Teorijski aspekti integrabilnosti

Kruhoberec, Karla

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:062387

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Karla Kruhoberec

TEORIJSKI ASPEKTI INTEGRABILNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću na strpljenju, posvećenom vremenu i pruženoj pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.

Hvala Domagoju na ljubavi, strpljenju i razumijevanju. Uz tebe je sve lakše.

Hvala mojim prijateljima koji su uvijek bili uz mene, u svim lijepim, ali i malo manje lijepim trenutcima. Vaše prijateljstvo puno mi znači.

I za kraj, najveće hvala ide mojoj obitelji na bezuvjetnoj ljubavi i podršci koju su mi pružili tijekom studiranja. Hvala na svakoj žrtvi i odricanju. Bez vas ne bih bila tu gdje jesam.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo neke aspekte integrabilnosti.

U prvom poglavlju definiramo omeđenu funkciju te zatim definiramo pojmove gornje i donje Darbouxove sume funkcije na segmentu. Zatim definiramo donji i gornji integral te pojam integrabilne funkcije na segmentu. Dajemo primjere integrabilnih funkcija te dokazujemo da je donji integral funkcije f na $[a, c]$ jednak zbroju donjeg integrala funkcije f na $[a, b]$ i donjeg integrala funkcije f na $[b, c]$ pri čemu je $a < b < c$. Nadalje, dokazujemo da isto vrijedi za gornje integrale pri čemu nalazimo vezu između donjeg integrala funkcije f i gornjeg integrala funkcije $-f$. Na kraju dokazujemo da je svaka donja Darbouxova suma funkcije f manja ili jednaka od svake gornje Darbouxove sume funkcije f, a što nas vodi do zaključka da je donji integral od f manji ili jednak od gornjeg integrala od f.

U drugom poglavlju proučavamo neprekidne funkcije. Dokazujemo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu uniformno neprekidna. Nadalje, dokazujemo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu omeđena te da je, čak štoviše, integrabilna. Dajemo primjere funkcije na segmentu koja je integrabilna, ali nije neprekidna. Na kraju dokazujemo da je integral funkcije f na $[a, b]$ manji ili jednak od integrala funkcije g na $[a, b]$ ako je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Dokazujemo i da vrijedi stroga nejednakost između integrala ako su funkcije neprekidne te ako je $f(x_0) < g(x_0)$ za neki $x_0 \in [a, b]$.

Poglavlje 1

Integrabilne funkcije

1.1 Omeđene funkcije

Definicija 1.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a gornja međa skupa S ako vrijedi $x \leq a, \forall x \in S$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S odozgo omeđen ako ima gornju među. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a supremum skupa S ako vrijedi:*

1) $x \leq a, \forall x \in S$

2) $a \leq b$, za svaku gornju među b skupa S.

Primjer 1.1.2. *Ako supremum skupa S postoji, on je jedinstven. Pretpostavimo da su a_1 i a_2 supremumi skupa S. Pošto je a_1 supremum od S, a a_2 gornja međa od S, vrijedi $a_1 \leq a_2$. Posve analogno dobivamo $a_2 \leq a_1$. Stoga je $a_1 = a_2$. Ovo znači da je supremum skupa, ako postoji, jedinstven. Ako supremum skupa S postoji onda ga označavamo sa* $\sup S$.

Primjer 1.1.3. *Neka je $S = \langle -\infty, 0\rangle$. Tvrdimo da je 0 supremum skupa S. Očito je 0 gornja međa skupa S. Pretpostavimo da je b gornja međa skupa S. Želimo dokazati da je $0 \leq b$. Pretpostavimo suprotno, odnosno $b < 0$. Tada slijedi da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $b < x < 0$. Iz $x < 0$ slijedi da je $x \in S$. Budući da je b gornja međa od S, vrijedi $x \leq b$. Ovo je nemoguće zbog $b < x < 0$. Stoga je $0 \leq b$. Time smo dokazali da je 0 supremum skupa S.*

Aksiom potpunosti
Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in A$ i za svaki $y \in B$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \leq z$ za svaki $x \in A$ i $z \leq y$ za svaki $y \in B$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je G skup svih gornjih međa od S. Budući da je S odozgo omeđen, postoji gornja međa a od S pa slijedi $a \in G$. Stoga je $G \neq \emptyset$. Iz definicije od G jasno je da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in G$. Prema aksiomu potpunosti slijedi da postoji $z \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \leq z, \forall x \in S$ i $z \leq y, \forall y \in G$. Iz prve nejednakosti slijedi da je z gornja međa od S, a iz druge nejednakosti slijedi da je $z \leq b$ za svaku gornju među b od S. Prema tome z je supremum skupa S. □

Definicija 1.1.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a donja međa skupa S ako vrijedi $a \leq x, \forall x \in S$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S odozdo omeđen skup ako ima donju među. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a infimum skupa S ako vrijedi:*

1) $a \leq x, \forall x \in S$

2) $b \leq a$, *za svaku donju među b skupa S.*

Primjer 1.1.6. *Ako infimum skupa S postoji, onda je on jedinstven. Pretpostavimo da su a_1 i a_2 infimumi skupa S. Pošto je a_1 infimum od S, a a_2 donja međa od S, vrijedi $a_2 \leq a_1$. Posve analogno dobivamo $a_1 \leq a_2$. Stoga je $a_1 = a_2$. Ovo znači da je infimum skupa, ako postoji, jedinstven. Ako infimum skupa S postoji onda ga označavamo s* $\inf S$.

Primjer 1.1.7. *Neka je $S = \langle 0, \infty \rangle$. Tvrdimo da je 0 infimum skupa S. Jasno je da je 0 donja međa skupa S. Neka je b donja međa skupa S. Želimo dokazati da je $b \leq 0$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $b > 0$. Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $0 < x < b$. Iz ovog vidimo da je $x \in S$ pa je $b \leq x$ jer je b donja međa skupa S. No, ovo je u kontradikciji s $0 < x < b$. Stoga je $b \leq 0$. Prema tome, 0 je infimum skupa S.*

Propozicija 1.1.8. *Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima infimum.*

Dokaz. Neka je D skup svih donjih međa od S. Budući da je S odozdo omeđen, postoji donja međa a od S pa slijedi $a \in D$. Stoga je $D \neq \emptyset$. Iz definicije od D jasno je da je $y \leq x, \forall y \in D, \forall x \in S$. Prema aksiomu potpunosti, postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $y \leq z, \forall y \in D$ i $z \leq x, \forall x \in S$. Iz druge jednakosti slijedi da je z donja međa od S, a iz prve jednakosti slijedi da je $y \leq z$ za svaku donju među y od S. Prema tome, z je infimum skupa S. □

Definicija 1.1.9. *Neka je X podskup od $\mathbb{R}$. Kažemo da je X omeđen skup ako je X omeđen odozdo i odozgo.*

Napomena 1.1.10. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$.*

1) Pretpostavimo da je B odozgo omeđen skup. Tada je i A odozgo omeđen skup.

2) Pretpostavimo da je B odozdo omeđen skup. Tada je i A odozdo omeđen skup.

3) Pretpostavimo da je B omeđen skup. Tada je i A omeđen skup.

Napomena 1.1.11. *Neka su A i B neprazni odozgo omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $\sup A \leq \sup B$. Naime $\sup B$ je gornja međa od B pa je $\sup B$ gornja međa od A. Iz definicije supremuma od A slijedi $\sup A \leq \sup B$.*

Napomena 1.1.12. *Neka su A i B neprazni odozdo omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $\inf B \leq \inf A$. To vidimo slično kao u napomeni 1.1.11. Naime, $\inf B$ je donja međa od B pa je $\inf B$ donja međa od A. Iz definicije infimuma od A slijedi $\inf B \leq \inf A$.*

Propozicija 1.1.13. *Neka je X podskup od $\mathbb{R}$. Tada je X omeđen skup ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da je $|x| \leq M, \forall x \in X$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X omeđen skup. Tada postoji gornja međa a skupa X i postoji donja međa b skupa X. Prema tome, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$b \leq x \tag{1.1}$$

i

$$x \leq a.$$

Definirajmo $M := \max\{|b|, |a|\}$. Neka je $x \in X$. Tada je $x \leq a \leq |a| \leq M$, dakle $x \leq M$. S druge strane, koristeći (1.1) dobivamo $-x \leq -b \leq |-b| \leq |b| \leq M$, dakle $-x \leq M$. Prema tome, imamo $x \leq M$ i $-x \leq M$. Po definiciji apsolutne vrijednosti slijedi $|x| \leq M$. Stoga je $|x| < M + 1$. Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi $|x| < M + 1$. Iz definicije od M jasno je da je $M \geq 0$, stoga je $M + 1 > 0$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $M > 0$ takav da je $|x| \leq M, \forall x \in X$. Iz ovoga slijedi da je $-M \leq x \leq M, \forall x \in X$. Ovo znači da je $-M$ donja međa skupa X, a da je M gornja međa skupa X. Prema tome, X je omeđen skup. □

Definicija 1.1.14. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f omeđena funkcija ako je skup $\{f(x) : x \in S\}$ omeđen.*

Napomena 1.1.15. *Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{R}$ te da je $f : S \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Neka je $T \subseteq S, T \neq \emptyset$. Tada je $f\big|_T(x) : T \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Naime vrijedi $\{f\big|_T(x) \mid x \in T\} = \{f(x) \mid x \in T\} \subseteq \{f(x) \mid x \in S\}$ pa iz napomene 1.1.10. 3) slijedi da je $\{f\big|_T(x) \mid x \in T\}$ omeđen skup. Prema tome $f\big|_T : T \to \mathbb{R}$ je omeđena funkcija.*

Definicija 1.1.16. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Tada za konačan niz $x_0, \ldots, x_n$ kažemo da je subdivizija segmenta $[a, b]$.*

Definicija 1.1.17. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $T \subseteq S$. Kažemo da je funkcija f omeđena na skupu T ako je skup $\{f(x) : x \in T\}$ omeđen. Uočimo da ako je T neprazan skup vrijedi sljedeća ekvivalencija: f je omeđena na T ako i samo ako je $f\big|_T : T \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.*

Definicija 1.1.18. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da je f omeđena na $[a, b]$. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Za $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ vrijedi da je $[x_i, x_{i+1}] \subseteq [a, b]$ pa imamo da je f omeđena na $[x_i, x_{i+1}]$, tj. skup $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ je omeđen pa definiramo*

$$m_i := inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

i

$$M_i := sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Definirajmo

$$s := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

te

$$S := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Za s kažemo da je donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ (određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$), a za S kažemo da je gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ (određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$).

Propozicija 1.1.19. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da je f omeđena na $[a, b]$. Neka je D skup svih donjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$ te neka je G skup svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$. Tada je skup D odozgo omeđen, a skup G odozdo omeđen.*

Dokaz. Budući da je funkcija f omeđena na $[a, b]$, postoji gornja međa K skupa $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Dakle, za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $f(x) \leq K$. Neka je $s \in D$. Tada postoji subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$, pri čemu je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Neka je $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tada imamo

$$m_i \leq f(x_i) \leq K.$$

Prema tome $m_i \leq K, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} K(x_{i+1} - x_i) \\ &= K \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= K(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= K(x_n - x_0) = K(b - a). \end{aligned}$$

Dakle, $s \leq K(b-a)$. Time smo dokazali da je $K(b-a)$ gornja međa skupa D.

S druge strane iz činjenice da je $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ omeđen slijedi da postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da je $L \leq f(x), \forall x \in [a,b]$. Neka je $S \in G$. Tada postoji subdivizija $x_0, \dots, x_n$ segmenta $[a,b]$ takva da je $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$, pri čemu za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi

$$M_i \geq f(x_i) \geq L,$$

odnosno $M_i \geq L$ pa imamo

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} L(x_{i+1} - x_i) \\ &= L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= L(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= L(x_n - x_0) = L(b - a). \end{aligned}$$

Prema tome $S \geq L(b-a)$ iz čega vidimo da je $L(b-a)$ donja međa skupa G. □

1.2 Integrabilnost

Definicija 1.2.1. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija pri čemu je $X \subseteq \mathbb{R}$, te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je f omeđena na $[a,b]$. Neka je D skup svih donjih Darbouxovih suma* *od f na $[a,b]$ te neka je G skup svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a,b]$. Prema prethodnoj propoziciji D je omeđen odozgo, a G je omeđen odozdo. Očito su ovi skupovi neprazni. Definiramo $I_*(f;a,b) = supD$ i $I^*(f;a,b) = infG$. Za $I_*(f;a,b)$ kažemo da je donji integral funkcije f na $[a,b]$, a za $I^*(f;a,b)$ kažemo da je gornji integral funkcije f na $[a,b]$.*

Definicija 1.2.2. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, te neka su $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je f omeđena na $[a,b]$. Ako je $I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b)$, onda kažemo da je funkcija f integrabilna na $[a,b]$. U tom slučaju za broj $I_*(f;a,b)$ kažemo da je integral funkcije f na $[a,b]$ te ga označavamo s $\int_a^b f$ ili $\int_a^b f(x)dx$.*

1.3 Primjeri integrabilnih funkcija

Primjer 1.3.1. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$, neka je $k \in \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = k, \forall x \in X$.Pretpostavimo da su $a,b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da je $[a,b] \subseteq X$. Dokažimo da je f integrabilna na $[a,b]$.*

Očito je $\{f(x)|x \in [a,b]\} = \{k\}$, dakle f je omeđena na $[a,b]$. Neka je $x_0,...,x_n$ subdivizija segmenta $[a,b]$. Za donju Darbouxovu sumu s određenu ovom subdivizijom vrijedi

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

pri čemu je $m_i = inf\{f(x)|x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ za svaki $i \in \{0,...,n-1\}$. Uočimo da je $m_i = inf\{k\}$, dakle $m_i = k, \forall i \in \{0,...,n-1\}$. Stoga je

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{n-1} k(x_{i+1} - x_i) \\ &= k\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) \\ &= k(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= k(x_n - x_0) \\ &= k(b-a). \end{aligned}$$

Dakle, $s = k(b-a)$. Prema tome $D = \{k(b-a)\}$, pri čemu je D skup svih Darbouxovih suma funkcije f na $[a,b]$. Slijedi da je $I_*(f;a,b) = k(b-a)$. Na isti način dobivamo da je $I^*(f;a,b) = k(b-a)$. Zaključujemo da je $I_*(f;a,b) = I^*(f;a,b)$ pa je prema tome f integrabilna na $[a,b]$ te vrijedi $\int_a^b f = k(b-a)$.

