Geometrijska zeta funkcija fraktalne strune

Sinčić, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Sinčić

GEOMETRIJSKA ZETA FUNKCIJA FRAKTALNE STRUNE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Goran Radunović

Zagreb, veljača 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Mnogo rezultata u matematici koje bismo htjeli primijeniti u stvarnom svijetu ovise o uvjetima koji nisu realni. Primjerice, ako udarimo štapićem u okrugli bubanj, vibracije koje nastaju bi mogli opisati valnom jednadžbom na krugu i pokušati zaključiti koje frekvencije zvuka ćemo dobiti, ali ako je taj bubanj oštećen ili na neki način nepravilan i želimo jako precizno odrediti frekvencije, korisno je imati alate koji će bolje opisati što se događa. S druge strane, možemo li odrediti oblik membrane bubnja ako znamo sve frekvencije koje će nastati nakon jednog udarca štapića? Ovo je problem kojeg je Mark Kac popularizirao u članku "Can One Hear the Shape of a Drum?" 1966. godine. Ispada da je odgovor pozitivan ako pretpostavimo da je rub bubnja dovoljno "lijep", no za opći oblik je odgovor negativan te je konstruiran primjer dva skupa koja mogu proizvesti isti zvuk. Ipak, ako ovaj problem promatramo u jednoj dimenziji za fraktalne strune, moguće je zaključiti neke geometrijske činjenice koje inače ne bismo mogli. Dokaz te tvrdnje je jedan od ciljeva ovog rada.

Prvo poglavlje ovog rada analizira običnu fraktalnu strunu koja je ograničen otvoren podskup realnih brojeva. Njoj pridružujemo dimenziju Minkowskog koju uspoređujemo s box dimenzijom i Hausdorffovom dimenzijom skupa. Bitan rezultat jest da je dimenzija Minkowskog fraktalne strune, barem kako je tu definirana, jednaka gornjoj box dimenziji svog ruba. Zatim uvodimo pojam geometrijske zeta funkcije fraktalne strune te dokazujemo da se njena abscisa konvergencije podudara s dimenzijom Minkowskog strune. Nakon toga definiramo zastor i prozor fraktalne strune te njene kompleksne dimenzije kao polove meromorfnog proširenja geometrijske zeta funkcije. Navodimo i konstrukciju fraktalne strune s unaprijed zadanom dimenzijom Minkowskog.

U drugom poglavlju bavimo se sebi-sličnim fraktalnim strunama te ih povezujemo sa sebi-sličnim skupovima. Kako se radi o posebnom slučaju fraktalnih struna, nije neočekivano da možemo bolje opisati njihovu strukturu te dobiti eksplicitnu formulu za geometrijsku zeta funkciju. Zatim promatramo dva disjunktna slučaja, rešetkasti i nerešetkasti, te završavamo poglavlje navodeći strukturne teoreme za sebi-slične fraktalne strune.

U trećem poglavlju promatramo valnu jednadžbu te definiramo svojstvene vrijednosti za tri specifična rubna uvjeta. Dokazujemo da su one pozitivne u slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta i da u tom slučaju njihova asimptotika daje informaciju o volumenu domene na kojoj ih promatramo za jednostavne domene. Zatim motiviramo proučavanje frekvencija fraktalne strune, uvodimo spektralnu zeta funkciju fraktalne strune koju povezujemo s Riemannovom zeta funkcijom te dokazujemo Weylov asimptotski zakon za fraktalne strune. Na kraju dokazujemo da Riemannova zeta funkcija ima meromorfno proširenje na $\mathbb{C}$ s jedinim polom u $s = 1$ koji je reda 1.

Volio bih se zahvaliti najprije svojim roditeljima koji su me oduvijek bezuvjetno podržavali u svemu što sam radio, pa tako i u matematici. Zatim svim profesoricama i mentorima koji su mi pomogli da dođem gdje sam sada, kao i prijateljima koji su vjerovali u mene. Posebno se zahvaljujem mentoru, izv. prof. dr. sc. Goranu Radunoviću, na uloženom trudu, brzim potpunim odgovorima na sva moja pitanja te referenciranju članaka koje sam ne bih pronašao.

Poglavlje 1

Obična fraktalna struna

Konvencije i oznake

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{Z} : y \leq x\}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
$d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, gdje je $\|\mathbf{x}\|$ Euklidska norma u $\mathbb{R}^n$.
$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$.
$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.
vol_n je n-dimenzionalna Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^n$.
Domena je neprazan povezan otvoren skup u topološkom prostoru, što će nama biti ili $\mathbb{R}^n$ s euklidskom topologijom ili $\mathbb{C}$ sa standardnom topologijom.
Okolina točke $p \in \mathbb{C}$ je svaki skup $V \subseteq \mathbb{C}$ za koji postoji otvoren skup $U \subseteq V$ koji sadrži p.
Okolina skupa $W \subseteq \mathbb{C}$ je svaki skup $V \subseteq \mathbb{C}$ za koji postoji otvoren skup $U \subseteq V$ koji je nadskup od W.
Kontura je po dijelovima gladak zatvoren put koji sam sebe ne presijeca.
Sličnost Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je bijekcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ za koju postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $d(f(x), f(y)) = c \cdot d(x, y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
Za neprazne otvorene skupove $U \subset V \subseteq \mathbb{C}$ i analitičku funkciju $f : U \to \mathbb{C}$ kažemo da je funkcija $F : V \to \mathbb{C}$ analitičko proširenje od f ako vrijedi da je F analitička i $f(z) = F(z), \ \forall z \in U$.
Za neprazane otvorene skupove $U \subset V \subseteq \mathbb{C}$ i meromorfnu funkciju $f : U \to \mathbb{C}$ kažemo da je funkcija $F : V \to \mathbb{C}$ meromorfno proširenje od f ako vrijedi da je F meromorfna i $f(z) = F(z), \ \forall z \in U$.
Za funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $g(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, pišemo $f(x) = O(g(x))$ kako $x \to \infty$ ako postoje konstante $M > 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da za sve $x \geq x_0$ vrijedi $|f(x)| \leq Mg(x)$.
Za broj $a \in \mathbb{R}$ i funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $g(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, pišemo $f(x) = O(g(x))$

kako $x \to a$ ako postoje konstante $M > 0$ i $\delta > 0$ tako da za sve $x \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju $|x - a| < \delta$ vrijedi $|f(x)| \leq Mg(x)$.

1.1 Geometrija fraktalne strune

U ovom odjeljku definiramo običnu fraktalnu strunu i bavimo se njenim svojstvima.

Definicija 1.1.1. *(Standardna ili obična) fraktalna struna Ω je otvoreni ograničeni podskup skupa $\mathbb{R}$. Takav podskup se sastoji od najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih intervala s duljinama $\mathcal{L} = (l_j)_{j=1}^{\infty}$. Niz $\mathcal{L}$ također zovemo fraktalnom strunom.*

Napomena 1.1.2. *Ω se ne može sastojati od neprebrojivo mnogo disjuntnih otvorenih intervala jer svaki otvoreni interval sadrži racionalan broj, a njih ima prebrojivo mnogo.*

Napomena 1.1.3. *Primijetimo da je ukupna duljina fraktalne strune $\sum_{i=1}^{\infty} l_i$ konačna i jednaka Lebseguevoj mjeri od Ω. U nastavku rada bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da vrijedi*

$$l_1 \geq l_2 \geq \ldots > 0,$$

gdje svaku duljinu brojimo onoliko puta kolika je njena kratnost. Dozvoljavamo slučaj u kojem je Ω konačna unija otvorenih intervala i tada je niz duljina konačan.

Napomena 1.1.4. *Mnogo svojstava fraktalnih struna koja želimo proučavati neovisna su o izboru skupa Ω, već ovise samo o duljinama $\mathcal{L}$, pa je u iskazu raznih tvrdnji dovoljno zadati samo $\mathcal{L}$. Tvrdnje koje ovise samo o duljinama $\mathcal{L}$ su također neovisne o položaju duljina u Ω, što omogućava njihovo promatranje u silaznom poretku bez smanjenja općenitosti.*

Definicija 1.1.5. *Funkcija prebrojavanja recipročnih duljina ili geometrijska funkcija prebrojavanja od $\mathcal{L}$ je funkcija $N_{\mathcal{L}} : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{N}_0$ dana s*

$$N_{\mathcal{L}}(x) = \left| \left\{ j \in \mathbb{N} : \frac{1}{l_j} \leq x \right\} \right| = \sum_{j : l_j^{-1} \leq x} 1.$$

Ponašanje ove funkcije je blisko povezano sa samim duljinama strune, što možemo vidjeti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $\mathcal{L}$ obična fraktalna struna s nizom duljina $l_1, l_2, l_3, \ldots$. Tada je*

$$N_{\mathcal{L}}(x) = O(x^D), \text{ kako } x \to \infty \text{ ako i samo ako } l_j = O\left(j^{-1/D}\right), \text{ kako } j \to \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da postoje $C_1, M > 0$ takvi da je

$$N_{\mathcal{L}}(x) \leq C_1 \cdot x^D, \qquad \forall x \geq M$$

i neka je $C_2 = \max\left\{\frac{N_{\mathcal{L}}(x)}{x^D} : x \in \langle 0, M\rangle\right\}$ (maksimum se postiže za neki $x = \frac{1}{l_j}$ takav da je $\frac{1}{l_j} < M$). Sada za $C = \max\{C_1, C_2\}$ imamo

$$N_{\mathcal{L}}(x) \leq C \cdot x^D, \qquad \forall x > 0,$$

pa za $x = l_j^{-1}$ slijedi $j \leq C \cdot l_j^{-D} \implies l_j = O(j^{-1/D})$.

S druge strane, ako postoje $C_1, M > 0$ takvi da je

$$l_j \leq C_1 \cdot j^{-1/D}, \qquad \forall j \geq M,$$

tada definiramo $C_2 = \max\left\{\frac{l_j}{j^{-1/D}} : j < M\right\}$ te $C = \max\{C_1, C_2\}$ iz čega slijedi

$$l_j \leq C \cdot j^{-1/D}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Sada za svaki $x > 0$ i $j \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $j \geq (Cx)^D$ imamo $x \leq l_j^{-1}$, pa je $N_{\mathcal{L}}(x) \leq (Cx)^D$.
□

Važna geometrijska informacija o struni $\mathcal{L}$ sadržana je u njenoj *dimenziji Minkowskog* $D = D_{\mathcal{L}}$ i u njenom *sadržaju Minkowskog* $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D; \mathcal{L})$ koje sljedeće želimo definirati. U tu svrhu označimo s $V(\varepsilon)$ volumen unutarnje tubularne okoline od $\partial\Omega$ s radijusom ε:

$$V(\varepsilon) = \mathrm{vol}_1\{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}. \tag{1.1}$$

Primijetimo da $V(\varepsilon)$ zapravo ne ovisi o realizaciji fraktalne strune, pri čemu pod realizacijom fraktalne strune mislimo na skup $\Omega \subset \mathbb{R}$ čije duljine tvore $\mathcal{L}$ (dakle položaj i poredak duljina intervala), već samo o njenim duljinama $\mathcal{L}$.

Definicija 1.1.7. *Dimenziju (Minkowskog) fraktalne strune $\mathcal{L}$ definiramo kao unutarnju dimenziju Minkowskog od $\partial\Omega$,*

$$D = D_{\mathcal{L}} = \inf\left\{\alpha \geq 0 : V(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-\alpha}),\ \textit{kako}\ \varepsilon \to 0^+\right\}. \tag{1.2}$$

Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ kažemo da je Minkowski izmjerljiva, sa sadržajem Minkowskog

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(D; \mathcal{L}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-D}}, \tag{1.3}$$

ako taj limes postoji u $\langle 0, \infty\rangle$. Gornji i donji sadržaji Minkowskog su redom definirani s

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*(D; \mathcal{L}) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-D}}, \tag{1.4a}$$

$$\mathcal{M}_* = \mathcal{M}_*(D; \mathcal{L}) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(\varepsilon)}{\varepsilon^{1-D}}. \tag{1.4b}$$

Dakle $0 \leq \mathcal{M}_* \leq \mathcal{M}^* \leq \infty$ i $\mathcal{L}$ je Minkowski izmjerljiva ako i samo ako je $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_* = \mathcal{M}$ pozitivan realan broj.

Napomena 1.1.8. *U literaturi je vrijednost $\mathcal{M}$ poznata kao gornja (unutarnja) dimenzija Minkowskog. Naime, postoji i donja dimenzija Minkowskog koja može biti različita od $\mathcal{M}$, ali u ovom radu se ne bavimo donjom dimenzijom Minkowskog.*

Napomena 1.1.9. *Definicija dimenzije Minkowskog i sadržaja Minkowskog prirodno se proširuju na slučaj više dimenzija u kojem je Ω ograničeni otvoreni podskup od $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, na način da zamijenimo eksponent $1 - \alpha$ s $d - \alpha$ u (1.2), eksponent $1 - D$ s $d - D$ u (1.3) i (1.4) te da u (1.1) umjesto vol_1 koristimo vol_d, d-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru.*

Propozicija 1.1.10. *Dimenzija D fraktalne strune $\mathcal{L}$ zadovoljava*

$$D = 1 - \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

Dokaz. Neka je $\alpha \geq 0$. Imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
& V(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-\alpha}), && \text{kako } \varepsilon \to 0^+ \\
\iff \quad & V(\varepsilon) \leq C_\alpha \varepsilon^{1-\alpha}, && \text{za neke } r \in \langle 0, 1\rangle, C_\alpha > 0 \text{ i svaki } \varepsilon \in \langle 0, r\rangle \\
\iff \quad & \ln V(\varepsilon) \leq C_\alpha + (1-\alpha)\ln \varepsilon, && \text{za neke } r \in \langle 0, 1\rangle, C_\alpha \in \mathbb{R} \text{ i svaki } \varepsilon \in \langle 0, r\rangle \\
\iff \quad & \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \geq \frac{C_\alpha}{\ln \varepsilon} + 1 - \alpha, && \text{za neke } r \in \langle 0, 1\rangle, C_\alpha \in \mathbb{R} \text{ i svaki } \varepsilon \in \langle 0, r\rangle \\
\iff \quad & \alpha \geq \frac{C_\alpha}{\ln \varepsilon} + 1 - \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, && \text{za neke } r \in \langle 0, 1\rangle, C_\alpha \in \mathbb{R} \text{ i svaki } \varepsilon \in \langle 0, r\rangle \\
\iff \quad & \alpha \geq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left(1 - \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Dakle

$$D = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left(1 - \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}\right) = 1 - \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

□

Za fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ uvodimo i oznaku w_l za kratnost njenih duljina:

$$w_l = \left| \left\{ j \in \mathbb{N} : l_j = l \right\} \right|. \tag{1.5}$$

Jasno je da slijedi

$$N_{\mathcal{L}}(x) = \sum_{l^{-1} \leq x} w_l.$$

Primjer: Cantorova struna

Promotrimo običnu fraktalnu strunu $\Omega = \text{CS}$ koja je komplement standardnog Cantorovog skupa. Dakle

$$\text{CS} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \right\rangle \cup \left\langle \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \right\rangle \cup \left\langle \frac{25}{27}, \frac{26}{27} \right\rangle \cup \ldots,$$

i njene duljine su $l_1 = \frac{1}{3}$, $l_2 = l_3 = \frac{1}{9}$, $l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = \frac{1}{27}, \ldots$, odnosno radi se o brojevima oblika 3^{-n-1} s kratnošću 2^n za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Po konstrukciji je rub Cantorove strune upravo Cantorov skup.

Primijetimo da je općenito volumen tubularne okoline dan s

$$V(\varepsilon) = \sum_{j:l_j \geq 2\varepsilon} 2\varepsilon + \sum_{j:l_j<2\varepsilon} l_j = 2\varepsilon \cdot N_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + \sum_{j:l_j<2\varepsilon} l_j \tag{1.6}$$

jer za svaku dužinu duljine l imamo da su ε-okoline njenih krajnjih točaka disjunktne (prva suma) ili se sijeku (druga suma). Sada vidimo da je za $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$,

$$V_{\text{CS}}(\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (2^n - 1) + \sum_{k=n}^{\infty} 2^k \cdot 3^{-k-1} = 2\varepsilon \cdot 2^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\varepsilon,$$

gdje je n takav da je $3^{-n} \geq 2\varepsilon > 3^{-n-1}$, odnosno $n = \lfloor -\log_3(2\varepsilon) \rfloor$. Nadalje za bilo koji $b > 0$ imamo

$$b^n = b^{\lfloor -\log_3(2\varepsilon) \rfloor} = b^{-\log_3(2\varepsilon) - \{-\log_3(2\varepsilon)\}} = (2\varepsilon)^{-\log_3 b} b^{-\{-\log_3(2\varepsilon)\}},$$

iz čega slijedi

$$V_{\text{CS}}(\varepsilon) = (2\varepsilon)^{1-\log_3 2} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\{-\log_3(2\varepsilon)\}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\{-\log_3(2\varepsilon)\}} \right) - 2\varepsilon.$$

Primijetimo da je izraz unutar zagrada ograničen, konstantan i multiplikativno periodičan, odnosno njegova vrijednost za $\varepsilon > 0$ je jednaka njegovoj vrijednosti za $\varepsilon/3$ te da nema limes kako $\varepsilon \to 0^+$. Slijedi da Cantorova struna ima dimenziju $D = \log_3 2$ te da nije Minkowski izmjerljiva.

1.2 Alternativne dimenzije

U ovom odjeljku opisujemo druge načine na koje bismo mogli definirati dimenziju ograničenog podskupa od $\mathbb{R}^n$, kao i njihove prednosti, mane te povezanost s definicijom (1.1.7).

Box dimenzija

Definicija 1.2.1. *Neka je $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ te $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ konačna ili prebrojiva familija podskupova od $\mathbb{R}^n$ takva da je $\operatorname{diam} U_i \leq \delta$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Ako je $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ kažemo da je familija $\{U_i\}$ δ-pokrivač skupa F.*

Definicija 1.2.2. *Neka je F neprazan ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je za $0 < \delta < 1$ izraz $N_\delta(F)$ najmanji broj skupova koji tvore δ-pokrivač od F. Tada definiramo gornju i donju box dimenziju od F redom s*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$
$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Naravno, vrijedi $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$ i ako vrijedi jednakost kažemo da je ta vrijednost box dimenzija od F, u oznaci

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}.$$

Primijetimo da je među δ-pokrivačima skupa F dovoljno promatrati kolekcije zatvorenih skupova jer je dijametar skupa jednak dijametru njegovog zatvarača. Sljedeće navodimo karakterizaciju box dimenzije koja će dati smisao tom nazivu.

Definicija 1.2.3. *Neka je $\delta > 0$. Familiju kocaka u $\mathbb{R}^n$ koje su oblika*

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \ldots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

gdje su $m_1, \ldots, m_n$ cijeli brojevi nazivamo δ-mreža u $\mathbb{R}^n$. Elemente te familije zovemo δ-mrežastim kockama.

Propozicija 1.2.4. *Donja i gornja box dimenzija skupa $F \subset \mathbb{R}^n$ dane su formulama*

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln \delta}$$
$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

a box dimenzija formulom

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

(ako taj limes postoji), gdje je $N'_\delta(F)$ broj δ-mrežastih kocaka koje sijeku F.

Dokaz. Ako je dana kolekcija svih δ-mrežastih kocaka koje sijeku F, jasno je da se radi o pokrivaču od F. Budući da δ-mrežasta kocka u $\mathbb{R}^n$ ima dijametar $\delta\sqrt{n}$, slijedi

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F).$$

S druge strane, svaki skup dijametra najviše δ je sadržan u 3^n δ-mrežastih kocaka. To je zato što u danom skupu možemo odabrati proizvoljnu točku, zatim za svaku od n dimenzija naći u kojem segmentu oblika $[m\delta, (m+1)\delta]$ $(m \in \mathbb{Z})$ se ona nalazi te na kraju u toj dimenziji odabrati taj segment i dva susjedna, što će rezultirati s 3^n δ-mrežastih kocaka nakon kartezijevog produkta po svim dimenzijama. Dakle

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_\delta(F).$$

Slijedi

$$\frac{N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\ln(\delta\sqrt{n}) + \ln\sqrt{n}} \leq \frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\delta} \leq \frac{\ln 3^n + \ln N_\delta(F)}{-\ln\delta},$$

pa nakon uzimanja lim inf kako $\delta \to 0$, dobivamo

$$\liminf_{\delta\to 0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta} \leq \liminf_{\delta\to 0}\frac{\ln N'_\delta(F)}{-\ln\delta} \leq \liminf_{\delta\to 0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta},$$

iz čega zaključujemo da je definicija donje box dimenzije ista ako zamijenimo N_δ s N'_δ. Analogan zaključak dobivamo za gornju box dimenziju uzimanjem lim sup umjesto lim inf. □

Napomena 1.2.5. *Ista tvrdnja vrijedi za sljedeće (različite) definicije broja $N'_\delta(F)$ koje nam nisu korisne u ovom radu, ali ih navodimo radi kompletnosti:*

(i) najmanji broj zatvorenih kugli radijusa δ koje pokrivaju F,

(ii) najmanji broj n-dimenzionalnih kocaka duljine brida δ koje pokrivaju F,

(iii) najveći broj disjunktnih kugli radijusa δ sa centrima u F.

