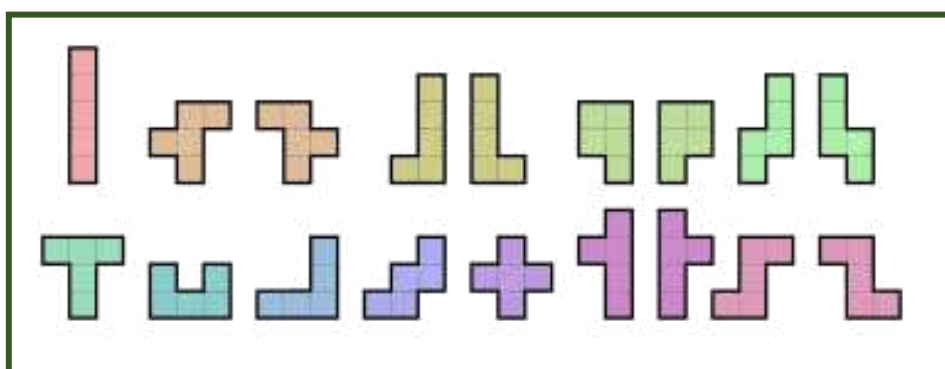
*Slika 4.2.7.4. Rezultat vrtnje prvog štapića*



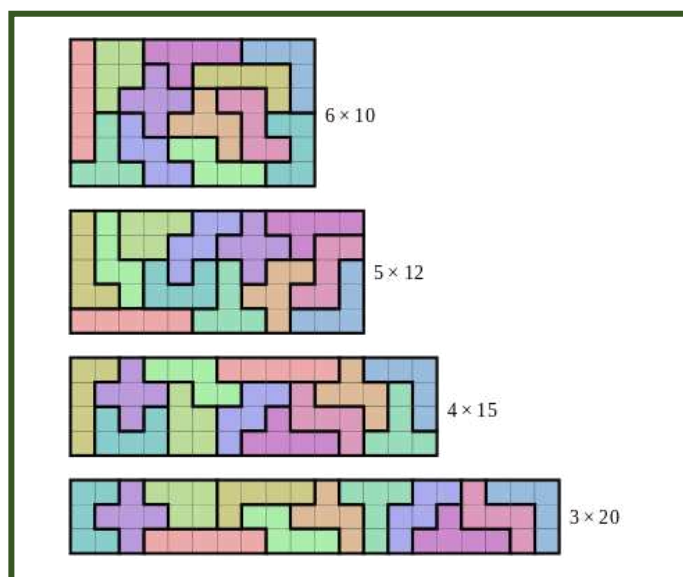
*Slika 4.2.7.5. Primjer rotacije pravokutnika u GeoGebri*

## 4.2.8. Aktivnost *Pentomino*

Pentomino pločice su slagalice sastavljene od pet sukladnih kvadrata pri čemu po dva susjedna kvadrata imaju zajednički rub. Osnovni pentomino set sadrži 12 pločica. 12 pentomino pločica može oblikovati 18 različitih oblika koje možemo vidjeti na Slici 4.2.8.1. U ovoj aktivnosti učenici će radeći u skupinama sastavljati pravokutnike zadanih dimenzija pri čemu će morati iskoristiti svih 12 pentomino pločica koje će smjeti zakretati. Primjer četiri takva pravokutnika sastavljenih od pentomino pločica možemo vidjeti na Slici 4.2.8.2.



Slika 4.2.8.1. Pentomino pločice<sup>21</sup>



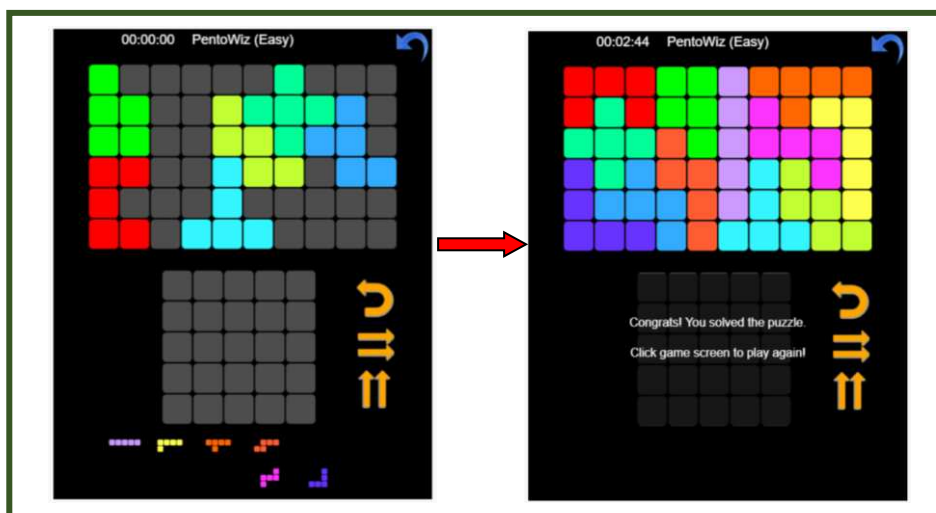
Slika 4.2.8.2. Pravokutnici sastavljeni od pentomino pločica<sup>22</sup>

<sup>21</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/File:All\\_18\\_Pentominoes.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:All_18_Pentominoes.svg)

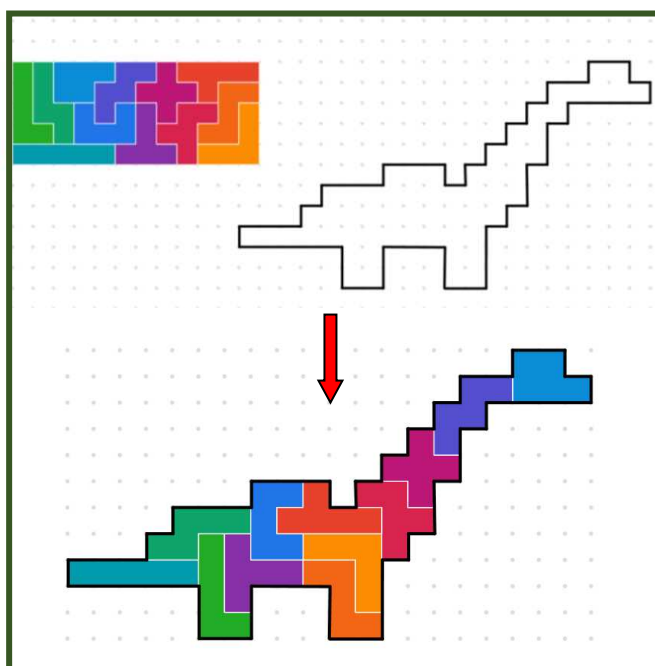
<sup>22</sup> [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/09/Pentomino\\_Puzzle\\_Solutions.svg/660px-Pentomino\\_Puzzle\\_Solutions.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/09/Pentomino_Puzzle_Solutions.svg/660px-Pentomino_Puzzle_Solutions.svg.png)



Pomoću pentomino pločica se mogu sastavljati razni oblici. Ne moramo uvijek koristiti svih 12 pločica. Postoje oblici koji se mogu složiti i s manje. Igre s pentomino pločicama su vrlo popularne te se mogu pronaći u online verzijama. Primjer igre u kojoj treba sastaviti pravokutnik vidimo na Slici 4.2.8.3., a primjer slaganja dinosaura na Slici 4.2.8.4.



Slika 4.2.8.3. Online verzija dovršavanja pravokutnika od pentomino pločica<sup>23</sup>



Slika 4.2.8.4. Online verzija sastavljanja dinosaura od pentomino pločica<sup>24</sup>

<sup>23</sup> <https://www.onlinesologames.com/pentowiz/?t=6>

<sup>24</sup> <https://mathigon.org/task/pentomino-zoo>

Na Slikama 4.2.1. i 4.2.2. možemo vidjeti dva zadatka s matematičkog natjecanja Klokan bez granica na kojima treba odrediti simetričnu sliku te sliku u ogledalu.

4. Franka crta simetrične slike početnog slova svoga imena s obzirom na dvije istaknute crte kao na slici. Kako će izgledati njezin crtež?

A) B) C) D) E)

**Rješenje: E**

Simetrična slika s obzirom na vertikalnu liniju je , a s obzirom na horizontalnu liniju je .

Rješenje je .

Slika 4.2.1. Klokan bez granica: Benjamin (VI. i VII. razred OŠ); 2020. godine<sup>25</sup>

3. Brijlač želi na ploči napisati riječ SHAVE tako da je klijent koji natpis gleda u ogledalu može ispravno pročitati. Kako bi je trebao napisati na ploči?

A) SHAVE      B) SHAVE      C) EVAHS

D) EVAHS      E) SHAVE

**Rješenje: E**

Slika 4.2.2. Klokan bez granica: Junior (2.r. i 3.r. SŠ); 2019. godine<sup>26</sup>

<sup>25</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2020/benjamin-2020-zad.pdf>

<sup>26</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2019/junior-2019-zad.pdf>

## 4.3. Lokacija

Djeca prije nego krenu u školu uče pojmove kojima opisuju gdje se što nalazi u prostoru i na koji je način organizirano. Važno je da što prije savladaju orijentaciju u prostoru u kojem se nalaze. U ovom poglavlju predstaviti ćemo aktivnosti u kojima će učenici opisivati gdje se što nalazi u prostoru, snalaziti će se na karti i u koordinatnom sustavu u ravnini.

### 4.3.1. Aktivnost *Tko, što i gdje?*

Cilj aktivnosti je osvijestiti orijentaciju lijevo – desno, ispred – iza, ispod – na – iznad, u – izvan promatrajući okolinu i predmete u njoj. Aktivnost se odvija u paru. Svaki učenik svom paru kaže tko ili što se nalazi ispred, iza, lijevo ili desno od njega. Na primjer Iva kaže: „Ispred mene se nalazi ploča, iza mene sjedi Marko, s desne strane su vrata, a s lijeve sjedi Marta.“ Nastavnik prozove nekoliko učenika da svima opišu što ih okružuje. Nakon toga nastavnik okrenut prema djeci daje primjer što se nalazi u njegovoj okolini. Na primjer kaže: „Ispred mene se nalazi Iva, iza mene je ploča, vrata su s lijeve strane, a prozori s desne.“ Učenici uočavaju kako je ono što je Ivi bilo slijeva, nastavniku zdesna, odnosno ono što je Ivi bilo zdesna njemu je slijeva. Također uočavaju da je ploča ispred Ive, a iza nastavnika. Zaključuju da su lijevo – desno i ispred – iza relativni odnosi koji ovise o tome gdje se tko nalazi u prostoru.

U nastavku aktivnosti učenici osvještavaju odnose ispod – na – iznad, u – izvan. Zadatak učenika je da osmisle barem jedan primjer za svaki od ovih odnosa koristeći predmete u učionici. Na primjer Janko kaže: „Moja torba se nalazi ispod klupe, pernica se nalazi na klupi, a strop se nalazi iznad klupe. Bojice se nalaze u pernici, a gumica je izvan nje.“ Nekoliko učenika iznosi svoje primjere pred razredom. Uočavaju da nema veze kako je tko okrenut u prostoru. Ako je nešto ispod ili iznad, u ili ispod to uvijek vrijedi bez obzira na to s koje strane gledamo.

Učenici vizualiziraju vlastiti prostor i opisuju međusobne odnose. Ova aktivnost je razine 0. prema Van Hielevoj teoriji razvoja geometrijskog mišljenja, a doprinosi ostvarenju ishoda učenja: MAT OŠ D.6.5.

### 4.3.2. Aktivnost *Potraga za blagom*.

Danas se rijetko koriste fizičke karte u stvarnom životu. Dolaskom tehnologije mnogi su zaboravili, a djeca možda nikad nisu ni vidjela fizičku kartu. U ovoj aktivnosti, učenici će se pomoću karte orijentirati u prostoru, rješavati zadatke i tražiti skriveno blago. Za ovu aktivnost potrebno je pripremiti kartu mjesta u kojem se škola nalazi te na njoj označiti postaje do kojih učenici trebaju doći. Učenici se podijele u četveročlane heterogene timove i natječu se koji će tim prvi uspjeti obići sve označene stanice, točno riješiti zadatke na njima i doći natrag na start gdje se nalazi blago, odnosno bodovi. Na kraju učenici dobivaju onoliko blaga (bodova) koliko su zadataka riješili točno na stanicama koje su obilazili. Pobjeđuje ekipa koja je skupila najviše bodova, to jest ekipa koja je najbrže obišla sve postaje i najviše zadataka riješila točno. Primjer jedne takve karte možemo vidjeti na Slici 4.3.2.1. Žutim trokutima su označene stanice do kojih učenici trebaju doći, a kreću i završavaju ovu igru s pozicije gdje piše CILJ.



Slika 4.3.2.1. Karta Tuhlje s označenim stanicama<sup>27</sup>

Učenici dobivaju papir na koji bilježe odgovore za svaku postaju koji će ekipa predati nastavniku svojim dolaskom na cilj, a nastavnik će odgovore provjeriti i sukladno tome ekipi dodijeliti bodove. Primjer jednog takvog lista za odgovore možemo vidjeti na Slici

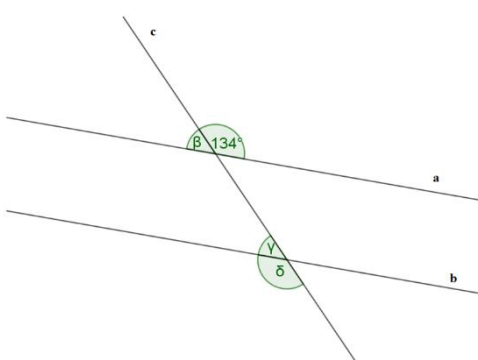
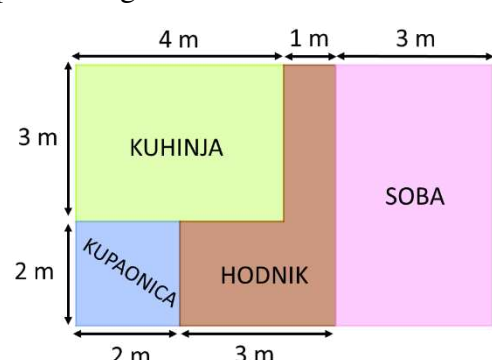
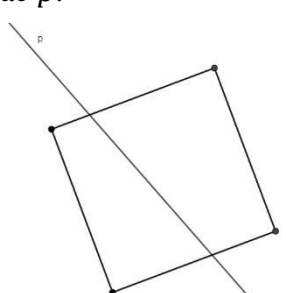
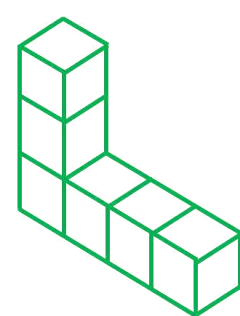
<sup>27</sup> <https://www.google.com/maps/@46.0757663,15.7477774,582m/data=!3m1!1e3?entry=ttu>

4.3.2.2. Ako u igri na primjer sudjeluje 6 ekipa, ekipa koja prva dođe na cilj dobiva 5 dodatnih bodova, ekipa koja stigne druga 4 boda i analogno tako dalje. Dakle zadnja ekipa ne dobiva nikakve dodatne bodove.

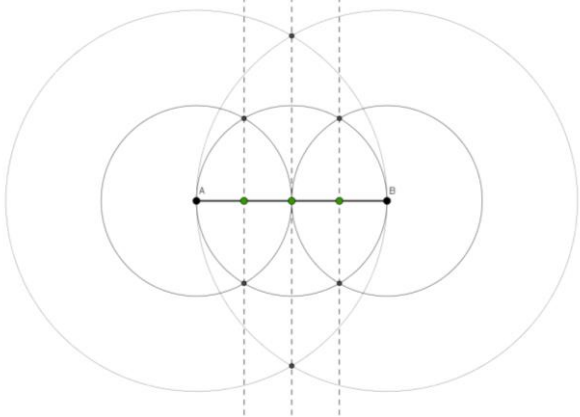
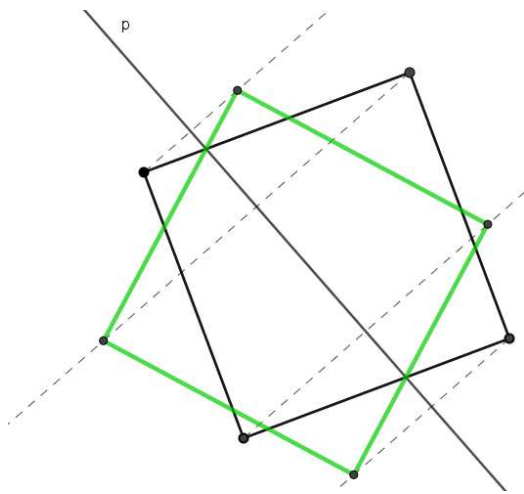
Ime ekipe:	Članovi ekipe:
Postaja Pitagora Odgovor:	Postaja Gauss Odgovor:
Postaja Euklid Odgovor:	Postaja Arhimed Odgovor:
Postaja Eratosten Odgovor:	Postaja Bošković Odgovor:
Postaja Tales Odgovor:	Postaja Getaldić Odgovor:

*Slika 4.3.2.2. List za odgovore*

U ovoj aktivnosti učenici osim snalaženja u prostoru i orijentaciji na karti, trebaju sami odlučiti kojim će redom obilaziti stanice. U timu moraju dogovoriti strategiju obilaska mjesta. Zadatci koje će rješavati na postajama trebaju biti primjereni uzrastu učenika, a mogu biti iz raznih područja matematike. Aktivnost je zgodna za provođenje na kraju nastavne godine kao ponavljanje gradiva kojeg su učenici usvojili te nastavne godine. S obzirom da se ova aktivnost odvija na otvorenom, provesti je treba u toplije doba godine. Svakako treba voditi računa o tome da učenici budu sigurni i u slučaju velikog prometa na području na kojem se škola nalazi, aktivnost se može prilagoditi tako da učenici na primjer traže blago u parku ili na igralištu. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja ovisno o tipu zadataka koje ćemo zadati učenicima. Primjere zadataka za učenike petih razreda u svrhu ponavljanja cjeline Oblik, prostor i mjerenje možemo vidjeti u nastavku. Zadatci doprinose ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ C.5.1., MAT OŠ C.5.2., MAT OŠ C.5.3., MAT OŠ D.5.1, MAT OŠ D.5.4. i MAT OŠ D.5.5.