Definicija 1.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koja je integrabilna na $[a, b]$. Tada naprosto kažemo da je f integrabilna funkcija.*

Propozicija 1.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je a gornja međa skupa S. Tada je a supremum skupa S ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a supremum skupa S. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $a - \varepsilon \geq x$. Iz toga slijedi da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa S. Pošto je a supremum skupa S vrijedi $a \leq a - \varepsilon$, što je nemoguće. Prema tome postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. Želimo dokazati da je tada a supremum skupa S. Prema pretpostavci propozicije, a je gornja međa od S. Neka je b gornja međa skupa S. Tvrdimo da je $a \leq b$. Pretpostavimo suprotno, tj. $a > b$. Uzmimo $\varepsilon = a - b$. Znamo da je $\varepsilon > 0$ pa prema pretpostavci postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. Iz definicije od ε slijedi da je $a - \varepsilon = b$ pa je $b < x$ što nije moguće jer je b gornja međa od S. Time smo dokazali da je $a \leq b$, tj. da je a supremum skupa S. □

Definicija 1.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $M \in S$. Ako vrijedi $x \leq M, \forall x \in S$ onda kažemo da je M maksimum skupa S.*

Iz ovog (i jedinstvenosti supremuma) zaključujemo da je maksimum skupa, ako postoji, jedinstven. Maksimum skupa S označavamo s $\max S$. Uočimo sljedeće: ako je M maksimum skupa S, onda je M supremum skupa S. Naime, po definiciji maksimuma imamo da je M gornja međa od S, a za svaku gornju među b od S vrijedi da je $M \leq b$ jer je $M \in S$.

Definicija 1.3.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $m \in S$. Ako vrijedi $m \leq x, \forall x \in S$ onda kažemo da je m minimum skupa S.*

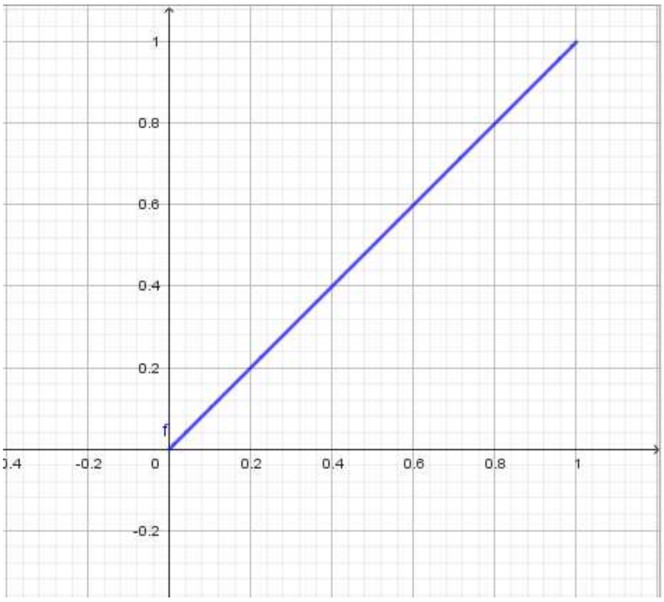
Također, minimum skupa, ako postoji, je jedinstven. Minimum skupa$S$ označavamo s $\min S$. Analogno kao u slučaju maksimuma vidimo sljedeće: ako je m minimum skupa S, onda je m infimum skupa S.

Propozicija 1.3.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je a donja međa skupa S. Tada je a infimum od S ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a infimum od S. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x \geq a + \varepsilon$. Iz toga slijedi da je $a + \varepsilon$ donja međa skupa S. Pošto je a infimum skupa S slijedi da je $a \geq a + \varepsilon$ što nije moguće. Prema tome postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$. Tvrdimo da je tada a infimum od S. Neka je b donja međa skupa S. Želimo dokazati da je $a \geq b$. Pretpostavimo suprotno, tj. $b > a$. Definirajmo $\varepsilon = b - a$. Očito je $a + \varepsilon = b$. Postoji $x \in S$

takav da je $x < a + \varepsilon$, dakle $x < b$ što je u kontradikciji s time da je b donja međa skupa S. Prema tome a je infimum skupa S. □

Primjer 1.3.7. *Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = x, \forall x \in [0,1]$. Dokažimo da je f integrabilna funkcija.*



Slika 1.1: Graf funkcije f.

Vrijedi $\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = \{x \mid x \in [0,1]\} = [0,1]$ pa je očito da je f omeđena na $[0,1]$. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[0,1]$. Za $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ neka je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Tada je donja Darbouxova suma s funkcije f na $[0,1]$ određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$ jednaka $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$. Za svaki $i \in \{0, ..., n-1\}$ imamo

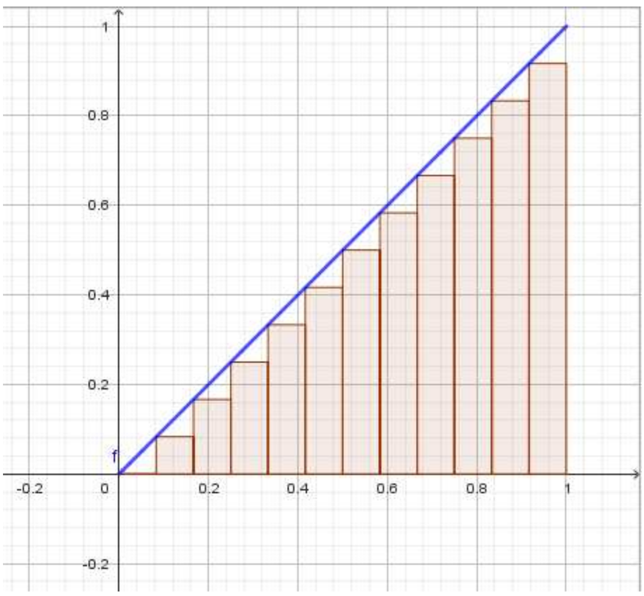
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \inf[x_i, x_{i+1}] = x_i.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je x_i minimum skupa $[x_i, x_{i+1}]$. Dakle, $m_i = x_i, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Prema tome $s = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1} - x_i)$. Neka je $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Iz $x_i < x_{i+1}$ slijedi $2x_i < x_{i+1} + x_i$ pa je $x_i < \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$. Množenjem ove nejednakosti s $(x_{i+1} - x_i)$ dobivamo da je

$x_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{x_{i+1}+x_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$. *Stoga imamo*

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1} - x_i) \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} + x_i}{2}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2 - x_i^2) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) \\ &= \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, $s < \frac{1}{2}$. *Time smo pokazali da je* $\frac{1}{2}$ *gornja međa skupa D, gdje je D skup svih donjih Darbouxovih suma funkcije* f *na* $[0, 1]$.



Slika 1.2: Prikaz donje Darbouxove sume funkcije f na segmentu $[0, 1]$ za $n = 12$.

Dokažimo sada da je $\frac{1}{2}$ *supremum skupa D. U tu svrhu dovoljno je prema propoziciji 1.3.3 dokazati da za svaki* $\varepsilon > 0$, *postoji* $s \in D$ *takav da je* $\frac{1}{2} - \varepsilon < s$. *Neka je* $\varepsilon > 0$. *Odaberimo* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{n} < 2\varepsilon$. *Tada je*

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Definirajmo konačan niz $x_0, ..., x_n$ *na sljedeći način:* $x_i = \frac{i}{n}$ *za svaki* $i \in \{0, ..., n\}$. *Tada je* $x_0, ..., x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$. *Neka je s donja Darbouxova suma od f na* $[0, 1]$ *s obzirom na ovu subdiviziju. Prema dokazanom vrijedi* $s = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1} - x_i)$ *pa je*

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Dakle, $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

Iz (1.2) slijedi da je $-\varepsilon < -\frac{1}{2n}$ *pa je* $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, *tj.* $\frac{1}{2} - \varepsilon < s$. *Time smo dokazali da za* $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in D$ *takav da je* $\frac{1}{2} - \varepsilon < s$. *Stoga je* $\frac{1}{2}$ *supremum skupa D. Dakle,* $I_*(f; 0, 1) = \frac{1}{2}$.

$\{f(x) \mid x \in [0, 1]\} = \{x \mid x \in [0, 1]\} = [0, 1]$ *pa je očito da je f omeđena na* $[0, 1]$. *Neka je* $x_0, \ldots, x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$. *Za* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *neka je* $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. *Tada je gornja Darbouxova suma S funkcije f na* $[0, 1]$ *s obzirom na subdiviziju* $x_0, \ldots, x_n$ *jednaka* $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$. *Za svaki* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *imamo*

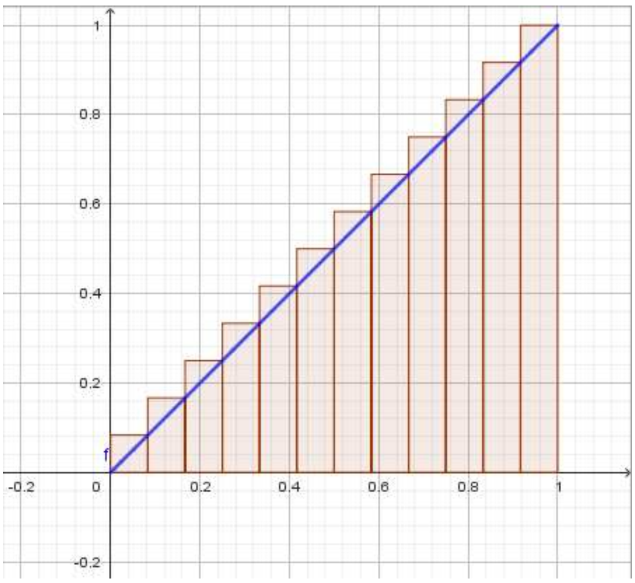
$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} = \sup[x_i, x_{i+1}] = x_{i+1}.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je x_{i+1} *maksimum skupa* $[x_i, x_{i+1}]$. *Slijedi,* $M_i = x_{i+1}, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. *Prema tome* $S = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$. *Neka je* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. *Iz* $x_i < x_{i+1}$ *slijedi* $x_i + x_{i+1} < 2x_{i+1}$ *pa je* $x_{i+1} > \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$. *Množenjem ove nejednakosti s* $(x_{i+1} - x_i)$

dobivamo da je $x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) > \frac{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}+x_i)}{2}$. *Stoga imamo*

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \\
&> \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} + x_i}{2}(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^2 - x_i^2) \\
&= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) \\
&= \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, $S > \frac{1}{2}$. *Time smo pokazali da je* $\frac{1}{2}$ *donja međa skupa G, gdje je G skup svih gornjih Darbouxovih suma funkcije* f *na* $[0, 1]$.



Slika 1.3: Prikaz gornje Darbouxove sume funkcije f na segmentu $[0, 1]$ za $n = 12$.

Dokažimo sada da je $\frac{1}{2}$ infimum skupa G. U tu svrhu dovoljno je prema prethodnoj propoziciji dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $S \in G$ takav da je $S < \frac{1}{2} + \varepsilon$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < 2\varepsilon$. Tada je

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Definirajmo konačan niz $x_0, \dots, x_n$ na sljedeći način: $x_i = \frac{i}{n}$ za svaki $i \in \{0, ..., n\}$. Tada je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[0, 1]$. Neka je S gornja Darbouxova suma od f na $[0, 1]$ s obzirom na ovu subdiviziju. Prema dokazanom vrijedi $S = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$ pa je

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Dakle, $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Iz (1.3) slijedi da je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, tj. $S < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Time smo dokazali da za $\forall \varepsilon > 0, \exists S \in G$ takav da je $S < \frac{1}{2} + \varepsilon$. Stoga je $\frac{1}{2}$ infimum skupa G. Dakle, $I^*(f; 0, 1) = \frac{1}{2}$.