Posljedica ekvivalencije definicije box dimenzije preko proizvoljnih skupova i definicije preko δ-mrežastih kocaka je ta da je δ-mrežasta formulacija neovisna o ishodištu i orijentaciji δ-mreže.

Teorem 1.2.6. *Ako je F podskup od $\mathbb{R}^n$, tada vrijedi*

$$\underline{\dim}_B F = n - \limsup_{\delta\to 0}\frac{\ln \mathrm{vol}_n(F_\delta)}{\ln\delta}$$
$$\overline{\dim}_B F = n - \liminf_{\delta\to 0}\frac{\ln \mathrm{vol}_n(F_\delta)}{\ln\delta},$$

gdje je $F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq \delta \text{ za neki } y \in F\} = \bigcup_{x\in F}\overline{K}(x,\delta)$ δ-okolina od F.

Dokaz. Neka je $\delta > 0$. Za svaki $x \in F$ možemo naći u kojoj δ-mrežastoj kocki je sadržan. Neka je ta kocka $[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \ldots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$. Tada unija od 3^n δ-mrežastih kocaka $[(m_1 - 1)\delta, (m_1 + 2)\delta] \times \ldots \times [(m_n - 1)\delta, (m_n + 2)\delta]$ sigurno sadrži $\overline{K}(x, \delta)$. Dakle

$$\mathrm{vol}_n(F_\delta) \leq N_\delta(F)(3\delta)^n,$$

iz čega primjenom prirodnog logaritma, dijeljenjem s $-\ln\delta$ i uzimanjem $\liminf_{\delta\to 0}$ dobivamo

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln \mathrm{vol}_n(F_\delta)}{-\ln\delta} \leq -n + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F,$$

sa sličnom nejednakosti za $\limsup_{\delta\to 0}$. S druge strane, za svaku δ-mrežastu kocku B koja siječe F postoji $x \in F \cap B$. Točka x se nalazi u nekoj $\frac{\delta}{\lceil\sqrt{n}\rceil}$-mrežastoj kocki B' unutar B za koju vrijedi $B' \subseteq F_\delta$ jer je $\mathrm{diam}\, B' \leq \delta$. Dakle

$$N_\delta(F)\left(\frac{\delta}{\lceil n\rceil}\right)^n \leq \mathrm{vol}_n(F_\delta),$$

iz čega primjenom prirodnog logaritma, dijeljenjem s $-\ln\delta$ i uzimanjem $\liminf_{\delta\to 0}$ dobivamo

$$-n + \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \leq \liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln \mathrm{vol}_n(F_\delta)}{-\ln\delta},$$

sa sličnom nejednakosti za $\limsup_{\delta\to 0}$. □

Korolar 1.2.7. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}$ obična fraktalna struna s nizom duljina $\mathcal{L}$. Tada vrijedi*

$$D_{\mathcal{L}} = \overline{\dim}_B \partial\Omega.$$

Dokaz. Neka je $F = \partial\Omega$ i zadržimo oznaku $F_\varepsilon = \bigcup_{x\in F} \overline{K}(x, \varepsilon)$ iz iskaza prošlog teorema. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je Lebesgueova mjera skupa ∂F_ε jednaka nuli (jer se sastoji od najviše prebrojivo mnogo točaka koje su rubovi intervala), teorem 2 članka [6] (što je netrivijalan rezultat) implicira

$$\mathrm{vol}_1(F_\varepsilon) = V(\varepsilon).$$

Zaključujemo

$$\begin{aligned} & V(\varepsilon) = \mathrm{vol}_1(F_\varepsilon), \quad \forall\varepsilon > 0 \\ \Longrightarrow\ & \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln\varepsilon} = \frac{\ln \mathrm{vol}_1(F_\varepsilon)}{\ln\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle \\ \Longrightarrow\ & \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln \mathrm{vol}_1(F_\varepsilon)}{\ln\varepsilon}, \end{aligned}$$

pa teorem (1.2.6) i propozicija (1.1.10) daju traženu tvrdnju. □

Primijetimo da su gornja i donja box dimenzija montone, odnosno ako su $E \subset F$ skupovi, tada je

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}} E \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}} F \quad \text{i} \quad \overline{\dim}_{\mathrm{B}} E \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}} F$$

jer za svaki $\delta > 0$ vrijedi $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$.

Propozicija 1.2.8. *Box dimenzija otvorenog skupa $U \subseteq \mathbb{R}^n$ jednaka je n.*

Dokaz. Dovoljno je tvrdnju dokazati za proizvoljnu kuglu u $\mathbb{R}^n$ jer svaki otvoreni skup sadrži kuglu, a box dimenzija je monotona. Primijetimo da je volumen δ-okoline kugle zapravo samo volumen malo veće kugle, odnosno za neki $k_n > 0$ vrijedi

$$\mathrm{vol}_n(F_\delta) = k_n(r+\delta)^n,$$

gdje je r radijus kugle. Slijedi

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \mathrm{vol}_n(F_\delta)}{\ln \delta} = 0,$$

pa tvrdnja slijedi iz teorema (1.2.6). □

Propozicija 1.2.9. *Neka je F neprazan ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ te $\overline{F}$ njegov zatvarač. Tada je*

$$\underline{\dim}_B \overline{F} = \underline{\dim}_B F$$

i

$$\overline{\dim}_B \overline{F} = \overline{\dim}_B F.$$

Dokaz. Neka je $(F_i)_{i=1}^k$ konačna kolekcija zatvorenih skupova dijametra δ. Zatvoreni skup $\bigcup_{i=1}^k F_i$ je nadskup od $\overline{F}$ ako i samo ako je nadskup od F. Dakle najmanji broj zatvorenih skupova potreban da se pokrije F je jednak najmanjem broju zatvorenih skupova da se pokrije $\overline{F}$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Korolar 1.2.10. *Ako je F gust podskup otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^n$, tada je $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = n$.*

Hausdorffova dimenzija

Da bi definirali Hausdorffovu dimenziju skupa, potrebno je prvo definirati Hausdorffovu vanjsku mjeru.

Definicija 1.2.11. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$ i $s \geq 0$. Za svaki $\delta > 0$ definiramo*

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, U_i)^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ je } \delta\text{-pokrivač od } F \right\}.$$

Kažemo da je

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

s-dimenzionalna Hausdorffova vanjska mjera od F.

Napomena 1.2.12. *Primijetimo da je za $F \subset \mathbb{R}^n$ funkcija $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(F)$ padajuća i nenegativna, što osigurava da postoji limes $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$ te je $\mathcal{H}^s(F)$ dobro definirano.*

Napomena 1.2.13. *Hausdorffova vanjska mjera $\mathcal{H}^s$ je uistinu vanjska mjera, odnosno mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Dokaz ove tvrdnje je dan u [2] (Theorem 3.7).*

Napomena 1.2.14. *U [2] (Proposition 3.10) je dokazano da je $\mathcal{H}^n = c_n \cdot \mathrm{vol}_n$ na $\mathbb{R}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gdje su $c_n > 0$ konstante.*

Za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}^n$ označimo s $\|x\|$ Euklidsku normu u $\mathbb{R}^n$.

Propozicija 1.2.15. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$ i $f : F \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje koje zadovoljava*

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in F,$$

za neke konstante $\alpha, c > 0$ (dakle Hölderovo preslikavanje s eksponentom α). Tada za svaki $s \ge 0$ vrijedi

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F). \tag{1.7}$$

Posebno, ako je f Lipschitzovo preslikavanje ($\alpha = 1$), tada vrijedi

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \le c^s\mathcal{H}^s(F). \tag{1.8}$$

Dokaz. Ako je $\{U_i\}_i^\infty$ δ-pokrivač od F, tada iz nejednakosti $\mathrm{diam}(f(F)\cap U_i) \le c\cdot\mathrm{diam}(F\cap U_i)^\alpha \le c\cdot\mathrm{diam}(U_i)^\alpha$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, slijedi da je $\{f(F\cap U_i)\}_{i=1}^\infty$ $c\delta^\alpha$-pokrivač za $f(F)$. Dakle

$$\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(f(F\cap U_i))^{s/\alpha} \le c^{s/\alpha}\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(U_i)^s, \quad \forall s \ge 0,$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F), \quad \forall s \ge 0.$$

Uzimanjem limesa kako $\delta \to 0$ dobivamo (1.7), što za posljedicu ima (1.8). □

Korolar 1.2.16. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sličnost sa skalirajućim faktorom $\lambda > 0$. Ako je $F \subset \mathbb{R}^n$, tada vrijedi*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s\mathcal{H}^s(F), \quad \forall s \ge 0.$$

Posebno, ako je f izometrija, vrijedi

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F), \quad \forall s \ge 0.$$

Dokaz. Kako je f sličnost, vrijedi

$$\|f(x) - f(y)\| = \lambda\|x - y\| \quad \text{i} \quad \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| = \lambda^{-1}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in F.$$

Sada propozicija (1.2.15) implicira

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(F))) \le \lambda^{-s}\mathcal{H}^s(f(F)), \quad \forall s \ge 0,$$

odnosno

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F), \quad \forall s \ge 0.$$

□

Neka je $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ i $F \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ δ-pokrivač od F i ako je $t > s \ge 0$, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^t \le \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(U_i)^s.$$

Uzimajući infimum po svim δ-pokrivačima dobivamo

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \le \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Puštajući $\delta \to 0$ vidimo da ako je $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, tada je i $\mathcal{H}^t(F) = 0$ za $t > s$. Dakle postoji vrijednost s u kojoj $\mathcal{H}^s(F)$ "skoči" iz ∞ u 0, čime je dana motivacija sljedeće definicije.

Definicija 1.2.17. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$. Hausdorffova dimenzija skupa F je*

$$\dim_H F = \inf\{s \ge 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \ge 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

gdje je $\sup \emptyset = 0$*, tako da je*

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & s \in [0, \dim_H F\rangle, \\ 0, & s > \dim_H F. \end{cases}$$

Osnovna svojstva Hausdorffove dimenzije slijede iz svojstava Hausdorffovih mjera:

1. Monotonost. Ako je $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, tada je $\mathcal{H}^s(E) \le \mathcal{H}^s(F)$ za sve $s \ge 0$, što implicira $\dim_{\mathrm{H}} E \le \dim_{\mathrm{H}} F$.

2. Raspon vrijednosti. Ako je $F \subset \mathbb{R}^n$, tada je $0 \le \dim_{\mathrm{H}} F \le n$. Da bi ovo dokazali dovoljno je dokazati da je $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, $\forall s > n$, što će slijediti iz σ-aditivnosti mjere $\mathcal{H}^s$ ako dokažemo da je $\mathcal{H}^s([0,1]^n) = 0$, $\forall s > n$. Ta tvrdnja pak slijedi iz subdivizije jedinične kocke na k^n kocaka $(Q_j)_{j=1}^{k^n}$ čiji je dijametar $\sqrt{n}/k$ te računa

$$\mathcal{H}^s_{\sqrt{n}/k}([0,1]^n) \le \sum_{j=1}^{k^n} \operatorname{diam}(Q_j)^s = n^{s/2}k^{n-s} \to 0, \quad \text{kako } k \to \infty.$$

3. Ako je $F \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, tada je $\dim_{\mathrm{H}} F = n$. To slijedi iz činjenice da F sadrži otvorenu kuglu K i napomene (1.2.14) koja garantira $\dim_{\mathrm{H}} K \geq n$. Kako je Hausdorffova dimenzija monotona i odozgo ograničena s n na $\mathbb{R}^n$, slijedi $\dim_{\mathrm{H}} F = n$.

Propozicija 1.2.18. *Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) Neka je $f : F \to \mathbb{R}^m$ funkcija koja zadovoljava Hölderov uvjet

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in F,$$

za neki $\alpha > 0$. Tada je $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha) \dim_H F$.

(b) Ako je $f : F \to \mathbb{R}^m$ bi-Lipschitzovo preslikavanje, odnosno

$$c_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|, \quad \forall x, y \in F,$$

gdje su $0 < c_1 \leq c < \infty$ konstante, tada je $\dim_H f(F) = \dim_H F$.

Dokaz. Neka je $F \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Ako je $s > \dim_{\mathrm{H}} F$, tada propozicija (1.2.15) implicira $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) = 0$, iz čega slijedi $\dim_{\mathrm{H}} f(F) \leq s/\alpha$, $\forall s > \dim_{\mathrm{H}} F$. Uzimanjem $\lim_{s \to (\dim_{\mathrm{H}} F)^+}$ dobivamo traženu tvrdnju.

(b) Slijedi iz primjene (a) dijela na funkcijama f i f^{-1} uz $\alpha = 1$.

□

Veza između Hausdorffove dimenzije i box dimenzije dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.2.19. *Neka je F neprazan ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Dokaz. Neka je $s \geq 0$ takav da je $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Primijetimo da ako takav s ne postoji, definicija (1.2.17) garantira $\dim_{\mathrm{H}} F = 0$, pa tvrdnja propozicije vrijedi. Jasno je da postoji $\delta_0 > 0$ takav da za svaki $\delta < \delta_0$ vrijedi

$$1 < \mathcal{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s,$$

gdje je $N_\delta(F)$ definiran u (1.2.2). Primjenom logaritma dobivamo

$$0 < \ln N_\delta(F) + s \ln \delta,$$

iz čega slijedi

$$s \leq \liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

stoga uzimanjem supremuma po svim takvim s dobivamo traženu tvrdnju.

□

1.3 Geometrijska Zeta funkcija fraktalne strune

Neka je $\mathcal{L}$ fraktalna struna s nizom duljina $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$. Promotrimo sljedeći (generalizirani) Dirichletov red:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s.$$

Imamo da je $\zeta_{\mathcal{L}}(1) = \mathrm{vol}_1(\mathcal{L}) < \infty$. Neka je $A = \{j \in \mathbb{N} : l_j \geq 1\}$ i $B = \{j \in \mathbb{N} : l_j < 1\}$ te primijetimo da je skup A konačan. Sada je za $s \in \langle 1, \infty \rangle$:

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j \in A} l_j^s + \sum_{j \in B} l_j^s \leq \sum_{j \in A} l_j^s + \sum_{j \in B} l_j.$$

Prva suma je konačna jer se radi o zbroju konačno mnogo elemenata, a druga je konačna jer je ograničena sa $\zeta_{\mathcal{L}}(1)$. Dakle $\zeta_{\mathcal{L}}(s) < \infty$ za sve $s \geq 1$. Nadalje primijetimo da za $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > 1$ vrijedi $|l_j^s| = l_j^{\mathrm{Re}(s)}$, pa iz Weierstrassovog M-testa slijedi da red

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_j^s$$

konvergira uniformno za sve $\mathrm{Re}(s) > 1$. Znamo da niz holomorfnih funkcija koji uniformno konvergira na otvorenom skupu mora konvergirati holomorfnoj funkciji, pa je ζ_L holomorfna funkcija na $\mathrm{Re}(s) > 1$. Pokazat ćemo da taj red konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > D$ gdje je D dimenzija Minkowskog od $\mathcal{L}$ te da divergira za $s = D$, što će opravdati sljedeću definiciju.

Definicija 1.3.1. *Neka je L fraktalna struna. Geometrijska zeta funkcija od $\mathcal{L}$ dana je sa*

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s = \sum_{l} w_l \cdot l^s,$$

za $Re(s) > D_{\mathcal{L}}$.

Napomena 1.3.2. *Dosad smo pokazali da je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ dobro definirana samo za $Re(s) \geq 1$.*

Definicija 1.3.3. *Abscisa konvergencije reda $\sum_{j=1}^{\infty} l_j^s$ je*

$$\sigma = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} l_j^{\alpha} < \infty\right\}.$$

Dakle $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \sigma\}$ je najveća otvorena poluravnina na kojoj promatrani red konvergira.

Napomena 1.3.4. *Na isti način kako smo dokazali da je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ holomorfna za $Re(s) > 1$ možemo dokazati da je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ holomorfna za $Re(s) > \sigma$.*

Napomena 1.3.5. *Napomena (1.3.2) implicira $\sigma \leq 1$. Ukoliko $\mathcal{L}$ ima beskonačno mnogo duljina, tada je $\sum_{j=1}^{\infty} l_j^0 = \infty$, odnosno $\sigma \geq 0$.*

Teorem 1.3.6. *Neka je $\mathcal{L}$ fraktalna struna s beskonačno mnogo duljina. Tada se absica konvergencije geometrijske zeta funkcije od $\mathcal{L}$ podudara s D, dimenzijom Minkowskog od $\mathcal{L}$.*

Dokaz. Sa σ ćemo označavati absicu konvergencije od $\zeta_{\mathcal{L}}$. Neka je $d > D = D_{\mathcal{L}}$. Iz definicije dimenzije Minkowskog slijedi da postoje $C_1 > 0, m > 0$ tako da je $V(\varepsilon) \leq C_1\varepsilon^{1-d}$, $\forall \varepsilon < m$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj takav da je $l_{n_0}/2 < m$. Sada za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ i $\varepsilon = l_n/2$ imamo

$$nl_n = 2\varepsilon \cdot N_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \leq V\left(l_n/2\right) \leq C_1 \cdot (l_n/2)^{1-d}. \tag{1.9}$$

$$\implies l_n^s \leq C_2 n^{-s/d}, \quad \forall s > 0,$$

za neki $C_2 > 0$ i sve $n \geq n_0$. Dakle $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ konvergira za sve $s > d$, pa kako je $d > D$ bio proizvoljan zaključujemo $\sigma \leq D$. Ako je $\sigma = 1$ tada propozicija (1.1.10) implicira $D = \sigma$.

Pretpostavimo u nastavku da je $\sigma < 1$. Tada postoji $s \in \langle\sigma, 1\rangle$. Prema definiciji abscise konvergencije red $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ konvergira. Budući da je niz duljina od $\mathcal{L}$ padajući, dobivamo

$$nl_n^s \leq \sum_{j=1}^{n} l_j^s \leq \zeta_{\mathcal{L}}(s), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies l_n \leq \left(\frac{\zeta_{\mathcal{L}}(s)}{n}\right)^{1/s}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je k najveći prirodan broj takav da je $l_k \geq 2\varepsilon$. Tada iz (1.6) slijedi da za svaki $n \geq k$ vrijedi

$$V(\varepsilon) = 2k\varepsilon + \sum_{j=k+1}^{n} l_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} l_j \leq 2k\varepsilon + 2(n-k)\varepsilon + \sum_{j=n+1}^{\infty} l_j,$$

gdje u zadnjoj sumi možemo primijeniti ogradu (1.10) i nejednakost $\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-1/s} \leq \int_n^{\infty} x^{-1/s}dx$ da dobijemo

$$V(\varepsilon) \leq 2n\varepsilon + \zeta_{\mathcal{L}}(s)^{1/s} \left.\frac{x^{1-1/s}}{1-1/s}\right|_{x=n}^{\infty} = 2n\varepsilon + C_3 n^{1-1/s}, \quad \forall n \geq k, \tag{1.11}$$

gdje je $C_3 = \zeta_{\mathcal{L}}(s)^{1/s} s/(1-s) > 0$. Promotrimo sada $n_0 = \lfloor \zeta_{\mathcal{L}}(s)(2\varepsilon)^{-s} \rfloor + 1$. Vrijedi

$$n_0 > \zeta_{\mathcal{L}}(s)(2\varepsilon)^{-s} \overset{(1.10)}{\Longrightarrow} l_{n_0} < 2\varepsilon \implies n_0 > k,$$

što znači da n_0 zadovoljava nejednakost (1.11). Ako je $\varepsilon < 1/2$, vrijedi $(2\varepsilon)^{-s} > 1$, odnosno $n_0 < (2 + \zeta_{\mathcal{L}}(s))(2\varepsilon)^{-s}$. Korištenjem te nejednakosti u (1.11) dobivamo

$$V(\varepsilon) \leq (2 + \zeta_{\mathcal{L}}(s))(2\varepsilon)^{1-s} + C_3 \left((2 + \zeta_{\mathcal{L}}(s))(2\varepsilon)^{-s}\right)^{1-1/s} = C_4 (2\varepsilon)^{1-s},$$

za $C_4 > 0$. Iz definicije dimenzije Minkowskog od $\mathcal{L}$ slijedi $D \leq s$, a kako je $s \in \langle \sigma, D \rangle$ bio proizvoljan, zaključujemo $D \leq \sigma$, što dokaz privodi kraju. □

Korolar 1.3.7. *Dimenzija obične fraktalne strune $\mathcal{L}$ zadovoljava nejednakost*

$$0 \leq D_{\mathcal{L}} \leq 1.$$

Zastor i prozor

Funkcija $\zeta_{\mathcal{L}}$ općenito ne mora imati analitičko proširenje na cijeli $\mathbb{C}$, stoga uvodimo sljedeće pojmove kako bismo bolje opisali strukturu kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$:

Definicija 1.3.8. *Zastor fraktalne strune $\mathcal{L}$ je svaki skup*

$$\boldsymbol{S} = \{S(t) + it : t \in \mathbb{R}\},$$

gdje je $S(t)$ neprekidna funkcija $S : \mathbb{R} \to [-\infty, D_{\mathcal{L}}]$.