<p><b>Postaja Pitagora</b></p> <p>Nacrtaj dužinu <math>\overline{AB}</math> duljine 57 mm, te je podijeli na četiri jednaka dijela.</p>	<p><b>Postaja Gauss</b></p> <p>Izračunaj površinu pravokutnika ako je njegov opseg 120 cm , a duljina jedne njegove stranice iznosi 35 cm.</p>
<p><b>Postaja Euklid</b></p> <p>Izračunaj mjere kutova <math>\beta, \gamma</math> i <math>\delta</math> ako je <math>a \parallel b</math>.</p> 	<p><b>Postaja Arhimed</b></p> <p>Kolika je površina hodnika stana prikazanog na slici?</p> 
<p><b>Postaja Eratosten</b></p> <p>Koliko vode stane u akvarij oblika kvadra čija je duljina 300 mm, širina 2 dm i visina 50 cm?</p>	<p><b>Postaja Bošković</b></p> <p>Kolika je duljina brida kocke ako je njezin volumen <math>125 \text{ dm}^3</math>?</p>
<p><b>Postaja Tales</b></p> <p>Osnosimetrično preslikaj kvadrat s obzirom na pravac <math>p</math>.</p> 	<p><b>Postaja Getaldić</b></p> <p>Odredi volumen tijela sa slike ako je brid jedne kockice 2 cm.</p> 

Slika 4.3.2.3. Primjer zadataka za učenike petih razreda

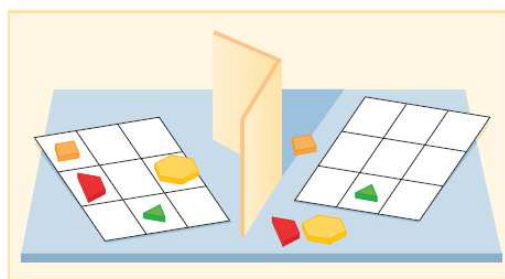
<p><b>Postaja Pitagora</b></p> 	<p><b>Postaja Gauss</b></p> $o = 120 \text{ cm}$ $a = 35 \text{ cm}$ <hr/> $o = 2a + 2b$ $2b = 120 - 2 \cdot 35$ $2b = 50$ $b = 25 \text{ cm}$ $P = a \cdot b$ $P = 35 \cdot 25 = 875 \text{ cm}^2$
<p><b>Postaja Euklid</b></p> $\beta = 46^\circ, \quad \gamma = 46^\circ, \quad \delta = 134^\circ$	<p><b>Postaja Arhimed</b></p> $P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \text{ m}^2$
<p><b>Postaja Eratosten</b></p> $a = 300 \text{ mm} = 3 \text{ dm}$ $b = 2 \text{ dm}$ $c = 50 \text{ cm} = 5 \text{ dm}$ <hr/> $V = a \cdot b \cdot c$ $V = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30 \text{ dm}^3$	<p><b>Postaja Bošković</b></p> $V = 125 \text{ dm}^3$ <hr/> $V = a \cdot a \cdot a$ $125 = a \cdot a \cdot a$ $a = 5 \text{ dm}$
<p><b>Postaja Tales</b></p> 	<p><b>Postaja Getaldić</b></p> $a = 2 \text{ cm}$ <hr/> $V = 6 \cdot a^3$ $V = 6 \cdot 2^3 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^3$

Slika 4.3.2.4. Rješenja zadataka



### 4.3.3. Aktivnost *Skrivena pozicija*

Kada su djeca u stanju da sama opisuju prostor oko sebe i ono što se u njemu nalazi, vrijeme je da osvijeste važnost određivanja lokacije bez direktnog pokazivanja. Ova aktivnost je namijenjena upravo tome. Za ovu igru su potrebne dvije mreže 3x3 (kao za Križić - kružić), jedna pregrada (možemo na primjer koristiti malo veći karton) i 4 različita geometrijska oblika. Igra se igra u paru. Važno je da učenici sjede tako da jedan drugome ne mogu vidjeti mrežu. Učenik koji igra prvi postavlja svoje geometrijske oblike na 4 različite pozicije na mreži. Nakon toga drugom učeniku opisuje gdje da stavi svoje oblike kako bi se njihove mreže i položaji geometrijskih oblika podudarali. Učenici koriste riječi kao što su gornji, srednji, donji red, lijevo, desno, između, pokraj, iznad, ispod... Nakon što drugi učenik složi svoje oblike, provjeravaju jesu li mreže jednake. Potom učenici mijenjaju uloge i nastavljaju igru. Za učenike s poteškoćama igra se može prilagoditi tako da se koristi samo jedan geometrijski oblik. Potom se igra može proširiti na dva oblika i tako postupno dalje. Za učenike koji su spremni za veće izazove možemo povećati mrežu, na primjer na 5x5 ili 6x6 te dodati još različitih geometrijskih oblika. Uočimo kako učenici u ovoj aktivnosti ne trebaju poznavati koordinatni sustav u ravnini ili neke druge matematičke pojmove i znanja, već samo osnovne pojmove kojima se orijentiraju u prostoru. Aktivnost možemo proširiti tako da učenici pomoću koordinata otkrivaju pozicije geometrijskih oblika. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.5. i MAT OŠ D.7.2.

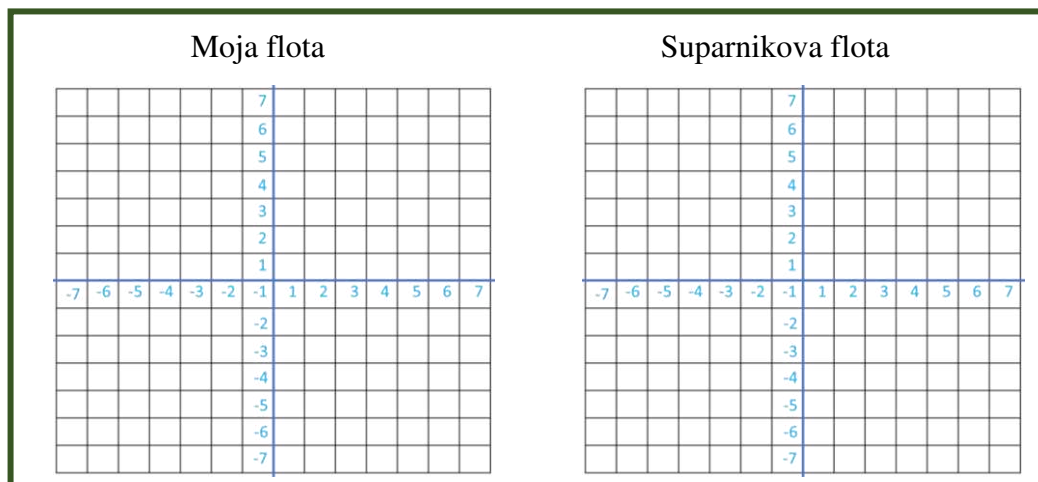


Slika 4.3.3.1. Igra *Skrivena lokacija* [7, 425. str.]



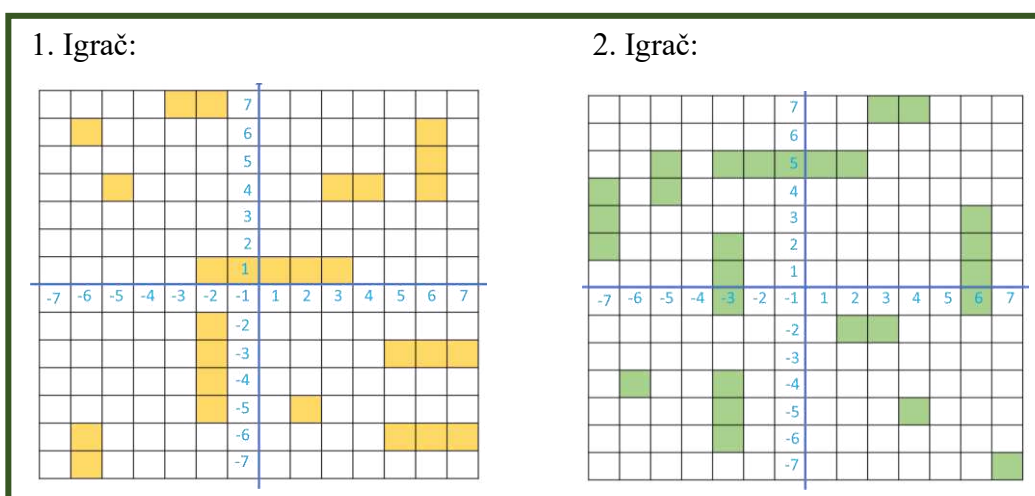
#### 4.3.4. Aktivnost *Potapanje brodova*

Cilj aktivnosti je uvježbati očitavanje cjelobrojnih točaka u kvadratnoj mreži. Igra se igra u paru. Svaki učenik u paru dobiva dvije kvadratne mreže. Primjer kvadratnih mreža vidimo na Slici 4.3.4.1. Kao i u prošloj aktivnosti, između učenika treba biti pregrada kako ne bi mogli vidjeti mreže jedan drugome.



Slika 4.3.4.1. Primjer kvadratnih mreža za jednog učenika

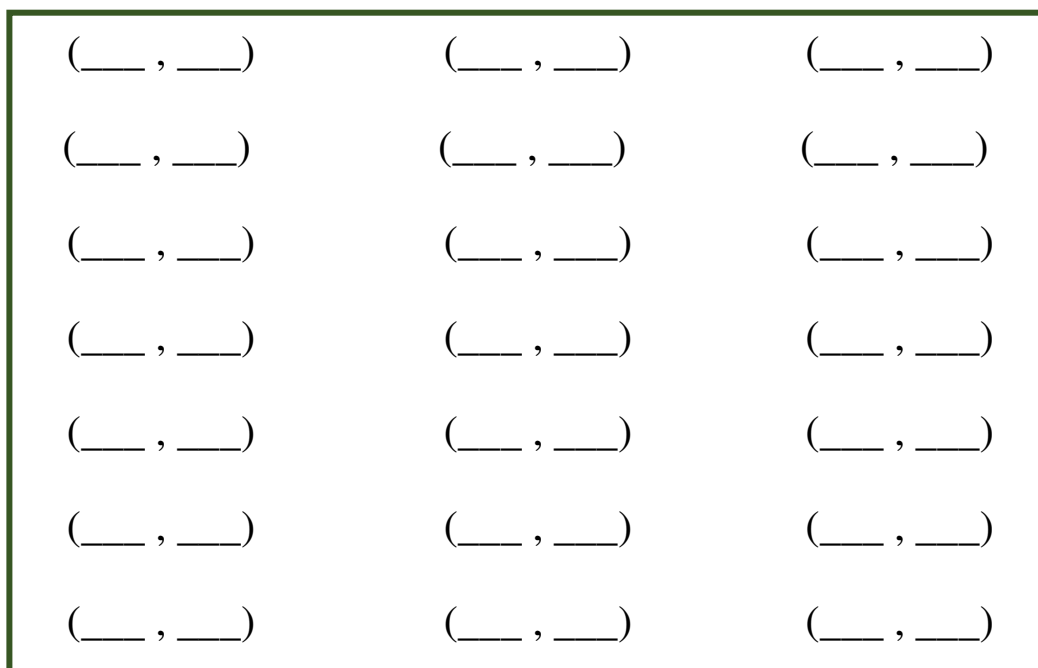
Na početku igre, svaki učenik formira svoju flotu. Na pripremljenu kvadratnu mrežu prema vlastitom izboru postavlja svoje brodove. Na raspolaganju ima ukupno 11 brodova (tri površine 1, tri površine 2, tri površine 3 i po jedan površine 4 i 5 kvadratnih jedinica). Na kvadratnu mrežu ih slaže tako da se brodovi međusobno ne dodiruju. Primjer formiranih flota možemo vidjeti na slici 4.3.4.2.



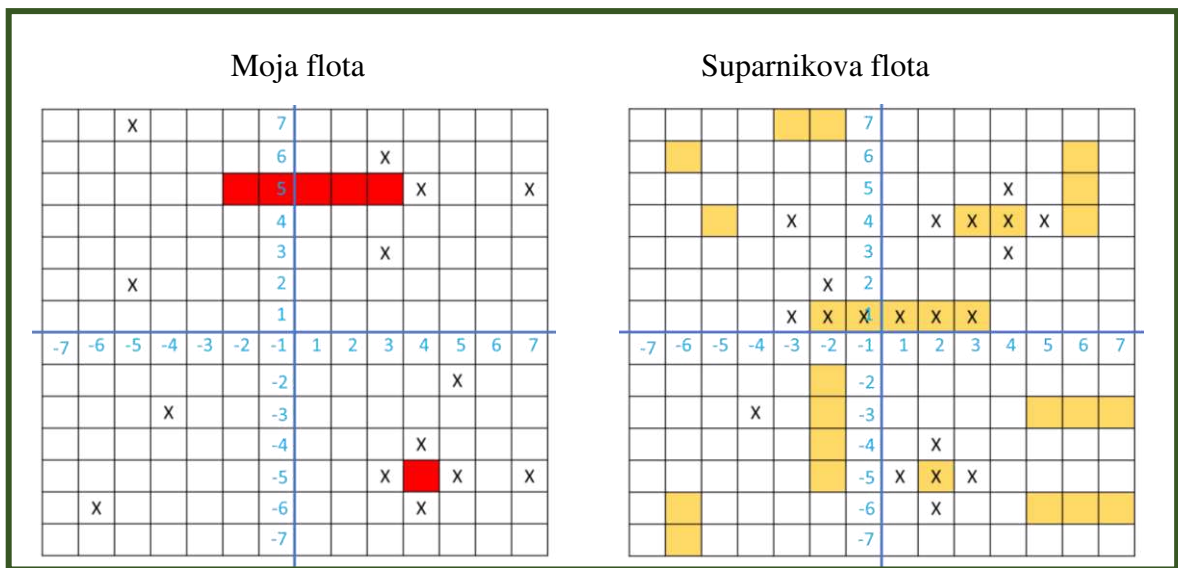
Slika 4.3.4.2. Primjer flota oba igrača u paru

Cilj igre je potopiti sve protivnikove brodove. Izgovarajući uređene parove protivničke kvadratne mreže svaki igrač napada protivničku flotu. Svaki igrač u prvu kvadratnu mrežu bilježi pokušaje suparnika, a u drugu mrežu svoje pokušaje. Ako je igrač pogodio neku od koordinata na kojoj se nalazi neki od brodova, suparnik mu kaže Pogodak! i napadač nekom bojom označava da se na tom mjestu nalazi brod ili dio broda protivnika te nastavlja igru sve dok ne promaši protivnikov brod. Ako igrač nije pogodio koordinatu broda ili dijela broda, križićem označava svoj promašaj. Igrači uređene parove koje su već iskoristili mogu zapisivati i sa strane kako bi osim očitavanja koordinata uvježbali i zapisivanje istih. Primjer listića za zapisivanje uređenih parova možemo vidjeti na Slici 4.3.4.3. Pobjednik ove igre je igrač koji je prvi potopio sve brodove svog protivnika. Na Slici 4.3.4.4. možemo vidjeti primjer dijela igre u kojem je protivnik potopio 3 broda površine 1, 2 i 5 kvadratnih jedinica, a 1. igrač je potopio 2 broda površine 1 i 5 kvadratnih jedinica.