Slijedi $I^*(f; 0, 1) = I_*(f; 0, 1) = \frac{1}{2}$, tj. f je integrabilna funkcija i $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Napomena 1.3.8. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.4}$$

Dokažimo ovo indukcijom po n. Očito je da (1.4) vrijedi za $n = 1$. *Pretpostavimo da* (1.4) *vrijedi za neki* $n \in \mathbb{N}$. *Imamo*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6n+6}{6}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, *što znači da tvrdnja vrijedi i za* $n + 1$. *Time smo dokazali da (1.4) vrijedi za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.3.9. *Neka je* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s* $f(x) = x^2$. *Dokažimo da je* f *integrabilna te da je* $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Vrijedi $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\} = \{x^2 \mid x \in [0, 1]\} \subseteq [0, 1]$ *pa je očito da je funkcija* f *omeđena. Neka je* $x_0, \dots, x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$. *Za* $i \in \{0, \dots, n-1\}$ *neka je* $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. *Neka je* $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$. *Iz definicije od* m_i *je jasno da je* $m_i = x_i^2, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. *Stoga je*

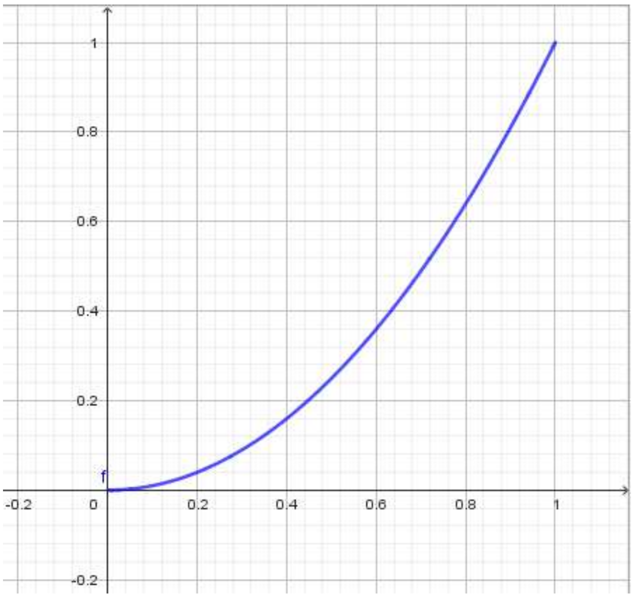
$$s = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2(x_{i+1} - x_i). \tag{1.5}$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $0 \leq a < b$. *Tada je*

$$a^2(b - a) < \frac{b^3 - a^3}{3}. \tag{1.6}$$

Naime imamo

$$3a^2(b - a) = (a^2 + a^2 + a^2)(b - a) < (b^2 + ab + a^2)(b - a) = b^3 - a^3,$$



Slika 1.4: Graf funkcije f.

dakle

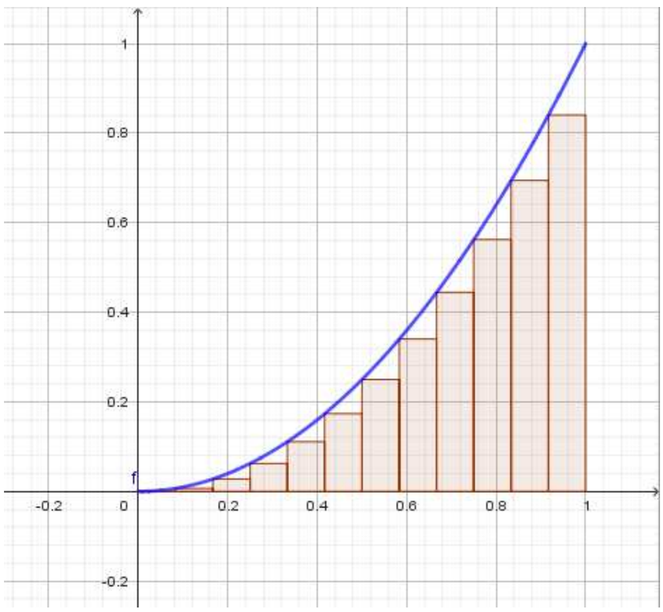
$$3a^2(b-a) < b^3 - a^3$$

pa slijedi (1.6).

Za sve $i \in \{0, ..., n-1\}$ *vrijedi* $0 \leq x_i < x_{i+1}$ *pa prema (1.6) vrijedi* $x_i^2(x_{i+1} - x_i) < \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3}$. *Sada, koristeći (1.5), dobivamo da je*

$$\begin{aligned}
s &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}^3 - x_i^3) \\
&= \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3 + x_2^3 - x_1^3 + \cdots + x_n^3 - x_{n-1}^3) \\
&= \frac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) \\
&= \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Dakle, $s < \frac{1}{3}$. *Time smo dokazali da je* $\frac{1}{3}$ *gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma od* f *na* $[0, 1]$.



Slika 1.5: Prikaz donje Darbouxove sume funkcije f na segmentu $[0, 1]$ za $n = 12$.

Neka je $\varepsilon > 0$. *Odaberimo* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{2n} < \varepsilon$. *Slijedi da je* $3\varepsilon > \frac{3}{2n}$ *pa je* $3\varepsilon > \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n^2}$. *Stoga je* $3\varepsilon > \frac{2}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$ *pa je* $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} > 1 - 3\varepsilon$, *tj.* $(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{2n}) > 1 - 3\varepsilon$. *Dakle* $\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{2n}) > \frac{1}{3} - \varepsilon$. *Neka je* $x_0, ..., x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$ *definirana sa* $x_i = \frac{i}{n}$ *za* $i \in \{0, ..., n\}$. *Neka je* s *donja Darbouxova suma funkcije* f *na* $[0, 1]$ *određena* *subdivizijom* $x_0, ..., x_n$. *Tada, koristeći napomenu 1.3.8, dobivamo*

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \\ &> \frac{1}{3} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $s > \frac{1}{3} - \varepsilon$. *Prema tome, za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji donja Darbouxova suma s funkcije* f *na* $[0, 1]$ *takva da je* $\frac{1}{3} - \varepsilon < s$. *Iz propozicije 1.3.3 zaključujemo da je* $\frac{1}{3}$ *supremum skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije* f *na* $[0, 1]$. *Prema tome* $I_*(f; 0, 1) = \frac{1}{3}$.

Neka je $x_0, ..., x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$. *Neka je* S *gornja Darbouxova suma od* f *na* $[0, 1]$ *određene tom subdivizijom. Imamo* $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 (x_{i+1} - x_i)$, *gdje je* $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i+1} - x_i]\}$, *za svaki* $i \in \{0, ..., n-1\}$. *Uočimo da je* $M_i = x_{i+1}^2$ *za svaki* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. *Stoga je* $S = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 (x_{i+1} - x_i)$. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $0 \leq a < b$. *Tvrdimo da je*

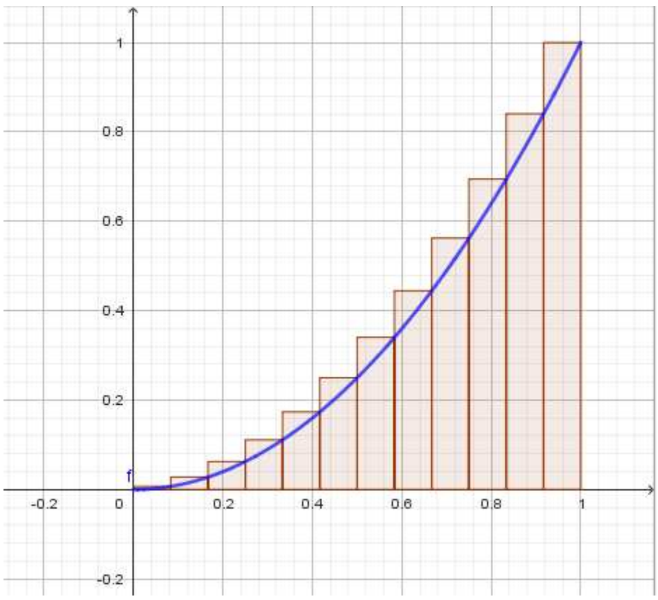
$$b^2(b - a) > \frac{b^3 - a^3}{3}. \tag{1.7}$$

Naime nejednakost (1.7) je ekvivalentna s $3b^2(b - a) > b^3 - a^3$, *što je ekvivalentno s* $3b^2(b-a) > (b-a)(b^2+ab+a^2)$, *odnosno s* $3b^2 > (b^2+ab+a^2)$, *a to je istina jer je* $b > a$.

Prema tome vrijedi (1.7). Koristeći (1.7) dobivamo da je

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 (x_{i+1} - x_i) \\
&> \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^3 - x_i^3) \\
&= \frac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $S > \frac{1}{3}$. *Iz ovog zaključujemo da je* $\frac{1}{3}$ *donja međa skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije* f *na* $[0, 1]$.



Slika 1.6: Prikaz gornje Darbouxove sume funkcije f na segmentu $[0, 1]$ za $n = 12$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. *Za sve* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *definiramo* $x_i = \frac{i}{n}$. *Tada je* $x_0, \ldots, x_n$ *subdivizija segmenta* $[0, 1]$. *Neka je* S *gornja Darbouxova suma od* f *na* $[0, 1]$ *određena ovom* *subdivizijom. Vrijedi*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^2 (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$S = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right). \tag{1.8}$$

Zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[0,1]$ *takva da vrijedi (1.8).*

Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right) < \frac{1}{3} + \varepsilon. \tag{1.9}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{5}{2n}+\frac{3}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{7}{2n}+\frac{11}{2n^2}+\frac{3}{n^3}\right) = \frac{1}{3}+\frac{7}{6n}+\frac{11}{6n^2}+\frac{1}{n^3},$$

dakle

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{3}+\frac{7}{6n}+\frac{11}{6n^2}+\frac{1}{n^3} \tag{1.10}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{6}$. Imamo $\frac{7}{6n} = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{n} < \frac{7}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}$. Dakle,

$$\frac{7}{6n} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.11}$$

Nadalje

$$\frac{11}{6n^2} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{n^2} < 2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dakle,

$$\frac{11}{6n^2} = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.12}$$

Također imamo $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}$, *odnosno*

$$\frac{1}{n^3} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.13}$$

Iz (1.11), (1.12) i (1.13) slijedi da je

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{6n} + \frac{11}{6n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

Dakle, $\frac{1}{3} + \frac{7}{6n} + \frac{11}{6n^2} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{3} + \varepsilon$ *pa prema (1.10) vrijedi (1.9).*

Znamo da postoji gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[0,1]$ *takva da vrijedi (1.8). Iz toga i (1.9) slijedi da je $S < 1 + \varepsilon$.*

Zaključak: Za svaki ε postoji gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[0,1]$ *takva da je $S < \frac{1}{3} + \varepsilon$. Iz propozicije 1.3.6 slijedi da je $\frac{1}{3}$ infimum skupa svih gornjih Darbouxovih suma funkcije f na* $[0,1]$. *Stoga je $I^*(f; 0, 1) = \frac{1}{3}$.*

Time smo dokazali da je f integrabilna funkcija te da je $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Propozicija 1.3.10. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$ koji su odozgo omeđeni. Tada je $S \cup T$ odozgo omeđen skup.*

Dokaz. Neka je a gornja međa skupa S, a b gornja međa skupa T. Definirajmo

$$c = \max\{a, b\}.$$

Neka je $x \in S \cup T$. Tada je $x \in S$ ili $x \in T$. Ako je $x \in S$, onda je $x \leq a$ (jer je a gornja međa skupa S) pa zbog $a \leq c$ (što vrijedi prema definiciji od c) imamo $x \leq c$.

Ako je $x \in T$, onda je $x \leq b$ pa zbog $b \leq c$ slijedi $x \leq c$. Time smo dokazali da je $x \leq c$, za svaki $x \in S \cup T$. Prema tome, c je gornja međa skupa $S \cup T$, dakle, $S \cup T$ je odozgo omeđen skup.

□

Propozicija 1.3.11. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$ koji su odozdo omeđeni. Tada je $S \cup T$ odozdo omeđen skup.*

Dokaz. Neka je a donja međa skupa S, a b donja međa skupa T. Definirajmo $c = \min\{a, b\}$. Analogno kao u dokazu prethodne propozicije dobivamo da je c donja međa skupa $S \cup T$.

Prema tome, $S \cup T$ je odozdo omeđen skup. □

Korolar 1.3.12. *Neka su S i T omeđeni skupovi u $\mathbb{R}$. Tada je $S \cup T$ omeđen skup.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prethodne dvije propozicije. □

Propozicija 1.3.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $T_1, T_2 \subseteq S$ takvi da je $T_1 \cup T_2 = S, T_1 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$.*
Tada je f omeđena funkcija ako i samo ako su $f\big|_{T_1}$ i $f\big|_{T_2}$ omeđene funkcije.

Dokaz. Ako je f omeđena funkcija, onda su $f\big|_{T_1}$ i $f\big|_{T_2}$ omeđene funkcije prema napomeni 1.1.15.

Obratno, pretpostavimo da su $f\big|_{T_1}$ i $f\big|_{T_2}$ omeđene funkcije. Iz $S = T_1 \cup T_2$ slijedi da je

$$\{f(x) \mid x \in S\} = \{f(x) \mid x \in T_1\} \cup \{f(x) \mid x \in T_2\}. \tag{1.14}$$

Budući da je $f\big|_{T_1}$ omeđena funkcija, skup $\{f\big|_{T_1}(x) \mid x \in T_1\}$ je omeđen. Očito je $\{f\big|_{T_1}(x) \mid x \in T_1\} = \{f(x) \mid x \in T_1\}$ pa je $\{f(x) \mid x \in T_1\}$ omeđen skup.

Analogno dobivamo da je $\{f(x) \mid x \in T_2\}$ omeđen skup. Iz (1.14) i korolara 1.3.12 slijedi da je $\{f(x) \mid x \in S\}$ omeđen skup.

Prema tome, f je omeđena funkcija. □

Lema 1.3.14. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Tada za svaki $y \in [a, b\rangle$ postoji $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ takav da je $x_i \leq y < x_{i+1}$.*

Dokaz. Definirajmo $j = \max\{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid x_i \leq y\}$. Uočimo da je ova definicija dobra, to jest, skup $\{i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid x_i \leq y\}$ ima maksimum, naime to je očito konačan skup, a neprazan je jer je 0 njegov element, naime vrijedi $x_0 = a \leq y$.