Definicija 1.3.9. *Za običnu fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ i zastor $\boldsymbol{S}$ definiramo prozor kao skup*

$$W = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq S(Im(s))\}$$

gdje je funkcija S iz definicije zastora $\boldsymbol{S}$ odabrana tako da $\zeta_{\mathcal{L}}$ ima meromorfno proširenje na nekoj okolini od W te da $\zeta_{\mathcal{L}}$ nema polova na zastoru $\boldsymbol{S}$.

Definicija 1.3.10. *(i) Skup vidljivih kompleksnih dimenzija fraktalne strune $\mathcal{L}$ definiramo kao*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(W) = \{\omega \in W : \zeta_{\mathcal{L}} \textit{ ima pol u } \omega\}.$$

(ii) Ako je $W = \mathbb{C}$, odnosno ako $\zeta_{\mathcal{L}}$ ima meromorfno proširenje na cijelu kompleksnu ravninu, kažemo da je

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\mathbb{C}) = \{\omega \in \mathbb{C} : \zeta_{\mathcal{L}} \textit{ ima pol u } \omega\}$$

skup kompleksnih (fraktalnih) dimenzija od $\mathcal{L}$.

Napomena 1.3.11. *Prema teoremu (1.3.6) imamo da je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ holomorfna na poluravnini $Re(s) > D_{\mathcal{L}}$, pa je*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(W) \subset \{s \in W : Re(s) \leq D_{\mathcal{L}}\}.$$

Nadalje, kako se radi o skupu polova meromorfne funkcije, $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(W)$ je diskretni podskup od $\mathbb{C}$ te je njegov presjek s bilo kojim kompaktnim podskupom od $\mathbb{C}$ konačan. Kada se $\mathcal{L}$ sastoji od konačno mnogo duljina, imamo $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \emptyset$ jer je $\zeta_{\mathcal{L}}$ cijela funkcija.

Napomena 1.3.12. *Općenito se za običnu fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ može dokazati da ne postoji okolina točke $D_{\mathcal{L}}$ na kojoj je $\zeta_{\mathcal{L}}$ holomorfna. Točka $s = D_{\mathcal{L}}$ nije nužno uvijek niti pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$, kao što ćemo vidjeti u primjeru (1.3.15). Ako je $D = D_{\mathcal{L}}$ pol i $D_{\mathcal{L}} \in W$, tada je*

$$D_{\mathcal{L}} = \max\left\{Re(\omega) : \omega \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}\right\},$$

jer je $\zeta_{\mathcal{L}}$ holomorfna za $Re(s) > D$.

Napomena 1.3.13. *Ako pretpostavimo da je prozor W simetričan s obzirom na realnu os, zbog $\zeta_{\mathcal{L}}(\overline{s}) = \overline{\zeta_{\mathcal{L}}(s)}$ slijedi da nerealne kompleksne dimenzije obične fraktalne strune dolaze u kompleksno konjugiranim parovima ω, $\overline{\omega}$.*

Sljedeći teorem pokazuje da kompleksne dimenzije opisuju oscilacije u geometriji i spektru fraktalne strune.

Teorem 1.3.14. *Neka je $\mathcal{L}$ obična fraktalna struna s dimnezijom D te pretpostavimo da $\zeta_{\mathcal{L}}$ ima meromorfno proširenje na nekoj okolini od D. Ako je*

$$N_{\mathcal{L}}(x) = O(x^D), \qquad \textit{kako } x \to \infty,$$

ili ako volumen tubularne okoline zadovoljava

$$V(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1-D}), \qquad \textit{kako } \varepsilon \to 0^+,$$

tada $\zeta_{\mathcal{L}}$ ima pol reda 1 *u D.*

Dokaz. Iz pretpostavke o meromorfnom proširenju na nekoj okolini od D slijedi da je D izolirani singularitet.

Pretpostavimo najprije da je $N_{\mathcal{L}}(x) \leq C \cdot x^D$ i $N_{\mathcal{L}}(x) = 0$ za $x \leq x_0$. Tada za $s > D$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathcal{L}}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s = s\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{-s}}{-s}\bigg|_{l_j^{-1}}^{\infty} = s\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{-s-1}\mathbb{1}_{[l_j^{-1},\infty\rangle}(x)dx \\
&= s\int_0^{\infty} x^{-s-1}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_{[l_j^{-1},\infty\rangle}(x)dx = s\int_0^{\infty} N_{\mathcal{L}}(x)x^{-s-1}dx \\
&\leq s\int_{x_0}^{\infty} Cx^{D-s-1}dx = \frac{Cs}{s-D}x_0^{D-s},
\end{aligned}$$

gdje zamjenu sume i integrala u prijelazu između prvog i drugog reda možemo opravdati Lebesgueovim teoremom o monotonoj konvergenciji za redove nenegativnih funkcija. Dakle

$$\lim_{s \to D}(s - D)^2 \zeta_{\mathcal{L}}(s) = 0,$$

pa je singularitet u D pol reda 1.

Drugi dio teorema sada lagano slijedi iz prvog jer jednakost (1.6) i dani uvjet impliciraju

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon N_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + \sum_{j:l_j<2\varepsilon} l_j = O(\varepsilon^{1-D}), && \text{kako } \varepsilon \to 0^+ \\
\overset{(1)}{\Longrightarrow}\ & 2\varepsilon N_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) = O(\varepsilon^{1-D}), && \text{kako } \varepsilon \to 0^+ \\
\Longrightarrow\ & N_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) = O\Big((2\varepsilon)^{-D}\Big), && \text{kako } \varepsilon \to 0^+ \\
\Longrightarrow\ & N_{\mathcal{L}}(x) = O(x^D), && \text{kako } x \to \infty,
\end{aligned}$$

gdje implikacija (1) vrijedi jer su suma $\sum_{j:l_j<2\varepsilon} l_j$ i izraz $2\varepsilon N_{\mathcal{L}}(1/(2\varepsilon))$ nenegativne veličine, pa ako za neki $\varepsilon > 0$ vrijedi da je njihov zbroj odozgo ograničen sa $C\varepsilon^{1-D}$, za neki $C > 0$, tada su i suma i spomenuti izraz ograničeni odozgo sa $C\varepsilon^{1-D}$. □

Sljedeći primjer pokazuje da uvjet o meromorfnom proširenju geometrijske zeta funkcije fraktalne strune na nekoj okolini od D nije nužno zadovoljen te da funkcija $(s-D)\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ može imati konačan pozitivan limes kako $s \to D^+$, čak i ako $N_{\mathcal{L}}(x)$ nije reda x^D kako $x \to \infty$ i $V(\varepsilon)$ nije reda ε^{1-D} kako $\varepsilon \to 0^+$.

Primjer 1.3.15. Neka je $0 < D < 1$ i

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor j e^{Dj^2} \right\rfloor e^{-j^2 s}.$$

Dakle promatramo fraktalnu strunu $\mathcal{L}$ s duljinama e^{-j^2} i kratnostima duljina $\left\lfloor j e^{Dj^2} \right\rfloor$. Primijetimo da je ukupna duljina od $\mathcal{L}$ konačna jer

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor j e^{Dj^2} \right\rfloor e^{-j^2} \le \sum_{j=1}^{\infty} j e^{(D-1)j^2} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{1 + (1-D)j^2 + \frac{(1-D)^2 j^4}{2}} < \infty,$$

pri čemu smo koristili nejednakost $e^x \ge 1 + x + x^2/2$ za $x > 0$, pa zaista postoji ograničen otvoreni podskup od $\mathbb{R}$ sa spomenutim duljinama te je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ dobro definirana za $\mathrm{Re}(s) > D$.

Pokažimo da je D dimenzija Minkowskog od $\mathcal{L}$. Neka je $0 < \varepsilon < e^{-1}$ te neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $e^{-(n+1)^2} < \varepsilon \le e^{-n^2}$, odnosno $n = \left\lfloor \sqrt{-\ln \varepsilon} \right\rfloor$. Sada formula (1.6) implicira

$$V(\varepsilon/2) = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor}{e^{j^2}}.$$

Najprije dokazujemo da je prvi član reda veličine $O(\varepsilon^{1-D-\frac{1}{2p}})$, za svaki $p > 0$, zatim da isto vrijedi i za drugi član te na kraju da ne postoji $p > 0$ takav da je $V(\varepsilon/2)$ reda veličine $O(\varepsilon^{1-D+p})$, iz čega će slijediti da je dimenzija Minkowskog od $\mathcal{L}$ upravo D.
Primijetimo da za dovoljno veliki $k_1 \in \mathbb{N}$ vrijedi $e^{D(2j+1)} \ge 2,\ \forall j \ge k_1$, što daje

$$\left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor \le je^{Dj^2} \le \frac{1}{2} je^{D(j+1)^2} \le \frac{1}{2}\left((j+1)e^{D(j+1)^2} - 1\right) \le \frac{1}{2}\left\lfloor (j+1)e^{D(j+1)^2} \right\rfloor, \quad \forall j \ge k_1.$$

Također, za svaki $p > 0$ imamo $\ln(\varepsilon^{-1}) = p\ln(\varepsilon^{-1/p}) < p\varepsilon^{-1/p}$, pa zaključujemo

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor = \varepsilon\left(C + \sum_{j=k_1}^{n} \left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor\right) \le O(\varepsilon) + 2\varepsilon \left\lfloor ne^{Dn^2} \right\rfloor \le O(\varepsilon) + 2\varepsilon\sqrt{-\ln \varepsilon} \cdot \varepsilon^{-D}$$

$$= O(\varepsilon^{1-D-\frac{1}{2p}}), \quad \text{kako } \varepsilon \to 0^+,\ \forall p > 0.$$

Nadalje, za dovoljno veliki $k_2 \in \mathbb{N}$ vrijedi $e^{(1-D)(2j+1)} \ge 4,\ \forall j \ge k_2$, no taj k_2 ne ovisi o ε, pa za dovoljno mali ε imamo $n \ge k_2$, što daje

$$\frac{j+1}{e^{(1-D)(j+1)^2}} \le \frac{j}{e^{(1-D)j^2}} \cdot \frac{2}{e^{(1-D)(2j+1)}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{e^{(1-D)j^2}}, \quad \forall j \ge n.$$

Slijedi

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor}{e^{j^2}} \le 2 \cdot \frac{\left\lfloor (n+1)e^{D(n+1)^2} \right\rfloor}{e^{(n+1)^2}} \le \frac{2(n+1)}{e^{(1-D)(n+1)^2}} \le \frac{2(n+1)}{e^{(1-D)(\sqrt{-\ln \varepsilon})^2}} \le 2\left(\sqrt{-\ln \varepsilon} + 1\right)\varepsilon^{1-D}$$

$$= O(\varepsilon^{1-D-\frac{1}{2p}}), \quad \text{kako } \varepsilon \to 0^+,\ \forall p > 0.$$

Pretpostavimo sada da postoji $p > 0$ takav da je $V(\varepsilon/2) = O(\varepsilon^{1-D+p})$. To bi značilo da postoje $C > 0, m > 0$ tako da za sve $\varepsilon \in \langle 0, m\rangle$ vrijedi

$$\varepsilon\left\lfloor ne^{Dn^2} \right\rfloor \le V(\varepsilon/2) \le C\varepsilon^{1-D+p},$$

međutim za niz $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gdje je $\varepsilon_k = e^{-k^2}$ imamo $n = n_k = \left\lfloor \sqrt{-\ln \varepsilon_k} \right\rfloor = k$ te je

$$V(\varepsilon_k/2) \ge \varepsilon_k \left\lfloor n_k e^{Dn_k^2} \right\rfloor \ge \varepsilon_k \cdot \frac{1}{2} ke^{Dk^2} \ge \frac{1}{2}\varepsilon_k^{1-D},$$

pa bi vrijedilo $C\varepsilon_k^p \geq 1/2$, za sve dovoljno velike k, što je kontradikcija i time smo pokazali da je $D = D_{\mathcal{L}}$.

Pokažimo sada što smo najavili. Primijetimo da je za $x > 0$ i $n = \left\lfloor \sqrt{\ln x} \right\rfloor$,

$$N_{\mathcal{L}}(x) = \sum_{j=1}^{n} je^{Dj^2} \geq ne^{Dn^2}.$$

Sada za $x = e^{n^2}$ vrijedi $N_{\mathcal{L}}(x) \geq x^D \sqrt{\ln x}$, pa $N_{\mathcal{L}}(x)$ nije reda $O(x^D)$, kako $x \to \infty$.
S druge strane, pokažimo da $(s - D)\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ ima limes $1/2$ kako $s \to D^+$. Za $t > 0$ imamo

$$t\zeta_{\mathcal{L}}(D + t) = t \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor e^{-j^2 D - j^2 t} = t \left(\sum_{j=1}^{\infty} je^{-j^2 t} - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ je^{Dj^2} \right\} e^{-j^2 D - j^2 t} \right),$$

gdje je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Razdvajanje gornje sume na dva pribrojnika je opravdano zahvaljujući sljedećem računu koji također pokazuje da drugu sumu možemo ignorirati u kontekstu limesa $t \to 0^+$:

$$t \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ je^{Dj^2} \right\} e^{-j^2 D - j^2 t} \leq t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j(D+t)} = \frac{t}{e^{D+t} - 1}.$$

Slijedi $\lim_{t \to 0^+} t\zeta_{\mathcal{L}}(D + t) = \lim_{t \to 0^+} t \sum_{j=0}^{\infty} je^{-j^2 t}$ te uz $f(x) = xe^{-x^2}$ imamo

$$\lim_{t \to 0^+} t\zeta_{\mathcal{L}}(D + t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} (j/t) e^{-(j/t)^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} f(j/t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t),$$

gdje je

$$g_m(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=m\lfloor t \rfloor}^{(m+1)\lfloor t \rfloor - 1} f(j/t), \quad \forall t > 0.$$

Budući da je $g_m(t)$ nenegativna funkcija za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i $\sum_{m=0}^{\infty} g_m(t) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\infty} f(j/t) < \infty$, Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji implicira

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{t \to \infty} g_m(t),$$

a kako je $g_m(t)$ Riemannova suma za funkciju $f(x)$ na segmentu $[m, m + 1]$, slijedi

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lim_{t \to \infty} g_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} f(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx.$$

Dakle

$$\lim_{t\to 0^+} t\zeta_{\mathcal{L}}(D+t) = \int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} y = x^2, \\ dy = 2xdx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}dy = \frac{1}{2}.$$

Dakle $(s-D)\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ ima konačan pozitivan limes kako $s \to D^+$.

Za kraj pokažimo da $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ nema meromorfno proširenje oko D, odnosno da $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ divergira na svakoj točki pravca $\mathrm{Re}(s) = D$. Uvedimo oznaku za parcijalne sume:

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor je^{Dj^2} \right\rfloor e^{-j^2 s}.$$

Pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da $\zeta_{\mathcal{L}}(D+xi)$ konvergira. Tada bi moralo vrijediti $\lim_{n\to\infty} |S_n - S_{n-1}| = 0$, no imamo

$$|S_n - S_{n-1}| = \left| \left\lfloor ne^{Dn^2} \right\rfloor e^{-n^2 D} e^{-n^2 ix} \right| = \left| \left\lfloor ne^{Dn^2} \right\rfloor e^{-n^2 D} \right| \geq \left| \frac{ne^{Dn^2} - 1}{e^{n^2 D}} \right| = n - e^{-n^2 D},$$

pa uzimanjem $\lim_{n\to\infty}$ dobivamo traženu kontradikciju.

Napomena 1.3.16. *Ako dozvolimo da kratnost duljina fraktalne strune bude pozitivan realan umjesto prirodan broj, za što postoji teorija u literaturi, tada smo mogli uzeti i fraktalnu strunu čija je geometrijska zeta funkcija*

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} je^{Dj^2} e^{-j^2 s},$$

što bi malo pojednostavilo neke od gornjih računa.

Napomena 1.3.17. *Primijetimo da smo u ovom primjeru dali jedan način kako konstruirati fraktalnu strunu, odnosno niz duljina, tako da njena dimenzija bude jednaka zadanom broju* $0 < D < 1$.

Navedimo sada kratak rezultat koji će nam pomoći prepoznati meromorfne funkcije, odnosno izbjeći argumentiranje da određene funkcije nemaju bitnih singulariteta.

Propozicija 1.3.18. *Neka je* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *cijela funkcija koja nije identički jednaka nuli. Tada je* $1/f : \{z \in \mathbb{C} : f(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ *meromorfna funkcija.*

Dokaz. Ako f nema nultočaka, tada je očito $1/f$ cijela funkcija. U suprotnom, neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ nultočka od f. Želimo dokazati da je z_0 pol od $1/f$. Kako je f analitička, Laurentov razvoj oko z_0 daje

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Kako f nije identički jednaka nuli, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $a_k \neq 0$ i k je najmanji takav. Slijedi

$$\begin{aligned} &\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = a_k \\ \implies &\lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^k}{f(z)} = \frac{1}{a_k} \neq 0, \end{aligned}$$

što je upravo karakterizacija pola funkcije.

□

Cantorova struna (nastavak)

Geometrijska zeta funkcija Cantorove strune je

$$\zeta_{\mathrm{CS}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot 3^{-(n+1)s} = \frac{3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}}.$$

Ona ima meromorfno proširenje na $W = \mathbb{C}$ te su njene kompleksne dimenzije rješenja jednadžbe $1 - 2 \cdot 3^{-\omega} = 0,\ \omega \in \mathbb{C}$. Dakle

$$\mathcal{D}_{\mathrm{CS}} = \{D + inp : n \in \mathbb{Z}\},$$

gdje je $D = \log_3 2$ dimenzija od CS i $p = 2\pi / \ln 3$. Vrijednost p zovemo oscilacijskim periodom.

Poglavlje 2

Sebi-slične fraktalne strune

2.1 Konstrukcija

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ segment duljine L te neka su $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ ($N \geq 2$) kontrakcije iz I u I s Lipschitzovim faktorima $r_1, r_2, \ldots, r_N$. Pretpostavimo da su ti *skalirajući faktori* poredani silazno:

$$1 > r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_N > 0. \tag{2.1}$$

Pretpostavimo još da je

$$\sum_{j=1}^{N} r_j < 1, \tag{2.2}$$

te da su slike $\Phi_j(I)$, za $j = 1, 2, \ldots, N$, međusobno disjunktni skupovi osim možda u rubovima (ovo zovemo *uvjet otvorenog skupa*).