Za učenike mlađeg uzrasta aktivnost se može prilagoditi tako da se brodovi nalaze samo u pozitivnom dijelu kvadratne mreže, a za starije učenike bismo mogli „zumirati“ kvadratnu mrežu, odnosno staviti koordinate koje nisu cjelobrojne. Ova aktivnost doprinosi ostvarenju ishoda učenja MAT OŠ D.6.5. i MAT OŠ D.7.2./



*Slika 4.3.4.3. Listić za zapisivanje iskorištenih uređenih parova*



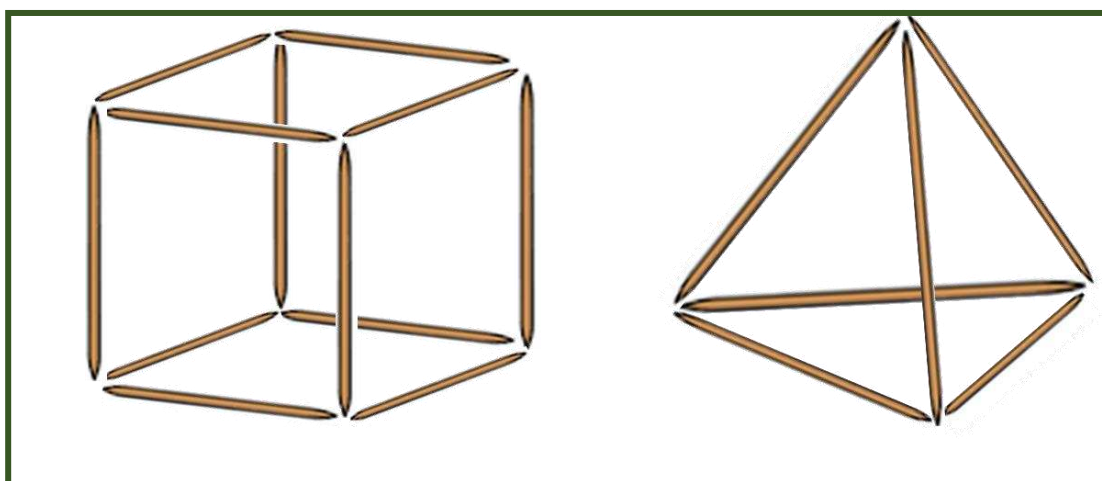
Slika 4.3.4.4. Primjer dijela igre

## 4.4. Vizualizacija

Posljednji geometrijski aspekt je vizualizacija. Vizualizacija uključuje prepoznavanje oblika u okolini, razvijanje odnosa između dvodimenzionalnih i trodimenzionalne objekte i sposobnost crtanja i prepoznavanja objekata iz različitih perspektiva. U ovom poglavlju predstaviti ćemo aktivnosti u kojima će učenici slagati fizičke slagalice i misaono preslagivati.

### 4.4.1. Aktivnost *Idemo u prostor*

Cilj aktivnosti je uočiti potrebu za prelaskom iz ravnine u prostor. Aktivnost je namijenjena učenicima drugih razreda srednje škole kao uvod u poglavlje Geometrija prostora. Učenici u skupinama dobivaju 12 čačkalica jednake duljine pomoću kojih trebaju složiti 6 kvadrata pri čemu čačkalice ne smiju lomiti. Također dobivaju plastelin ili ljepilo kojim će spajati dobivene čačkalice. Istražujući i isprobavajući, učit će da je zadatak nemoguće riješiti u ravnini. Da bi složili 6 kvadrata od čačkalica moraju složiti kocku. Analogno, od 6 čačkalica trebaju složiti 4 jednakostranična trokuta. Da bi složili 4 jednakostranična trokuta uočavaju da od čačkalica moraju složiti tetraedar. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT SŠ C.2.5.



*Slika 4.4.1.1. Kocka od čačkalica (lijevo), tetraedar od čačkalica (desno)*

Geometrijska tijelima su prisutna u mnogim aspektima naših života i susrećemo ih svakodnevno. Pojavljuju se u prirodi, svakodnevnim predmetima, arhitekturi, umjetnosti. Neki ljudi imaju poteškoća u vizualizaciji 3D objekata, stoga u nastavi treba što više povezivati geometrijska tijela s konkretnim primjerima iz stvarnog života. Također je važno što više koristiti fizičke ili digitalne modele tijela kako bi učenici lakše razumjeli ove geometrijske koncepte te se odmaknuli od formula i „mehaničkog učenja“. U sljedećim aktivnostima učenici će istraživati geometrijska tijela.

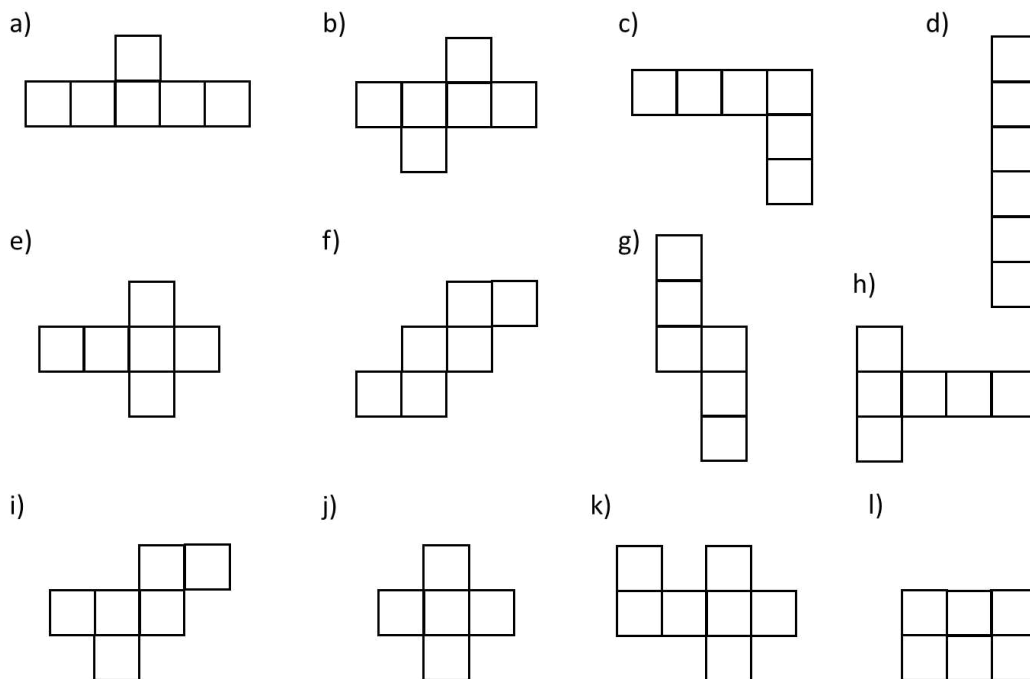
#### 4.4.2. Aktivnost *Mreže geometrijskih tijela*

U ovoj aktivnosti učenici će prepoznavati mreže geometrijskih tijela. Na temelju slike mreže trebat će misaono složiti traženo geometrijsko tijelo i otkriti je li to mreža traženog geometrijskog tijela. Učenici dobivaju nastavni listić i samostalno istražuju. Učenici koji imaju slabije razvijenu sposobnost vizualizacije mreže mogu izrezivati iz papira i fizički slagati geometrijska tijela ili mogu na primjer koristiti JOVO Click'n Construct slagalice koje smo opisali u trećem poglavlju pomoću kojih će složiti mrežu te potom vidjeti mogu li od nje složiti geometrijsko tijelo.

Bilo bi poželjno da učenici uspiju riješiti zadatke bez pomoći fizičkih modela koristeći samo sposobnost vizualizacije i misaonih slaganja mreža. Primjer zadatka možemo vidjeti na Slici 4.4.2.1. Učenicima možemo zadati i zadatke kao na primjer na Slici 4.4.2.2. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja

MAT OŠ C.8.2., MAT OŠ D.8.2., MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. i MAT SŠ C.2.6.  
MAT SŠ D.2.4.

Zadatak: Zaokruži mreže od kojih se može sastaviti kocka.

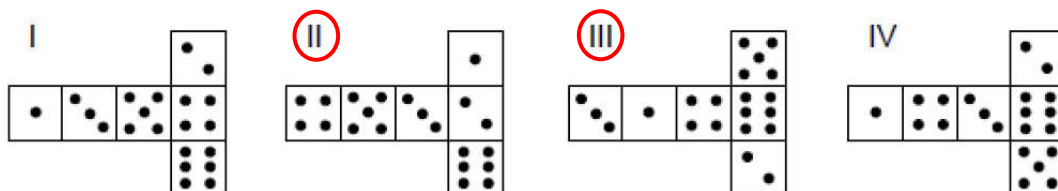


Slika 4.4.2.1. Određivanje mreže kocke

Na slici su prikazane dvije igraće kocke, tj. kocke s točkama na svakoj strani takve da je ukupan broj točaka na dvjema nasuprotnim uvijek 7.



Na sljedećim su slikama prikazane mreže kocaka na čijim su stranama ucrtane točke.

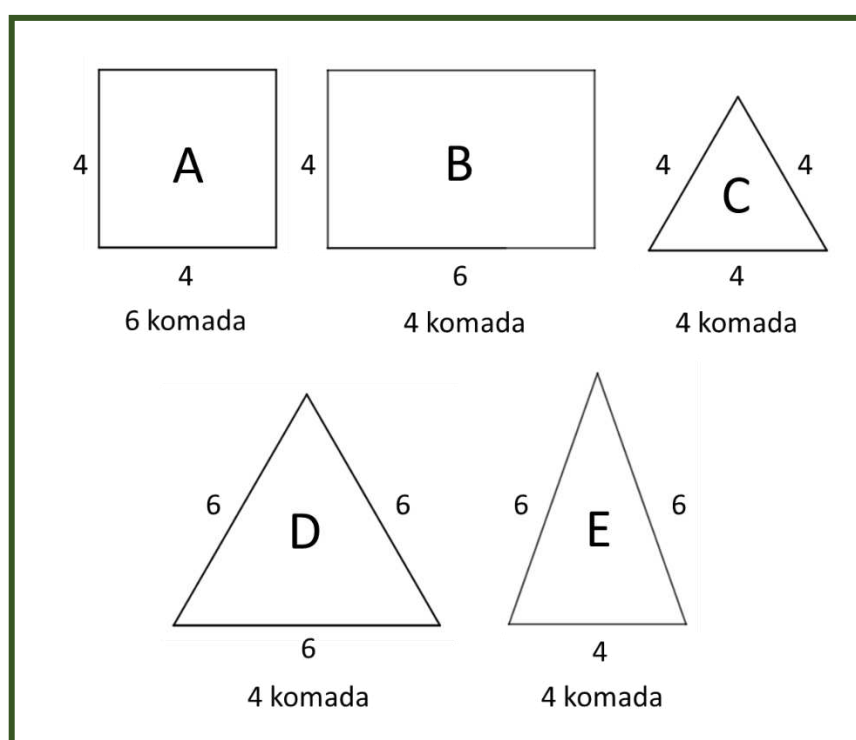


Koje od prikazanih mreža zadovoljavaju “uvjet zbroja 7”?

Slika 4.4.2.2. Zadatak igraće kockice

U nastavku aktivnosti učenici će pomoću zadanih mnogokuta (dijelova mreže) misaono sastavljati tijela. Primjer zadanih mnogokuta i njihov broj možemo vidjeti na Slici 4.4.2.3., a neka od rješenja su:

- četverostrane prizme: AAAAAA, AABBBB
- četverostrane piramide: ACCCC, AEEEEE, BDDEE, BCEEE
- trostrane prizme: AAACC, ABBEE, BBBCC, BBBDD
- trostrane piramide: CCCC, DDDD, CEEE, DDEE, EEEE



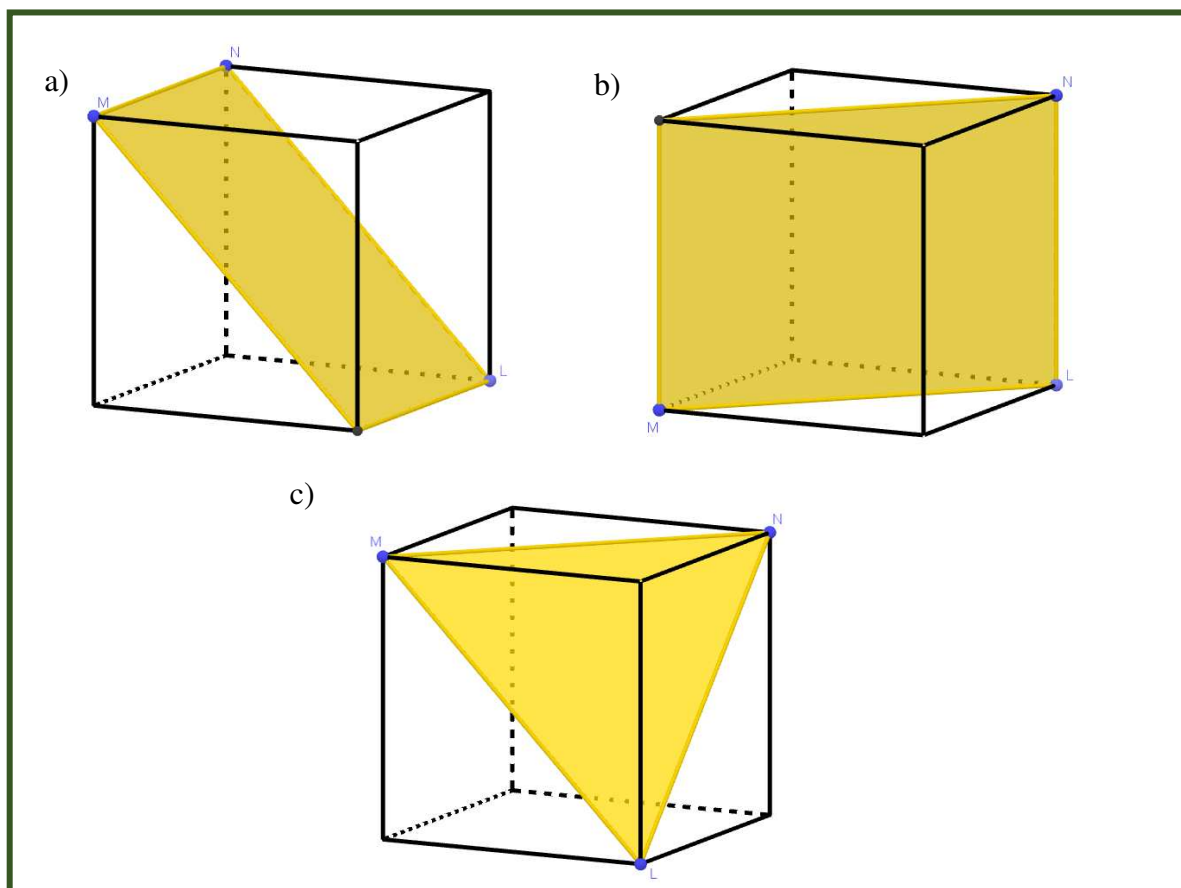
Slika 4.4.2.3. Zadani mnogokuti

### 4.4.3. Aktivnost *Vrhovi kocke*

Ovom aktivnošću učenici će otkriti da presjek kocke i ravnine koja je određena točkama koje su vrhovi kocke, može biti pravokutnik, kvadrat ili trokut. Aktivnost se odvija u tročlanim skupinama rješavanjem zadataka metodom „Kolo naokolo“. Učenici najprije oblikuju plastelin u kocku. Malo plastelina druge boje postavljaju u položaj istaknutih točaka *M*, *N* i *L* na slikama s listića. Nakon toga rezanjem plastelina pomoću nožića koji predstavlja ravninu tako da rez prolazi zadanim točkama, uočavaju moguće

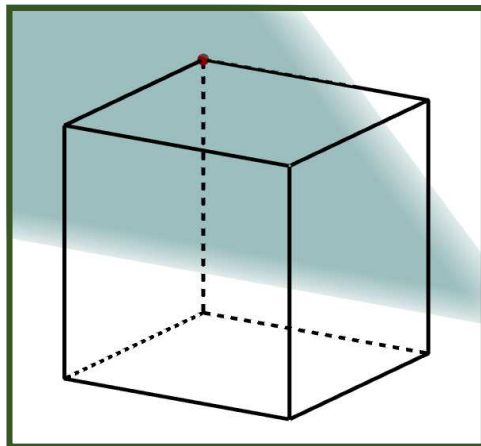
presjeke kocke ravninom. Potom te presjeke prikazuju na nastavnim listićima. Svaki od učenika u skupini dobiva svoj nastavni listić (A, B ili C). Svaki od učenika na svom listiću rješava a) dio zadatka. Nakon što završe, listić predaju učeniku do sebe te rješavaju b) dio zadatka na novom listiću i kontroliraju a) dio. Nakon rješavanja b) dijela zadatka, listić ponovno predaju učeniku do sebe te rješavaju c) dio zadatka. Nakon što završe sa zadacima, zajednički u skupini diskutiraju o dobivenim rješenjima. Nakon što sve grupe završe sa svojim radom slijedi razredna diskusija.

Točke u zadacima su vrhovi kocke. U a) i b) dijelu zadatka se uvijek dvije točke nalaze na istom bridu kocke, a treća točka se nalazi na drugom kraju dijagonale koju određuje jedna od prve dvije točke. U c) dijelu zadatka, dužine koje spajaju točke čine dijagonale stranice kocke. Učenici uočavaju da je lik koji je nastao presjekom kocke i ravnine koja je određena točkama koje su vrhovi kocke pravokutnik ili trokut.