Očito je $x_j \leq y$. Imamo dva slučaja: $j = n-1$ i $j < n-1$.

1.slučaj. $j = n-1$

Tada je $j + 1 = n$, a $y < x_n$ jer je $x_n = b$. Dakle $x_j \leq y < x_{j+1}$.

2.slučaj. $j < n-1$

Tada je $j+1 \leq n-1$, dakle $j+1 \in \{0, \ldots n-1\}$ pa zaključujemo da je $y < x_{j+1}$ (inače bi vrijedilo $x_{j+1} \leq y$ što je nemoguće prema definiciji broja j).

Dakle $x_j \leq y < x_{j+1}$.

U oba slučaja smo dobili da je $x_j \leq y < x_{j+1}$. Time je tvrdnja leme dokazana.

□

1.4 Donji i gornji integral na uniji segmenata

Propozicija 1.4.1. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b < c$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $[a, c] \subseteq X$. Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, c]$. Tada je $I_*(f; a, c) = I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$.*

Dokaz. Neka je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$. Tvrdimo da postoje donja Darbouxova suma s_1 od f na $[a, b]$ te donja Darbouxova suma s_2 od f na $[b, c]$ takve da je $s \le s_1 + s_2$.

Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, c]$ takva da je $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$, gdje je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ za $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Imamo $b \in [a, c\rangle$ pa prema prethodnoj lemi postoji $k \in \{0, \dots, n-1\}$ takav da je $x_k \le b < x_{k+1}$. Imamo dva slučaja: $x_k = b$ i $x_k < b$.

1.slučaj. $x_k = b$

Tada je $x_0, \dots, x_k$ subdivizija segmenta $[a, b]$ i $x_k, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[b, c]$. Neka je s_1 donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određena subdivizijom $x_0, \dots, x_k$ te neka je s_2 donja Darbouxova suma od f na $[b, c]$ određena subdivizijom $x_k, \dots, x_n$. Tada je

$$s_1 = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

i

$$s_2 = \sum_{i=k}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

Iz ovoga je očito da je $s = s_1 + s_2$. Posebno, $s \le s_1 + s_2$.

2.slučaj. $x_k < b$. Tada imamo da je $x_0, \dots, x_k, b$ subdivizija segmenta $[a, b]$ i $b, x_{k+1}, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[b, c]$. Neka je s_1 donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određena subdivizijom $x_0, \dots, x_k, b$ te neka je s_2 donja Darbouxova suma od f na $[b, c]$ određena subdivizijom $b, x_{k+1}, \dots, x_n$. Vrijedi

$$s_1 = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \mu(b - x_k),$$

pri čemu je

$$\mu = \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, b]\}$$

te

$$s_2 = \mu'(x_{k+1} - b) + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

pri čemu je

$$\mu' = \inf\{f(x) \mid x \in [b, x_{k+1}].$$

Očito je $\{f(x) \mid x \in [x_k, b]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ pa iz napomene 1.1.12 slijedi da je $\inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\} \le \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, b]\}$, tj. $m_k \le \mu$. Analogno dobivamo da je $m_k \le \mu'$. Stoga je :

$$m_k(x_{k+1}-x_k) = m_k(x_{k+1}-b+b-x_k) = m_k(x_{k+1}-b)+m_k(b-x_k) \le \mu'(x_{k+1}-b)+\mu(b-x_k).$$

Dakle,

$$m_k(x_{k+1} - x_k) \le \mu'(x_{k+1} - b) + \mu(b - x_k). \tag{1.15}$$

Koristeći (1.15) dobivamo

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + m_k(x_{k+1} - x_k) + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \mu(b - x_k) + \mu'(x_{k+1} - b) + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= s_1 + s_2.
\end{aligned}$$

Dakle, $s \le s_1 + s_2$.

Zaključak: U oba slučaja smo dobili da postoje donje Darbouxove sume s_1 i s_2 od f na $[a, b]$ i $[b, c]$ takve da je $s \le s_1 + s_2$. Po definiciji od $I_*(f; a, b)$ imamo da je $s_1 \le I_*(f; a, b)$. Analogno, $s_2 \le I_*(f; b, c)$. Stoga je

$$s \le I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c). \tag{1.16}$$

Dakle, za svaku donju Darbouxovu sumu s funkcije f na $[a, c]$ vrijedi (1.16). To znači da je $I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$ gornja međa skupa svih donjih Darbouxova suma od f na $[a, c]$. Prema tome, $I_*(f; a, c) \le I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$.

Dokažimo sada sljedeću tvrdnju: Ako je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ te ako je t donja Darbouxova suma funkcije f na $[b, c]$, onda je $s + t$ donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$.

Pretpostavimo da je s donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ te da je t donja Darbouxova suma funkcije f na $[b, c]$. Tada postoje subdivizije $x_0, \dots, x_n$ segmenta $[a, b]$ i $y_0, \dots, y_m$ segmenta $[b, c]$ takve da je $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ i $t = \sum_{i=0}^{m-1} m_i'(x_{i+1} - x_i)$, pri čemu je $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ za $i \in \{0, \dots, n-1\}$ i $m_i' = \inf\{f(x) \mid x \in [y_i, y_{i+1}]\}$ za $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Uočimo da je $x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ subdivizija segmenta $[a, c]$. Neka je ϑ donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$ određena ovom subdivizijom. Tada je

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \sup\{f(x) \mid x \in [x_n, y_1]\} \cdot (y_1 - x_n) + \sum_{i=1}^{m-1} m_i'(y_{i+1} - y_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{m-1} m_i'(y_{i+1} - y_i) \\
&= s + t.
\end{aligned}$$

Dakle, $\vartheta = s + t$, prema tome $s + t$ je donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$.

Dokažimo sada da je $I_*(f; a, c) = I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$.

Pretpostavimo suprotno. Dokazali smo da je $I_*(f; a, c) \leq I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$ pa slijedi da je $I_*(f; a, c) < I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$. Definiramo:

$$\varepsilon = I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) - I_*(f; a, c). \tag{1.17}$$

Tada je $\varepsilon > 0$. Iz definicije donjeg integrala i propozicije 1.3.3 slijedi da postoji donja Darbouxova suma s funkcije f na $[a, b]$ takva da

$$I_*(f; a, b) - \frac{\varepsilon}{2} < s. \tag{1.18}$$

Na isti način zaključujemo da postoji donja Darbouxova suma t funkcije f na $[b, c]$ takva da je

$$I_*(f; b, c) - \frac{\varepsilon}{2} < t. \tag{1.19}$$

Iz (1.18) i (1.19) slijedi da je

$$I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) - \varepsilon < s + t.$$

Prema dokazanom, $s + t$ je donja Darbouxova suma funkcije f na $[a, c]$ pa je $s + t \leq I_*(f; a, c)$. Slijedi

$$I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) - \varepsilon < I_*(f; a, c),$$

tj.

$$I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) - I_*(f; a, c) < \varepsilon.$$

Ovo prema (1.17) znači da je $\varepsilon < \varepsilon$, što je nemoguće.

Zaključak: $I_*(f; a, c) = I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c)$. □

Definicija 1.4.2. *Za $A \subseteq \mathbb{R}$ definiramo skup $-A = \{-x \mid x \in A\}$. Uočimo da je $-(-A) = A$, za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$.*

Napomena 1.4.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Tada je A omeđen skup ako i samo ako je $-A$ omeđen skup.*

Naime, prema propoziciji 1.1.13 vrijedi da je A omeđen ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da $|x| \leq M, \forall x \in A$, što vrijedi ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da $|-x| \leq M, \forall x \in A$, a što vrijedi ako i samo ako je $-A$ omeđen skup.

Lema 1.4.4. *Neka je A neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada je $-\sup A = \inf(-A)$.*

Dokaz. Za svaki $x \in A$ vrijedi $x \leq \sup A$ pa je $-\sup A \leq -x$. To znači da je $-\sup A$ donja međa skupa $-A$ (posebno, $-A$ je odozdo omeđen).

Pretpostavimo da je b donja međa skupa $-A$. Tada je $b \leq -x, \forall x \in A$, što povlači da je $x \leq -b, \forall x \in A$. Stoga je $-b$ gornja međa skupa A pa je $\sup A \leq -b$. To povlači da je $b \leq -\sup A$. Dakle, za svaku donju među b od $-A$ vrijedi da je $b \leq -\sup A$. Time smo dokazali da je $-\sup A$ infimum skupa $-A$, tj. $-\sup A = \inf(-A)$. □

Definicija 1.4.5. *Neka je S skup te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Definiramo funkciju $-f : S \to \mathbb{R}$ s $(-f)(x) = -f(x), \forall x \in S$.*

Lema 1.4.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija te neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je $[a, b] \subseteq S$. Tada je f omeđena na $[a, b]$ ako i samo ako je $-f$ omeđena na $[a, b]$. Nadalje, ako je f omeđena na $[a, b]$, onda je*

$$-\sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \inf\{-f(x) \mid x \in [a, b]\}. \tag{1.20}$$

Dokaz. Definiramo $A = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Tada je $-A = \{-f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Imamo da je f omeđena na $[a, b]$ ako i samo ako je A omeđen skup, a to prema napomeni 1.4.3 vrijedi ako i samo ako je $-A$ omeđen skup, što je ekvivalentno tome da je $-f$ omeđena funkcija.

Pretpostavimo da je f omeđena na $[a, b]$. Tada je A omeđen skup pa iz leme 1.4.4 slijedi $-\sup A = \inf(-A)$, a to je upravo jednakost (1.20). □

Lema 1.4.7. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$, te neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je f omeđena na $[a, b]$. Neka je $S \in \mathbb{R}$. Tada je S gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ ako i samo ako je $-S$ donja Darbouxova suma funkcije $-f$ na $[a, b]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$. Tada postoji subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je $S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$, pri čemu je $M_i =$

$\sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Slijedi $-S = \sum_{i=0}^{n-1}(-M_i)(x_{i+1} - x_i)$, a za svaki $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ prema lemi 1.4.6 vrijedi $-M_i = \inf\{-f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Stoga je $-S$ donja Darbouxova suma funkcije $-f$ na $[a, b]$ (određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$).

Obratno, pretpostavimo da je $-S$ donja Darbouxova suma od $-f$ na $[a, b]$. Tada postoji subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je

$$-S = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \tag{1.21}$$

pri čemu je $m_i = \inf\{-f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Iz leme 1.4.6 slijedi da je $m_i = -\sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, tj. $-m_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Stoga je $\sum_{i=0}^{n-1}(-m_i)(x_{i+1} - x_i)$ gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$. No, prema (1.21) vrijedi $\sum_{i=0}^{n-1}(-m_i)(x_{i+1} - x_i) = S$. Dakle, S je gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$.

□

Propozicija 1.4.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je f omeđena na $[a, b]$. Tada je $I^*(f; a, b) = -I_*(-f; a, b)$.*

Dokaz. Neka je G skup svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$ te neka je D' skup svih donjih Darbouxovih suma od $-f$ na $[a, b]$. Prema lemi 1.5.4 za svaki $S \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$S \in G \iff -S \in D'. \tag{1.22}$$

Ovo znači da je $\{-S \mid S \in G\} \subseteq D'$. Obratnom svaki element od D' možemo napisati u obliku $-S$ za neki $S \in \mathbb{R}$ pa iz (1.22) slijedi da je $S \in G$. Stoga je $D' \subseteq \{-S \mid S \in G\}$. Prema tome, $D' = \{-S \mid S \in G\}$, tj. $D' = -G$. Stoga je $-D' = G$.

Koristeći lemu 1.4.4 dobivamo

$$I^*(f; a, b) = \inf G = \inf(-D') = -\sup D' = -I_*(-f; a, b),$$

dakle,

$$I^*(f; a, b) = -I_*(-f; a, b).$$

□

Propozicija 1.4.9. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b < c$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $[a, b] \subseteq X$. Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, c]$. Tada je $I^*(f; a, c) = I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c)$.*

Dokaz. Koristeći propozicije 1.4.8 i 1.4.1 dobivamo:

$$\begin{aligned} I^*(f; a, c) &= -I_*(-f; a, c) \\ &= -(I_*(-f; a, b) + I_*(-f; b, c)) \\ &= -I_*(-f; a, b) - I_*(-f; b, c) \\ &= I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \end{aligned}$$

Dakle, $I^*(f; a, c) = I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c)$.

□

1.5 Odnos donjih i gornjih Darbouxovih suma

Lema 1.5.1. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da je $[a, b] \subseteq X$. Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te neka su s i S donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ s obzirom na tu subdiviziju. Neka je $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ te neka je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $x_j < y < x_{j+1}$. Očito je $x_0, \ldots, x_j, y, x_{j+a}, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te neka su s' i S' donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ s obzirom na tu subdiviziju. Tada je $s \leq s'$ i $S' \leq S$.*

Dokaz. Za $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ neka je

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

i

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Imamo

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

i

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Definirajmo

$$\mu = \inf\{f(x) \mid x \in [x_j, y]\}$$

i

$$\mu' = \inf\{f(x) \mid x \in [y, x_{j+1}]\}.$$

Vrijedi:

$$s' = \sum_{i=0}^{j-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \mu(y - x_j) + \mu'(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

Očito je

$$\{f(x) \mid x \in [x_j, y]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [x_j, x_{j+1}]\},$$

pa iz napomene 1.1.12 slijedi da je $\mu \geq m_j$. Na isti način zaključujemo da je $\mu' \geq m_j$. Stoga je

$$\begin{aligned}
s' &= \sum_{i=0}^{j-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + \mu(y - x_j) + \mu'(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&\geq \sum_{i=0}^{j-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + m_j(y - x_j) + m_j(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} m_i(x_{i+1} - x_i) + m_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= s.
\end{aligned}$$

Dakle, $s' \geq s$.