Ovime smo kao u konstrukciji Cantorove strune podijelili segment I na podsegmente $\Phi_j(I)$ te na intervale (praznine) između s duljinama $l_k = g_k L$, za $k = 1, 2, \ldots, K$, gdje skalirajući faktori praznina $g_1, \ldots, g_K$ zadovoljavaju

$$1 > g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_K > 0 \tag{2.3}$$

i

$$\sum_{j=1}^{N} r_j + \sum_{j=1}^{K} g_k = 1. \tag{2.4}$$

Ovaj postupak podjele možemo rekurzivno ponoviti na preostalim segmentima $\Phi_j(I)$, za $j = 1, 2, \ldots, N$, pritom zadržavajući iste faktore kontrakcija te skalirajuće faktore praznina. Preciznije, označimo s I_j skup kojeg dobijemo nakon j faza podjela:

$$I_0 = I, \quad I_{j+1} = \bigcup_{j=1}^{N} \Phi_j(I_j), \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Primijetimo da je $I_j \subset I_{j-1}$ za sve $j \in \mathbb{N}$. Za rezultirajuću fraktalnu strunu koja je sastavljena od svih praznina dobivenih ovim postupkom kažemo da je *sebi-slična*:

$$\mathcal{L} = \operatorname{Int}(I) \setminus \lim_{j\to\infty} I_j = \operatorname{Int}(I) \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j.$$

Njene duljine $l_1, l_2, \ldots$ su upravo duljine praznina u gornjoj konstrukciji, odnosno brojevi oblika

$$r_{\nu_1} r_{\nu_2} \ldots r_{\nu_q} g_k L, \tag{2.5}$$

za $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$ te bilo koji izbor $q \in \mathbb{N}$ i $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Drugim riječima, sve duljine su oblika

$$r_1^{e_1} r_2^{e_2} \ldots r_N^{e_N} g_k L, \qquad e_1, e_2, \ldots e_n \in \mathbb{N}_0.$$

Općenito, broj načina da zapišemo $r_1^{e_1} r_2^{e_2} \ldots r_N^{e_N}$ kao produkt Lipschitzovih faktora $r_{\nu_1} r_{\nu_2} \ldots r_{\nu_q}$ (gdje je $q = e_1 + \ldots + e_N$) dan je multinomijalnim koeficijentom

$$\binom{q}{e_1, e_2, \ldots, e_N} = \frac{q!}{e_1! \ldots e_N!},$$

pa je ukupna kratnost duljine l suma svih multinomijalnih koeficijenata za svaki izbor $k \in \{1, \ldots, K\}$ te $e_1, \ldots, e_N$ koji zadovoljavaju jednadžbu $r_1^{e_1} \ldots r_N^{e_N} g_k L = l$. Drugim riječima,

$$w_l = \sum_{k=1}^{K} \sum_{(e_1,\ldots,e_N)\in E_k} \binom{\sum_{j=1}^{N} e_j}{e_1, \ldots, e_N},$$

gdje je $E_k = \{(e_1, \ldots, e_N) : r_1^{e_1} \ldots r_N^{e_N} g_k L = l\}$.

Napomena 2.1.1. *Općenito je $K \leq N + 1$ s time da može biti i strogo manji.*

Napomena 2.1.2. *Kroz ostatak rada uvijek ćemo pretpostavljati da su sebi-slične fraktalne strune netrivijalne, odnosno isključujemo slučaj kada se $\mathcal{L}$ sastoji od samo jednog intervala. Ovo će nam omogućiti da zaobiđemo ovu očitu iznimku nekih od sljedećih teorema.*

Veza sa sebi-sličnim skupovima

Definicija 2.1.3. *Neprazan kompaktan skup $F \subset \mathbb{R}^d$ je sebi-sličan ako postoji $N \geq 2$ sličnosti Φ_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) u $\mathbb{R}^d$ sa skalirajućim faktorima $r_j \in \langle 0, 1\rangle$ tako da je*

$$F = \bigcup_{j=1}^{N} \Phi_j(F).$$

Definicija 2.1.4. *Neka je $N \geq 2$ prirodan broj i neka su $\Phi_1, \dots, \Phi_n : [0,1] \to [0,1]$ sličnosti s faktorima skaliranja $0 < r_j < 1$, $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, odnosno*

$$|\Phi_j(x) - \Phi_j(y)| = r_j|x - y|, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

Kažemo da familija $\{\Phi_j : j = 1, \dots, N\}$ zadovoljava uvjet otvorenog skupa ako postoji neprazan otvoren podskup U od $[0,1]$ takav da je

$$\Phi_j(U) \cap \Phi_k(U) = \emptyset, \quad \forall j \neq k, \ j,k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

i vrijedi $\Phi_j(U) \subset U$ za sve $j \in \{1, \dots, N\}$.

Kažemo da sebi-sličan skup zadovoljava uvjet otvorenog skupa ako sličnosti iz definicije sebi-sličnog skupa (2.1.3) zadovoljavaju uvjet otvorenog skupa.

Propozicija 2.1.5. *Neka je $F \subseteq [0,1]$ sebi-sličan skup s pripadnim sličnostima $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ koje zadovoljavaju uvjet otvorenog skupa. Tada je F jedinstveni neprazan kompaktan podskup od $[0,1]$ koji zadovoljava relaciju*

$$F = \bigcup_{j=1}^{N} \Phi_J(F)$$

te za taj F vrijedi

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_n} \Phi_j([0,1]),$$

gdje za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo

$$\mathcal{J}_n = \{1, \dots, N\}^n$$

i

$$\Phi_J := \Phi_{j_n} \circ \dots \circ \Phi_{j_1},$$

gdje je po konvenciji $\Phi_\emptyset$ identiteta i $\mathcal{J}_0 = \{\emptyset\}$.

Dokaz. Postojanje i jedinstvenost takvog skupa F slijedi iz Banachovog teorema o fiksnoj točki primijenjenog na potpun metrički prostor nepraznih kompaktnih podskupova od $[0,1]$ opremljenog s Hausdorffovom metrikom (dokaz potpunosti i osnovna svojstva Hausdorffove metrike mogu se naći u [1]). Poznato je da se ta fiksna točka može dobiti kao limes ponavljajućih primjena preslikavanja Φ_J, iz čega slijedi druga tvrdnja. □

Propozicija 2.1.6. *Rub $\partial\Omega$ sebi-slične strune je sebi-sličan skup u $\mathbb{R}$. S druge strane, svakom sebi-sličnom skupu F u $\mathbb{R}$ koji zadovoljava uvjet otvorenog skupa možemo na prirodan način pridružiti sebi-sličnu strunu čiji je rub F.*

Dokaz. Neka je $F \subseteq [0,1]$ sebi-sličan skup s pripadnim sličnostima $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ koje zadovoljavaju uvjet otvorenog skupa i skalirajućim faktorima $r_1, \ldots, r_N$. Iz propozicije (2.1.5) slijedi

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_n} \Phi_J([0,1]). \tag{2.6}$$

Označimo s G_k ($k = 1, \ldots, K$) povezane komponente skupa

$$\langle 0,1 \rangle \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \Phi_j([0,1]),$$

gdje isključujemo slučajeve $K = 0$ ili $N = 1$ da izbjegnemo trivijalnu situaciju kada je F interval. Imamo

$$[0,1] = \bigcup_{j=1}^{N} \Phi_j([0,1]) \cup \bigcup_{k=1}^{K} \overline{G}_k.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $\min F = 0$ i $\min F = 1$ te da se segmenti $\Phi_j([0,1])$ međusobno ne sijeku, osim možda u rubovima, čime je zadovoljen uvjet otvorenog skupa za $U = \langle 0,1 \rangle$. Uvedimo oznaku $g_k = \mathrm{vol}_1(G_k)$, $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$ za duljine praznina. Iz dosadašnjih oznaka je jasno da intervali $\Phi_j([0,1])$ imaju duljinu r_j za $j \in \{1, \ldots, N\}$ te je identitet (2.4) zadovoljen. Uvedimo oznaku za opći interval dobiven nakon $n \geq 0$ iteracija (ne nužno uvijek iste) sličnosti Φ_j:

$$G_{J,k} = \Phi_J(G_k),$$

gdje zadržavamo oznaku Φ_J iz iskaza propozicije (2.1.5). Za $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, N\}^n$ i $k \in \{1, \ldots, K\}$ definiramo

$$l_{J,k} := \mathrm{vol}_1(G_{J,k}) = g_k \prod_{t=1}^{n} r_{j_t}.$$

Sada definiramo sebi-sličnu strunu $\mathcal{L}$ kao niz $\{l_{J,k}\}_{J,k}$ (poredan uzlazno) čija je realizacija $\Omega = [0,1] \setminus F$. Struna $\mathcal{L}$ je uistinu sebi-slična zbog formule (2.6) i vidimo da su njeni skalirajući faktori $r_1, \ldots, r_N$, a praznine $g_1, \ldots, g_K$ te ju zovemo sebi-sličnom strunom pridruženoj sebi-sličnom skupu F.

Pokažimo $F = \partial\Omega$. Zapravo trebamo pokazati da za svaku točku $x \in F$ možemo naći niz točaka iz zatvarača $\overline{\Omega}$ koje konvergiraju u x. Nije teško vidjeti da niz $y_n = \sup\{z < x : z \in \Omega\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, konvergira prema x te vrijedi $y_n \in \overline{\Omega}$ (zapravo vrijedi i $y_n \in \partial\Omega$ jer je Ω otvoren) jer dijametar skupa

$$T_n := \Big\langle \sup\Big\{z < x : z \in \Omega\Big\}, \inf\Big\{z > x : z \in \Omega\Big\}\Big\rangle$$

ide u 0 kako $n \to \infty$. Dakle $F = \partial\Omega$.

Obratno, jasno je iz dosadašnjeg zaključivanja da svaka sebi-slična struna Ω duljine 1 određuje sebi-sličan skup $F \subseteq [0,1]$ koji zadovoljava uvjet otvorenog skupa za $U = \langle 0,1\rangle$ i vrijedi $F = \partial\Omega$. □

2.2 Geometrijska zeta funkcija sebi-sličnih struna

U prošlom odjeljku smo objasnili konstrukciju sebi-slične strune sa skalirajućim faktorima $r_1, \dots, r_N$ i prazninama skaliranih za $g_1, \dots, g_K$, koji zadovoljavaju uvjete (2.1)-(2.4) i te oznake zadržavamo u ostatku ovog poglavlja. Brojeve $g_1, \dots, g_K$ ćemo također zvati prazninama sebi-slične fraktalne strune $\mathcal{L}$.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $N \geq 2$ prirodan broj i neka su $r_1, \dots, r_N > 0$ takvi da je $\sum_{j=1}^N r_j < 1$. Tada postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^x = 1.$$

Taj x zadovoljava $0 < x < 1$.

Dokaz. Definirajmo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = 1 - \sum_{j=1}^{N} r_j^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Očito je f neprekidna i strogo rastuća te vrijedi $f(0) = 1 - N < 0 < f(1)$, pa postoji jedinstveni $D \in \mathbb{R}$ koji zadovoljava $f(D) = 0$ te je $0 < D < 1$, što smo i htjeli. □

Teorem 2.2.2. *Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična fraktalna struna. Tada geometrijska zeta funkcija od $\mathcal{L}$ ima (jedinstveno) meromorfno proširenje na cijeloj kompleksnoj ravnini dano s*

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{L^s \sum_{k=1}^K g_k^s}{1 - \sum_{j=1}^N r_j^s}, \quad \text{za } s \in \mathbb{C},$$

gdje je $L = \zeta_{\mathcal{L}}(1)$ ukupna duljina od $\mathcal{L}$, što je također duljina početnog intervala I iz kojeg je struna $\mathcal{L}$ konstruirana.

Dokaz. Primijetimo da vrijedi

$$\sum_{\nu_1=1}^{N} \dots \sum_{\nu_q=1}^{N} (r_{\nu_1} \dots r_{\nu_q})^s = \sum_{\nu_1=1}^{N} \dots \sum_{\nu_q=1}^{N} r_{\nu_1}^s \dots r_{\nu_q}^s = \left(\sum_{j=1}^{N} r_j^s\right)^q.$$

Sada je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ suma s-tih potencija svih brojeva oblika (2.5) s gore izračunatom kratnošću, odnosno

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{L}}(s) &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu_1=1}^{N}\dots\sum_{\nu_q=1}^{N}(r_{\nu_1}\dots r_{\nu_q}g_kL)^s\right)\\ &= \sum_{k=1}^{K}(g_kL)^s\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}r_j^s\right)^q.\end{aligned}$$

Propozicija (2.2.1) kaže da postoji jedinstveno realno rješenje D jednadžbe $\sum_{j=1}^{N} r_j^s = 1$. Dakle za $\mathrm{Re}(s) > D$ imamo $|\sum_{j=1}^{N} r_j^s| \leq \sum_{j=1}^{N}|r_j^s| < 1$, pa gornja suma konvergira i D je upravo dimenzija Minkowskog od $\mathcal{L}$. Slijedi

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{L^s\sum_{k=1}^{K} g_k^s}{1-\sum_{j=1}^{N} r_j^s}. \tag{2.7}$$

Ovaj račun je točan za $\mathrm{Re}(s) > D$, ali desna strana formule koju smo upravo dobili je meromorfna funkcija po s na $\mathbb{C}$ prema propoziciji (1.3.18). Dakle desnu stranu izraza (2.7) možemo uzeti kao definiciju meromorfnog proširenja funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ na ostatku kompleksne ravnine, a teorem (3.5.1) garantira jedinstvenost takvog proširenja. □

Kroz ostatak ovog poglavlja, prozor W fraktalne strune $\mathcal{L}$ (definicija 1.3.9) kojeg ćemo promatrati će biti cijela kompleksna ravnina, odnosno $W = \mathbb{C}$ i $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\mathbb{C})$ možemo bez dvojbe zvati kompleksnim dimenzijama od $\mathcal{L}$. Primijetimo da ako su sve praznine jednake, brojnik formule (2.7) nikada nije nula, pa nijedna nultočka nazivnika nije pokraćena, odnosno sve su one polovi od $\zeta(s)$, što je tvrdnja sljedećeg korolara.

Korolar 2.2.3. *Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična fraktalna struna takva da je $g_1 = \ldots = g_K$. Tada je skup kompleksnih dimenzija $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ od $\mathcal{L}$ skup rješenja jednadžbe*

$$\sum_{j=1}^{N} r_j^{\omega} = 1, \quad \omega\in\mathbb{C}, \tag{2.8}$$

s istom kratnošću.

Općenito, kada nisu sve praznine iste veličine, $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ je sadržan u skupu rješenja jednadžbe (2.8) i svaka kompleksna dimenzija ima kratnost koja je najviše jednaka kratnosti pripadajućeg rješenja.

Napomena 2.2.4. *Duljinu L početnog intervala I sebi-slične strune možemo normalizirati tako da prva duljina niza $\mathcal{L}$ bude jednaka* 1 *na način da izaberemo*

$$L = g_1^{-1},$$

gdje je g_1 najveća praznina. Ovo osigurava da limes po realnim brojevima

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta_{\mathcal{L}}(s) \overset{(2.7)}{=} \lim_{s\to+\infty} g_1^{-s} \sum_{k=1}^{K} g_k^s$$

bude jednak kratnosti prve duljine, što je također kratnost najveće praznine. Ova normalizacija ne utječe na kompleksne dimenzije strune.

Napomena 2.2.5. *Iz identifikacije sebi-slične strune i sebi-sličnog skupa koji je rub te strune slijedi da je ukupna duljina sebi-slične strune Ω jednaka je duljini L početnog intervala iz njene konstrukcije. Moguće je dokazati da se Hausdorffova dimenzija ruba $\partial\Omega$ podudara s dimenzijom Minkowskog (vidi [4], odjeljak* 5.3*).*

Napomena 2.2.6. *Primijetimo da nultočke geometrijske zeta funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ odgovaraju rješenjima Dirichletove polinomijalne jednadžbe*

$$\sum_{k=1}^{K} g_k^s = 0, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Sebi-slične strune s jednom prazninom

Kada je $K = 1$, odnosno postoji samo jedna praznina, imamo jednostavniju situaciju opisanu sljedećim teoremom koji slijedi iz korolara (2.2.3).

Teorem 2.2.7. *Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična struna konstruirana skalirajućim faktorima $r_1, \ldots, r_N$ i jednom prazninom g_1. Tada geometrijska zeta funkcije od $\mathcal{L}$ ima meromorfno proširenje na cijeloj kompleksnoj ravnini dano s*

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{(g_1 L)^s}{1 - \sum_{j=1}^{N} r_j^s}, \quad \text{za } s \in \mathbb{C}.$$

Tu je L ukupna duljina od $\mathcal{L}$, što je također duljina početnog intervala I. Prva duljina $l_1 = g_1 L$ od $\mathcal{L}$ ima kratnost 1*.*

Primijetimo da ako je $\mathcal{L}$ normalizirana kao u napomeni (2.2.4), tada je njena prva duljina jednaka 1 i vrijedi

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{N} r_j^s}, \quad \text{za } s \in \mathbb{C}.$$

Napomena 2.2.8. *Za strune sa samo jednom prazninom izraz $(g_1 L)^s$ nikada nije nula, pa brojnik formule za $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ nema nultočaka koje bi mogle pokratiti nultočke nazivnika, što se u slučaju $K \geq 2$ može dogoditi i to dovodi do potencijalnih uklonjivih singulariteta.*

2.3 Primjeri kompleksnih dimenzija sebi-sličnih struna

U svakom od sljedećih primjera, dana sebi-slična struna ima jednu prazninu kao u prošlom odjeljku i normalizirana je kao u napomeni (2.2.4).

Cantorova struna

Neka je CS sebi-slična fraktalna struna duljine $L = 3$ sa skalirajućim faktorima $r_1 = r_2 = 1/3$ i jednom prazninom $g_1 = 1/3$. Tu fraktalnu strunu nazivamo *Cantorova struna*[1] Ona se sastoji od duljina 3^{-n} kratnosti 2^n za $n \geq 0$ i njena geometrijska zeta funkcija je

$$\zeta_{\mathrm{CS}}(s) = \frac{1}{1 - 2 \cdot 3^{-s}}. \tag{2.9}$$

Njene kompleksne dimenzije nalazimo rješavajući jednadžbu

$$2 \cdot 3^{-\omega} = 1, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Dobivamo

$$\mathcal{D}_{\mathrm{CS}} = \{D + inp : n \in \mathbb{Z}\},$$

gdje je $D = \log_3 2$ i $p = 2\pi/\ln 3$. Svi polovi su reda 1 te je reziduum u svakom polu jednak $1/\ln 3$.

Fibonaccijeva struna

Sljedeće promatramo sebi-sličnu strunu čije se kompleksne dimenzije nalaze na dva pravca. Fibonaccijeva struna je struna Fib ukupne duljine 4 sa skalirajućim faktorima $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/4$ i prazninom $g_1 = 1/4$. Njene duljine su

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots,$$

s redom kratnostima

$$1, 1, 2, 3, \ldots, F_{n+1}, \ldots,$$

što su Fibonaccijevi brojevi koji zadovoljavaju $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Teorem (2.2.7) kaže da je geometrijska zeta funkcija Fibonaccijeve strune dana s

$$\zeta_{\mathrm{Fib}}(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s} - 4^{-s}}.$$

[1] Ona se razlikuje od Cantorove strune iz prvog poglavlja samo u normalizaciji prve duljine $l_1 = 1$.

Kompleksne dimenzije nalazimo rješavajući kvadratnu jednadžbu

$$(2^{-\omega})^2 + 2^{-\omega} = 1, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Dobivamo

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Fib}} = \{D + inp : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-D + i(n + 1/2)p : n \in \mathbb{Z}\},$$

gdje je $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, $D = \log_2 \phi$ i $p = 2\pi/\ln 2$. Ponovno su svi polovi reda 1 te je za svaki $n \in \mathbb{Z}$ reziduum u polovima $D + inp$ jednak $\frac{\phi+2}{5\ln 2}$, a u polovima $-D + i(n + 1/2)p$ jednak $\frac{3-\phi}{5\ln 2}$.

Volumen $V_{\mathrm{Fib}}(\varepsilon)$ tubularne okoline Fibonaccijeve strune možemo izračunati direktno kao što smo to napravili za Cantorovu strunu. Naime, poznata formula za Fibonaccijeve brojeve koju dobijemo rješavanjem linearne rekurzije je

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}, \tag{2.10}$$

pa formula (1.6) kaže da za $\varepsilon < 1$ vrijedi

$$V_{\mathrm{Fib}}(\varepsilon) = 2\varepsilon \sum_{2^{-n} \geq 2\varepsilon} F_{n+1} + \sum_{2^{-n} < 2\varepsilon} F_{n+1} 2^{-n}.$$

Formula (2.10) implicira da su obje sume geometrijske. Uvedimo oznaku $x = -\log_2(2\varepsilon)$, tako da se x poveća za 1 kada se ε duplo smanji. Za $\varepsilon < 1$, koristeći opću formulu za Fibonaccijeve brojeve, može se dobiti da vrijedi

$$V_{\mathrm{Fib}}(\varepsilon) = (2\varepsilon)^{1-D} f_1(x) - 2\varepsilon + (2\varepsilon)^{1+D} f_2(x),$$

gdje su f_1 i f_2 funkcije definirane formulama

$$f_1(x) := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^3 \phi^{-\{x\}} + \phi^4 (\phi/2)^{-\{x\}} \right),$$
$$f_2(x) := \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{\sqrt{5}} \left(\phi^{-3} \phi^{\{x\}} - \phi^{-4} (2\phi)^{\{x\}} \right).$$

Funkcije f_1 i f_2 su periodične i neprekidne.