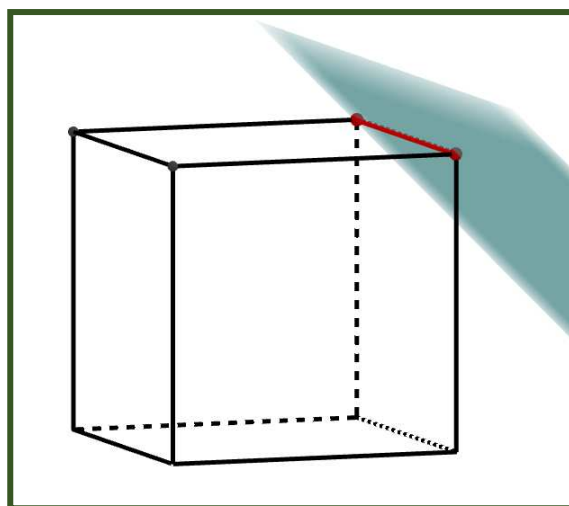
*Nastavni listić 4.4.3.1. Primjer rješenja jednog nastavnog listića*

Nakon toga istražuju može li presjek kocke i neke ravnine biti točka. Uočavaju da moraju uzeti ravninu koja dodiruje kocku samo u njenom jednom vrhu.



*Slika 4.4.3.2. Presjek kocke i ravnine točka*

Potom promatraju može li presjek kocke i neke ravnine biti pravac. Uočavaju da taj slučaj nije moguć jer je pravac beskonačan, a kocka zauzima konačan dio prostora. No, uočavaju da presjek kocke i neke ravnine može biti dužina, odnosno brid kocke.

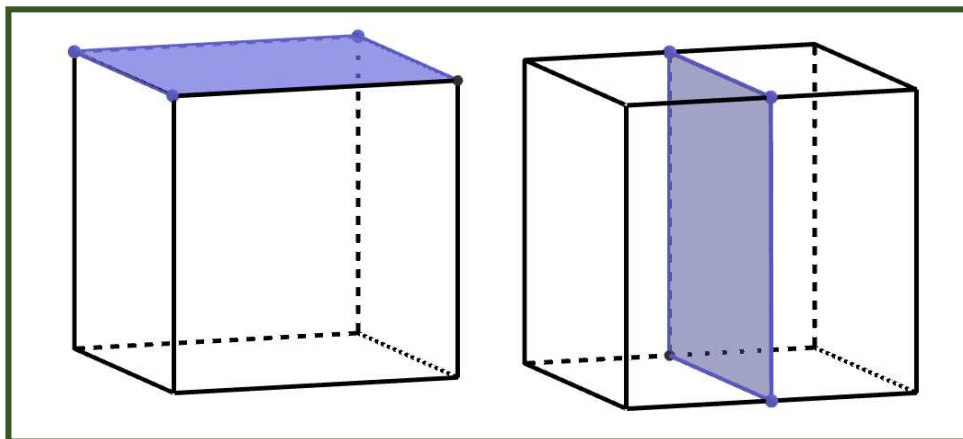


*Slika 4.4.3.3. Presjek kocke i ravnine dužina*

Idući korak je promatranje može li presjek kocke i neke ravnine biti kvadrat. Uočavaju da je to moguće ako ravnina prolazi vrhovima koji pripadaju istoj strani kocke (tada je presjek zapravo strana kocke) ili ako ravnina prolazi točkama koje se nalaze na



bridovima kocke koje nisu vrhovi te kocke tako da je ravnina paralelna ili okomita na strane kocke.

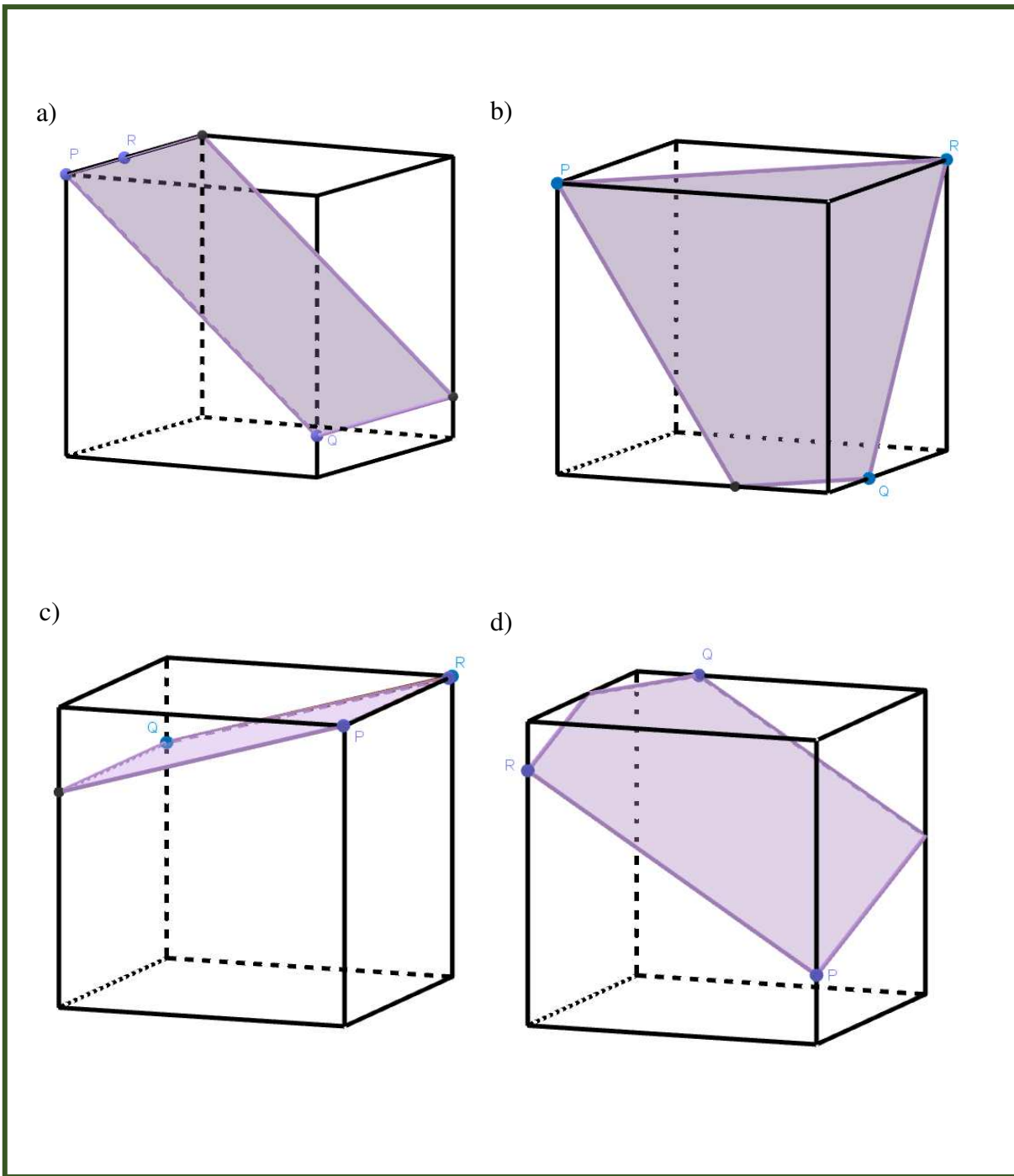


*Slika 4.4.3.4. Primjeri presjeka kocke i ravnine je kvadrat*

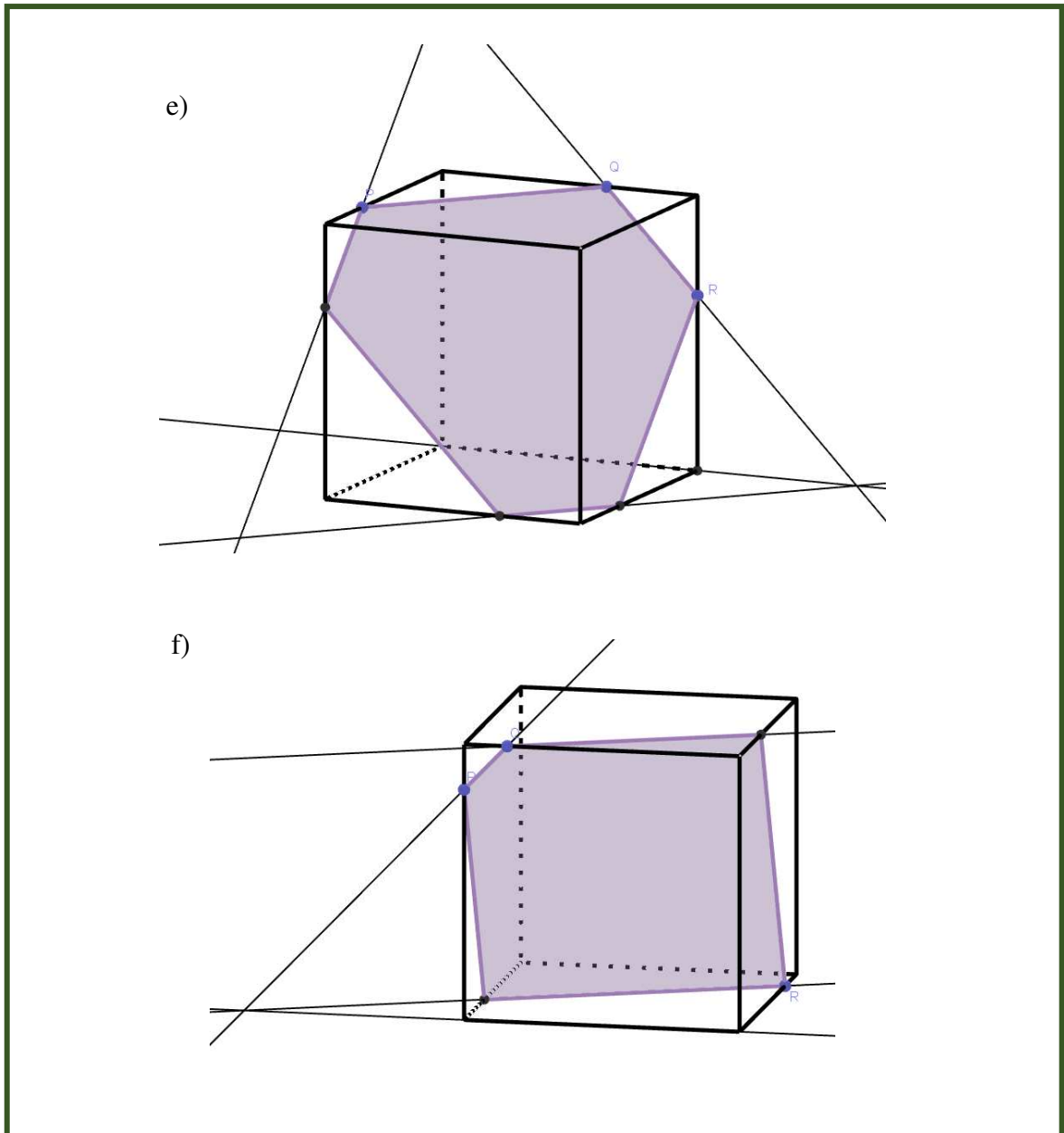
I na samom kraju, kao uvod u sljedeću aktivnost, učenici promatraju mogu li se odabrati tri točke na kocki tako da presjek ne bude nijedan od likova kojeg su dobili do sada. Zaključuju da je to moguće te pomoću plastelina i nožića pokušavaju vidjeti kakve još presjeke možemo dobiti. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

#### 4.4.4. Aktivnost *Ostali presjeci*

Cilj ove aktivnosti je otkriti preostale presjeke kocke ravninom pomoću alata dinamičke geometrije (GeoGebra ili Sketchpad). Učenici najprije crtaju šest kocaka i na njima označuju točke  $P$ ,  $Q$  i  $R$  kao na slikama s listićima. Samostalno istražuju i konstruiraju presjek svake kocke ravninom  $PQR$  najprije u alatu dinamičke geometrije, a potom ih crtaju na nastavnim listićima. Uočavaju da presjekom kocke ravninom mogu nastati trokut, četverokut, peterokut, šesterokut. Zaključuju da broj vrhova presjeka kocke ravninom ovisi o položaju zadane ravnine u odnosu na šest strana kocke. Ukoliko presjek postoji, on može biti točka, dužina, trokut, četverokut, peterokut ili najviše šesterokut jer kocka ima šest strana.

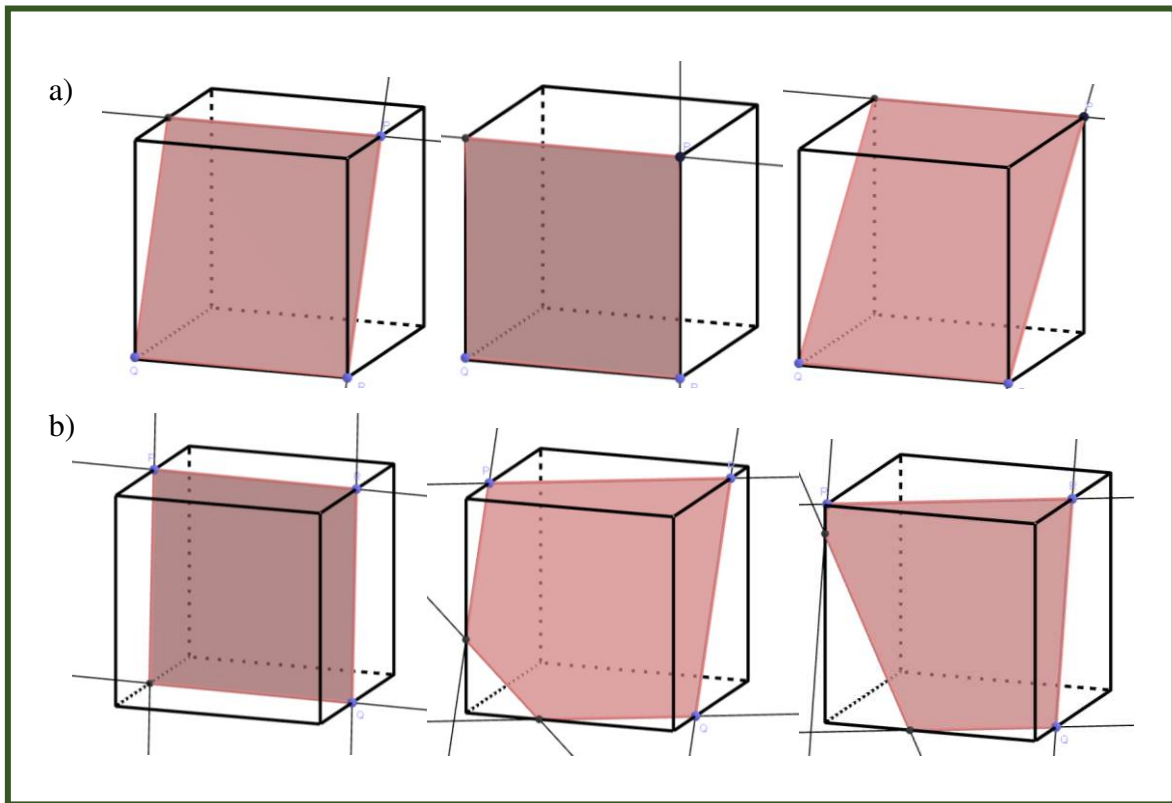


*Nastavni listić 4.4.4.1. Primjer rješenja nastavnog listića a), b), c) i d) dio*



*Nastavni listić 4.4.4.2. Primjer rješenja nastavnog listića e) i f) dio*

Učenici potom mijenjanjem položaja točaka  $P$ ,  $Q$  i  $R$  istražuju kako se mijenja presjek kocke i ravnine koja prolazi tim točkama. Uočavaju da kod pomicanja točaka bridovi, odnosno presjeci mogu „nestati“. U tom slučaju konstrukciju radimo iz druge perspektive.