Neka je

$$\sigma = \sup\{f(x) \mid x \in [x_j, y]\}$$

i

$$\sigma' = \sup\{f(x) \mid x \in [y, x_{j+1}]\}.$$

Iz napomene 1.1.11 slijedi $\sigma \leq M_j$ i $\sigma' \leq M_j$. Stoga je

$$\begin{aligned}
S' &= \sum_{i=0}^{j-1} M_i(x_{i+1} - x_i) + \sigma(y - x_j) + \sigma'(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{j-1} M_i(x_{i+1} - x_i) + M_j(y - x_j) + M_j(x_{j+1} - y) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} M_i(x_{i+1} - x_i) + M_j(x_{j+1} - x_j) + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= S.
\end{aligned}$$

Dakle, $S' \leq S$. □

Definicija 1.5.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $\mathcal{K}_{a,b}$ familija svih konačnih podskupova K segmenta $[a, b]$ takvih da je $a, b \in$* K.

Neka je $K \in \mathcal{K}_{a,b}$. Imamo

$$K = \{x_0, \ldots, x_n\}, \tag{1.23}$$

gdje je

$$x_0 < \cdots < x_n. \tag{1.24}$$

Očito je x_0 minimum skupa K, a x_n maksimum skupa K. Iz $K \subseteq [a, b]$ i $a \in K$ slijedi da je a minimum skupa K, stoga je $x_0 = a$. Analogno zaključujemo da je $x_n = b$. Prema tome, $x_0, \ldots, x_n$ je subdivizija segmenta $[a, b]$. Uočimo da je konačan niz $x_0, \ldots, x_n$ sa svojstvima (1.23) i (1.24) jedinstven.

Naime, pretpostavimo da je $y_0, \ldots, y_m$ konačan niz takav da je

$$K = \{y_0, \ldots, y_m\}, \tag{1.25}$$

i

$$y_0 < \cdots < y_m. \tag{1.26}$$

Iz toga slijedi da je $m + 1$ broj elemenata skupa K, a iz (1.23) slijedi da je $n + 1$ broj elemenata skupa K. Stoga je $n + 1 = m + 1$ pa je $n = m$. Dokažimo sada da je $x_i = y_i, \forall i \in \{0, \ldots, n\}$. Prema (1.23) vrijedi $x_0 = \min K$, a prema (1.25) vrijedi $y_0 = \min K$. Stoga je $x_0 = y_0$. Pretpostavimo da je $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$ takav da je $x_i = y_i, \forall i \leq k$. Dokažimo da je $x_{k+1} = y_{k+1}$. Iz (1.23) i (1.24) slijedi da je $x_{k+1} = \min K \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}$, a iz (1.25) i (1.26) slijedi da je $y_{k+1} = \min K \setminus \{y_0, \ldots, y_k\}$. No $K \setminus \{x_0, \ldots, x_k\} = K \setminus \{y_0, \ldots, y_k\}$ jer je $\{x_0, \ldots, x_k\} = \{y_0, \ldots, y_k\}$. Stoga je $x_{k+1} = y_{k+1}$.

Zaključak: Za svaki $K \in \mathcal{K}_{a,b}$ postoji jedinstvena subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je $K = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Definicija 1.5.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$. Za $K \in \mathcal{K}_{a,b}$ definiramo realne brojeve s_K i S_K na sljedeći način. Znamo da postoji jedinstvena subdivizija $x_0, \ldots, x_n$ segmenta $[a, b]$ takva da je $K = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Neka je s_K donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$ te neka je S_K gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određena subdivizijom $x_0, \ldots, x_n$.*

Lema 1.5.4. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka su $K, L \in \mathcal{K}_{a,b}$ takvi da je $K \subseteq L$ te da je broj elemenata skupa L za jedan veći od broja elemenata skupa K. Tada je $s_K \leq s_L$ i $S_L \leq S_K$.*

Dokaz. Imamo da je $K = \{x_0, \ldots, x_n\}$ gdje je $x_0, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Iz pretpostavke leme slijedi da je $L = K \cup \{y\}$, pri čemu je $y \in L$ takav da $y \notin K$. Jasno je da je $L \subseteq [a, b]$ pa slijedi da je $y \in [a, b]$. Također je jasno da je $b \in K$, što zajedno s $y \notin K$ povlači da je $y \neq b$.

Dakle, $y \in [a, b\rangle$ pa prema lemi 1.3.14 postoji $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ takav da je $x_j \leq y < x_{j+1}$. Uočimo da ne može vrijediti $x_j = y$ jer je $x_j \in K$, a $y \notin K$. Stoga je

$$x_j < y < x_{j+1}.$$

Očito je da je $x_0, \ldots, x_j, y, x_{j+1}, \ldots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te da je

$$L = \{x_0, \ldots, x_j, y, x_{j+1}, \ldots, x_n\}.$$

Stoga su s_L i S_L donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određene subdivizijom $x_0, \ldots, x_j, y, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

S druge strane, s_K i S_K su donja i gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određene suvbdivizijom $x_0, \ldots, x_n$.

Sada tvrdnja leme slijedi iz leme 1.5.4. □

Propozicija 1.5.5. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ako su $K, L \in \mathcal{K}_{a,b}$ takvi da $K \subseteq L$, onda je*

$$s_K \leq s_L \text{ i } S_L \leq S_K. \tag{1.27}$$

Dokaz. Ako su $K, L \in \mathcal{K}_{a,b}$ takvi da je $K = L$, onda je očito da vrijedi (1.27). Ako su $K, L \in \mathcal{K}_{a,b}$ takvi da je $K \subseteq L$ i $K \neq L$, onda je $L \backslash K$ konačan i neprazan skup pa je oblika $L \backslash K = \{y_1, \ldots, y_n\}$, pri čemu je $y_i \neq y_j$ za $i \neq j$, što povlači da je $L = K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$. To znači da L ima n elemenata više od K. Fiksirajmo $K \in \mathcal{K}_{a,b}$. Imajući na umu prethodno razmatranje, dovoljno je dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća tvrdnja:

Za svaki $L \in \mathcal{K}_{a,b}$ koji ima točno n elemenata više od K vrijedi (1.27).

Dokažimo to indukcijom.

Za $n = 1$ ova tvrdnja vrijedi prema lemi 1.5.4. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $L \in \mathcal{K}_{a,b}$ takav da L ima točno $n + 1$ elemenata više od K. Tada je $L = K \cup \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$, gdje su $y_1, \ldots, y_{n+1} \in L$ takvi da je $y_i \neq y_j$ za $i \neq j$ te $y_1, \ldots, y_{n+1} \notin K$. Imamo $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq L$ i $L \subseteq [a, b]$ pa je $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq [a, b]$. Očito je $K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ konačan skup, a iz $a, b \in K$ slijedi da su $a, b \in K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$. Prema tome $K \cup \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{K}_{a,b}$. Uočimo da $K \cup \{y_1, \ldots, y_n\} \in \mathcal{K}_{a,b}$ ima točno n elemenata više od K. Po pretpostavci indukcije, imamo da je

$$s_K \leq s_{K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}} \text{ i } S_{K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}} \leq S_K. \tag{1.28}$$

Nadalje, L ima točno jedan element više od $K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ pa iz leme 1.5.4 slijedi

$$s_{K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}} \leq s_L \text{ i } S_L \leq S_{K \cup \{y_1, \ldots, y_n\}}. \tag{1.29}$$

Iz (1.28) i (1.29) slijedi da je $s_K \leq s_L$ i $S_L \leq S_K$. Ovime smo dokazali da promatrana tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Stoga tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ i time je propozicija dokazana. □

Napomena 1.5.6. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ te neka su s i S donja i gornja Darbouxova suma funkcije f na segmentu $[a, b]$ s obzirom na tu subdiviziju. Tada je $s \leq S$.*

Naime, za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ je očito da vrijedi $m_i \leq M_i$, gdje je

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

i

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Budući da je

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

i

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

imamo $s \leq S$.

Propozicija 1.5.7. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je s donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ te neka je S gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$. Tada je $s \leq S$.*

Dokaz. Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je s donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ s obzirom na subdiviziju $x_0, \dots, x_n$. Nadalje, neka je $y_0, \dots, y_m$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da je S gornja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ s obzirom na subdiviziju $y_0, \dots, y_m$. Definirajmo: $K = \{x_0, \dots, x_n\}$. Očito je $K \in \mathcal{K}_{a,b}$ te je jasno da je $s_K = s$.

Nadalje, definirajmo $L = \{y_0, \dots, y_m\}$. Tada je $L \in \mathcal{K}_{a,b}$ i $S_L = S$. Uočimo da je $K \cup L \in \mathcal{K}_{a,b}$. Iz propozicije 1.5.5 slijedi

$$s_K \leq s_{K \cup L} \text{ i } S_{K \cup L} \leq S_L.$$

Prema napomeni 1.5.6 vrijedi $s_{K \cup L} \leq S_{K \cup L}$, dakle

$$s_K \leq s_{K \cup L} \leq S_{K \cup L} \leq S_L$$

pa je

$$s_K \leq S_L,$$

tj. $s \leq S$. □

Korolar 1.5.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija omeđena na $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Tada je $I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b)$.*

Dokaz. Neka je D skup svih donjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$, a G skup svih gornjih Darbouxovih suma od f na $[a, b]$. Za svaki $S \in G$ vrijedi da je S gornja međa skupa D (prema propoziciji 1.5.7). Stoga za svaki $S \in G$ vrijedi $\sup D \leq S$, tj.

$$I_*(f; a, b) \leq S.$$

Ovo znači da je $I_*(f; a, b)$ donja međa skupa G. Stoga je

$$I_*(f; a, b) \leq \inf G,$$

tj.

$$I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b).$$

□

Propozicija 1.5.9. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$ takvi da je $[a, c] \subseteq X$.*

Tada je f integrabilna na $[a, c]$ ako i samo ako je f integrabilna na $[a, b]$ i f integrabilna na $[b, c]$.

Nadalje, ako je f integrabilna na $[a, c]$, onda je

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dokaz. Znamo da je funkcija f omeđena na $[a, c]$ ako i samo ako je f omeđena na $[a, b]$ i $[b, c]$. Pretpostavimo da je f integrabilna na $[a, c]$. Tvrdimo da je f integrabilna na $[a, b]$.

Pretpostavimo suprotno. Tada je

$$I_*(f; a, b) \neq I^*(f; a, b)$$

pa iz korolara 1.5.8 slijedi

$$I_*(f; a, b) < I^*(f; a, b). \tag{1.30}$$

Prema korolaru 1.5.8 vrijedi

$$I_*(f; b, c) \leq I^*(f; b, c). \tag{1.31}$$

Zbrajanjem nejednakosti (1.30) i (1.31) dobivamo:

$$I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) < I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c),$$

pa iz propozicija 1.4.1 i 1.4.9 slijedi

$$I_*(f; a, c) < I^*(f; a, c).$$

No to je u kontradikciji s činjenicom da je f integrabilna na $[a, c]$. Dakle, f je integrabilna na $[a, b]$.

Na posve analogan način dobivamo da je f integrabilna na $[b, c]$.

Obratno, pretpostavimo da je f integrabilna na $[a, b]$ i na $[b, c]$. Tada je

$$I_*(f; a, b) = I^*(f; a, b) \text{ i } I_*(f; b, c) = I^*(f; b, c)$$

pa koristeći propozicije 1.4.1 i 1.4.9 dobivamo da je

$$\begin{aligned} I_*(f; a, c) &= I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) \\ &= I^*(f; a, b) + I^*(f; b, c) \\ &= I^*(f; a, c). \end{aligned}$$

Dakle, $I_*(f; a, c) = I^*(f; a, c)$, tj. f je integrabilna na $[a, c]$.

Naposljetku, ako je f integrabilna na $[a, c]$ vrijedi

$$\int_a^c f = I_*(f; a, c)$$

pa iz propozicije 1.4.1 slijedi

$$\begin{aligned} \int_a^c f &= I_*(f; a, c) \\ &= I_*(f; a, b) + I_*(f; b, c) \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f, \end{aligned}$$

dakle

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

□

Poglavlje 2

Neprekidne funkcije

2.1 Neprekidne i uniformno neprekidne funkcije

Definicija 2.1.1. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ funkcija i $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takva da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definicija 2.1.2. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je funkcija f neprekidna ako je f neprekidna u $x_0, \forall x_0 \in X$.*

Definicija 2.1.3. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je funkcija f uniformno neprekidna ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi implikacija*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Napomena 2.1.4. *Uočimo sljedeće: ako je $f : X \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna funkcija, onda je f neprekidna funkcija.*

Primjer 2.1.5. *(Svaka konstantna funkcija je uniformno neprekidna.)*
Neka je $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Definirajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ s $f(x) = c, \forall x \in X$. Tada je f uniformno neprekidna funkcija. To slijedi iz činjenice da za svaki $\varepsilon > 0$ i za sve $x, y \in X$ vrijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (pa onda i za svaki $\delta > 0$ vrijedi implikacija $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$).