Računanjem Fourierove transformacije funkcija f_1 i f_2, moguće je naći sljedeću eksplicitnu formulu:

$$V_{\mathrm{Fib}}(x) = \frac{\phi}{\sqrt{5}\ln 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2\varepsilon)^{1-D-ikp}}{(D + ikp)(1 - D - ikp)} - 2\varepsilon$$
$$+ \frac{\phi - 1}{\sqrt{5}\ln 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2\varepsilon)^{1+D-ip/2-ikp/2}}{(-D + ip/2 + ikp)(1 + D - ip/2 - ikp)},$$

za $\varepsilon < 1$, gdje je kao i prije $D = \log_2 \phi$ i $p = 2\pi / \ln 2$.

Ovaj primjer demonstrira da i ostale kompleksne dimenzije (osim $D = D_{\text{Fib}}$) imaju geometrijski značaj. Naime, vodeći član od $V(\varepsilon)$ je reda ε^{1-D} kako je i za očekivati, ali idući asimptotski član je reda $\varepsilon^{1-(-D)}$. Dakle kompleksne dimenzije s realnim dijelom $-D$ također igraju ulogu u opisu ε-okoline.

Modificirana Cantorova i Fibonaccijeva struna

Sebi-slična struna $\mathcal{L}$ s pet skalirajućih faktora $r_1 = r_2 = r_3 = 1/9$, $r_4 = r_5 = 1/27$ i četiri praznine $g_1 = 1/3$, $g_2 = g_3 = 1/9$, $g_4 = 1/27$ u intervalu duljine 3 ima geometrijsku zeta funkciju

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = 3^s \cdot \frac{3^{-s} + 2 \cdot 3^{-2s} + 3^{-3s}}{1 - 3 \cdot 3^{-2s} - 2 \cdot 3^{-3s}}.$$

Nazivnik možemo faktorizirati kao $1-3x^2-2x^3 = (1-2x)(1+x)^2$, uz $x = 3^{-s}$, a brojnik kao $x(1 + x)^2$. Stoga se $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ pojednostavljuje na geometrijsku zeta funkciju (2.9) Cantorove strune, s dva skalirajuća faktora $r_1 = r_2 = 1/3$ i jednom prazninom $g_1 = 1/3$ u intervalu duljine 3. Prema tome, nizovi duljina tih dviju sebi-sličnih fraktalnih struna se podudaraju.

Napomena 2.3.1. *Skalirajući faktori $r_1, \dots, r_N$ i praznine $g_1, \dots, g_K$ nisu jedinstveno određeni funkcijom $\zeta_{\mathcal{L}}$, odnosno za svaku sebi-sličnu strunu $\mathcal{L}$ postoji beskonačno mnogo odabira tih parametara koji generiraju različitu strunu $\mathcal{L}'$ čija je geometrijska zeta funkcija $\zeta_{\mathcal{L}'}$ jednaka $\zeta_{\mathcal{L}}$. To možemo vidjeti iz identiteta*

$$\frac{L^s \sum_{k=1}^{K} g_k^s}{1 - \sum_{j=1}^{N} r_j^s} = \frac{L^s \left(\sum_{k=1}^{K} g_k^s\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{N} r_j^s\right)}{1 - \left(\sum_{j=1}^{N} r_j^s\right)^2}$$

jer je brojnik ponovno oblika $L^s \sum_{k=1}^{K'} g_k'^s$, a nazivnik oblika $1 - \sum_{j=1}^{N'} r_j'^s$. Provjerimo da je zbroj brojeva g_k' i r_j' još uvijek 1. Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K'} g_k' &= \sum_{k=1}^{K} g_k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} g_k r_j, \\
\sum_{j=1}^{N'} r_j' &= \left(\sum_{j=1}^{N} r_j\right)^2, \\
\Longrightarrow \sum_{k=1}^{K'} g_k' + \sum_{j=1}^{N'} r_j' &= \sum_{k=1}^{K} g_k + \left(\sum_{k=1}^{K} g_k\right)\left(\sum_{j=1}^{N} r_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{N} r_j\right)^2 = \sum_{k=1}^{K} g_k + \sum_{j=1}^{N} r_j = 1.
\end{aligned}$$

Sljedeći primjer daje alternativni izbor skalirajućih faktora i praznina za Fibonaccijevu strunu. Neka je $r_1 = r_2 = g_1 = 1/4$, $r_3 = g_2 = 1/8$ uz interval duljine 4. Ovime je određena sebi-slična struna $\mathcal{L}$ s geometrijskom zeta funkcijom

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = 2^{2s}\frac{2^{-2s} + 2^{-3s}}{1 - 2 \cdot 2^{-2s} - 2^{-3s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s} - 2^{-2s}}.$$

Dakle niz duljina ove strune se podudara s nizom duljina Fibonaccijeve strune iz (2.3).

Struna s polovima reda većeg od 1

Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična struna sa skalirajućim faktorima $r_1 = r_2 = r_3 = 1/9$, $r_4 = r_5 = 1/27$ i jednom prazninom $g_1 = 16/27$ te ukupnom duljinom $L = \frac{27}{26}$. Tada je njena geometrijska zeta funkcija

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{1 - 3 \cdot 9^{-s} - 2 \cdot 27^{-s}}.$$

Kompleksne dimenzije nalazimo rješavajući kubnu jednadžbu

$$2z^3 + 3z^2 = 1, \quad z = 3^{-\omega}, \quad z, \omega \in \mathbb{C},$$

koja se faktorizira kao $(2z - 1)(z + 1)^2 = 0$, što znači da postoji jedan niz polova reda 1 koji pripada rješenju $z = 1/2$

$$\omega_n = D + inp, \quad n \in \mathbb{Z},$$

svaki s reziduumom $\frac{4}{9 \ln 3}$, te drugi niz polova reda 2 koji pripada rješenju $z = -1$

$$\omega_n = \frac{1}{2}ip + inp, \quad n \in \mathbb{Z},$$

svaki gdje je $D = \log_3 2$ i $p = 2\pi/\ln 3$. Laurentov red u polovima reda 2 je

$$\frac{1}{3(\ln 3)^2}\left(s - \frac{1}{2}ip - inp\right)^{-2} + \frac{5}{9 \ln 3}\left(s - \frac{1}{2}ip - inp\right)^{-1} + O(1),$$

kako $s \to \frac{1}{2}ip + inp$.

2.4 Rešetkasti i nerešetkasti slučaj

Sebi-slične fraktalne strune možemo podijeliti u dvije klase koje će imati bitno različitu strukturu pripadnih kompleksnih dimenzija. Ovisno o tome u kojoj klasi se određena struna nalazi, govorit ćemo o rešetkastom i nerešetkastom slučaju, a da bi ih opisali bit će nam potreban kratak podsjetnik.

Naime, aditivna podgrupa realnih brojeva je ili gusta u $\mathbb{R}$ ili diskretna (svaki element je izoliran, odnosno ima okolinu bez drugih elemenata skupa). U drugom slučaju, ako podgrupa nije trivijalna, ona sadrži aditivni generator, odnosno broj $w > 0$ takav da je cijela podgrupa jednaka $w\mathbb{Z}$.

Primijenimo li to na aditivnoj grupi

$$A = \sum_{j=1}^{N} \left(\ln r_j\right)\mathbb{Z},$$

generiranoj logaritmima skalirajućih faktora r_j ($j = 1, \dots, N$), zaključit ćemo da je ona ili gusta ili disrektna u $(\mathbb{R}, +)$. Izomorfizam $x \mapsto e^x$ između aditivne grupe $(\mathbb{R}, +)$ i multiplikativne grupe $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ nam omogućava da sličnu tvrdnju zaključimo o multiplikativnoj podgrupi

$$G = \prod_{j=1}^{N} r_j^{\mathbb{Z}} \tag{2.11}$$

pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}_+^*$.

Definicija 2.4.1. *Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična fraktalna struna sa skalirajućim faktorima $r_1, \dots, r_N$. Ako je grupa G iz (2.11) gusta u $\mathbb{R}_+^*$, tada kažemo da je $\mathcal{L}$ nerešetkasta struna i općenito govorimo o nerešetkastom slučaju.*

Ako G nije gusta (što znači da je diskretna) u $\mathbb{R}_+^*$, kažemo da je $\mathcal{L}$ rešetkasta struna i općenito govorimo o rešetkastom slučaju. U ovom slučaju postoji jedinstveni realan broj $0 < r < 1$ zvan multiplikativni generator strune i prirodni brojevi $k_1, \dots, k_N$ bez zajedničkog faktora takvi da je $1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_N$ i

$$r_j = r^{k_j},$$

za $j = 1, \dots, N$. Pozitivan broj

$$p = \frac{2\pi}{\ln(1/r)}$$

zove se oscilacijski period rešetkaste strune $\mathcal{L}$.

Napomena 2.4.2. *Nerešetkasti slučaj je općeniti slučaj u smislu da ako odaberemo $N \geq 2$ brojeva $r_1, \dots, r_N \in \langle 0, 1\rangle$ na uniforman način, tada će oni s vjerojatnošću 1 generirati nerešetkastu strunu.*

Nerešetkasti primjer: $2 - 3$ struna

Dosadašnji primjeri sebi-sličnih struna su svi bili rešetkasti i za njih je bilo lako naći kompleksne dimenzije. S druge strane, u nerešetkastom slučaju vrlo je teško dobiti potpunu informaciju o kompleksnim dimenzijama.

Slijedi prvi primjer nerešetkaste strune koju možemo zvati $2-3$ *struna*. Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična struna sa skalirajućim faktorima $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/3$, jednom prazninom $g_1 = 1/6$ te ukupnom duljinom 6. Jasno je da se tu radi o nerešetkastom slučaju jer kada bi postojali $r \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$\frac{1}{2} = r_1 = r^m,$$
$$\frac{1}{3} = r_2 = r^n,$$

tada bi $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ bio racionalan broj jednak $\frac{m}{n}$. $\mathcal{L}$ se sastoji od duljina oblika $2^{-m}3^{-n}$ s kratnošću $\binom{m+n}{m}$ za $m, n \in \mathbb{N}_0$. Geometrijska zeta funkcija od $\mathcal{L}$ je

$$\zeta_{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s} - 3^{-s}},$$

a njene kompleksne dimenzije tražimo rješavanjem *transcendentalne* jednadžbe

$$2^{-\omega} + 3^{-\omega} = 1, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Tu jednadžbu ne možemo riješiti egzaktno, pa čak ni u realnim brojevima, što znači da ne možemo naći točnu vrijednost dimenzije D ove strune, ali ju možemo numerički aproksimirati i dobiti $D \approx 0.78788\ldots$.

Nerešetkasti primjer: zlatna struna

Sljedeće promatramo nerešetkastu strunu GS s jednom prazninom i skalirajućim faktorima $r_1 = 2^{-1}$ i $r_2 = 2^{-\phi}$, gdje je $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ zlatni rez. Tu strunu zovemo zlatnom strunom. Kao i dosad normaliziramo njenu ukupnu duljinu tako da njena prva duljina bude jednaka 1:

$$L = \frac{1}{1 - 2^{-1} - 2^{-\phi}}.$$

Njena geometrijska zeta funkcija je

$$\zeta_{\mathrm{GS}}(s) = \frac{1}{1 - 2^{-s} - 2^{-\phi s}},$$

a njene kompleksne dimenzije su rješenja transcendentalne jednadžbe

$$2^{-\omega} + 2^{-\phi\omega} = 1, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

2.5 Struktura kompleksnih dimenzija

Sljedećih nekoliko teorema opisuju strukturu sebi-sličnih fraktalnih struna. Neke od njihovih tvrdnji su već dokazane, a one koje nisu se mogu naći u [5] (Theorem 2.16).

Teorem 2.5.1 (Općenita struktura)**.** *Neka je $\mathcal{L}$ sebi-slična struna dimenzije D sa skalirajućim faktorima $r_1, \ldots, r_N$ i prazninama $g_1, \ldots, g_K$. Tada sve kompleksne dimenzije od $\mathcal{L}$ leže lijevo od ili se nalaze na pravcu $Re(s) = D$:*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\mathbb{C}) \subseteq \{s \in \mathbb{C} : Re(s) \leq D\}.$$

Vrijednost $s = D$ je jedini realni pol od $\zeta_{\mathcal{L}}$ te je jednaka dimenziji Minkowskog ruba strune. Skup kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ je simetričan s obzirom na realnu os i sadržan je skupu $\{s \in \mathbb{C} : D_l \leq Re(s) \leq D\}$, za neki realan broj D_l. Kompleksnih dimenzija ima beskonačno mnogo te za njihovu gustoću vrijedi

$$\left|\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \cap \left\{\omega \in \mathbb{C} : |Im(\omega)| \leq T\right\}\right| \leq \frac{-\ln r_N}{\pi} T + O(1), \quad \textit{kako } T \to \infty, \tag{2.12}$$

gdje elemente skupa $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ brojimo onoliko puta kolika je njihova kratnost u smislu pola funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$. Dimenzija strune D nikada nije pokraćena. Ako ne postoje druga kraćenja (primjerice ako su sve praznine jednake duljine), tada je gustoća dana točno desnom stranom (2.12).

Teorem 2.5.2 (Rešetkasti slučaj)**.** *Uz pretpostavke teorema (2.5.1), u rešetkastom slučaju kompleksne dimenzije ω su rješenja polinomijalne jednadžbe*

$$\sum_{j=1}^{N} z^{k_j} = 1, \quad \textit{uz } r^{\omega} = z$$

te polovi funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$ leže periodično na konačno mnogo vertikalnih pravaca u $\mathbb{C}$ i na svakom pravcu su udaljeni za oscilacijski period $p = 2\pi/(-\ln r)$ strune (vidi (2.4.1)). Drugim riječima, postoji konačno mnogo polova $\omega_1 (= D), \omega_2, \ldots, \omega_q$ (uz $Re(\omega_q) \leq \ldots \leq Re(\omega_2) < D$) tako da je

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{\omega_u + inp : n \in \mathbb{Z},\ u \in \{1, \ldots, q\}\}$$

Kratnost kompleksnih dimenzija koje pripadaju jednoj vrijednosti $z = r^{\omega}$ jednaka je kratnosti od z. Posebno, polovi s realnim dijelom jednakim D su svi reda 1 te rešetkasta struna nije Minkowski izmjerljiva.

Ako su praznine $g_j L$ cjelobrojne potencije multiplikativnog generatora r od $\mathcal{L}$, odnosno

$$g_j L = e^{k'_j}, \quad \textit{gdje su } k'_j \in \mathbb{Z},\ \forall j \in \{1, \ldots, K\}, \tag{2.13}$$

tada je $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ racionalna funkcija po r^s te je periodična funkcija po s perioda ip. Nadalje, reziduum od $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ u polu $s = D + inp$ je neovisan o $n \in \mathbb{Z}$ i iznosi

$$\operatorname{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(s); D + inp) = \frac{\sum_{j=1}^{K} r^{k'_j D}}{-\ln r \sum_{j=1}^{N} k_j r^{k_j D}}.$$

Također, za $u \in \{1, \ldots, q\}$, regularni dio Laurentovog reda za $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ u $s = \omega_u + inp$ ne ovisi o $n \in \mathbb{Z}$. Općenito, kada ne vrijedi nužno (2.13), imamo

$$\operatorname{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(s); D) = \frac{\sum_{j=1}^{K} (g_j L)^D}{-\ln r \sum_{j=1}^{N} k_j r^{k_j D}}$$

i štoviše, ukoliko je ω_u za neki $u \in \{1, \ldots, q\}$ pol reda 1, vrijedi

$$\operatorname{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(s); \omega_u + inp) = \frac{\sum_{j=1}^{K} (g_j L)^{inp+\omega_u}}{-\ln r \sum_{j=1}^{N} k_j r^{k_j \omega_u}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Teorem 2.5.3 (Nerešetkasti slučaj)**.** *Uz pretpostavke teorema (2.5.1), u nerešetkastom slučaju, D je pol reda 1 te je jedinstveni pol od $\zeta_{\mathcal{L}}(s)$ na pravcu $Re(s) = D$ i vrijedi*

$$\operatorname{res}(\zeta_{\mathcal{L}}(s); D) = \frac{\sum_{j=1}^{K} (g_j L)^D}{\sum_{j=1}^{N} r_j^D (-\ln r_j)}.$$

Štoviše, postoji beskonačan niz kompleksnih dimenzija od $\mathcal{L}$ reda 1 (u smislu pola funkcije $\zeta_{\mathcal{L}}$) koji dolazi proizvoljno blizu pravcu $Re(s) = D$. Te kompleksne dimenzije nisu pokraćene nultočkama brojnika $\zeta_{\mathcal{L}}$.

Teorem 2.5.4. *Uz pretpostavke teorema (2.5.1), kompleksne dimenzije od $\mathcal{L}$ se mogu aproksimirati kompleksnim dimenzijama niza mrežastih struna sa sve većim oscilacijskim periodom.*

Poglavlje 3

Svojstvene vrijednosti Laplaceovog operatora i frekvencije

Valna jednadžba opisuje gibanje putujućih i stacionarnih valova, kao što su mehanički valovi ili elektromagnetski valovi te se pojavljuje u raznim granama fizike. Primjerice, u jednoj dimenziji valna jednadžba može opisivati titranje napete žice, u dvije dimenzije može opisivati vertikalni otklon napete elastične membrane.

Cilj ovog poglavlja je pokazati da svojstvene vrijednosti operatora $-\Delta$ daju informaciju o domeni na kojoj promatramo homogenu valnu jednadžbu. Ovo je tzv. "inverse spectral problem" koji ima rješenje za dovoljno "lijepe" domene na kojima promatramo valnu jednadžbu, što daje motivaciju proučavanju domena s fraktalnim rubom ili domena koje su same fraktalne. Počinjemo analizirajući svojstvene vrijednosti za tri klasična rubna uvjeta, a zatim se okrećemo njihovoj asimptotici za Dirichletov rubni uvjet.

3.1 Valna jednadžba u n dimenzija

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i Δ Laplaceov operator na ograničenoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, odnosno

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \forall f \in C^2(\Omega).$$

Promotrimo homogenu valnu jednadžbu na Ω s Dirichletovim rubnim uvjetom:

$$\begin{cases} u_{tt} = \lambda \Delta u, & \text{na } D \\ u(x,t) = 0, & \text{za sve } x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & \text{za sve } x \in \Omega \\ u_t(x,0) = \psi(x), & \text{za sve } x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

gdje su konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ i funkcije $\phi, \psi \in C^1(\Omega)$ dane, a traženo rješenje $u : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ je klase C^2.

Separirano rješenje valne jednadžbe (3.1) je ono za koje postoje funkcije $X \in C^2(\Omega)$ i $T \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0})$ tako da je

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Ako takvu funkciju u uvrstimo u (3.1) dobit ćemo

$$X \cdot T'' = \lambda(\Delta X)T \implies -\frac{T''}{\lambda T} = -\frac{\Delta X}{X},$$

što motivira sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.1. *Za ograničenu domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je broj $\lambda \in \mathbb{C}$ Dirichletova svojstvena vrijednost ako postoji nenul funkcija $u : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ klase C^2 koja zadovoljava*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & na\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Svaku takvu funkciju u nazivamo svojstvena funkcija pridružena svojstvenoj vrijednosti λ. Općenitije, ukoliko rubni uvjet nije Dirichletov govorit ćemo o svojstvenim vrijednostima i pridruženim svojstvenim funkcijama.

Navedimo rubne uvjete koje ćemo promatrati:

1. Dirichletov rubni uvjet:

$$u(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

2. Neumannov rubni uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

gdje je $\mathbf{n}$ vanjska normala u $\mathbb{R}^n$,

3. Robinov rubni uvjet:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,t) + a_0 u(x,t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

gdje je $a_0 \in \mathbb{C}$ dana konstanta i $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na rub $\partial\Omega$.