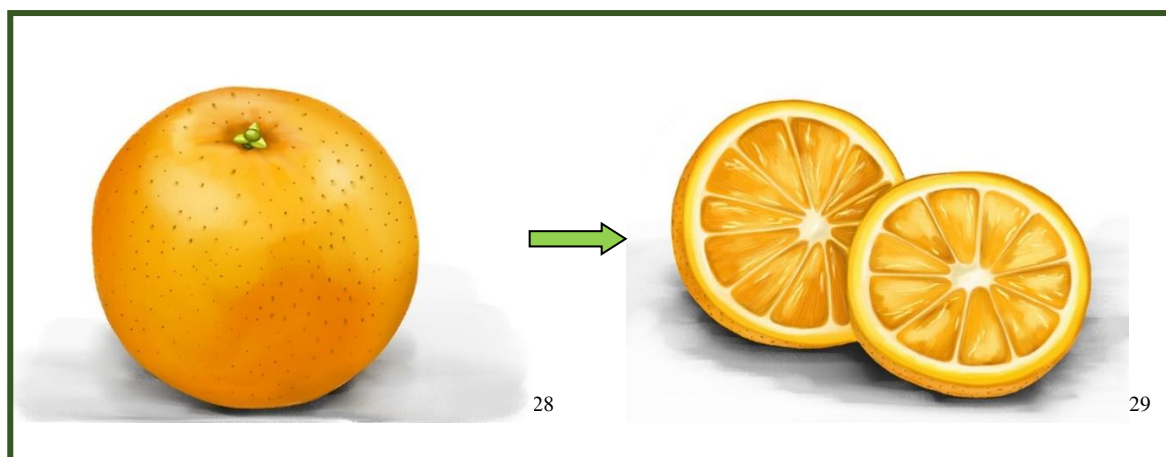


*Nastavni listić 4.4.4.3. Primjeri nastalih presjeka pomicanje točaka*

Bilo bi dobro nabaviti plastični model kocke koji se može rastaviti tako da se vide presjeci te kocke ili taj isti model napraviti od papira kako bi učenici mogli još lakše vizualizirati presjeke kocke ravninom. Za demonstraciju i istraživanje presjeka također je pogodna spužva za aranžiranje cvijeća. Dovoljno je čvrsta da bi se sve vidjelo, a s druge strane lijepo se može rezati nožem. Analogno, učenici mogu istražiti presjeke ostalih geometrijskih tijela ravninama. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT SŠ C.2.5. MAT SŠ D.2.3. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

#### 4.4.5. Aktivnost *Oplošje kugle*

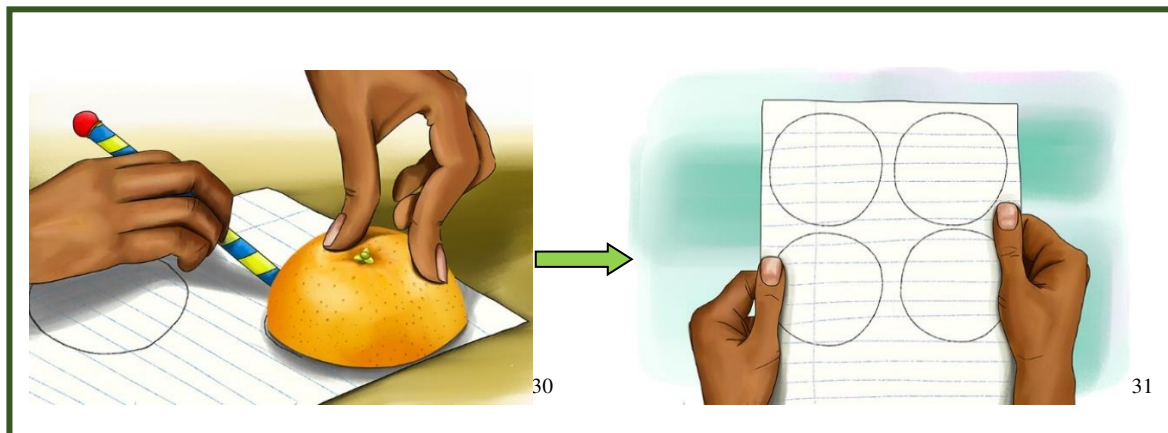
U ovoj aktivnosti učenici će otkriti vezu oplošja kugle s njenim radijusom. Učenici će raditi u heterogenim četveročlanim skupinama. Za provođenje ove aktivnosti potrebna nam je po jedna naranča, papir i nožić za rezanje voća za svaku od skupina učenika. Prvi posao koji učenici trebaju napraviti je razrezivanje naranče duž njenog glavnog presjeka (Slika 4.4.5.1.). Nakon toga na papiru trebaju napraviti nekoliko otisaka presjeka naranče, odnosno iscrtati krugove čiji je radijus jednak radijusu naranče (Slika 4.4.5.2.). Mogu napraviti na primjer 5 ili 6 takvih otisaka. Potom trebaju oguliti naranču i popuniti otiske na papiru njenom korom. Uočiti će da mogu popuniti 4 otiska, odnosno 4 kruga (Slika 4.4.5.3.). Učenici će zaključiti da je oplošje naranče (kugle) jednako površini četiriju krugova čiji je radijus jednak radijusu naranče (kugle). Odnosno, otkrit će formulu za oplošje kugle  $O = 4r^2\pi$ . Učenici će u ovom malom eksperimentu vizualizirati čemu je jednako oplošje kugle. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.



Slika 4.4.5.1. Rezanje naranče duž njenog glavnog presjeka

<sup>28</sup><https://mammothmemory.net/images/user/base/Maths/Geometry/circumference%20area%20and%20volume/an-orange-is-needed-for-the-orange-experiment.0cb6315.jpg>

<sup>29</sup><https://mammothmemory.net/images/user/base/Maths/Geometry/circumference%20area%20and%20volume/stage-2-of-the-orange-experiment.3f338b1.jpg>



*Slika 4.4.5.2. Crtanje otisaka*



*Slika 4.4.5.3. Popunjavanje otisaka na papiru*

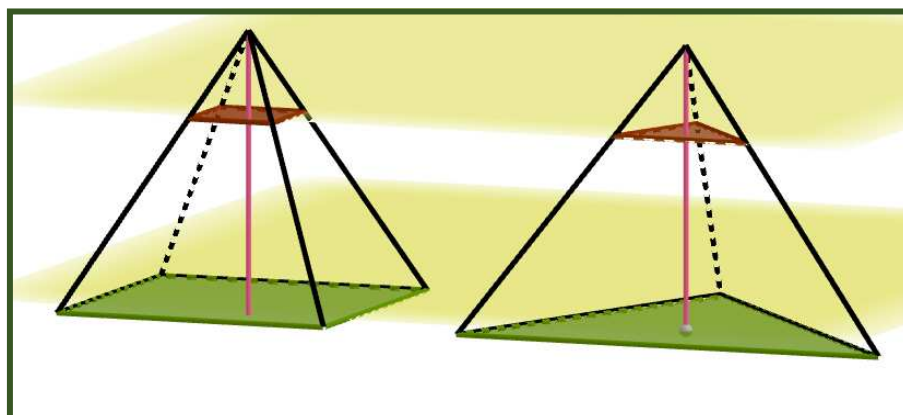
<sup>30</sup><https://mammothmemory.net/images/user/base/Maths/Geometry/circumference%20area%20and%20volume/stage-3-of-the-orange-experiment.fd5430f.jpg>

<sup>31</sup><https://mammothmemory.net/images/user/base/Maths/Geometry/circumference%20area%20and%20volume/piece-of-paper-with-four-circles-on.ba62425.jpg>

<sup>32</sup><https://mammothmemory.net/images/user/base/Maths/Geometry/circumference%20area%20and%20volume/stage-4-of-the-orange-experiment.32723c6.jpg>

#### 4.4.6. Aktivnost *Volumen piramide*

U ovoj aktivnosti učenici će otkriti i dokazati formulu za volumen piramide. Radit će u heterogenim skupinama u obliku radnih centara. U prvom radnom centru dobivaju po 2 trostrane prizme i 2 trostrane piramide, u drugom 2 četverostrane prizme i 2 četverostrane piramide, a u trećem 2 peterostrane prizme i 2 peterostrane piramide. Ako nemamo plastične modele piramida i odgovarajućih prizmi (ista baza i ista visina) možemo ih izraditi od čvršćeg papira. Prvi zadatak učenika je da spare dobivene piramide i prizme prema bazi i visini. Potom će pomoću pijeska ili riže određivati čemu je jednak volumen piramidi. Uočiti će da je volumen piramide tri puta manji od volumena prizme, odnosno jednak je trećini volumena prizme:  $V_{piramide} = \frac{1}{3}V_{prizme}$  te da volumen piramide ovisi o površini njene baze i duljini visine. Potom će u razrednoj diskusiji pomoću Cavalijerijevog principa otkriti da dvije piramide, koje imaju baze jednakih površina i visine jednakih duljina, imaju jednake volumene.



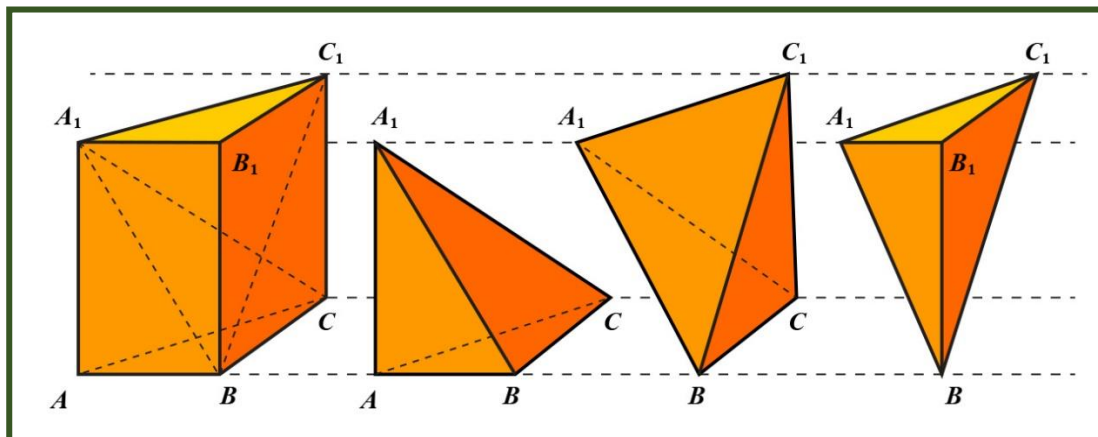
Slika 4.4.6.1. Cavalijerijev princip za piramidu

Nakon toga slijedi dokaz:

Pogledajmo Sliku 4.4.6.2. Uočimo da piramide  $ABCA_1$  i  $A_1B_1C_1B$  imaju sukladne baze i jednake visine. Zaključujemo da one imaju isti volumen. Promotrimo sada piramide  $BCC_1A_1$  i  $BB_1C_1A_1$ . Uočimo da ove dvije piramide također imaju sukladne baze ( $\triangle BCC_1 \cong \triangle BB_1C_1$ ) i jednake visine ( $d(A_1, BCC_1B_1)$ ). Stoga možemo zaključiti da je volumen svih triju piramida jednak te iznosi trećinu obujma prizme  $ABCA_1B_1C_1$ .

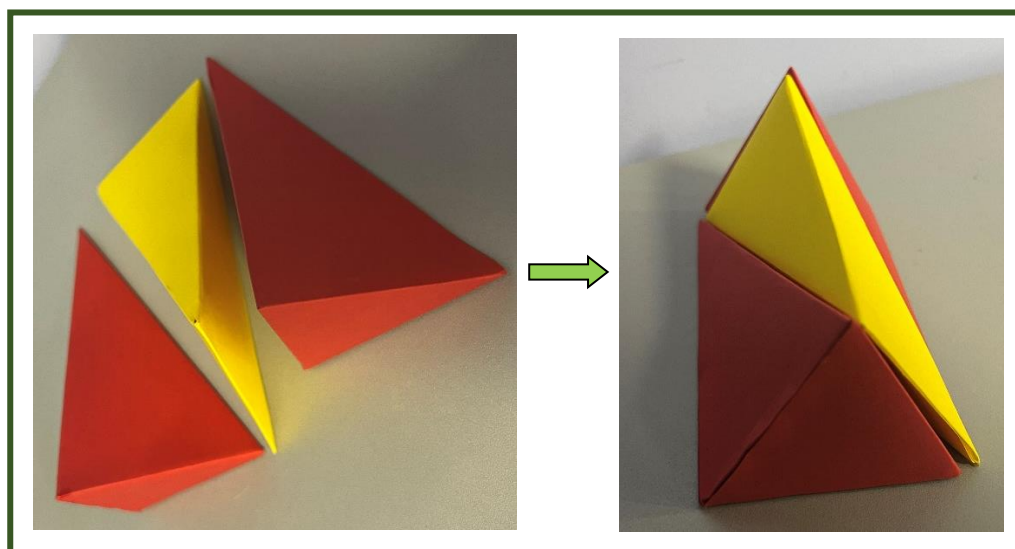






Slika 4.4.6.2. Dokaz formule za volumen piramide<sup>33</sup>

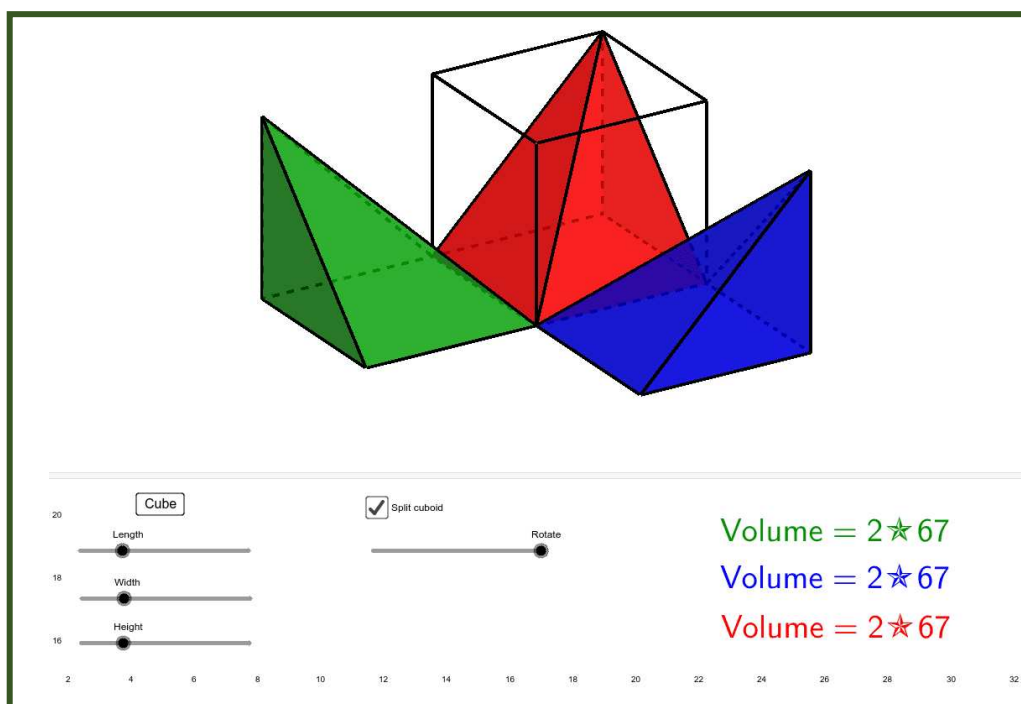
Za dokazivanje ove formule od papira možemo izraditi 3 trostrane piramide koje preslagivanjem možemo složiti u trostranu prizmu kako bi učenici lakše vizualizirali dokaz. Primjer možemo vidjeti na Slici 4.4.6.3. Za demonstraciju ovog dokaza možemo koristiti i neki od GeoGebra appleta dostupnih na internetu ili ga možemo i sami izraditi. Primjer jednog takvog appleta možemo vidjeti na Slici 4.4.6.4. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.



Slika 4.4.6.3. Model piramida za dokaz volumena piramide

<sup>33</sup> <https://edutorij-admin-api.carnet.hr/storage/extracted/b9455aeb-16ae-4c3a-a6b1-da720c38c54d/img/21139-0-prizma-i-jpg-1533199418486.jpg>





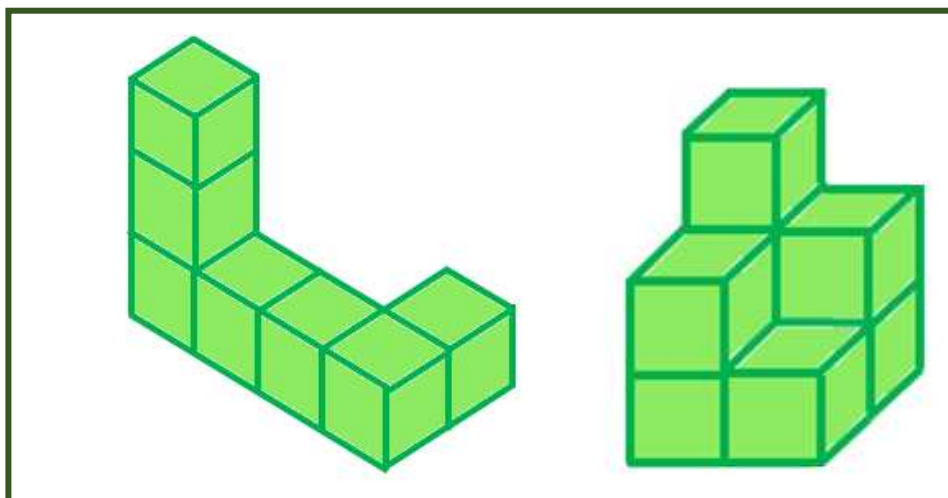
Slika 4.4.6.4. Dokaz formule za volumen piramide<sup>34</sup>

Slijede aktivnosti u kojima će učenici sastavljati, istraživati i crtati tijela od kockica. Imamo 3 metodička koraka koja trebamo proći s učenicima. Prvi korak je sastavljanje tijela (Aktivnost *Gradimo*), drugi korak su pogledi (Aktivnost *Pogledi*) i treći korak je crtanje u ravnini (Aktivnost *Crtamo u ravnini*).