Definicija 2.1.6. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$. Kažemo da je f ε-uniformno neprekidna funkcija ako postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi*

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Napomena 2.1.7. *Uočimo sljedeće: ako je $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, onda je f uniformno neprekidna ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi da je f ε-uniformno neprekidna funkcija.*

Napomena 2.1.8. *Ako je X jednočlan podskup od $\mathbb{R}$, onda je svaka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna.*

Lema 2.1.9. *Neka su $x, c \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Tada je $|x - c| < r$ ako i samo ako je $x \in \langle c - r, c + r\rangle$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz sljedećih ekvivalencija:

$$\begin{aligned} |x - c| < r &\iff -r < x - c < r \\ &\iff c - r < x < c + r \\ &\iff x \in \langle c - r, c + r\rangle. \end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.10. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji odabran. Dovoljno je dokazati da je f ε-uniformno neprekidna. Definirajmo

$$S = \{z \in [a, b] \mid f\big|_{[a,z]} \varepsilon\text{-uniformno neprekidna funkcija}\}.$$

Prema napomeni 2.1.8 funkcija $f\big|_{[a,a]}$ je ε-uniformno neprekidna, stoga je $a \in S$. Očito je $S \subseteq [a, b]$, dakle b je gornja međa od S, posebno S je odozgo omeđen. Prema propoziciji 1.1.4 slijedi da postoji supremum skupa S, označimo ga s c. Imamo

$$a \leq c \text{ (jer je } a \in S)$$

i

$$c \leq b \text{ (jer je } b \text{ gornja međa od } S).$$

Stoga je $c \in [a, b]$. Budući da je funkcija f neprekidna, imamo da je f neprekidna u c pa postoji $r > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - c| < r \implies |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Očito je

$$c - \frac{r}{2} < c$$

pa $c - \frac{r}{2}$ nije gornja međa skupa S (jer je c najmanja gornja međa skupa S). Stoga postoji $s \in S$ takav da je

$$c - \frac{r}{2} < s. \tag{2.2}$$

Budući da je $s \in S$, funkcija $f\big|_{[a,s]}$ je ε-uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x, y \in [a, s]$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Definirajmo

$$\delta' = \min\left\{\delta, \frac{r}{2}\right\}.$$

Očito je $\delta' > 0$. Tvrdimo da za sve $x, y \in [a, c]$ vrijedi

$$|x - y| < \delta' \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Pretpostavimo da su $x, y \in [a, c]$ takvi da je $|x - y| < \delta'$. Dokažimo da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Promotrimo prvo slučaj kada su $x, y \in [a, s]$. Iz definicije od δ' slijedi $|x - y| < \delta$. Iz (2.3) slijedi da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Promotrimo sada slučaj kada barem jedna od točaka x i y nije element od $[a, s]$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da $x \notin [a, s]$. Znamo da je $x \in [a, c]$ pa slijedi $s < x \leq c$. Iz (2.2) slijedi da je

$$c - \frac{r}{2} < x. \tag{2.5}$$

Iz $|x - y| < \delta'$ i definicije od δ' slijedi da je $|x - y| < \frac{r}{2}$. Stoga je $x - y < \frac{r}{2}$ pa je

$$-\frac{r}{2} < y - x. \tag{2.6}$$

Zbrajanjem nejednakosti (2.5) i (2.6) dobivamo da je

$$c - r < y.$$

No, $y \in [a, c]$ pa je $c - r < y \leq c$. Stoga je $|y - c| = c - y < r$. Iz $c - \frac{r}{2} < x \leq c$ na isti način dobivamo da je $|x - c| < \frac{r}{2} < r$. Dakle,

$$|x - c| < r \text{ i } |y - c| < r$$

pa iz (2.1) slijedi da je

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } |f(y) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(c) + f(c) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dakle, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Time smo dokazali da (2.4) vrijedi za sve $x, y \in [a, c]$. To znači da je funkcija $f|_{[a,c]}$ ε-uniformno neprekidna.

Zaključak: $c \in S$. Tvrdimo da je $c = b$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $c \neq b$. Znamo da je $c \leq b$ pa zaključujemo da je $c < b$. Slijedi da je

$$c < \min\{b, c + r\}.$$

Stoga možemo odabrati $z \in \mathbb{R}$ takav da je $c < z < \min\{b, c + r\}$. Iz ovoga slijedi da je

$$z < b \text{ i } z < c + r.$$

Imamo $a \leq c < z < b$ pa je $z \in [a, b]$. Tvrdimo da je funkcija $f|_{[a,z]}$ ε-uniformno neprekidna. U tu svrhu dovoljno je dokazati da za sve $x, y \in [a, z]$ vrijedi implikacija

$$|x - y| < \delta' \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Neka su $x, y \in [a, z]$ takvi da je $|x - y| < \delta'$. Ako su $x, y \in [a, c]$, onda iz (2.4) slijedi da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Promotrimo sada slučaj kada jedan od brojeva x i y nije element od $[a, c]$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \notin [a, c]$. Znamo da je $a \leq x$ (jer je $x \in [a, z]$) pa zaključujemo da je $c < x$. Slijedi da je

$$c - r < x - r. \tag{2.8}$$

No $|x - y| < \delta'$ povlači da je $|x - y| < r$ (prema definiciji od δ') pa je $x - y < r$, što povlači da je $x - r < y$. Iz ovoga i (2.8) slijedi da je

$$c - r < y.$$

Iz $y \in [a, z]$ slijedi $y \leq z$, a znamo da je $z < c + r$. Stoga je $y < c + r$. Zaključujemo da je

$$y \in \langle c - r, c + r\rangle.$$

Vrijedi

$$c - r < c < x \leq z < c + r$$

pa je
$$x \in \langle c - r, c + r \rangle.$$
Dakle, $x, y \in \langle c - r, c + r \rangle$ pa iz leme (2.1.9) slijedi da je
$$|x - c| < r \text{ i } |y - c| < r.$$
Ovo, zajedno s (2.1), daje da je
$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } |f(y) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Kao što smo vidjeli u (2.7), ove dvije nejednakosti povlače da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dakle, za sve $x, y \in [a, z]$ takve da je $|x - y| < \delta'$ vrijedi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Stoga je funkcija $f\big|_{[a,z]}$ ε-uniformno neprekidna, što povlači da je $z \in S$. Ovo je nemoguće jer je $c < z$ i c je supremum od S.

Zaključak: $c = b$.

To znači da je $b \in S$ (jer je $c \in S$), dakle $f\big|_{[a,b]}$ je ε-uniformno neprekidna funkcija. No, $f\big|_{[a,b]} = f$.

Dakle, f je ε-uniformno neprekidna funkcija.

□

2.2 Integrabilnost neprekidnih funkcija na segmentu

Propozicija 2.2.1. *Ako su $X \subseteq \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $T_1, \dots, T_n$ neprazni skupovi takvi da je $X = T_1 \cup \dots \cup T_n$, onda je f omeđena ako i samo ako su funkcije $f\big|_{T_1}, \dots, f\big|_{T_n}$ omeđene.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $T_1, \dots, T_{n+1}$ neprazni skupovi takvi da je $X = T_1 \cup \dots \cup T_{n+1}$. Ako je f omeđena, onda su i funkcije $f\big|_{T_1}, \dots, f\big|_{T_{n+1}}$ omeđene prema napomeni 1.1.15.

Obratno, pretpostavimo da su $f\big|_{T_1}, \dots, f\big|_{T_{n+1}}$ omeđene funkcije. Promotrimo funkciju
$$f\big|_{T_n \cup T_{n+1}} : T_n \cup T_{n+1} \to \mathbb{R}.$$
Vrijedi
$$\left(f\big|_{T_n \cup T_{n+1}}\right)\Big|_{T_n} = f\big|_{T_n}$$

i

$$\left(f\big|_{T_n\cup T_{n+1}}\right)\Big|_{T_{n+1}} = f\big|_{T_{n+1}}$$

pa vidimo da su funkcije

$$\left(f\big|_{T_n\cup T_{n+1}}\right)\Big|_{T_n} \text{ i } \left(f\big|_{T_n\cup T_{n+1}}\right)\Big|_{T_{n+1}}$$

omeđene. Iz propozicije 1.3.13 slijedi da je $f\big|_{T_n\cup T_{n+1}}$ omeđena funkcija. Dakle, funkcije $f\big|_{T_1}, \dots, f\big|_{T_{n-1}}, f\big|_{T_n\cup T_{n+1}}$ su omeđene, a očito je $T_1 \cup \cdots \cup T_{n-1} \cup (T_n \cup T_{n+1}) = X$ pa iz induktivne pretpostavke slijedi da je f omeđena funkcija. □

Teorem 2.2.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Odaberimo bilo koji $\varepsilon > 0$ (na primjer $\varepsilon = 1$). Prema teoremu 2.2.2 funkcija f je uniformno neprekidna pa postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Za $i \in \{0, \dots, n\}$ definiramo

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Očito je $x_0 = a$ i $x_n = b$. Neka je $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Imamo

$$x_{i+1} = a + (i+1)\frac{b-a}{n} = x_i + \frac{b-a}{n},$$

dakle,

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Ovo znači da je $x_i < x_{i+1}$ i $x_{i+1} - x_i < \delta$. Stoga je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi $x_{i+1} - x_i < \delta$. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo

$$T_i = [x_{i-1}, x_i].$$

Očito su $T_1, \cdots, T_n$ neprazni skupovi, a iz leme 1.3.14 slijedi da je $T_1 \cup \cdots \cup T_n = [a, b]$. Stoga je prema propoziciji 2.2.1 dovoljno dokazati da su funkcije $f\big|_{T_1}, \dots, f\big|_{T_n}$ omeđene. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je $x \in T_i$. Dakle, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ pa je

$$x_{i-1} \le x \le x_i.$$

Ovo povlači da je

$$0 \leq x - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} < \delta$$

pa je

$$|x - x_{i-1}| = x - x_{i-1} < \delta.$$

Sada iz (2.9) slijedi $|f(x) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$ pa lema 2.1.9 povlači

$$f(x) \in \langle f(x_{i-1}) - \varepsilon, f(x_{i-1}) + \varepsilon \rangle.$$

Time smo dokazali da je

$$\{f(x) \mid x \in T_i\} \subseteq \langle f(x_{i-1}) - \varepsilon, f(x_{i-1}) + \varepsilon \rangle$$

pa vidimo da je $\{f(x) \mid x \in T_i\}$ omeđen skup.

Dakle, $\{f\big|_{T_i(x)} \mid x \in T_i\}$ je omeđen skup, tj. $f\big|_{T_i}$ je omeđena funkcija. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Lema 2.2.3. *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je f omeđena na $[a, b]$. Tada je f integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoje gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s od f na $[a, b]$ takve da je $S - s < \varepsilon$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f integrabilna na $[a, b]$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema propoziciji 1.3.3 postoji donja Darbouxova suma s od f na $[a, b]$ takva da je $I_*(f; a, b) - \frac{\varepsilon}{2} < s$. Iz ovoga slijedi da je

$$-s < \frac{\varepsilon}{2} - I_*(f; a, b). \tag{2.10}$$

Prema propoziciji 1.3.6 postoji gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ takva da je

$$S < I^*(f; a, b) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Zbrajanjem (2.10) i (2.11) i korištenjem činjenice da je $I^*(f; a, b) = I_*(f; a, b)$ (jer je f integrabilna na $[a, b]$) dobivamo

$$S - s < \varepsilon.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje gornja Darbouxova suma S od f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s od f na $[a, b]$ takve da je $S - s < \varepsilon$. Želimo dokazati da je $I^*(f; a, b) = I_*(f; a, b)$. Pretpostavimo suprotno. Iz korolara 1.5.8 slijedi da je $I^*(f; a, b) < I_*(f; a, b)$. Definirajmo

$$\varepsilon = I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b).$$

Očito je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci, postoje gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s funkcije f na $[a, b]$ takve da je

$$S - s < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Očito je $s \leq I_*(f; a, b)$ pa je

$$-I_*(f; a, b) \leq -s.$$

Također je očito da je

$$I^*(f; a, b) \leq S$$

pa zbrajanjem zadnjih dviju nejednakosti dobivamo

$$I^*(f; a, b) - I_*(f; a, b) \leq S - s,$$

tj. $\varepsilon \leq S - s$. Ovo je u kontradikciji s (2.12).

Zaključak: $I^*(f; a, b) = I_*(f; a, b)$, tj. f je integrabilna na $[a, b]$.