Dirichletov rubni uvjet dolazi od analize fizikalnih pojava unutar zatvorenog sustava, kao što je titranje žice dok držimo njene krajeve. Neumannov rubni uvjet je koristan kada želimo modelirati sustav koji dozvoljava difuziju na rubu, bilo da se radilo o toplini, magnetskom polju ili nečemu drugom. Robinov rubni uvjet je koristan kod rješavanja konvektivno-difuzivnih problema.

Korisnost svojstvenih vrijednosti i pripadnih svojstvenih funkcija je ta da ortogonalnost svojstvenih funkcija za različite svojstvene vrijednosti (propozicija 3.1.2) omogućuje zapis proizvoljnog rješenja valne jednadžbe sa simetričnim rubnim uvjetom (definiranim formulom 3.6) u obliku Fourierovog reda te posljedično vodi k rješenju. Više o tome se može naći u [7].

U nastavku stavljamo poseban naglasak na dimenzije $n = 1, 2, 3$ jer za njih imamo jasnu fizičku motivaciju. Promotrimo slučaj $n = 3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) (slične dokaze bi mogli provesti i za ostale n) i pokažimo ortogonalnost svojstvenih funkcija koje pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima za neki od gore nabrojenih rubnih uvjeta. Najprije za $f, g \in C^2(\Omega)$ definiramo skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \iiint\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}d\mathbf{x}, \quad \text{gdje je } d\mathbf{x} = dx\, dy\, dz. \tag{3.3}$$

Nije teško vidjeti da za $u, v \in C^2(\Omega)$ (trenutno nam je bitna samo prostorna komponenta, pa zanemarujemo vremensku) vrijedi identitet

$$u(\Delta v) - (\Delta u)v = \operatorname{div}\Big(u(\nabla v) - (\nabla u)v\Big) \tag{3.4}$$

jer desnu stranu možemo raspisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\big(u(\nabla v) - (\nabla u)v\big)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\nabla v + u\frac{\partial \nabla v}{\partial x_i} - \frac{\partial \nabla u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}\nabla u\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\nabla v + u(\operatorname{div}\nabla v) - (\operatorname{div}\nabla u)v - \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\nabla u\\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}e_j + u(\Delta v) - (\Delta u)v - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}e_j = \text{LHS}.
\end{aligned}$$

Integriranjem (3.4) po Ω i primjenom teorema o divergenciji dobivamo Greenov drugi identitet:

$$\iiint\limits_{\Omega}\Big(u(\Delta v) - (\Delta u)v\Big)d\mathbf{x} = \iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}v\right)dS, \tag{3.5}$$

gdje je $\partial u/\partial \mathbf{n} = \langle \mathbf{n}, \nabla u\rangle$.

Primijetimo da desna strana (3.5) iščezava za svaki od tri navedena rubna uvjeta. To je očito za Dirichletov rubni uvjet, a kako je Robinov generalizacija Neumannovog, dovoljno je provjeriti Robinov rubni uvjet. Dakle, ako u i v zadovoljavaju Robinov rubni uvjet uz istu konstantu a_0, slijedi

$$u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}v = -a_0uv - (-a_0uv) = 0.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\langle u, \Delta v\rangle = \langle \Delta u, v\rangle, \tag{3.6}$$

za sve funkcije u, v koje zadovoljavaju bilo koji od navedenih rubnih uvjeta. Takav rubni uvjet zovemo *simetričnim* rubnim uvjetom. Iz dosadašnje diskusije slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1.2. *Neka funkcije $u, v \in C^2(\Omega)$ zadovoljavaju simetričan rubni uvjet i neka su one realne svojstvene funkcije pridružene različitim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \neq \lambda_2$:*

$$-\Delta u = \lambda_1 u, \quad -\Delta v = \lambda_2 v, \quad na\ \Omega.$$

Tada su u i v ortogonalne u smislu skalarnog produkta (3.3).

Dokaz. Budući da u i v zadovoljavaju simetričan rubni uvjet, vrijedi formula (3.6). Dakle

$$\langle u, \Delta v\rangle = \langle \Delta u, v\rangle \implies \langle u, -\lambda_2 v\rangle = \langle -\lambda_1 u, v\rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\langle u, v\rangle = 0 \implies \langle u, v\rangle = 0.$$

□

U nastavku će biti potreban i Greenov prvi identitet.

Propozicija 3.1.3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i neka su $u, v \in C^2(\Omega)$ funkcije. Tada vrijedi*

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \int_{\Omega}(\nabla v)^T(\nabla u)d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v\Delta u d\mathbf{x}.$$

Dokaz. Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$(vu_{x_i})_{x_i} = v_{x_i}u_{x_i} + vu_{x_ix_i},$$

stoga sumiranjem po i dobivamo

$$\operatorname{div}(v\nabla u) = (\nabla v)^T(\nabla u) + v\Delta u.$$

Integriranjem po Ω i primjenom teorema o divergenciji na lijevoj strani zaključujemo

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \int_{\Omega}(\nabla v)^T(\nabla u)d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v\Delta u d\mathbf{x}.$$

□

Teorem 3.1.4. *Neka je λ svojstvena vrijednost čiji je pripadni rubni uvjet simetričan. Tada je $\lambda \in \mathbb{R}$ i postoji realna svojstvena funkcija pridružena λ.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ svojstvena vrijednost i $X : \Omega \to \mathbb{C}$ neka njena svojstvena funkcija. Tada vrijedi jednadžba $-\Delta X = \lambda X$ koju možemo kompleksno konjugirati i dobiti $-\Delta\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Dakle $\overline{\lambda}$ je također svojstvena vrijednost te je $\overline{X}$ njena svojstvena funkcija. Simetričnost rubnog uvjeta i Greenov identitet (3.5) primijenjen na funkcijama X i $\overline{X}$ impliciraju

$$\begin{aligned} &\iiint_\Omega \left(X(\Delta\overline{X}) - (\Delta X)\overline{X}\right) d\mathbf{x} = 0 \\ \implies &\iiint_\Omega \left(-\overline{\lambda}X\overline{X} - (-\lambda X\overline{X})\right) d\mathbf{x} = 0 \\ \implies &(\lambda - \overline{\lambda})\iiint_\Omega X\overline{X} d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Kako X mora biti nenul funkcija i vrijedi $X\overline{X} = |X|^2$, slijedi $\lambda = \overline{\lambda}$, čime smo pokazali $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo sada da je svojstvena funkcija X kompleksna. Zapišimo ju kao $X(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x}) + iZ(\mathbf{x})$, gdje su Y, Z realne funkcije. Iz jednadžbe $-\Delta X = \lambda X$ slijedi

$$\begin{cases} -\Delta Y = \lambda Y, \\ -\Delta Z = \lambda Z, \end{cases}$$

uz isti rubni uvjet kao i na X. Dakle λ ima realnu svojstvenu funkciju Y (i Z). □

Teorem 3.1.5. *Ukoliko je svojstvena vrijednost λ pridružena Dirichletovom rubnom uvjetu, tada je $\lambda > 0$. Ukoliko je λ pridružena Neumannovom ili Robinovom rubnom uvjetu $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + a_0 u = 0$ uz $a_0 \geq 0$, tada je $\lambda \geq 0$.*

Dokaz. Greenov prvi identitet primijenjen na funkcije $u \equiv v$ daje

$$\iiint_\Omega (-\Delta v)\overline{v} d\mathbf{x} = \iiint_\Omega |\nabla v|^2 d\mathbf{x} - \iint_{\partial\Omega} \overline{v}\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Ukoliko je λ pridružena Dirichletovom rubnom uvjetu sa svojstvenom funkcijom v, imamo

$$\text{LHS} = \lambda\iiint_\Omega |v|^2 d\mathbf{x} = \iiint_\Omega |\nabla v|^2 d\mathbf{x} > 0,$$

gdje zadnji integral nije nula jer bi inače bilo $\nabla v \equiv 0$, odnosno $v(\mathbf{x}) \equiv C$ i $C = 0$ zbog rubnog uvjeta, što je kontradikcija s time da svojstvena funkcija v mora biti nenul funkcija. To također znači da integral uz λ nije nula, pa vrijedi $\lambda > 0$.

Ukoliko je λ pridružena Robinovom rubnom uvjetu s realnom svojstvenom funkcijom v i $a_0 \geq 0$, imamo

$$\text{LHS} = \lambda \iiint\limits_{\Omega} |v|^2 d\mathbf{x} = \iiint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} - \iint\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + a_0 \iint\limits_{\partial\Omega} |v|^2 dS \geq 0,$$

gdje sada ne možemo zaključiti da ∇v ne može identički biti jednaka konstanti jer imamo drugačiji rubni uvjet. Ono što je sigurno jest da integral uz λ opet nije nula, pa vrijedi $\lambda \geq 0$. Tvrdnja za Neumannov rubni uvjet slijedi iz tvrdnje za Robinov rubni uvjet. □

3.2 Asimptotika svojstvenih vrijednosti

U ovom odjeljku promatramo zadaću svojstvenih vrijednosti s Dirichletovim rubnim uvjetom na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s po dijelovima glatkim rubom:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{na } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Znamo da su svojstvene vrijednosti za Dirichletov rubni uvjet pozitivne, pa ćemo ih označiti u uzlaznom poretku:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots,$$

gdje se svaka svojstvena vrijednost λ pojavljuje onoliko puta kolika je njena kratnost, gdje kratnost definiramo kao dimenziju vektorskog prostora svojstvenih funkcija koje pripadaju λ. Postojanje minimalne svojstvene vrijednosti slijedit će iz teorema (3.2.3). Često ćemo pripadne realne svojstvene funkcije označavati s v_j.

Kao i inače, skalarni produkt i normu neprekidnih funkcija na $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiramo kao

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Definicija 3.2.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domena s po dijelovima glatkim rubom. Funkciju $w : \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^2 tako da je $w \not\equiv 0$ zovemo probnom funkcijom za Neumannov rubni uvjet ili slobodnom probnom funkcijom. Ako dodatno vrijedi $w(x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, kažemo da je w probna funkcija za Dirichletov rubni uvjet ili samo probna funkcija.*

Sljedeća dva teorema promatramo na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s po dijelovima glatkim rubom.

Napomena 3.2.2. *Minimum Rayleigh kvocijenta u sljedeća dva teorema ne mora postojati ako Ω nije dovoljno "lijep" skup. Komentar o tome se može naći u [7] (poglavlje 11.1).*

Teorem 3.2.3 (Princip minimuma za prvu svojstvenu vrijednost)**.** *Pretpostavimo da postoji probna funkcija $u(\mathbf{x})$ na Ω takva da za sve probne funkcije w na Ω vrijedi*

$$m := \frac{||\nabla u||^2}{||u||^2} \le \frac{||\nabla w||^2}{||w||^2}.$$

Tada je prva svojstvena vrijednost jednaka m te je $u(\mathbf{x})$ njena svojstvena funkcija, odnosno

$$\lambda_1 = m = \min\left\{\frac{||\nabla w||^2}{||w||^2} : w \text{ je probna funkcija na } \Omega\right\} \quad i \quad -\Delta u = \lambda_1 u \quad \text{na } \Omega.$$

Izraz

$$Q = \frac{||\nabla w||^2}{||w||^2}$$

zove se Rayleigh kvocijent.

Dokaz. Neka je m minimalna vrijednost među svim Rayleigh kvocijentima probnih funkcija i neka je u funkcija iz iskaza. Uvjet kaže

$$m = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}} \le \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega |w|^2 d\mathbf{x}},$$

među svim probnim funkcijama $w(\mathbf{x})$. Neka je v proizvoljna probna funkcija na Ω te $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon v(\mathbf{x})$ gdje je $\varepsilon \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Budući da u minimizira Rayleigh kvocijent, imamo da funkcija

$$f(\varepsilon) = \frac{\int_\Omega |\nabla(u + \varepsilon v)|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u + \varepsilon v|^2 d\mathbf{x}} = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)}$$

ima lokalni minimum u $\varepsilon = 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A(0) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}, & B(0) &= \int_\Omega u^2 \, d\mathbf{x}, \\ A'(0) &= 2\int_\Omega (\nabla v)^T(\nabla u) \, d\mathbf{x}, & B'(0) &= 2\int_\Omega uv \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

pa je

$$0 = f'(0) = \frac{\left(2\int_\Omega (\nabla v)^T(\nabla u) \, d\mathbf{x}\right)\left(\int_\Omega u^2 \, d\mathbf{x}\right) - \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}\right)\left(2\int_\Omega uv \, d\mathbf{x}\right)}{\left(\int_\Omega u^2 \, d\mathbf{x}\right)^2}.$$

Dakle

$$\int_\Omega (\nabla v)^T(\nabla u) \, d\mathbf{x} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}} \int_\Omega uv \, d\mathbf{x} = m\int_\Omega uv \, d\mathbf{x}.$$

Iz Dirichletovog rubnog uvjeta i Greenovog prvog identiteta slijedi

$$\int_\Omega (\Delta u + mu)v \, d\mathbf{x} = 0.$$

Kako je v bila proizvoljna probna funkcija, zaključujemo $\Delta u(\mathbf{x}) + mu(\mathbf{x}) = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$, čime je pokazano da je m Dirichletova svojstvena vrijednost i $u(\mathbf{x})$ njena svojstvena funkcija.

Sljedeće pokazujemo da je m minimalna svojstvena vrijednost od $-\Delta$. Neka je $-\Delta v = \lambda_j v$, gdje je λ_j proizvoljna svojstvena vrijednost. Greenov prvi identitet daje

$$m \leq \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 d\mathbf{x}}{\int_\Omega v^2 \, d\mathbf{x}} = \frac{\int_\Omega (-\Delta v)(v) \, d\mathbf{x}}{\int_\Omega v^2 \, d\mathbf{x}} = \frac{\int_\Omega \lambda v^2 \, d\mathbf{x}}{\int_\Omega v^2 \, d\mathbf{x}} = \lambda.$$

Dakle m je minimalna svojstvena vrijednost. □

Teorem 3.2.4 (Princip minimuma za n-tu svojstvenu vrijednost)**.** *Neka su svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ poznate i označimo pripadne svojstvene funkcije $v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_{n-1}(\mathbf{x})$. Tada vrijedi*

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{||\nabla w||^2}{||w||^2} : w \textit{ je probna funkcija na } \Omega, \ \langle w, v_j \rangle = 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \right\},$$

pretpostavljajući da taj minimum postoji. Nadalje, funkcija w za koju se postiže λ_n je svojstvena funkcija od λ_n.

Dokaz. Neka je $u(\mathbf{x})$ funkcija za koju se minimum iz iskaza postiže (ona postoji prema pretpostavci). Neka je m^* vrijednost Rayleigh kvocijenta za $u(\mathbf{x})$. Kao i u dokazu teorema (3.2.3) promatramo $w = u + \varepsilon v$, gdje v zadovoljava iste uvjete kao i u. Na isti način dobivamo

$$\int_\Omega (\Delta u + m^* u)v \, d\mathbf{x} = 0, \tag{3.7}$$

za sve probne funkcije v okomite na v_j za $j \leq n-1$. Nadalje, Greenov drugi identitet (3.5) implicira da za svaki $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ vrijedi

$$\int_\Omega (\Delta u + m^* u)v_j \, d\mathbf{x} = \int_\Omega u(\Delta v_j + m^* v_j) \, d\mathbf{x} = (m^* - \lambda_j)\langle u, v_j \rangle = 0, \tag{3.8}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz ortogonalnosti u i v_j.

Neka je sada $h(\mathbf{x})$ proizvoljna probna funkcija na Ω i neka je

$$v(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle h, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(\mathbf{x}),$$

odnosno $v(\mathbf{x})$ je projekcija od $h(\mathbf{x})$ na prostor probnih funkcija koje su okomite na v_j za svaki $j \leq n-1$. Dakle jednakost (3.7) vrijedi za v, stoga linearna kombinacija (3.7) i (3.8) daje

$$h(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle h, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k(\mathbf{x})$$

$$\implies \int_\Omega (\Delta u + m^* u) h \, d\mathbf{x} = \int_\Omega (\Delta u + m^* u) v \, d\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle h, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \int_\Omega (\Delta u + m^* u) v_k \, d\mathbf{x} = 0.$$

Kako je h bila proizvoljna probna funkcija, slijedi $-\Delta u = m^* u$, odnosno m^* je svojstvena vrijednost.

Promotrimo sada proizvoljnu svojstvenu vrijednost λ na Ω s pripadnom svojstvenom funkcijom v. Ako je $\lambda \geq \lambda_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$, tada je prema propoziciji (3.1.2) v ortogonalna na $v_1, \ldots, v_{n-1}$, pa kao u dokazu prethodnog teorema zaključujemo $m^* \leq \lambda$. Dakle m^* je minimalna svojstvena vrijednost među svojstvenim vrijednostima koje nisu $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. □

Definicija 3.2.5. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domena. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna na Ω ako se Ω može particionirati na konačan broj poddomena Ω_i $(i = 1, \ldots, k)$, tako da za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ restrikcija $f|_{\Omega_i}$ ima neprekidno proširenje na $\overline{\Omega_i}$.*

Teorem 3.2.6 (Max-min princip)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domena s po dijelovima glatkim rubom i fiksirajmo proizvoljne probne funkcije $y_1, \ldots, y_{n-1}$ na Ω. Neka je*

$$\lambda_{n*} = \min \left\{ \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|} : \ w \text{ je probna funkcija i } \langle w, y_j \rangle = 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Tada je

$$\lambda_n = \max \lambda_{n*}, \tag{3.9}$$

gdje maksimum gledamo među svim po dijelovima neprekidnim funkcijama $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljan izbor $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Neka je $w(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(\mathbf{x})$ linearna kombinacija prvih n svojstvenih funkcija koja je ortogonalna na $y_1, \ldots, y_{n-1}$ tako da su v_j normalizirane da budu jedinične. Dakle konstante $c_1, \ldots, c_n$ zadovoljavaju sustav linearnih jednadžbi

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j v_j, y_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle v_j, y_k \rangle c_j, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Kako se radi o sustavu gdje je broj nepoznanica (n) veći od broja jednadžbi ($n-1$), postoje $c_1, \dots, c_n$ koji ga zadovoljavaju tako da nisu svi nula. Prvi Greenov teorem (propozicija 3.1.3) implicira da za svaki $k, t \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{d} \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} \left\langle -\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j^2}, v_t \right\rangle,$$

stoga imamo

$$\begin{aligned}\lambda_{n*} &\le \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2} = \frac{\sum_{j=1}^{d} \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \sum_{t=1}^{n} c_t \frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right\rangle}{\langle \sum_{j=1}^{n} c_j v_j, \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \rangle} = \frac{\sum_{k,t=1}^{n} c_k c_t \sum_{j=1}^{d} \left\langle \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \frac{\partial v_t}{\partial x_j} \right\rangle}{\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \langle v_j, v_k \rangle} \\ &= \frac{\sum_{k,t=1}^{n} c_k c_t \langle -\Delta v_k, v_t \rangle}{\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k \langle v_j, v_k \rangle} \stackrel{(1)}{=} \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2} \le \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_n c_j^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2} = \lambda_n,\end{aligned}$$

gdje smo u (1) koristili definiciju svojstvene funkcije, ortogonalnost svojstvenih funkcija za različite svojstvene vrijednosti i to da su funkcije v_j odabrane jedinične. Kako su $y_1, \dots, y_{n-1}$ bile proizvoljne, nejednakost $\lambda_{n*} \le \lambda_n$ vrijedi za svaki izbor $y_1, \dots, y_{n-1}$.

Da bi pokazali da se λ_n može postići, potrebno je naći $y_1, \dots, y_{n-1}$ tako da je $\lambda_{n*} = \lambda_n$. Uzmimo $y_i = v_i$ za svaki $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Teorem (3.2.4) sada implicira $\lambda_{n*} = \lambda_n$. □

Asimptotika na intervalu

Neka je $\Omega = \langle 0, l \rangle \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval u $\mathbb{R}$. Odredimo Dirichletove svojstvene vrijednosti na Ω. Funkcija $u \in C^2(\Omega)$ koja zadovoljava

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad \forall x \in \Omega$$

mora biti oblika

$$u(x) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x},$$

za neke $A, B \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem $u(0) = 0$ dobivamo

$$u(x) = C \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \forall x \in \Omega$$

za neki $C \in \mathbb{R}$, a uvrštavanjem $u(l) = 0$ dobivamo

$$l\sqrt{\lambda} = k\pi, \quad \text{za neki } k \in \mathbb{Z},$$

pa su svojstvene vrijednosti dane s $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$.