#### 4.4.7. Aktivnost *Gradimo*

U ovoj aktivnosti učenici će pomoću kockica slagati zadane građevine. Radit će u paru. Učenici dobivaju sliku građevine koju trebaju složiti te je potom pomoću kockica slažu. Na Slici 4.4.7.1. možemo vidjeti primjer dviju građevina koje učenici mogu slagati. Nakon što slože zadane građevine, možemo im zadati zadatak da sami slože proizvoljnu građevinu pomoću određenog broj kocaka. Na primjer trebaju složiti građevinu koja se sastoji od 10 kocaka. Nakon što svi parovi slože svoje građevine, predstaviti će svoje građevine te će u razrednoj diskusiji komentirati sličnosti i razlike. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

<sup>34</sup> <https://www.geogebra.org/resource/saEWG62C/DQ8EBgEGgvVQHVVl/material-saEWG62C.png>



*Slika 4.4.7.1. Primjer građevina koje učenici trebaju složiti*

#### 4.4.8. Aktivnost *Brojimo kockice*

Cilj ove aktivnosti je prebrojati od koliko kockica se sastoji građevina i izračunati koliko ih još nedostaje da bi poprimila traženi oblik. Suradničkim radom u skupinama, učenici će rješavati nastavne listiće. Primjer listića za jednu skupinu učenika je Nastavni listić 4.4.8.1. Crvenom bojom na listiću su prikazana rješenja. U razrednoj diskusiji treba komentirati strategije kojima su učenici prebrojavali kockice. Na primjer, u 2. zadatku dio učenika je možda brojao koliko kockica nedostaje u svakom redu te potom izbrojao koliko kockica ukupno nedostaje dok je drugi dio učenika možda izračunao koliko bi kockica imala cijela kocka te potom od toga broja oduzeo broj kockica iz 1. zadatka. Možemo im zadati da u paru računaju koliko kockica nedostaje tako da jedan učenik koristi prvu strategiju, a drugi učenik drugu strategiju te se potom zamjene. Na taj način će uvidjeti koja je strategija bila brža i efikasnija. Neki učenici bi mogli imati problema u brojanju kockica jer moraju misaono vizualizirati kockice koje se ne vide na slici. Takvim učenicima možemo dati mogućnost da od kockica najprije prikažu ovu građevinu, a potom riješe listić. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

### Nastavni listić

1. Izbroji od koliko kocaka se sastoji prikazana građevina.

24

2. Želimo da građevina ima oblik kocke.

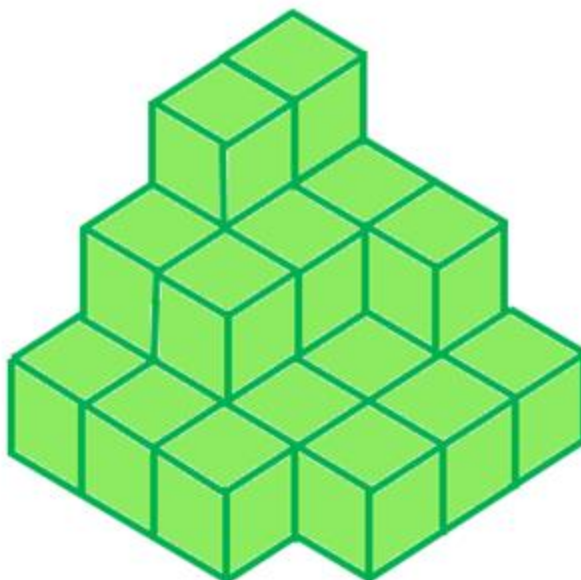
Koliko kocaka nam nedostaje kako bismo to postigli?

40

3. Želimo da građevina ima oblik kvadra čiji su svi bridovi različitih duljina.

Koliko kocaka nam nedostaje kako bismo to postigli?

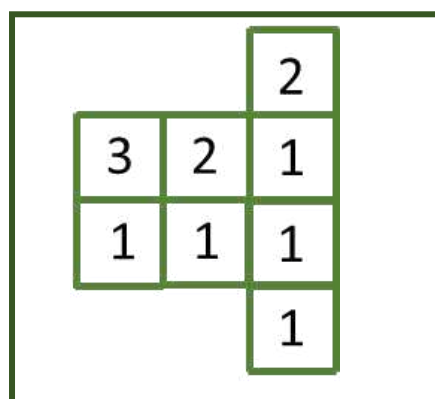
96



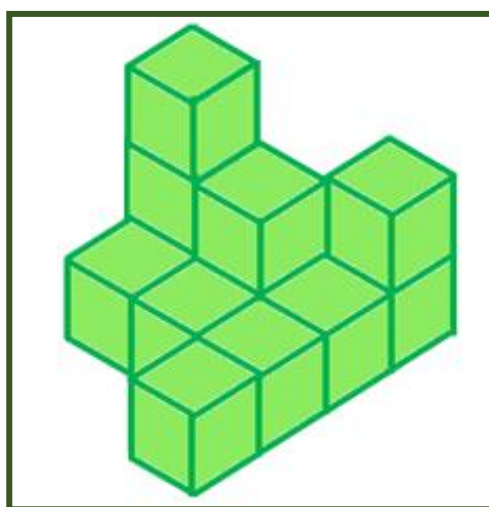
Nastavni listić 4.4.8.1.

### 4.4.9. Aktivnost *Pogledi*

U ovoj aktivnosti učenici će na temelju tlocrta građevine i zadanih visina pomoću kockica slagati građevinu i odrediti poglede. Učenici će ovu aktivnost raditi u parovima. Prvi zadatak je da pomoću tlocrta građevine kockicama izgrade građevinu. Brojevi na kvadratićima tlocrta predstavljaju visinu građevine odnosno broj kocaka koje trebaju složiti na tom mjestu. Primjer jednog tlocrta koji možemo zadati učenicima vidimo na Slici 4.4.9.1., a rješenje zadatka na Slici 4.4.9.2.



Slika 4.4.9.1. Primjer građevina koje učenici trebaju složiti

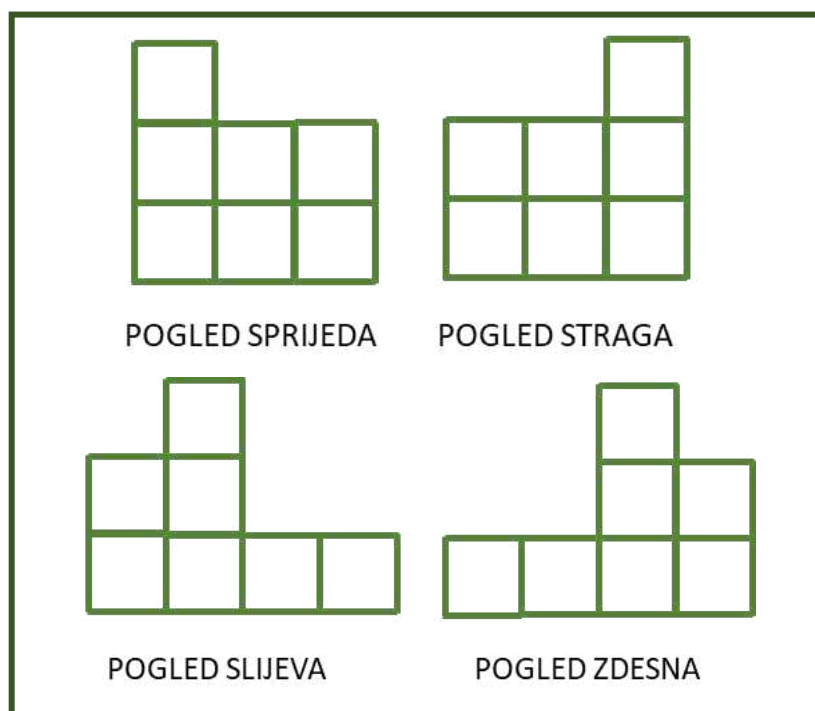


Slika 4.4.9.2. Građevina čiji je tlocrta zadana na Slici 4.4.9.1.

Nakon što izgrade građevinu zadatak im je da nacrtaju poglede na građevinu sprijeda, straga, slijeva i zdesna. Poglede mogu crtati u kvadratnoj mreži točaka. Na Slici 4.4.9.3. možemo vidjeti poglede na građevinu iz prethodnog dijela zadatka. Potom učenicima zadajemo obrnuti zadatak. Zadamo im prvo poglede sprijeda, straga, slijeva i zdesna od koji potom trebaju sastaviti građevinu i odrediti njezin tlocrt s visinama.

Kod zadavanja građevina treba voditi računa o tome da se krene s jednostavnijim građevinama. To na primjer može biti građevina koja se sastoji od sveukupno 5 kocaka pri čemu jedan stupac ide u visinu, odnosno četiri kocke se nalaze u istoj ravnini, a peta se nalazi na jednoj od prve četiri. Nakon što učenici izvježbaju gradnju građevina i određivanje pogleda na opisanim građevinama, postupno im zadajemo kompliciranije građevine kao u prethodnom primjeru. Dio učenika će zasigurno imati problema s

određivanjem pogleda i gradnjom građevina, dok će neki biti u stanju odrediti poglede građevine samo pomoću tlocrta i zadanih visina, bez slaganja kockica. Upravo zbog toga su ovakve aktivnosti važne u razvoju prostornog zora i procjeni Van Hiele razine geometrijskog mišljenja kod učenika. Ova aktivnost doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

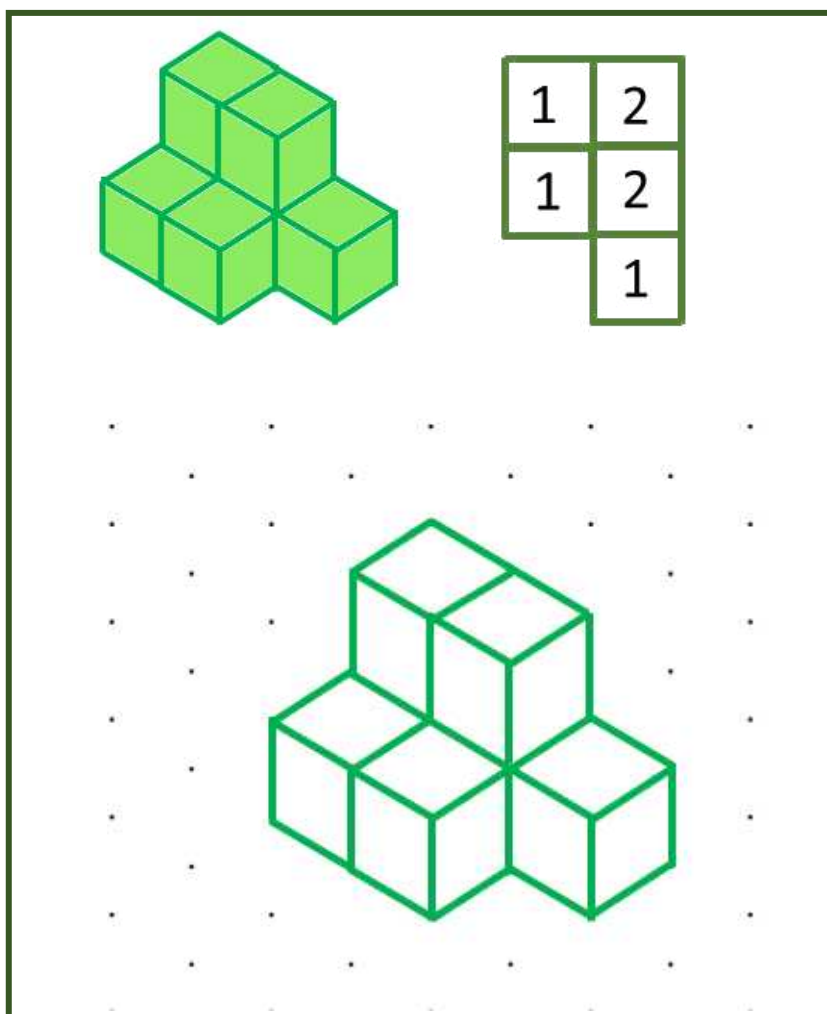


Slika 4.4.9.3. Pogledi na građevinu sa Slike 4.4.9.2.

#### 4.4.10. Aktivnost *Crtamo u ravnini*

U ovoj aktivnosti učenici će crtati građevine u trokutastoj ravnini točaka. Ova aktivnost se sastoji od 3 dijela. U prvom dijelu će učenici dobiti sliku građevine i njen tlocrt te će na temelju toga crtati građevinu u trokutastoj ravnini točaka. U drugom dijelu aktivnosti će dobiti samo sliku građevine te će za nju odrediti najprije tlocrt, a potom nacrtati građevinu u trokutastoj ravnini točaka. U trećem dijelu aktivnosti učenici će dobiti samo tlocrt građevine pomoću kojeg će crtati građevinu u trokutastoj ravnini točaka. Primjer zadatka i njegovog rješenja za prvi dio aktivnosti možemo vidjeti na Slici 4.4.10.1. Važno je krenuti sa što jednostavnijim građevinama kako bi učenici postupno došli do crtanja kompliciranijih građevina u trokutastoj ravnini točaka. Ova aktivnost

doprinosi ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda učenja MAT OŠ D.8.2. i MAT SŠ C.2.6. MAT SŠ D.2.4.

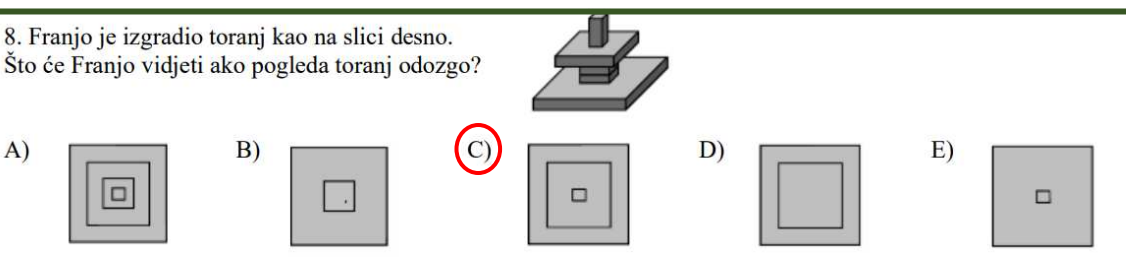


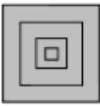
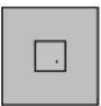
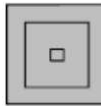
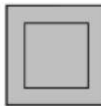

*Slika 4.4.10.1. Primjer zadatka i rješenja za prvi dio aktivnosti*

Kako bi učenici razvijali svoj prostorni zor, u nastavu matematiku potrebno je uključiti što više zadataka misaonog preslagivanja i slaganja te određivanja misaonih presjeka. To mogu biti zadaci u kojima učenici moraju misaono presložiti kockice ili neke druge slagalice kako bi dobili traženi oblik pri čemu nemaju fizičke slagalice pred sobom, već moraju zamišljati. Misaono rezanje ili preslagivanje papira također može biti vrlo značajno u razvijanju prostornog zora. Matematičko natjecanje Klokan bez granica koje se provodi u više od 80 država cijelog svijeta vrlo često ima zadatke na ovu temu. Primjere nekih zadataka s upravo tog natjecanja možemo vidjeti na Slikama 4.4.1., 4.4.2.,

4.4.3., 4.4.4., 4.4.5., 4.4.6., 4.4.7., 4.4.8. i 4.4.9. Ovakve zadatke uvijek možemo uključiti u redovnu ili dodatnu nastavu matematike.

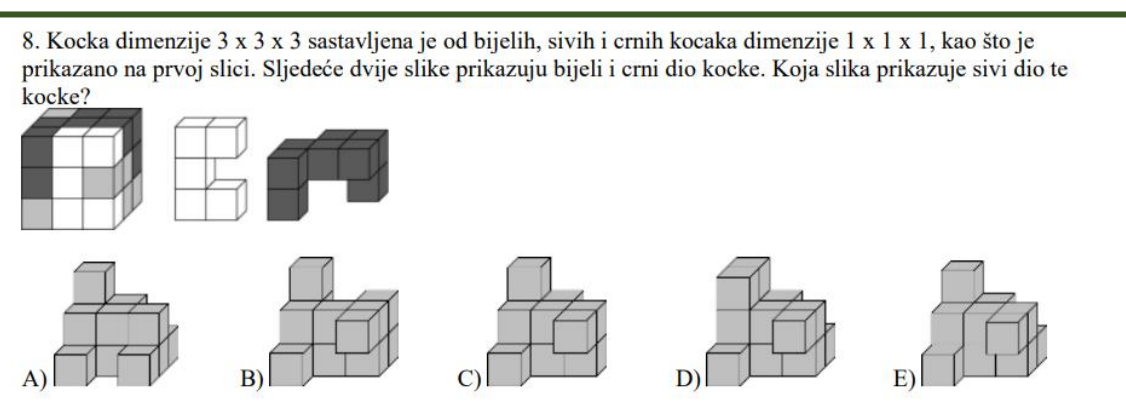
8. Franjo je izgradio toranj kao na slici desno. Što će Franjo vidjeti ako pogleda toranj odozgo?