□

Teorem 2.2.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.2.2 vrijedi da je f omeđena funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$. Dovoljno je prema lemi 2.2.3 dokazati da postoje gornja Darbouxova suma S funkcije f na $[a, b]$ i donja Darbouxova suma s funkcije f na $[a, b]$ takve da je $S - s < \varepsilon$. Definirajmo

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Prema teoremu 2.1.10 funkcija f je uniformno neprekidna, stoga postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon'. \tag{2.13}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{n} < \delta$. Za $i \in \{0, \dots, n\}$ definirajmo

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

Na isti način kao u dokazu teorema 2.1.10 vidimo da je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$ takva da za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi

$$x_{i+1} - x_i < \delta.$$

Neka su s i S donja i gornja Darbouxova suma funkcije f na $[a, b]$ određene tom subdivizijom $x_0, \dots, x_n$. Tada je

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \text{ i } S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

pri čemu za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ i } M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}. \tag{2.14}$$

Neka je $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Neka je $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Tada je

$$|x - x_i| = x - x_i \leq x_{i+1} - x_i < \delta.$$

Dakle, $|x - x_i| < \delta$ pa iz (2.13) slijedi da je $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon'$. Iz leme 2.1.9 slijedi da je $f(x) \in \langle f(x_i) - \varepsilon', f(x_i) + \varepsilon' \rangle$. Prema tome, za svaki $x \in [x_i, x_{i+1}]$ vrijedi

$$f(x_i) - \varepsilon' < f(x) < f(x_i) + \varepsilon'.$$

To znači da je $f(x_i) - \varepsilon'$ donja međa skupa $\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ te da je $f(x_i) + \varepsilon'$ gornja međa tog skupa. Iz ovog i (2.14) slijedi da je

$$f(x_i) - \varepsilon' \leq m_i \text{ i } M_i \leq f(x_i) + \varepsilon'.$$

Množenjem prve nejednakosti s -1 i zbrajanjem s drugom dobivamo

$$M_i - m_i \leq 2\varepsilon'.$$

Dakle, $M_i - m_i \leq 2\varepsilon'$ vrijedi za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
S - s &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\varepsilon'(x_{i+1} - x_i) \\
&= 2\varepsilon' \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\
&= 2\varepsilon'(b - a) \\
&= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) \\
&= \frac{2}{3}\varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

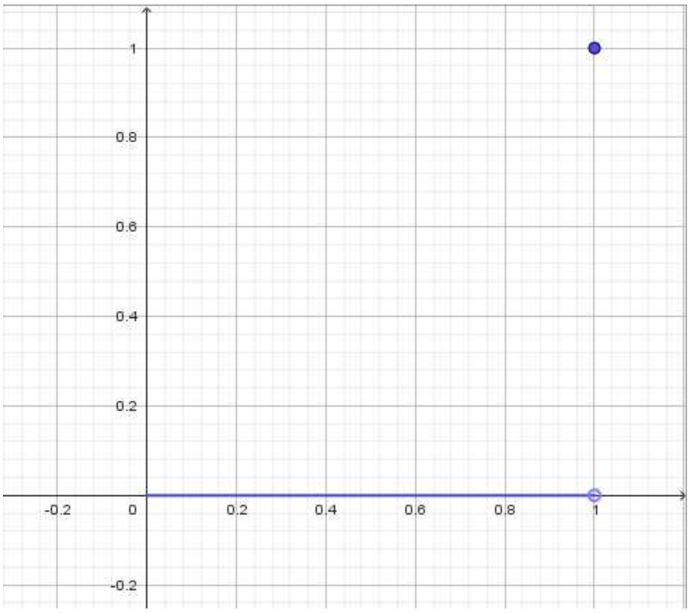
Dakle, $S - s < \varepsilon$.

Zaključak: f je integrabilna na $[a, b]$. □

Primjer 2.2.5. *Neka je* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1\rangle \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Tvrdimo da f *nije neprekidna u točki* 1.



Slika 2.1: Prikaz grafa funkcije f.

Pretpostavimo suprotno.
Tada za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *postoji* $\delta > 0$ *takva da za svaki* $x \in [0,1]$ *vrijedi*

$$|x-1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \frac{1}{2}. \tag{2.15}$$

Očito je $\max\{1-\delta, 0\} < 1$ *pa možemo odabrati realan broj x takav da je* $\max\{1-\delta, 0\} < x < 1$. *Slijedi* $0 < x < 1$ *pa je* $x \in [0,1]$. *Očito* $x \neq 1$. *Iz* $1-\delta < x < 1$ *slijedi* $|x-1| = 1-x < \delta$. *Dakle,* $|x-1| < \delta$ *pa prema (2.15) imamo* $|f(x) - f(1)| < \frac{1}{2}$. *No* $f(x) = 0$ *jer je* $x \neq 1$. *Dakle,* $|0-1| < \frac{1}{2}$ *što je očito nemoguće.*

Prema tome f *nije neprekidna u točki* 1, *dakle* f *nije neprekidna funkcija. Dokažimo da je funkcija* f *integrabilna na* $[0,1]$. *Očito je*

$$f([0,1]) = \{0,1\},$$

dakle f je omeđena funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$. Dovoljno je prema lemi 2.2.3 dokazati da postoje donja i gornja Darbouxova suma s i S funkcije f na $[0,1]$ takve da vrijedi $S - s < \varepsilon$. Očito je $\max\{0, 1-\varepsilon\} < 1$ pa možemo odabrati realan broj z takav da

$$\max\{0, 1-\varepsilon\} < z < 1.$$

Slijedi

$$0 < z < 1 \;\; i \;\; 1 - \varepsilon < z < 1.$$

Slijedi da je

$$1 - z < \varepsilon. \tag{2.16}$$

Promotrimo subdiviziju $0, z, 1$ segmenta $[0,1]$. Neka su s i S donja i gornja Darbouxova suma od f na $[0,1]$ određene tom subdivizijom. Imamo

$$\{f(x) \mid x \in [0, z]\} = \{0\} \;\; i \;\; \{f(x) \mid x \in [z, 1]\} = \{0, 1\}.$$

Stoga je

$$s = 0 \cdot (z - 0) + 0 \cdot (1 - z),$$

dakle $s = 0$. Nadalje

$$S = 0 \cdot (z - 0) + 1 \cdot (1 - z),$$

pa je $S = 1 - z$. Slijedi $S - s = 1 - z$ što zajedno s (2.16) povlači da je $S - s < \varepsilon$.

Prema tome, f je integrabilna na $[0,1]$.

Očito je $s \leq I_*(f; 0, 1)$, tj. $0 \leq I_*(f; 0, 1)$. Prema dokazanom za svaki $\varepsilon > 0$ postoji gornja Darbouxova suma S od f na $[0,1]$ takva da je $S < \varepsilon$. Kada bi vrijedilo $0 < I_*(f; 0, 1)$ onda bi postajala gornja Darbouxova suma S od f na $[0,1]$ takva da je $S < I_*(f; 0, 1)$ pa bi zbog $I^*(f; 0, 1) \leq S$ vrijedilo $I^*(f; 0, 1) < I_*(f; 0, 1)$, što je nemoguće prema korolaru 1.5.8.

Dakle, $I_*(f; 0, 1) = 0$, tj. $\int_0^1 f = 0$.

Napomena 2.2.6. *Neka je f funkcija iz primjera 2.2.5. Vidjeli smo da f nije neprekidna u točki 1. Tvrdimo da je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in [0, 1\rangle$.*

Neka je $x_0 \in [0, 1\rangle$. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo

$$\delta = 1 - x_0.$$

Očito je $\delta > 0$. Tvrdimo da za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Neka je $x \in [0,1]$ takav da je $|x - x_0| < \delta$. Tada je i $x - x_0 < \delta$ pa je $x < x_0 + \delta$, no prema definiciji od δ imamo da je

$$x_0 + \delta = 1.$$

Dakle, $x < 1$. Stoga je $f(x) = 0$. Također vrijedi $f(x_0) = 0$ pa je očito $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dokazali smo da za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi (2.17).

Zaključak: f je neprekidna u točki x_0.

Napomena 2.2.7. *Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f : X \to \mathbb{R}$ i $g : Y \to \mathbb{R}$ funkcije. Pretpostavimo da su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, takvi da je $[a,b] \subseteq X, [a,b] \subseteq Y$ i $f(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$.*
Tada je f integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je g integrabilna na $[a,b]$.
Nadalje, ako je f integrabilna na $[a,b]$, vrijedi $\int_a^b f = \int_a^b g$.
Prije svega, očito je $\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \{g(x) \mid x \in [a,b]\}$, stoga je f omeđena na $[a,b]$ ako i samo ako je g omeđena na $[a,b]$. Ako je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a,b]$, onda je očito donja Darbouxova suma od f na $[a,b]$ određena subdivizijom $x_0, \dots, x_n$ jednaka donjoj Darbouxovoj sumi od g na $[a,b]$ određena subdivizijom $x_0, \dots, x_n$. Stoga je skup svih donjih Darbouxovih suma od f na $[a,b]$ jednak skupu svih donjih Darbouxovih suma od g na $[a,b]$ pa je

$$I_*(f; a, b) = I_*(g; a, b).$$

Analogno zaključujemo da je

$$I^*(f; a, b) = I^*(g; a, b).$$

Iz ovih jednakosti slijede tražene tvrdnje.

Napomena 2.2.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je $[a,b] \subseteq X$. Iz napomene 2.2.7 slijedi da je f integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je $f\big|_{[a,b]}$ integrabilna na $[a,b]$ te da je $\int_a^b f = \int_a^b f\big|_{[a,b]}$ u slučaju da je f integrabilna na $[a,b]$.*

Napomena 2.2.9. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$. Neka je $Y \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $x_0 \in Y$. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna u x_0. Tada je funkcija $f\big|_Y$ neprekidna u x_0. Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.18}$$

Posebno, (2.18) vrijedi za svaki $x \in Y$. Dakle, za svaki $x \in Y$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \implies |\, f\big|_Y(x) - f\big|_Y(x_0)\, | < \varepsilon.$$

Prema tome, $f\big|_Y$ je neprekidna u x_0.

Definicija 2.2.10. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $Y \subseteq X$. Kažemo da je f neprekidna na Y ako je f neprekidna u x za svaki $x \in Y$.*

Napomena 2.2.11. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da je Y neprazan podskup od X takav da je f neprekidna na Y. Tada je funkcija $f\big|_Y$ neprekidna. Naime, ako je $x \in Y$ onda je f neprekidna u x (jer je neprekidna na Y) pa iz napomene 2.2.9 slijedi da je $f\big|_Y$ neprekidna u x. Dakle, $f\big|_Y$ je neprekidna u svakoj točki svoje domene, tj. $f\big|_Y$ je neprekidna funkcija.*

Napomena 2.2.12. *Obrat tvrdnje iz leme 2.2.11 ne vrijedi općenito, tj. moguće je da za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, gdje je $X \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi da je $f\big|_Y$ neprekidna (gdje je Y neprazan podskup od X), a da f nije neprekidna na Y. Promotrimo funkciju $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiranu s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1\rangle \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Definirajmo $Y = \{1\}$. Prema primjeru 2.2.5 funkcija f nije neprekidna u točki 1, dakle, f nije neprekidna na Y. No, funkcija $f\big|_Y$ je neprekidna. Naime, to slijedi iz primjera 2.1.5 (očito je $f\big|_Y$ konstantna funkcija).

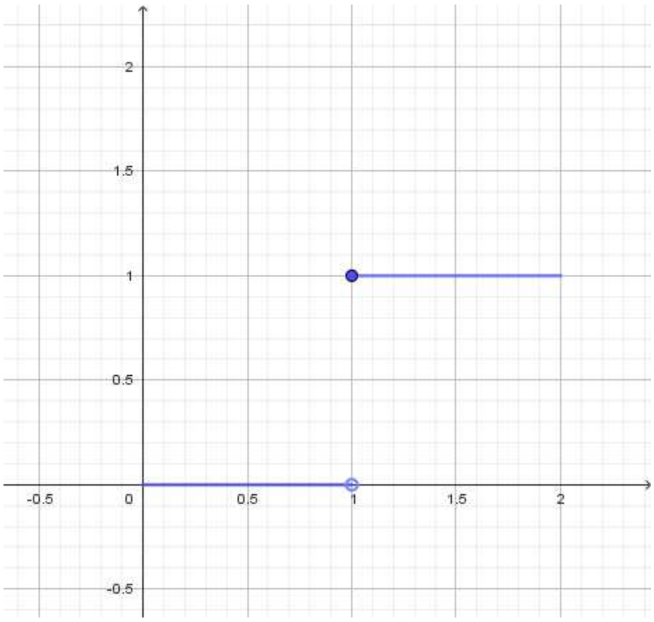
Propozicija 2.2.13. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$, neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je $[a,b] \subseteq X$. Pretpostavimo da je f neprekidna na $[a,b]$. Tada je f integrabilna na $[a,b]$.*

Dokaz. Prema napomeni 2.2.8 dovoljno je pokazati da je $f\big|_{[a,b]}$ integrabilna na $[a,b]$. U tu svrhu dovoljno je prema teoremu 2.2.4 dokazati da je $f\big|_{[a,b]}$ neprekidna funkcija. No, da je $f\big|_{[a,b]}$ neprekidna funkcija slijedi iz pretpostavke propozicije i napomene 2.2.11.
Zaključak: f je integrabilna na $[a,b]$. □

Primjer 2.2.14. *Neka je $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Uočimo da funkcija f nije neprekidna. Naime, kada bi f bila neprekidna, onda bi bila neprekidna i na $[0,1]$ pa bi prema napomeni 2.2.11 $f\big|_{[0,1]}$ bila neprekidna funkcija, no $f\big|_{[0,1]}$ je funkcija iz primjera 2.2.5 za koju smo vidjeli da nije neprekidna. Dokažimo da je f



Slika 2.2: Prikaz grafa funkcije f.

integrabilna na $[0, 2]$. *Prema propoziciji 1.5.9 dovoljno je dokazati da je* f *integrabilna na* $[0, 1]$ *te da je* f *integrabilna na* $[1, 2]$. *Nadalje, prema napomeni 2.2.8 dovoljno je dokazati da je* $f\big|_{[0,1]}$ *integrabilna na* $[0, 1]$ *te da je* $f\big|_{[1,2]}$ *integrabilna na* $[1, 2]$. *Prema primjeru 2.2.5 funkcija* $f\big|_{[0,1]}$ *je integrabilna na* $[0, 1]$ *te je integral* $\int\limits_0^1 f = 0$ *(napomena 2.2.8).*
Za svaki $x \in [1, 2]$ *vrijedi* $f\big|_{[1,2]}(x) = 1$. *Iz primjera 1.3.1 slijedi da je* $f\big|_{[1,2]}$ *integrabilna na* $[1, 2]$ *te da je* $\int\limits_1^2 f\big|_{[1,2]} = 1(2 - 1) = 1$. *Dakle,* $\int\limits_1^2 f = 1$.
Zaključujemo da je f *integrabilna na* $[0, 2]$ *te prema propoziciji 1.5.9 vrijedi*

$$\int\limits_0^2 f = \int\limits_0^1 f + \int\limits_1^2 f = 0 + 1 = 1.$$

Dakle, $\int\limits_0^2 f = 1$.