Na sličan način rješavanjem

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & \forall x \in \Omega \\ u'(0) = u'(l) = 0 \end{cases}$$

dobivamo da su Neumannove svojstvene vrijednosti za Ω dane formulom $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Bez obzira koja od ta dva rubna uvjeta promatrali, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{1/2}}{n} = \frac{\pi}{l},$$

a isto se može dokazati da vrijedi i za Robinove svojstvene vrijednosti rješavajući

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & \forall x \in \Omega \\ (u' - a_0 u)(0) = (u' + a_0 u)(l) = 0, \end{cases}$$

što je učinjeno u [7] (Chapter 4.3).

Asimptotika na pravokutniku

Neka je $\Omega = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \subset \mathbb{R}^2$. Označimo (x, y) s $\mathbf{x}$. Traženje Dirichletovih svojstvenih vrijednosti $\lambda > 0$ na Ω znači rješavanje

$$\begin{cases} u_{xx}(\mathbf{x}) + u_{yy}(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Budući da su stranice pravokutnika Ω paralelne s koordinatnim osima, rješenja gornje zadaće možemo tražiti separiranjem varijabli x i y, što dovodi do rješenja

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

gdje su $l, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ i pripadna svojstvena vrijednost je $\lambda = \frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$. Neka je $N : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ funkcija prebrojavanja svojstvenih vrijednosti dana s

$$N(\lambda) = \Big|\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \leq \lambda\}\Big|.$$

Iz gornjeg izraza za λ_n zaključujemo da funkcija N zapravo broji točke u prvom kvadrantu sa cjelobrojnim koordinatama koje se nalaze unutar pripadne elipse:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \leq \frac{\lambda}{\pi^2}, \quad l, m > 0.$$

Postoji bijekcija između takvih točaka i jediničnih kvadratića u prvom kvadrantu čiji su bridovi paralelni s koordinatnim osima i vrhovi imaju cjelobrojne koordinate te se potpuno nalaze unutar elipse, stoga slijedi

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}. \tag{3.10}$$

Za velike λ, apsolutna razlika lijeve i desne strane te nejednakosti je reda veličine opsega elipse, odnosno $\sqrt{\lambda}$, pa je

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\lambda ab}{4\pi} - N(\lambda)\right) = O(1), \quad \text{kako } \lambda \to \infty,$$

što skupa s (3.10) i $N(\lambda_n) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{ab}.$$

Za Neumannov uvjet dobivamo iste zaključke, osim što je dozvoljeno da l i m budu jednaki 0.

Asimptotika na kvadru

Neka je $\Omega = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \times \langle 0, c\rangle \subset \mathbb{R}^3$ i označimo (x, y, z) s $\mathbf{x}$. Traženje Dirichletovih svojstvenih vrijednosti $\lambda > 0$ na Ω znači rješavanje

$$\begin{cases} u_{xx}(\mathbf{x}) + u_{yy}(\mathbf{x}) + u_{zz}(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ponovno, kao i u slučaju pravokutnika, bridovi od Ω su paralelni s koordinatnim osima, što omogućava separaciju varijabli te dobivamo da su svojstvene vrijednosti oblika

$$\lambda = \frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{k^2\pi^2}{c^2}, \quad l, m, k \in \mathbb{N}.$$

Kao i prije, za velike λ možemo $N(\lambda)$ aproksimirati volumenom dijela elipsoida i dobiti

$$N(\lambda) \approx \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\frac{abc\lambda^{3/2}}{\pi^3} = \lambda^{3/2}\frac{abc}{6\pi^2}$$

te imamo isti zaključak za Neumannove svojstvene vrijednosti. Dakle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{3/2}}{n} = \frac{6\pi^2}{abc}.$$

3.3 Asimptotika svojstvenih vrijednosti na uniji pravokutnika

Malo generalniju sliku o tome kako se ponašaju svojstvene vrijednosti za razne skupove Ω daje sljedeći teorem.

Teorem 3.3.1. *Promotrimo zadatak određivanja svojstvenih vrijednosti* $-\Delta u = \lambda u$ *na ograničenoj domeni* Ω *s Dirichletovim rubnim uvjetom.*

1. *Ako je problem dvodimenzionalan, odnosno* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*, tada vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_2 \Omega}.$$

2. *Ako je problem trodimenzionalan, odnosno* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, tada vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{3/2}}{n} = \frac{6\pi^2}{\mathrm{vol}_3 \Omega}.$$

Vidjeli smo da teorem (3.3.1) vrijedi za neke vrlo specifične domene u prethodnom odjeljku te ga u ovom radu dokazujemo samo za konačne unije pravokutnika (ali najprije trebamo nekoliko rezultata). Općenitije domene se mogu aproksimirati pravokutnicima, a više detalja se može naći u [3] (Sekcija VI.4).

Označimo s $\tilde{\lambda}_j$ Neumannove svojstvene vrijednosti.

Teorem 3.3.2. *Za svaki* $j \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\tilde{\lambda}_j \leq \lambda_j$.

Dokaz. Za $j = 1$ tvrdnja slijedi iz toga što se λ_1 i $\tilde{\lambda}_1$ mogu zapisati kao minimum Rayleigh kvocijenta (to smo vidjeli u teoremu 3.2.3 za λ_1, a za $\tilde{\lambda}_1$ vidi [7] (Chapter 11.3)). Kako je skup funkcija po kojima promatramo minimum Rayleigh kvocijenta za λ_1 sadržan u onome za $\tilde{\lambda}_1$, slijedi $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$.

Zapravo ista argumentacija (jedan skup funkcija je podskup drugog zbog dodatnog uvjeta) vrijedi i za $n \geq 2$, što daje
$$\tilde{\lambda}_{n*} \leq \lambda_{n*}.$$
Uzimajući minimum obje strane po izborima $y_1, \ldots, y_{n-1}$ i koristeći max-min princip (vidi [7] Chapter 11) dobivamo
$$\tilde{\lambda}_n = \max \tilde{\lambda}_{n*} \leq \max \lambda_{n*} = \lambda_n.$$
□

U nastavku ćemo promatrati više različitih domena odjednom, stoga ako je jedna domena sadržana u drugoj, s λ'_n ćemo označavati svojstvene vrijednosti veće domene.

Teorem 3.3.3. *Ako je domena* Ω *sadržana u drugoj domeni* Ω'*, tada je* $\lambda_n \geq \lambda'_n$.

Dokaz. U slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta promotrimo max-min izraz (3.9) za Ω. Ako je w proizvoljna probna funkcija na Ω, proširujemo je na Ω' na način

$$w'(\mathbf{x}) = \begin{cases} w(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega' \setminus \Omega. \end{cases}$$

Tu moramo paziti jer w' više nije nužno dovoljno glatka da bude probna funkcija na Ω', no to je moguće izgladiti koristeći bump funkcije. Dakle svakoj probnoj funkciji na Ω je pridružena probna funkcija na Ω', pa je skup probnih funkcija promatranih u minimizaciji Rayleigh kvocijenta veći za Ω'. Zaključujemo $\lambda'_n \leq \lambda_n$. □

Dokaz teorema 3.3.1 za konačne unije pravokutnika. Neka je $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_t$ konačna unija pravokutnika u $\mathbb{R}^2$. Neka je $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$ niz svih Dirichletovih svojstvenih vrijednosti koje pripadaju Ω_j (po svim j) te $\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \leq \ldots$ niz svih Neumannovih svojstvenih vrijednosti koje pripadaju Ω_j (po svim j). Neka svojstvena vrijednost μ_n pripada pravokutniku Ω_{p_n}. Neka je $M(\lambda)$ funkcija prebrojavanja svojstvenih vrijednosti za niz $\mu_1, \mu_2, \ldots$, odnosno

$$M(\lambda) = \left| \{ j \in \mathbb{N} : \mu_j \leq \lambda \} \right|.$$

Sumirajući broj točaka sa cjelobrojnim koordinatama u četvrtinama elipsa po svim pravokutnicima, dobivamo

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{M(\lambda)}{\lambda} = \sum_{j=1}^{t} \frac{\mathrm{vol}_2(\Omega_j)}{4\pi} = \frac{\mathrm{vol}_2(\Omega)}{4\pi}.$$

Uzimajući recipročnu vrijednost i koristeći $M(\mu_n) = n$ dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_2(\Omega)}$$

te na sličan način dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{\mu}_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_2(\Omega)}.$$

Iz nejednakosti

$$\tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \mu_n,$$

koja slijedi iz kratke diskusije o tome koji skupovi funkcija pri promatranju Rayleigh kvocijenta su veći, odnosno manji (više u [7] Chapter 11.6 Theorem 5), slijedi

$$\frac{4\pi}{\mathrm{vol}_2(\Omega)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{\mu}_n}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\tilde{\lambda}_n}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{n} = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_2(\Omega)},$$

čime je teorem (3.3.1) dokazan za unije pravokutnika. □

Teorem (3.3.1) pokazao je da je prvi asimptotski član funkcije prebrojavanja svojstvenih vrijednosti (koju možemo zvati spektralnom funkcijom prebrojavanja) usko povezan s geometrijom domene na kojoj proučavamo svojstvene vrijednosti operatora $-\Delta$ s Dirichletovim rubnim uvjetom. Postavlja se pitanje je li recimo drugi asimptotski član na neki način povezan s geometrijom domene, što je poznato kao Weyl-Berry hipoteza (vidi [5], odjeljak 12.5.1). Klasičan rezultat kaže da ako je rub od Ω "lijep", onda je drugi asimptotski član spektralne funkcije prebrojavanja proporcionalan površini ruba $\partial\Omega$ puta λ^{d-1} (gdje je d dimenzija prostora u kojem se Ω nalazi). U slučaju da rub nije "lijep" hipoteza je bila da je drugi asimptotski član proporcionalan λ^H, gdje je H Hausdorffova dimenzija ruba $\partial\Omega$. Pokazalo se da ta hipoteza ne vrijedi, no Lapidus je pokazao da ona vrijedi na $\mathbb{R}$ ako se Hausdorffova dimenzija zamijeni dimenzijom Minkowskog. Kasnije je pokazano da u višim dimenzijama ni ta verzija hipoteze ne vrijedi.

3.4 Spektralna zeta funkcija

U ovom poglavlju cilj je dokazati Weylov asimptotski zakon za fraktalne strune koji daje poopćenje teorema (3.3.1) za "ne tako lijepe" domene te povezati spektralnu zeta funkciju fraktalne strune s Riemannovom zeta funkcijom.

Definicija 3.4.1. *Frekvencije fraktalne strune $\mathcal{L}$ su brojevi*

$$f = k \cdot l_j^{-1}, \quad k, j \in \mathbb{N}.$$

Ukupna kratnost frekvencije f je

$$w_f^{(\nu)} = \sum_{j: f \cdot l_j \in \mathbb{N}} 1 = \sum_{l: f \cdot l \in \mathbb{N}} w_l = w_{1/f} + w_{2/f} + w_{3/f} + \dots,$$

gdje je kratnost duljine w_l dana formulom (1.5).

Definicija 3.4.2. *Funkcija prebrojavanja frekvencija ili spektralna funkcija prebrojavanja fraktalne strune $\mathcal{L}$ je $N_\nu : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{Z}$ dana s*

$$N_\nu(x) = \sum_{f \le x} w_f^{(\nu)}.$$

Spektralna zeta funkcija od $\mathcal{L}$ je

$$\zeta_\nu(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k \cdot l_j^{-1})^{-s} = \sum_f w_f^{(\nu)} f^{-s},$$

koja konvergira kada je $Re(s)$ dovoljno velik.

Neka je $\zeta(s)$ Riemannova zeta funkcija definirana sa $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, za $\text{Re}(s) > 1$. Kasnije ćemo pokazati da ona ima meromorfno proširenje na cijeloj kompleksnoj ravnini, s jednim polom reda 1 u $s = 1$ i reziduumom u 1 u toj točki. Sljedeći teorem povezuje spektar obične fraktalne strune s njenom geometrijom.

Teorem 3.4.3. *Spektralna funkcija prebrojavanja fraktalne strune $\mathcal{L}$ zadovoljava*

$$\begin{aligned} N_\nu(x) &= N_{\mathcal{L}}(x) + N_{\mathcal{L}}\left(\frac{x}{2}\right) + N_{\mathcal{L}}\left(\frac{x}{3}\right) + \dots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lfloor l_j x \rfloor, \end{aligned}$$

dok spektralna zeta funkcija od $\mathcal{L}$ zadovoljava

$$\zeta_\nu(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s)\zeta(s),$$

gdje je $\zeta(s)$ Riemannova zeta funkcija. Dakle $\zeta_\nu(s)$ je holomorfna za Re$(s) > 1$ te ima pol u $s = 1$ s reziduumom L, ukupnom duljinom od $\mathcal{L}$. Štoviše, ima meromorfno proširenje na okolini prozora W od $\mathcal{L}$.

Dokaz. Iz definicije spektralne funkcije prebrojavanja imamo da vrijedi

$$N_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j: k \cdot l_j^{-1} \le x} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \{ j : l_j^{-1} \le x/k \} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} N_{\mathcal{L}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Primijetimo da je posljednji izraz konačna suma jer je $N_{\mathcal{L}}(y) = 0$ za $y < l_1^{-1}$. Drugu jednakost dobivamo na sličan način:

$$N_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \le l_j x} 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \lfloor l_j x \rfloor.$$

Za spektralnu zeta funkciju, imamo redom

$$\zeta_\nu(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k^{-s} l_j^s = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \sum_{j=1}^{\infty} l_j^s = \zeta(s)\zeta_{\mathcal{L}}(s).$$

□

Konačno dolazimo do najavljenog rezultata o asimptotici frekvencija.

Teorem 3.4.4 (Weylov asimptotski zakon)**.** *Neka je $\mathcal{L}$ fraktalna struna s dimenzijom D i ukupnom duljinom*

$$\mathrm{vol}_1(\mathcal{L}) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j = \zeta_{\mathcal{L}}(1).$$

Tada, za svaki $\delta > 0$,

$$N_\nu(x) = \mathrm{vol}_1(\mathcal{L})x + O(x^{D+\delta}), \quad \textit{kako } x \to \infty.$$

Vodeći član,

$$W_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{vol}_1(\mathcal{L})x,$$

zove se Weylov član.

Dokaz. Teorem (3.4.3) implicira

$$N_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} l_j x - \sum_{j=1}^{\infty} \{l_j x\}.$$

Obje sume su konvergentne i prva suma je jednaka $W_{\mathcal{L}}(x)$. Neka je $\delta > 0$ i $j \in \mathbb{N}$. Nejednakost (1.9) kaže da postoji $C > 0$ tako da je $l_j \leq C j^{-1/(D+\delta)}$, pa slijedi da za $j > (Cx)^{D+\delta}$ imamo $l_j x < 1$, odnosno $\{l_j x\} = l_j x$. Sada možemo ograditi drugu sumu:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \{l_j x\} &= \sum_{j=1}^{\lfloor (Cx)^{D+\delta} \rfloor + 1} \{l_j x\} + \sum_{j=\lfloor (Cx)^{D+\delta} \rfloor + 2}^{\infty} \{l_j x\} \leq (Cx)^{D+\delta} + 1 + \sum_{j=\lfloor (Cx)^{D+\delta} \rfloor + 2}^{\infty} C j^{-1/(D+\delta)} x \\
&\leq (Cx)^{D+\delta} + 1 + Cx \int_{(Cx)^{D+\delta}}^{\infty} j^{-1/(D+\delta)} dj = (Cx)^{D+\delta} + 1 + \frac{D+\delta}{C+\delta-1} (Cx)^{D+\delta} \\
&= O(x^{D+\delta}), \quad \text{kako } x \to \infty,
\end{aligned}$$

što smo i htjeli. □

Jedan od problema koji nas zanima jest inverzni spektralni problem za fraktalne strune. Radi se o tome da pokušavamo dobiti bilo kakvu informaciju o geometriji fraktalne strune $\mathcal{L}$ koristeći samo njene frekvencije. Taj problem je proučavan u [5] (poglavlja 9 i 11) te se u tu svrhu koriste eksplicitne formule za razne funkcije pridružene geometriji ili spektru fraktalne strune, a te formule sadržavaju sume čiji su članovi oblika $c \cdot x^\omega$ gdje ω prolazi po kompleksnim dimenzijama $\mathcal{L}$. Primjerice, ukoliko je ω pol reda 1 u formuli za $N_\nu(x)$, tada je koeficijent uz član x^ω višekratnik vrijednosti Riemannove zeta funkcije u ω.

Dakle, ako bi Riemannova zeta funkcija imala nultočku u nekoj kompleksnoj dimenziji ω fraktalne strune, član x^ω ne bi postojao u formuli za $N_\nu(x)$, što bi za posljedicu imalo da dvije fraktalne strune imaju jednake (ili slične) frekvencije (odnosno zvuk). Drugim riječima, poznavanje veze između fraktalne strune i njenih frekvencija omogućuje donošenje zaključaka o Riemannovoj zeta funkciji, pa čak i reformulaciju karakterizacije Riemannove hipoteze (vidi [5], poglavlje 9).

3.5 Analitičko proširenje Riemannove zeta funkcije

U ovom odjeljku pokazujemo da Riemannova zeta funkcija $\zeta : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ definirana sa $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$ ima analitičko proširenje na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ te karakteriziramo njen jedini pol u $s = 1$. U tu svrhu spomenimo bitan teorem o analitičkom proširenju.

Teorem 3.5.1. *Neka su $U \subset V \subset \mathbb{C}$ otvoreni skupovi i neka je V povezan. Pretpostavimo da su dane funkcije $F_1, F_2 : V \to \mathbb{C}$ te $f : U \to \mathbb{C}$ tako da su F_1 i F_2 analitička proširenja od f, odnosno $F_1(z) = F_2(z) = f(z)$, $\forall z \in U$ i sve tri funkcije su analitičke na svojim domenama. Tada je $F_1 = F_2$ na V.*

Između ostalog, taj teorem nam omogućuje da zaključimo da gama funkcija definirana s $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $\forall \mathrm{Re}(z) > 0$ ima analitičko proširenje na $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ako znamo da je već holomorfna na $\mathrm{Re}(z) > 0$. To proširenje dobivamo primjenjujući formulu

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

koja vrijedi za $\mathrm{Re}(z) > 0$ na način da ona postaje definicija gama funkcije za $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1\} \setminus \{0\}$ te dalje nastavljamo induktivno za $\mathrm{Re}(z) > -2$, $\mathrm{Re}(z) > -3$ itd. Gama funkcija ostaje analitička u svakom koraku jer je funkcija $\Gamma(z+1)/z$ analitička. Na sličan način ćemo naći formulu koju Riemannova zeta funkcija zadovoljava te će nam ona postati definicija funkcije koja će biti analitičko proširenje Riemannove zeta funkcije, a zatim će gornji teorem implicirati jedinstvenost tog proširenja.

Sljedeća tvrdnja će nam također trebati u jednom koraku, no prije nje slijedi kratak podsjetnik. Schwartzov prostor je definiran kao skup

$$\mathcal{S} = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} < \infty,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\right\},$$

gdje je $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \varphi^{(\beta)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Elemente Schwartzovog prostora zovemo *Schwartzovim funkcijama*. Korisnost Schwartzovog prostora je ta da je Fourierova pretvorba neprekidna bijekcija iz $\mathcal{S}$ u $\mathcal{S}$, čime izbjegavamo dodatnu argumentaciju o dobroj definiranosti Fourierove transformacije za Schwartzove funkcije.

Teorem 3.5.2 (Poissonova sumacijska formula)**.** *Neka je $f \in \mathcal{S}$ Schwartzova funkcija. Neka je $\hat{f}$ njena Fourierova transformacija. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Pokažimo najprije da je $F(x)$ dobro definirana, odnosno da gornja suma konvergira (apsolutno) za svaki $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)| = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |x+n|\leq 1}} |f(x+n)| + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |x+n|>1}} |f(x+n)| \leq 2 \max_{t\in[-1,1]} |f(t)| + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ |x+n|>1}} \frac{\|f\|_{2,0}}{(x+n)^2} < \infty.$$

Primijetimo da je F 1-periodična funkcija. Odredimo njene Fourierove koeficijente:

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \int_0^1 F(x)e^{-2\pi ikx}dx \overset{(1)}{=} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx \overset{(2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \hat{f}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

gdje jednakost (1) vrijedi zbog definicije funkcije F, a jednakost (2) vrijedi zbog Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji i činjenice da je f Schwartzova, što omogućuje dobivanje gornje ograde u uvjetu teorema o dominiranoj konvergenciji. Primijetimo da je F derivabilna funkcija kao suma reda koji uniformno konvergira (što također slijedi iz činjenice da je f Schwartzova). Kako Fourierov red derivabilne 1-periodične funkcije konvergira po točkama prema samoj funkciji, imamo

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx},$$

pa uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo traženu tvrdnju. □

Propozicija 3.5.3. *Neka je $s \in \mathbb{C}$ takav da je $Re(s) > 1$. Tada vrijedi*

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}\right)\omega(x)dx, \tag{3.11}$$

gdje je $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$.