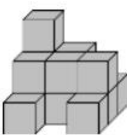
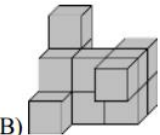
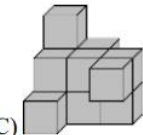
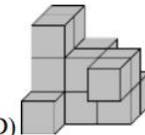
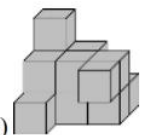


A)  B)  C)  D)  E) 

Slika 4.4.1. Klokan bez granica: Ecolier (IV. i V. razred OŠ); 2022. godine<sup>35</sup>

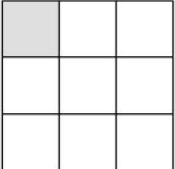
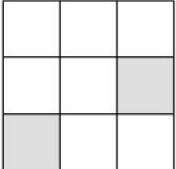
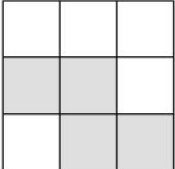
8. Kocka dimenzije 3 x 3 x 3 sastavljena je od bijelih, sivih i crnih kocaka dimenzije 1 x 1 x 1, kao što je prikazano na prvoj slici. Sljedeće dvije slike prikazuju bijeli i crni dio kocke. Koja slika prikazuje sivi dio te kocke?



A)  B)  C)  D)  E) 

**Rješenje: E**

Crni i bijeli dio kocke vidljivi su na kocki. Od sivog dijela vidimo samo dio koji je na tlocrtu, nacrtu i bokocrtu kocke. Promotrimo tlocrt, nacrt i bokocrt kocke, te na njemu istaknimo samo njegov sivi dio.

tlocrt	nacrt	bokocrt
		

Tlocrt odgovara slikama A, B, C i E.  
 Nacrt odgovara slikama B, C, D i E.  
 Bokocrt odgovara slikama D i E.  
 Zato je sivi dio te kocke prikazan na slici E.

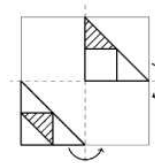
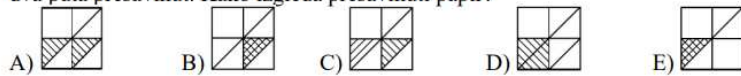
Slika 4.4.2. Klokan bez granica: Cadet (8.r. OŠ i 1.r. SŠ); 2021. godine<sup>36</sup>

<sup>35</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2022/ecolier-2022-rj.pdf>

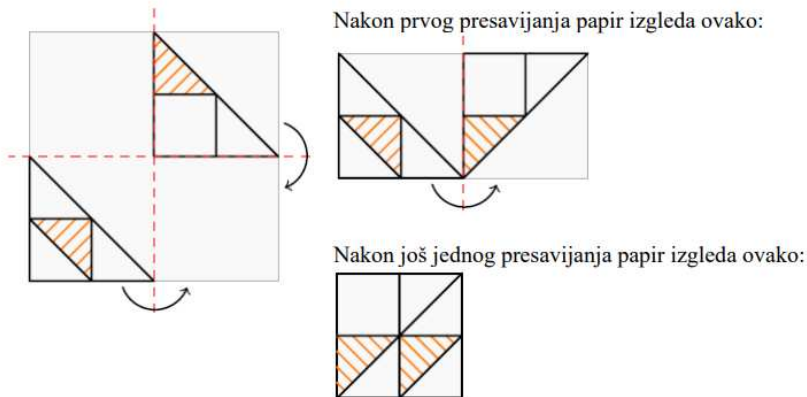
<sup>36</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2021/cadet-2021-zad.pdf>



12. Na komadu prozirnog papira nacrtan je uzorak kao što je prikazano na slici. Potom je papir dva puta presavinut. Kako izgleda presavinuti papir?



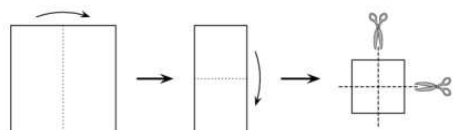
Rješenje: A



Dakle, rješenje je slika A).

Slika 4.4.3. Klokan bez granica: Benjamin (VI. i VII. razred OŠ); 2022. godine<sup>37</sup>

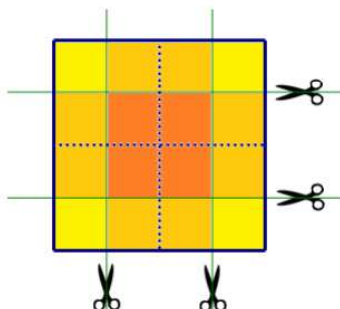
15. Barbara je dva puta presavila kvadratni komad papira i onda ga je dva puta prerezala kao na slici. Koliko je dijelova papira dobila?



- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 16

Rješenje: C

Isprekidanom linijom označimo mjesto presavijanja početnog papira i istaknimo linije po kojima je Barbara rezala papir. Rezanjem je dobila 4 manja kvadrata, 4 pravokutnika koja se sastoje od takva dva manja kvadrata i 1 kvadrat sastavljen od četiri takva manja kvadrata. Ukupno je dobila  $4 + 4 + 1 = 9$  dijelova papira.



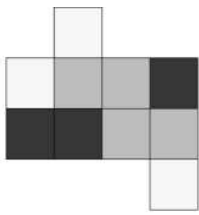
Slika 4.4.4. Klokan bez granica: Cadet (8.r. OŠ i 1.r. SŠ); 2019. godine<sup>38</sup>






<sup>37</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2022/benjamin-2022-rj.pdf>

<sup>38</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2022/cadet-2022-rj.pdf>



24. Komad kartona prikazan na slici desno složen je u kutiju 2 x 1 x 1.  
 Koja slika prikazuje tu kutiju?






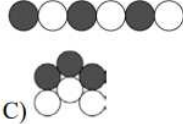
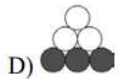
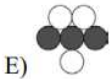
A)  B)  C)  D)  E) 

**Rješenje: B**


Slika 4.4.5. Klokan bez granica: Ecolier (IV. i V. razred OŠ); 2019. godine<sup>39</sup>

5. Crno-bijela gusjenica prikazana na slici sklopčala se da bi malo odspavala. Kako bi tako sklopčana mogla izgledati?




A)  B)  C)  D)  E) 





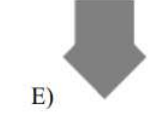
**Rješenje: A**  
 Jedino je u prvom ponuđenom obliku moguće povezati crne i bijele dijelove naizmjenično neprekinutom crtom. Dakle, rješenje je A.



Slika 4.4.6. Klokan bez granica: Cadet (8.r. OŠ i 1.r. SŠ); 2022. godine<sup>40</sup>

11. Imamo dva jednaka kvadrata (vidi sliku), koje zalijepimo jedan na drugi.  
 Koji od sljedećih likova ne možemo dobiti?



A)  B)  C)  D)  E) 

**Rješenje A**

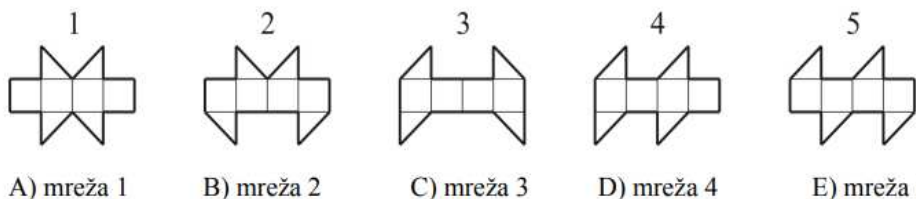
Slika 4.4.7. Klokan bez granica: Benjamin (VI. i VII. razred OŠ); 2016<sup>41</sup>

<sup>39</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2019/ecolier-2019-rj.pdf>

<sup>40</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2022/cadet-2022-rj.pdf>

<sup>41</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2016/benjamin-2016-rj.pdf>

13. S kojom od slijedećih mreža ne možemo sastaviti kocku?



A) mreža 1

B) mreža 2

C) mreža 3

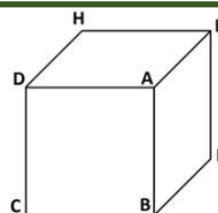
D) mreža 4

E) mreža 5

Rješenje C

Slika 4.4.8. Klokan bez granica: Cadet (8.r. OŠ i 1.r. SŠ); 2013. godine<sup>42</sup>

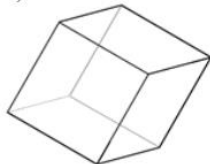
19. Kocka na slici presječena je ravninom koja prolazi kroz tri vrha susjedna vrhu A, to su vrhovi D, E i B. Slično, kocku sijeku ravnine koje prolaze kroz tri susjedna vrha svakog od preostalih sedam vrhova. Kako izgleda onaj dio tako prerezane kocke koji sadrži centar kocke?



A)



B)



C)



D)



E)

Centar kocke nalazi se u nekoliko dijelova.

Rješenje: A

Slika 4.4.9. Klokan bez granica: Student (4.r. SŠ); 2013. godine<sup>43</sup>

<sup>42</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2013/cadet-2013-rj.pdf>

<sup>43</sup> <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2013/student-2013-rj.pdf>

## 5. 3D PRINTANJE U NASTAVI MATEMATIKE

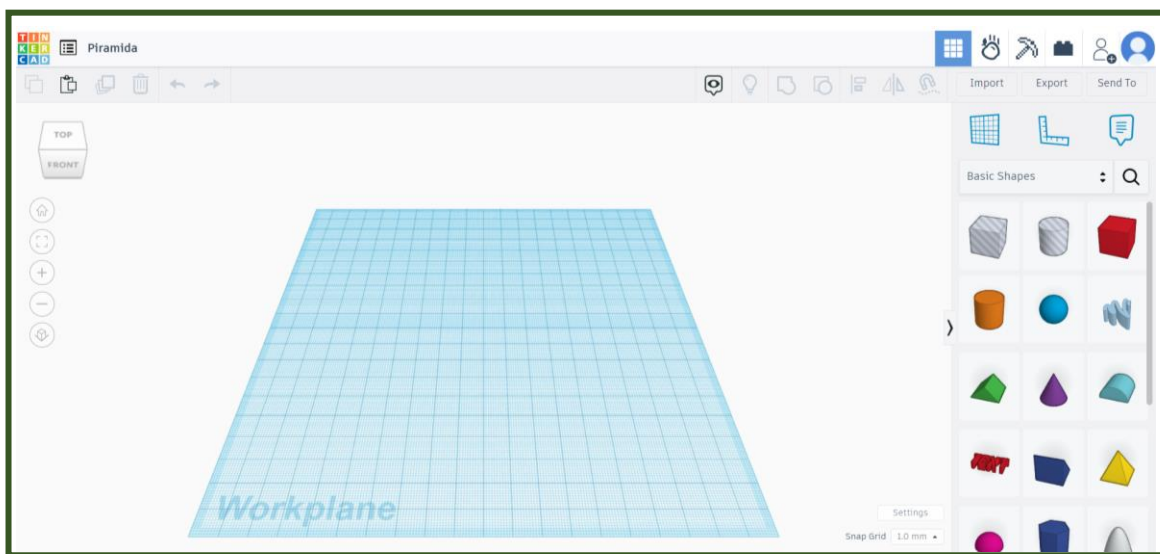
Još do nedavno nismo mogli ni zamisliti stroj koji će isprintati trodimenzionalni model koji smo sami nacrtali, a danas 3D printeri doslovno mijenjaju svijet. Pomoću 3D printera izrađuju se proteze, umjetne kosti, koža, organi, hrana, kuće, automobili... Izrađuju se razni prototipovi, provode se istraživanja koja su do nedavno bila nezamisliva, nude se nova inovativna rješenja. Sve zahvaljujući 3D tehnologiji koja se još uvijek razvija i nije dosegla svoj puni potencijal.

S obzirom na to da se tehnologija svakim danom sve više razvija, ona je postala i sve lakše fizički dostupna i financijski prihvatljivija. Osim što joj možemo lako pristupiti, sve se više prilagođava te je vrlo jednostavno naučiti koristiti se njome. Ne moramo imati velika znanja niti znati kako tehnologija funkcionira da bi se mogli njome služiti. Vrlo često su nam dostupni besplatni online alati i programi, a educirati se može putem online tutorijala i lekcija.

Pristup 3D printerima otvorio je mnoge mogućnosti i u nastavi matematike. Ne samo da nam je pristup 3D printerima omogućio izradu učila i alata koji nam olakšavaju razumijevanje matematičkih koncepata, već i razvoj kreativnosti i inovativnosti kod

učenika i upoznavanje s tehnologijama koje će im u budućnosti koristiti. Ideje učenika pretvaraju se u stvarnost dok u isto vrijeme uče i razvijaju svoje vještine na zanimljiv i zabavan način.

Sam postupak 3D printanja je vrlo jednostavan. Prvi korak je napraviti 3D model u nekom od programa. Jedan od besplatnih online programa koji je vrlo je jednostavan za korištenje je TinkerCAD. Crtanje u TinkerCAD-u vrlo je jednostavno i učenici ga mogu vrlo brzo savladati. Na Slici 5.1. možemo vidjeti kako izgleda prazna radna ploha u ovom programu. Nakon što je model spreman, pripremamo ga za printanje. To se postiže rastavljanjem modela na mnogo tankih horizontalnih slojeva pomoću softvera. Jedan od softvera koji možemo koristiti je Ultimaker Cura. Prije samog printanja podešavamo parametre kao što su debljina slojeva printanja i temperatura. Nakon toga model se pomoću USB-a ili Wi-fi-ja šalje s računala na 3D printer te počinje printanje. Jedan od printera koji je lako dostupan i financijski prihvatljiv je Creality Ender 3 S1. Možemo ga vidjeti na Slici 5.2.

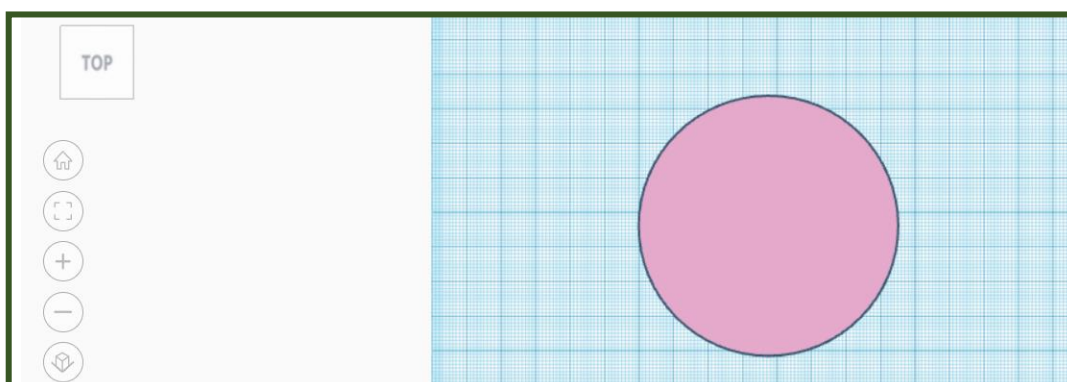


Slika 2.1. Prazna radna ploha u TinkerCAD-u



*Slika 5.2. 3D printer Creality Ender 3 S1<sup>44</sup>*

Na lijevoj strani ekrana u TinkerCAD-u nalazi se gumbić koji nam omogućava da nacrtani model vidimo iz svih kutova. Osim pomoću tog gumbića, to možemo učiniti i držanjem desne tipke miša. Tijelo možemo rotirati u svim smjerovima. Primjer kako izgledaju pogledi jednog valjka u TinkerCAD-u možemo vidjeti na Slikama 5.3., 5.4. i 5.5. Ova opcija je jako važna jer omogućava vizualizaciju 3D modela te na taj način pomaže u razvijanju prostornog zora.