Dokaz. Iz definicije gama funkcije računamo:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{s/2-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty (\pi n^2 x)^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}\pi n^2 dx = \pi^{s/2}n^s \int_0^\infty x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx \\
\implies \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} &= \int_0^\infty x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx \\
\implies \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^\infty n^{-s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s/2-1}e^{-\pi n^2 x}dx \overset{(1)}{=} \int_0^\infty x^{s/2-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}dx \\
\implies \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^1 x^{s/2-1}\omega(x)dx + \int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)dx, \quad \forall \mathrm{Re}(s) > 1,
\end{aligned}
$$

gdje jednakost (1) slijedi iz Fubunijevog teorema. Prvi integral možemo zapisati na drugi način koristeći supstituciju $u = 1/x$:

$$
\int_0^1 x^{s/2-1}\omega(x)dx = \int_\infty^1 \left(\frac{1}{u}\right)^{s/2-1}\omega\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^\infty x^{-s/2-1}\omega\left(\frac{1}{x}\right)dx.
$$

Sljedeće želimo izraziti $\omega(1/x)$ preko $\omega(x)$. Definirajmo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f(t) = e^{-\pi t^2 x}$, gdje je $x \in \mathbb{R}$ fiksan. Tada je f Schwartzova funkcija, pa Poissonova sumacijska formula daje

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=-\infty}^\infty f(t) &= \sum_{t=-\infty}^\infty \hat{f}(t) \\
\implies \sum_{t=-\infty}^\infty e^{-\pi t^2 x} &= \sum_{t=-\infty}^\infty x^{-1/2}e^{-\pi t^2/x} \\
\implies 1 + 2\omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + 2\omega\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
\implies \omega\left(\frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x).
\end{aligned}
$$

Dakle

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{-s/2-1}\omega\left(\frac{1}{x}\right)dx &= \int_1^\infty x^{-s/2-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x)\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-s/2-1}dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-s/2-1/2}dx + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2}\omega(x)dx \\
&= -\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^\infty x^{-s/2-1/2}\omega(x)dx.
\end{aligned}
$$

Iz svega dobivenog slijedi

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx.$$

□

Da bi dokazali da Riemannova zeta funkcija ima analitičko proširenje na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, dovoljno je dokazati da je izraz na desnoj strani jednakosti (3.11) analitička funkcija po s na $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (i komentirati slučaj $s = 0$), jer će nam tada ta jednakost postati definicija proširenja Riemannove zeta funkcije na ostatku kompleksne ravnine. Prije nego što pokažemo da je ona analitička, trebat ćemo sljedeći tehnički rezultat:

Teorem 3.5.4. *Neka je $D \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-izmjerljiv, $U \subset \mathbb{C}$ otvoren te $f : D \times U \to \mathbb{C}$ funkcija sa sljedećim svojstvima:*

1. *f je izmjerljiva na $D \times U$ (gdje U promatramo kao podskup od $\mathbb{R}^2$),*
2. *za svaki fiksni $x \in D$, funkcija $z \mapsto f(x, z)$ je analitička na U,*
3. *postoji izmjerljiva funkcija $M : D \to \mathbb{R}$ takva da je $|f(x, z)| \leq M(x)$ za sve $x \in D$, $z \in U$ te $\int_D M(x)dx < \infty$.*

Tada je funkcija F dana s

$$F(z) = \int_D f(x, z)dx$$

analitička na U i za svaki $k \geq 1$ vrijedi

$$F^{(k)}(z) = \int_D f^{(k)}(x, z)dx,$$

gdje je $f^{(k)}$ k-ta derivacija analitičke funkcije $z \mapsto f(x, z)$ s obzirom na z.

Dokaz. Fiksirajmo $z \in U$. Odaberimo $r > 0$ takav da je $K(z, r) \subset U$ i neka je $0 < \delta < \frac{1}{2}r$. Pokazat ćemo da se za $w \in K(z, \delta)$ izraz $F(w)$ može razviti u konvergentan red potencija oko z, iz čega će slijediti da je F analitička na $K(z, \delta)$, odnosno u z.

Za $z_0 \in \mathbb{C}$ i $\rho > 0$ s $\gamma_{z_0,\rho} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ označimo kružnicu $\gamma_{z_0,\rho}(z) = z_0 + \rho e^{it}$. Za $w \in K(z, \delta)$ Cauchyjeva integralna formula daje

$$F(w) = \int_D f(x, w)dx = \int_D \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_{z,2\delta}} \frac{f(x, s)}{s - w}ds\right)dx. \tag{3.12}$$

Vrijedi

$$\frac{f(x, s)}{s - w} = \frac{f(x, s)}{s - z}\left(1 - \frac{w - z}{s - z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x, s)}{(s - z)^{n+1}} \cdot (w - z)^n,$$

pa uvrštavajući to u (3.12) dobivamo

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \int_D \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z,2\delta}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x,s)}{(s-z)^{n+1}} (w-z)^n \right) ds \right) dx \\
&= \int_D \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x, z+2\delta e^{2\pi i t})}{(2\delta e^{2\pi i t})^n} (w-z)^n \right) dt \right) dx.
\end{aligned}
$$

Budući da za $|w-z| < \delta$ vrijedi ograda

$$
\begin{aligned}
\int_D \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(x, z+2\delta e^{2\pi i t})}{(2\delta e^{2\pi i t})^n} (w-z)^n \right| \right) dt \right) dx &\leq \int_D \left(\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} M(x) 2^{-n} \right) dt \right) dx \\
&\leq \int_D 2M(x) dx < \infty,
\end{aligned}
$$

uvjeti Fubinijevog teorema su zadovoljeni te u gornjem izrazu za $F(w)$ smijemo zamijeniti poredak integrala i sume:

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} (w-z)^n \int_D \left(\int_0^1 \frac{f(x, z+2\delta e^{2\pi i t})}{(2\delta e^{2\pi i t})^n} dt \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (w-z)^n \int_D \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z,2\delta}} \frac{f(x,s)}{(s-z)^{n+1}} ds \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (w-z)^n \int_D \frac{f^{(n)}(x,z)}{n!} dx.
\end{aligned}
$$

Ovime smo pokazali da $F(w)$ ima Taylorov razvoj oko z koji konvergira na $K(z,\delta)$, pa je posebno F analitička u z. Štoviše, $F^{(k)}(z)$ je jednako $k!$ puta koeficijent uz $(w-z)^k$, odnosno $\int_D f^{(k)}(x,z) dx$, što dovršava dokaz. $\square$

Propozicija 3.5.5. *Funkcija $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$
F(s) = \int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2} \right) \omega(x) dx
$$

je analitička na $\mathbb{C}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je funkcija $F(s)$ analitička na $U_A := \{s \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(s)| < A\}$ za svaki $A > 0$. Za to je dovoljno provjeriti da $f(x,s) := (x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})\omega(x)$ zadovoljava uvjete teorema 3.5.4:

1. $f(x,s)$ je izmjerljiva na $\langle 1,\infty\rangle \times U_A$. Naime, $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ je izmjerljiva kao limes niza neprekidnih (dakle izmjerljivih) funkcija, a $x^{s/2-1}+x^{-s/2-1/2}$ je neprekidna, dakle izmjerljiva.

2. $s \mapsto (x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})\omega(x)$ je očito analitička na U_A za svaki fiksni x.

3. Za $x \in \langle 1,\infty\rangle$ najprije imamo

$$0 \le \omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi x}}{e^{\pi(n^2-1)x}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi x}}{1+\pi(n^2-1)x} \le e^{-\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2-1} < 2e^{-\pi x},$$

a zatim, za $x \in \langle 1,\infty\rangle$ i $s \in U_A$ vrijedi

$$\left|x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}\right| \le x^{A/2-1} + x^{-(A+1)/2} \le 2x^{A/2-1}.$$

Dakle

$$|f(x,s)| \le 4e^{-\pi x} x^{A/2-1} =: M(x).$$

Nadalje,

$$\int_1^{\infty} M(x)dx \le 4\int_0^{\infty} e^{-x} x^{A/2-1} dx \le 4\Gamma\left(\frac{A}{2}\right) < \infty.$$

Dakle svi uvjeti teorema 3.5.4 su zadovoljeni, pa je $F(s) = \int_1^{\infty} f(x,s)dx$ analitička na U_A. □

Propozicije (3.5.3) i (3.5.5) impliciraju da funkcija

$$\xi(s) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s(s-1)\int_1^{\infty} \left(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2}\right)\omega(x)dx \tag{3.13}$$

ima analitičko proširenje na cijeli $\mathbb{C}$, no nas zanima što možemo zaključiti o analitičkom proširenju Riemannove zeta funkcije kada izrazimo $\zeta(s)$ preko $\xi(s)$ koristeći (3.5.3). U tu svrhu sada kratko analiziramo gama funkciju, odnosno njeno analitičko proširenje.

Spomenuli smo da gama funkcija ima analitičko proširenje na $\mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}_0\}$ dobiveno formulom $\Gamma(z) := \Gamma(z+1)/z$. Ona omogućava da odredimo reziduume gama funkcije u nepozitivnim cijelim brojevima:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(\Gamma,0) &= \lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\Gamma(z+1)}{z} = 1,\\
\operatorname{res}(\Gamma,-n) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{<0}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da su svi polovi gama funkcije reda 1. Sada postaje korisna Eulerova formula refleksije za gama funkciju

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

iz koje slijedi da ona nema nultočaka za $\mathrm{Re}(s) > 0$ (a onda ni za ostale kompleksne brojeve zbog $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$)[1]. Kako su svi polovi reda 1, a nultočaka nema, slijedi da je recipročna gama funkcija

$$z \mapsto \begin{cases} \Gamma(z)^{-1}, & -z \notin \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

analitička na $\mathbb{C}$. Ovime smo dokazali da je analitičko proširenje Riemannove zeta funkcije

$$\zeta(s) := \frac{\xi(s)\pi^{s/2}/\Gamma(\frac{1}{2}s+1)}{s-1}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{3.14}$$

dobro definirano te da je brojnik analitička funkcija. Slijedi da $\zeta(s)$ ima pol reda 1 u $s = 1$, no iz formule (3.14) nije jednostavno odrediti $\mathrm{res}(\zeta, 1)$, pa radi kompletnosti navodimo i dokaz tvrdnje $\mathrm{res}(\zeta, 1) = 1$ koji slijedi iz druge formule za analitičko proširenje Riemannove zeta funkcije na poluravninu $\mathrm{Re}(s) > 0$. Naravno, teorem (3.5.1) garantira da će se ta druga formula podudarati s (3.14)

Propozicija 3.5.6. *Za svaki $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ vrijedi formula*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s),$$

gdje je ϕ holomorfna funkcija za $Re(s) > 0$. Dakle $\zeta(s)$ ima analitičko proširenje na $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\}$ s polom reda 1 i reziduumom 1 u $s = 1$.

Dokaz. Za $\mathrm{Re}(s) > 1$ imamo

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} x^{-s}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} x^{-s}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx.$$

Sada definiramo $\phi_n(s) := \int_n^{n+1}(n^{-s} - x^{-s})dx$. Najprije primijetimo da je $\phi_n(s)$ holomorfna na $\mathbb{C}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Naime, za $s \neq 1$ imamo

$$\phi_n(s) = n^{-s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s},$$

[1] $\Gamma(n) = (n-1)!$ za $n \in \mathbb{N}$, pa ni tu nema nultočaka

što je očito holomorfna funkcija na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a za $s = 1$ dovoljno je pokazati da je $\psi_n(s) := \int_n^{n+1} x^{-s} dx$ cijela funkcija, što možemo direktno provjeriti koristeći Cauchy-Riemannove uvjete i sljedeći zapis:

$$\psi_n(a + bi) = \underbrace{\int_n^{n+1} x^{-a} \cos(b \ln x) dx}_{u(a,b)} + i \underbrace{\int_n^{n+1} x^{-a} \sin(-b \ln x) dx}_{v(a,b)}.$$

Nadalje, za svaki $s \in \mathbb{C}$ i $x \in [n, n+1]$ vrijedi

$$|n^{-s} - x^{-s}| = \left| \int_n^x s t^{-s-1} dt \right| \leq \int_n^x \frac{|s|}{t^{1+\mathrm{Re}(s)}} dt \leq \frac{|s|}{n^{1+\mathrm{Re}(s)}},$$

pa je

$$|\phi_n(s)| \leq \int_n^{n+1} |n^{-s} - x^{-s}| ds \leq \frac{|s|}{n^{1+\mathrm{Re}(s)}},$$

što znači da za $\mathrm{Re}(s) > 0$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{1+\mathrm{Re}(s)}} < \infty.$$

Sada Weierstrassov M-test kaže da red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ konvergira uniformno prema nekoj funkciji $\phi(s)$, a kako niz holomorfnih funkcija koji uniformno konvergira na otvorenom skupu mora konvergirati holomorfnoj funkciji, slijedi da je $\phi(s)$ holomorfna za $\mathrm{Re}(s) > 0$. □

3.6 Fraktalni sprejevi

Fraktalni sprejevi su prirodan višedimenzionalan analog fraktalnim strunama koji služi kao alat za promatranje raznih tvrdnji o spektru (i geometriji) bubnjeva s fraktalnim rubom u $\mathbb{R}^d$.

Definicija 3.6.1. *Fraktalni sprej Ω u $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) je neprazan ograničen otvoren skup $B \subset \mathbb{R}^d$ (zvan bazni oblik), skaliran fraktalnom strunom $\mathcal{L}$. Drugim riječima, fraktalni sprej strune $\mathcal{L}$ na B (ili s baznim oblikom B) je svaki ograničen otvoren skup Ω u $\mathbb{R}^d$ koji je disjunktna unija otvorenih skupova Ω_j, $j = 1, 2, \ldots$, gdje je Ω_j sukladan s $l_j B = \{l_j x : x \in B\}$ za svaki j.*

Napomena 3.6.2. *Primijetimo da fraktalnu strunu $\mathcal{L} = (l_j)_{j=1}^{\infty}$ možemo promatrati kao fraktalni sprej od $\mathcal{L}$ s baznim oblikom $B = \langle 0, 1 \rangle$.*

Neka je $(\lambda_k(B))_{k=1}^{\infty}$ rastući niz nenul svojstvenih vrijednosti (brojenih onoliko puta kolika je njihova kratnost) operatora $-\Delta = -\sum_{j=1}^{d} \partial^2/\partial x_j^2$ na B, odnosno

$$0 < \lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \ldots \leq \lambda_k(B) \leq \ldots \to \infty, \quad \text{kako } k \to \infty.$$

Tada su (normalizirane) frekvencije operatora Δ na B brojevi $f_k = f_k(B) = \pi^{-1}\sqrt{\lambda_k(B)}$ (za $k = 1, 2, \ldots$) i spektralna zeta funkcija od B je

$$\zeta_B(s) := \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(B))^{-s} = \pi^s \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k(B))^{-s/2}.$$

Ukupna kratnost frekvencije f dana je formulom

$$\begin{aligned} w_f^{(\nu)} &= \left|(k, j) : f = f_k(B) \cdot l_j^{-1}\right| \\ &0 w_{f_1(B)/f} + w_{f_2(B)/f} + \ldots . \end{aligned}$$

Može se dokazati (vidi [5], poglavlje 1.4) da spektralna zeta funkcija $\zeta_\nu(s)$ fraktalnog spreja, koja je dana formulom

$$\zeta_\nu(s) = \sum_f w_f^{(\nu)} f^{-s}$$

zadovoljava jednadžbu

$$\zeta_\nu(s) = \zeta_{\mathcal{L}}(s) \cdot \zeta_B(s).$$

Primjerice, ako je $B \subset \mathbb{R}^d$ d-dimenzionalna kocka $\langle 0, 1\rangle^d$, kojoj identificiramo nasuprotne strane promatramo tako da operator Δ ima periodične rubne uvjete na B, tada

$$\zeta_B(s) = \zeta_d(s) = \sum_{(n_1,\ldots,n_d)\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} (n_1^2 + \ldots + n_d^2)^{-s/2}.$$

Bibliografija

[1] Katie Barich, *Proving completeness of the Hausdorff induced metric space*, https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/SeniorProject_KatieBarich.pdf, Zadnje posjećeno 13. veljače 2024.

[2] Kai Seng Chou, *Lecture notes in measure theory*, 2014, https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1415/math5011/MATH5011_Chapter_3.2014.pdf, Zadnje posjećeno 10. veljače 2024.

[3] R. Courant i D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Wiley, 1991.

[4] John Hutchinson, *Fractals and Self-Similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747, ISSN 0022-2518.

[5] M.L. Lapidus i M. van Frankenhuijsen, *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions: Geometry and Spectra of Fractal Strings*, Springer Monographs in Mathematics, Springer New York, 2007, ISBN 9780387352084, https://books.google.hr/books?id=bV_TM3lAdQUC.

[6] László Stachó, *On the volume function of parallel sets*, Acta Sci. Math. (Szeged) **38** (1976), 365–374.

[7] W.A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Wiley, 2007, ISBN 9780470054567, https://books.google.hr/books?id=PihAPwAACAAJ.

Sažetak

U ovom radu prezentiramo početak teorije geometrije obične fraktalne strune te ju motiviramo proučavanjem Dirichletovih svojstvenih vrijednosti. U prvom poglavlju uvodimo nekoliko načina pridruživanja dimenzije fraktalnoj struni i dokazujemo njihova osnovna svojstva. Zatim analiziramo geometrijsku zeta funkciju i kompleksne dimenzije fraktalne strune. U drugom poglavlju obrađujemo poseban slučaj sebi-sličnih fraktalnih struna te ih povezujemo sa sebi-sličnim skupovima i na kraju navodimo njihove strukturne teoreme. U trećem poglavlju proučavamo valnu jednadžbu i svojstva Dirichletovih svojstvenih vrijednosti za određene rubne uvjete te analiziramo njihovu asimptotiku za jednostavne domene, motivirajući promatranje domena s fraktalnim rubom. Na kraju poglavlja definiramo spektralnu zeta funkciju strune, povezujemo ju s Riemannovom zeta funkcijom, za koju nalazimo meromorfno proširenje na kompleksnoj ravnini te dokazujemo Weylov asimptotski zakon za fraktalnu strunu.

Summary

In this thesis, we present the start of the theory of fractal string geometry and motivate it by studying Dirichlet eigenvalues. In the first chapter, we look at some of the ways to assign a dimension to a fractal string and prove basic properties of each one. Next, we analyze geometric zeta function and complex dimensions of a fractal string. In the second chapter, we study the case of self-similar fractal strings by connecting them with self-similar sets and then state their structural theorems. In the third chapter we examine the wave equation and properties of Dirichlet eigenvalues, after which we look at their asymptotic behaviour for simple domains, motivating the study of domains with fractal boundary. In the end, spectral zeta function of a fractal string is defined and connected to the Riemann zeta function, which we find the meromorphic continuation on the complex plane for, and then prove Weyl's asymptotic law for fractal strings.

Životopis

Rođen sam 7. kolovoza 1999. u Rijeci te 2004. godine selim u Kastav, gdje završavam Osnovnu školu "Milan Brozović". Nakon toga upisujem Gimnaziju Andrije Mohorovičića u Rijeci. Tijekom osnovne i srednje škole osvojio sam nekoliko nagrada na raznim natjecanjima, uključujući prvo mjesto na državnom natjecanju iz matematike u 8. razredu te dvije brončane medalje i jednu zlatnu medalju na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem 2018. godine te se nastavljam natjecati na studentskim natjecanjima, a najveći uspjeh mi je prva nagrada na međunarodnom studentskom natjecanju iz matematike IMC 2020. godine. Diplomski studij teorijske matematike upisujem 2021. godine te tijekom cijelog studiranja obavljam volontersku aktivnost držanja predavanja mlađim natjecateljima.