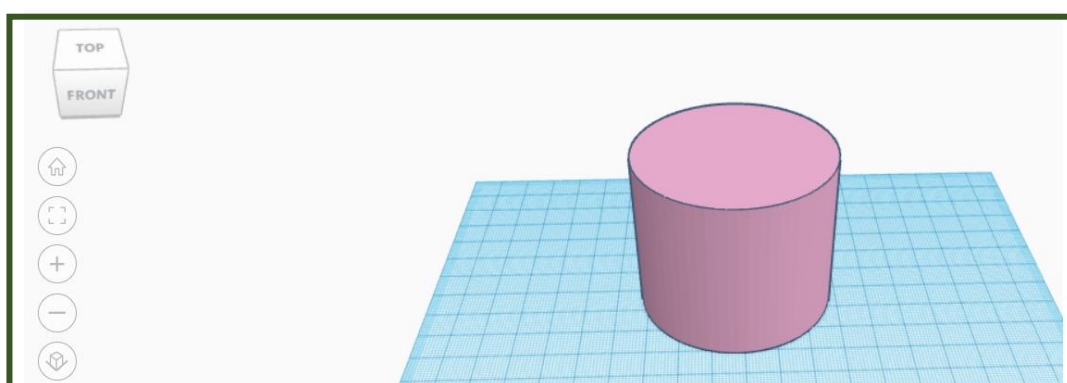
*Slika 5.3. Pogled odozgo na valjak u TinkerCAD-u*

---

<sup>44</sup> [https://c-3d.niceshops.com/upload/image/product/large/default/19605\\_6d68d2a1.512x512.png](https://c-3d.niceshops.com/upload/image/product/large/default/19605_6d68d2a1.512x512.png)

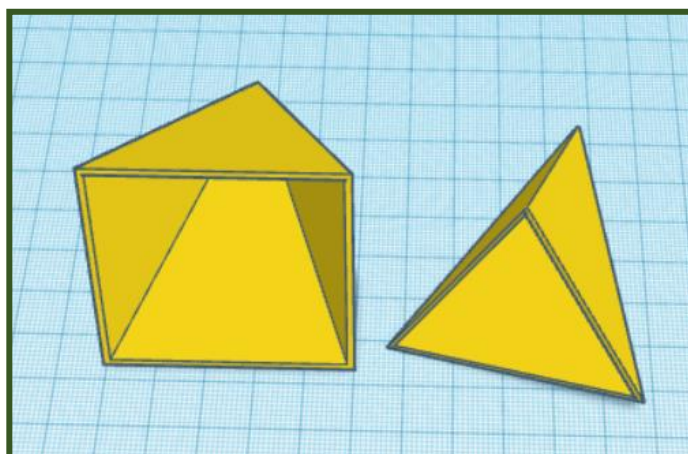


*Slika 5.4. Pogled sprijeda valjka u TinkerCAD-u*

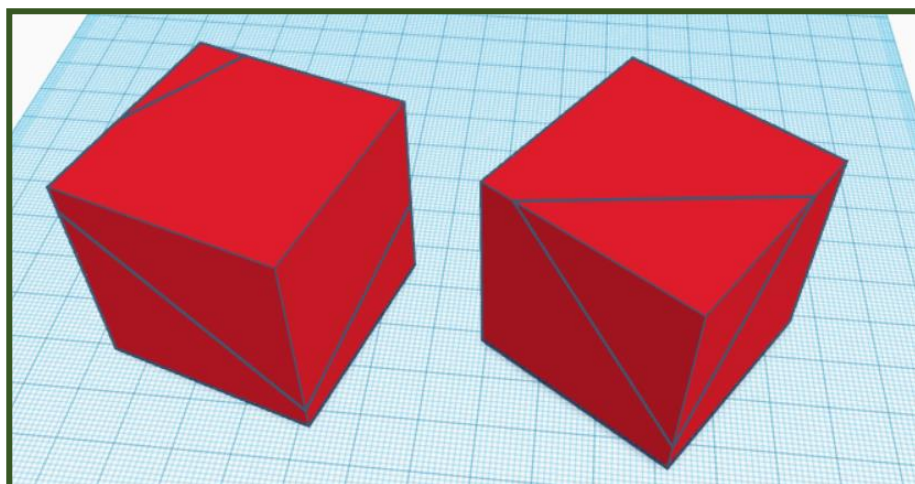


*Slika 5.5. Ukošeni pogled odozgo na valjak u TinkerCAD-u*

Pomoću 3D printera možemo izraditi razna učila i alate koji nam mogu pomoći u nastavi matematike. Možemo izraditi modele geometrijskih tijela (valjak, stožac, sve vrste prizmi i piramida). Tijela mogu biti šuplja kako bi ih mogli koristiti za mjerenje njihovog volumena, ali i zbog uštede materijala koji koristimo za printanje. Primjer takve četverostrane i trostrane piramide možemo vidjeti na Slici 5.6. Možemo izraditi modele dijelove kocke koji nastaju presjekom kocke ravninom. Primjer dva takva modela možemo vidjeti na Slici 5.7. Još jedan model koji bismo mogli izraditi je model piramida iz Aktivnosti *Volumen piramide* kako bi učenici mogli slagati te piramide u prizmu i vizualizirati dokaz.



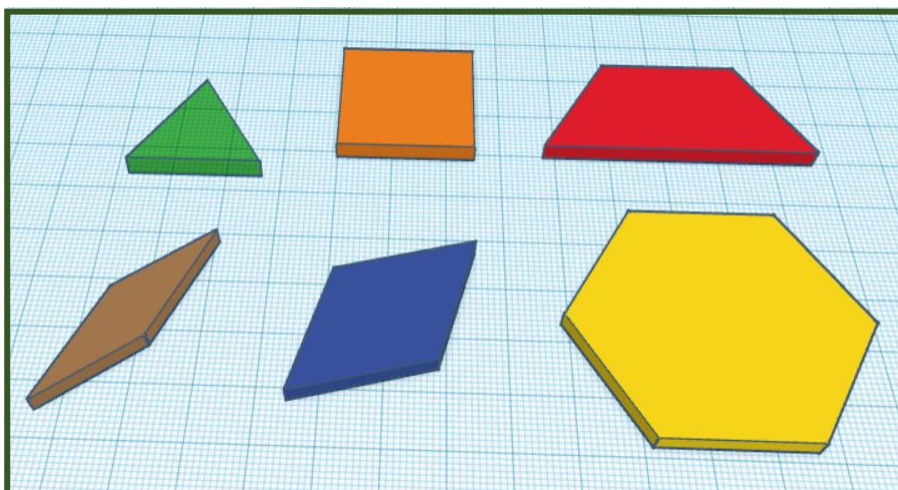
*Slika 5.6. Primjer šuplje čtetverostrane i trostrane piramide*



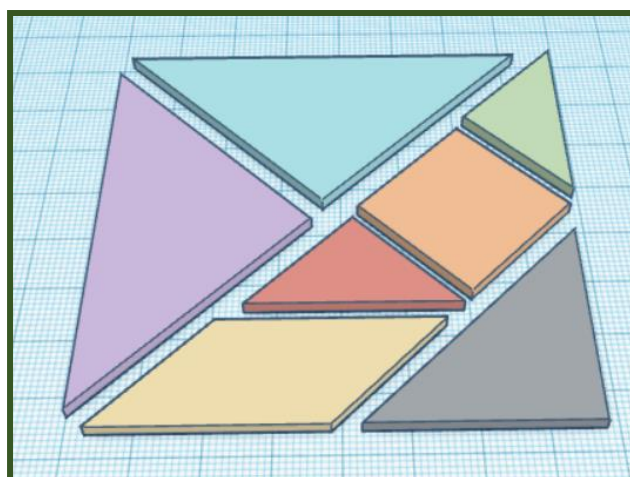
*Slika 5.7. Primjer presjeka kocke i ravnine kada je presjek peterokut i trokut*

Pomoću 3D printera možemo izraditi geometrijske pločice (Slika 5.8.) i pločice za Tangram (Slika 5.9.)





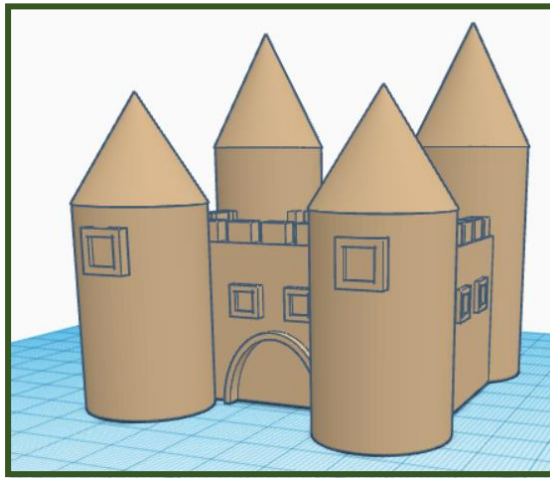
*Slika 5.8. Geometrijske pločice*



*Slika 5.9. Pločice za Tangram*

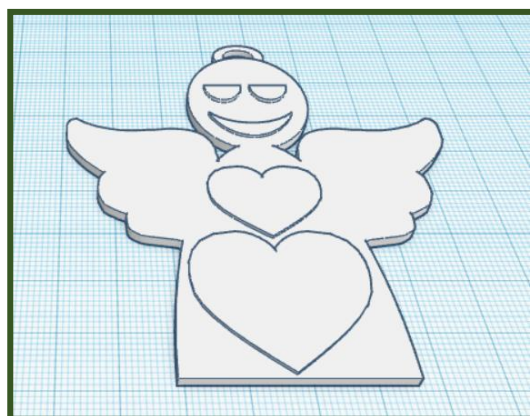
S obzirom na to da možda nemamo mogućnost koristiti računala na nastavi matematike ili nemamo vremena za implementiranje 3D modeliranja u nastavu pomoću 3D printera, za učenike možemo pripremiti radionice na tu temu. Na prvoj radionici se učenici upoznaju s alatom za 3D modeliranje i njegovim mogućnostima te upoznaju 3D printer. Pustimo ih da sami istražuju kako se crtaju objekti, mijenjaju njihove dimenzije i položaj. Možemo im zadati zadatak da osmisle neki 3D model po slobodnom izboru. Na taj način će moći izraziti svoju kreativnost dok će u isto vrijeme učiti nešto novo. Na primjer mogu izraditi maketu dvorca ili neke građevine. Jedan primjer takvog 3D modela možemo vidjeti na Slici 5.10.





*Slika 5.10. Primjer makete dvorca*

U Božićno vrijeme možemo organizirati radionicu na kojoj će učenici izrađivati ukrase za bor. Učenicima treba dati što više slobode u izboru i osmišljavanju dizajna. Možemo im samo reći temu, a oni će samostalno osmisliti božićne ukrase. Mogu prvo na papiru olovkom skicirati svoj dizajn, a tek potom ga crtati u programu i svoje ideje prenijeti najprije u 3D model na računalu, a potom isprintati i prenijeti ih u stvarnost. Ovakvi modeli su vrlo jednostavni i nisu veliki što omogućava brz ispis. Mana 3D printera je što im za ispis većih 3D modela treba puno vremena. I po nekoliko sati. Dok je za jedan ovakav model potrebno oko 50 minuta. Još jedna prednost ovakvih modela je da ne iziskuju veliku količinu materijala koju će printer potrošiti za njihovo ispisivanje. Primjer jednog anđela za bor možemo vidjeti na Slici 5.11.



*Slika 5.11. Primjer ukrasa za bor*

Još jedna od jednostavnih radionica koje možemo organizirati je izrada natpisa za torte. Na ovoj radionici učenici će naučiti kako implementirati razne fontove u TinkerCAD te ih potom primjenjivati pri izradi svojih 3D modela. Primjer jednog takvog natpisa možemo vidjeti na Slici 5.12. Na jednoj od sljedećih radionica mogu izrađivati privjeske. Primjer jednog privjeska možemo vidjeti na Slici 5.13.



*Slika 5.12. Natpis za tortu Sretan rođendan*



*Slika 5.13. Privjesak*

Malo zahtjevnija radionica koju možemo provesti s učenicima može biti izrada neke igre. Ovu radionicu možemo podijeliti i na više manjih radionica kako bi učenici što kvalitetnije napravili sve zadatke. Na primjer mogu izraditi Čovječe ne ljuti se,

Monopoly svog mjesta ili grada, šah ili osmisliti neku novu igru za koju će sami osmisliti pravila. U peteročlanim skupinama surađuju, dogovaraju se i dijele posao. Učenici trebaju osmisliti cijeli koncept igre, pravila, izraditi ploču, figure, kockice. Najprije na papiru izrade plan i skiciraju igru, a potom crtaju 3D modele te ih printaju. Svaki učenik može biti zadužen za dio posla, a međusobno moraju surađivati kako bi uspješno odradili zadatak. Radionice možemo osmisliti tako da svaka skupina učenika (ili po dvije skupine, ovisno o tome koliko učenika sudjeluje) izrađuje svoju igru kako bi imali što više različitih igara koje bi učenici mogli igrati u školi. Nakon što se sve igre završe, učenici ih odigraju.

Na Slici 5.14. možemo vidjeti neke predmete isprintane pomoću 3D printera.



*Slika 5.14. Predmeti isprintani pomoću 3D printera (dvorac, natpis za tortu, privjesak, anđeo i valjak)*

# LITERATURA

1. Čižmešija, A., Stilinović, S., i dr. Presentacije i seminari iz kolegija Metodika nastave matematike 1, Metodika nastave matematike 2, Metodika nastave matematike 3, Metodika nastave matematike 4 i Vrednovanje u matematičkom obrazovanju (neobjavljeni materijali)
2. Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R., *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*, Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 3, (1988), i+1-196
3. Howse, T. D., Howse, M. E. (2015.) Linking the Van Hiele Theory to Instruction, Vol. 21, No. 5, pages 304-313  
<https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.21.5.0304>  
[pristupljeno 12.01.2024.]
4. Kinach, B. M. (2012.) Fostering Spatial vs. Metric Understanding in Geometry, Vol. 105, No. 7, pages 534-540  
<https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.105.7.0534>

[pristupljeno 10.01.2024.]

5. Lund, C. *Math Explorations with a Geoboard*, IPMG Publishing, Eden Prairie, Minnesota, 2009.
6. Nacionalni matematički kurikulum (2019), Narodne novine, broj: 87/08, 86/09, 92/10, 105/10 – ispravak, 90/11, 16/12, 86/12, 94/13, 152/14, 7/17 i 68/18  
Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr)
7. Pohl, S.S., Richter, C. (2021.) The complete characterization of tangram pentagons. *Beitr Algebra Geom* 62, 121–135  
<https://doi.org/10.1007/s13366-020-00528-1> [pristupljeno 01.02.2024.]
8. Posamentier, A. S., Stepelman, J., *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units*, Prentice Hall, 1998.
9. Slocum, J. (2008.) *Tangram: The World's First Puzzle Craze*, The Tangram Book, Sterling  
[https://collections.libraries.indiana.edu/lilly/exhibitions\\_legacy/collections/overview/puzzle\\_docs/Tangram-Worlds\\_First\\_Puzz\\_Craze.pdf](https://collections.libraries.indiana.edu/lilly/exhibitions_legacy/collections/overview/puzzle_docs/Tangram-Worlds_First_Puzz_Craze.pdf)  
[pristupljeno 01.02.2024.]
10. Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M, Lovin, L. H., Karp, K. S., *Teaching Student-Centered Mathematics. Developmentally Appropriate Instruction for Grades 6 - 8*, Pearson, 2018.
11. Van de Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M., *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 7th edition, Allyn & Bacon, 2009.
12. XV. Gimnazija, Matematika između realnog i virtualnog, Priručnik za nastavnike,  
[https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/Prirucnik\\_USB.pdf](https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/Prirucnik_USB.pdf)  
[pristupljeno 27.03.2023.]

## SAŽETAK

U ovom diplomskom radu povezujemo razvoj prostornog zora s Van Hiele modelom razvoja geometrijskog mišljenja. U uvodnom dijelu ukratko smo opisali što je geometrija, čime se bavi i koji je njezin značaj te se osvrnuli na zastupljenost geometrije u Nacionalnom matematičkom kurikulumu. Opisali smo Van Hiele teoriju geometrijskog mišljenja te njenu primjenu u nastavi matematike. Zatim smo razradili niz aktivnosti primjerenih učenicima osnovne i srednje škole kojima učenici razvijaju prostorni zor s osobitim naglaskom na kvalitativna svojstva i povezivanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih geometrijskih objekata te njihove transformacije. Za svaku aktivnost je razrađen oblik rada, tijek aktivnosti, dani su primjeri nastavnih listića i rješenja te zaključci do kojih učenici trebaju doći. Na kraju smo opisali mogućnosti primjene 3D printanja u nastavi matematike.

# SUMMARY

In this thesis, we connect the development of spatial vision with the Van Hiele model of geometric thinking. In the introduction, we briefly described what geometry is, what it deals with, and its importance, as well as the representation of geometry in the National Mathematics Curriculum. We described the Van Hiele theory of geometric thinking and its application in mathematics education. Furthermore, we developed a series of activities suitable for elementary and high school students through which students develop spatial vision with a special emphasis on qualitative properties and the connection between two-dimensional and three-dimensional geometric objects and their transformations. For each activity, we elaborated the form of work, the course of the activity, examples of worksheets and its solutions, as well as the conclusions that students should arrive at. Finally, we described the possibilities of applying 3D printing in mathematics education.

## ŽIVOTOPIS

Rođena sam 19. lipnja 1997. u Zaboku. Svoje školovanje započela sam u Osnovnoj školi „Lijepa naša“ Tuhelj, nakon čega sam upisala Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku u kojoj sam završila prirodoslovno-matematički smjer. Završila sam i osnovnu glazbenu školu, smjer: saksofon. Aktivna sam članica Puhačkog orkestra „Lipa“ Tuhelj s kojim sudjelujem na županijskim i državnim smotrama i natjecanjima na kojima nerijetko postizemo zapažene rezultate. Volontiram u matematičkom društvu Krapinsko-zagorske županije MathKaj. 2021. godine završavam preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te upisujem diplomski sveučilišni studij matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu. Za vrijeme studija kao student sam radila u Ericsson Nikola Tesla Servisi d.o.o., a u rujnu 2023. počinjem raditi kao učiteljica matematike u Osnovnoj školi Đurmanec.