2.3 Monotonost integrala

Propozicija 2.3.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđene funkcije. Pretpostavimo da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$.*
Tada je $I_*(f; a, b) \leq I_*(g; a, b)$.

Dokaz. Neka je $x_0, \dots, x_n$ subdivizija segmenta $[a, b]$. Neka je s donja Darbouxova suma od f na $[a, b]$ određena ovom subdivizijom te neka je s' donja Darbouxova suma funkcije g na $[a, b]$ određena istom subdivizijom. Imamo

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \text{ i } s' = \sum_{i=0}^{n-1} m_i'(x_{i+1} - x_i),$$

gdje za svaki $i \in \{0, \dots, n-1\}$ vrijedi da je

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ i } m_i' = \inf\{g(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Neka je $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Za svaki $x \in [x_i, x_{i+1}]$ vrijedi $m_i \leq f(x)$ pa iz $f(x) \leq g(x)$ slijedi

$$m_i \leq g(x).$$

Stoga je m_i donja međa skupa $\{g(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, pa iz ovoga i definicije od m_i' slijedi

$$m_i \leq m_i'.$$

Stoga je

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i'(x_{i+1} - x_i) = s'.$$

Dakle, $s \leq s'$.
Očito je $s' \leq I_*(g; a, b)$ pa je $s \leq I_*(g; a, b)$. Ovo znači da je $I_*(g; a, b)$ gornja međa skupa svih donjih Darbouxovih suma funkcije f na $[a, b]$. Iz definicije donjeg integrala funkcije f na $[a, b]$ slijedi da je

$$I_*(f; a, b) \leq I_*(g; a, b).$$

□

Korolar 2.3.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđene funkcije. Pretpostavimo da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$.*
Tada je $I^*(f; a, b) \leq I^*(g; a, b)$.

Dokaz. Za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $-g(x) \leq -f(x)$, tj. $(-g)(x) \leq (-f)(x)$. Prema lemi 1.4.6 funkcije $-g$ i $-f$ su omeđene pa iz propozicije 2.3.1 slijedi da je $I_*(-g; a, b) \leq I_*(-f; a, b)$. Množenjem ove nejednakosti s -1 dobivamo $-I_*(-f; a, b) \leq -I_*(-g; a, b)$.
Iz ovoga i propozicije 1.4.8 slijedi tvrdnja korolara. □

Korolar 2.3.3. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *te neka su* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilne funkcije na* $[a, b]$.
Pretpostavimo da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$.
Tada je $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Dokaz. Znamo da je $\int_a^b f = I_*(f; a, b)$ i $\int_a^b g = I_*(g; a, b)$ pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.3.1. $\square$

Lema 2.3.4. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *te neka su* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije takve da je* $f(a) < g(a)$ *ili* $f(b) < g(b)$. *Tada postoji* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *takav da je* $f(x_0) < g(x_0)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(a) < g(a)$. Definirajmo $\varepsilon = \frac{g(a)-f(a)}{2}$. Očito je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u točki a, postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Nadalje, budući da je g neprekidna u a, postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - g(a)| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

Očito je

$$a < \min\{a + \delta_1, a + \delta_2, b\}$$

pa možemo odabrati $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $a < x_0 < \min\{a + \delta_1, a + \delta_2, b\}$. Slijedi $a < x_0 < b$, tj. $x_0 \in \langle a, b\rangle$.
Nadalje, iz $a < x_0 < a + \delta_1$ slijedi da je $0 < x_0 - a < \delta_1$ pa je $|x_0 - a| < \delta_1$.
Isto tako zaključujemo da je $|x_0 - a| < \delta_2$.
Iz (2.19) i (2.20) slijedi da je $|f(x_0) - f(a)| < \varepsilon$ i $|g(x_0) - g(a)| < \varepsilon$. Iz prve nejednakosti dobivamo da je $f(x_0) - f(a) < \varepsilon$, tj.

$$f(x_0) < f(a) + \varepsilon, \tag{2.21}$$

a iz druge nejednakosti dobivamo da je $g(a) - g(x_0) < \varepsilon$, tj.

$$g(a) - \varepsilon < g(x_0). \tag{2.22}$$

Iz definicije od ε lako slijedi da je

$$f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon.$$

Sada iz (2.21) i (2.22) slijedi da je $f(x_0) < g(x_0)$. Dakle, postoji $x_0 \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(x_0) < g(x_0)$.
Do istog zaključka dolazimo u slučaju $f(b) < g(b)$. $\square$

Propozicija 2.3.5. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Pretpostavimo da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ te da je $f(x_0) < g(x_0)$ za neki $x_0 \in [a, b]$. Tada je $\int_a^b f < \int_a^b g$.*

Dokaz. Prema lemi 2.3.4 možemo pretpostaviti da je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Definirajmo $\varepsilon = \frac{g(x_0)-f(x_0)}{3}$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nadalje, neprekidnost funkcije g u x_0 povlači da postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Definirajmo: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ i } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon. \tag{2.23}$$

Vrijedi $\max\{a, x_0 - \delta\} < x_0$ pa možemo odabrati $c \in \mathbb{R}$ takav da je $\max\{a, x_0 - \delta\} < c < x_0$. Nadalje, vrijedi $x_0 < \min\{x_0 + \delta, b\}$ pa možemo odabrati $d \in \mathbb{R}$ takav da je $x_0 < d < \min\{x_0 + \delta, b\}$.
Imamo $a < c < x_0 < d < b$. Također vrijedi $x_0 - \delta < c < x_0 < d < x_0 + \delta$. Neka je $x \in [c, d]$. Tada iz prethodne nejednakosti slijedi da je $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Iz leme 2.1.9 slijedi $|x - x_0| < \delta$ pa iz (2.23) slijedi da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ i } |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Stoga je $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, tj. $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ te $g(x_0) - g(x) < \varepsilon$, tj. $g(x_0) - \varepsilon < g(x)$. Dokazali smo da je $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ i $g(x_0) - \varepsilon < g(x), \forall x \in [c, d]$.
Definirajmo funkciju $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ s $h(x) = f(x_0) + \varepsilon$ za svaki $x \in [c, d]$. Imamo $f\big|_{[c,d]}(x) < h(x), \forall x \in [c, d]$, nadalje funkcija $f\big|_{[c,d]}$ je integrabilna jer je neprekidna, a funkcija h je integrabilna jer je konstantna. Iz korolara 2.3.3 slijedi da je

$$\int_c^d f\big|_{[c,d]} \leq \int_c^d h$$

pa iz napomene 2.2.8 i primjera 1.3.1 slijedi da je

$$\int_c^d f \leq (f(x_0 + \varepsilon)(d - c). \tag{2.24}$$

Definirajmo funkciju $h' : [c,d] \to \mathbb{R}$ s $h'(x) = g(x_0) - \varepsilon$ za svaki $x \in [c,d]$. Vrijedi $h'(x) < g\big|_{[c,d]}(x), \forall x \in [c,d]$ pa kao i maloprije zaključujemo da je $\int\limits_c^d h' \leq \int\limits_c^d g\big|_{[c,d]}$, tj.

$$(g(x_0) - \varepsilon)(d-c) \leq \int\limits_c^d g. \tag{2.25}$$

Iz definicije od ε slijedi da je $3\varepsilon = g(x_0) - f(x_0)$ pa je $2\varepsilon < g(x_0) - f(x_0)$, što povlači da je $f(x_0) + \varepsilon < g(x_0) - \varepsilon$. Iz ovoga te (2.24) i (2.25) slijedi da je

$$\int\limits_c^d f < \int\limits_c^d g. \tag{2.26}$$

Budući da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,c]$, posebno imamo da je $f\big|_{[a,c]}(x) \leq g\big|_{[a,c]}(x), \forall x \in [a,c]$. Iz korolara 2.3.3 slijedi da je $\int\limits_a^c f\big|_{[a,c]} \leq \int\limits_a^c g\big|_{[a,c]}$, tj.

$$\int\limits_a^c f \leq \int\limits_a^c g. \tag{2.27}$$

Na isti način dobivamo da je

$$\int\limits_d^b f \leq \int\limits_d^b g. \tag{2.28}$$

Iz (2.26), (2.27) i (2.28) slijedi da je

$$\int\limits_a^c f + \int\limits_c^d f + \int\limits_d^b f < \int\limits_a^c g + \int\limits_c^d g + \int\limits_d^b g.$$

Ovo prema propoziciji 1.5.9 znači da je

$$\int\limits_a^b f < \int\limits_a^b g.$$

$\square$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ te $f(x_0) < g(x_0)$ za neki $x_0 \in [a, b]$.

Ako su f i g neprekidne, onda prema propoziciji 2.3.5 imamo da je $\int_a^b f < \int_a^b g$. No, ova nejednakost ne mora vrijediti ako umjesto pretpostavke da su f i g neprekidne uzmemo samo da su f i g integrabilne. To pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.3.6. *Neka su* $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *funkcije definirane s* $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$ *i*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkcije f *je integrabilna (jer je konstantna), a za funkciju* g *smo u primjeru 2.2.5 vidjeli da je integrabilna. Nadalje, očito je* $f(x) \leq g(x), \forall x \in [0, 1]$ *te* $f(1) < g(1)$. *No, ne vrijedi* $\int_0^1 f < \int_0^1 g$ *jer je* $\int_0^1 f = 0$ *(primjer 1.3.1) i* $\int_0^1 g = 0$ *(primjer 2.2.5).*

Literatura

1. S. Kurepa, Matematička analiza 2, Školska knjiga, Zagreb,1997.
2. S. Mardešić, Matematička analiza 1, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

Sažetak

U prvom poglavlju definirali smo omeđenu funkciju te smo zatim definirali pojmove gornje i donje Darbouxove sume funkcije na segmentu. Zatim smo definirali donji i gornji integral funkcije f na segmentu $[a, b]$, tj. $I_*(f; a, b)$ i $I^*(f; a, b)$ te pojam integrabilne funkcije na segmentu. Dali smo primjere integrabilnih funkcija te dokazali da vrijedi: $I_*(f; a, b) = I_*(f; a, c) + I_*(f; c, b)$ pri čemu je $a < b < c$. Nadalje, dokazujemo da isto vrijedi za gornje integrale: $I^*(f; a, b) = I^*(f; a, c) + I^*(f; c, b)$ gdje smo koristili jednakost $I^*(f; a, b) = -I_*(-f; a, b)$. Na kraju smo dokazali da za svaku donju i gornju Darbouxovu sumu vrijedi $s \leq S$, gdje su s i S donja i gornja Darbouxova suma funkcije f, što nas je dovelo do zaključka: $I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b)$.

U drugom poglavlju proučavali smo neprekidne funkcije. Dokazali smo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu uniformno neprekidna. Nadalje, dokazali smo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu omeđena te da je, čak štoviše, integrabilna. Dali smo primjer funkcije na segmentu koja je integrabilna, ali nije neprekidna. Na kraju smo dokazali da ako je $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, onda vrijedi: $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$. Dokazali smo i da ako su funkcije f i g neprekidne i takve da vrijedi $f(x_0) < g(x_0)$ za neki $x_0 \in [a, b]$, onda vrijedi: $\int\limits_a^b f < \int\limits_a^b g$.

Summary

In the first chapter, we defined a bounded function and then introduced the concepts of upper and lower Darboux sums for a function on a segment. We then defined the lower and upper integrals of a function f on a segment $[a, b]$, denoted by $I_*(f; a, b)$ and $I^*(f; a, b)$, as well as the concept of an integrable function on a segment. We provided examples of integrable functions and proved the following statement: $I_*(f; a, b) = I_*(f; a, c) + I_*(f; c, b)$, where $a < b < c$. Furthermore, we showed that the same holds true for the upper integrals: $I^*(f; a, b) = I^*(f; a, c) + I^*(f; c, b)$, utilizing the equality $I^*(f; a, b) = -I_*(-f; a, b)$. Finally, we demonstrated that for every lower and upper Darboux sum, $s \leq S$, where s and S represent the lower and upper Darboux sums of the function f. This led us to the conclusion: $I_*(f; a, b) \leq I^*(f; a, b)$.

In the second chapter, we studied continuous functions. We proved that every continuous function on a segment is uniformly continuous. Furthermore, we established that every continuous function on a segment is bounded and, moreover, integrable. We provided an example of a function on a segment that is integrable but not continuous. Finally, we proved that if $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, then $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$. We have proven that if functions f and g are continous and satisfy the condition $f(x_0) < g(x_0)$ for some $x_0 \in [a, b]$, then $\int\limits_a^b f < \int\limits_a^b g$.

Životopis

Rođena sam 28. rujna 1998. godine u Varaždinu. Svoje obrazovanje započela sam 2005. godine u Osnovnoj školi Ivana Kukuljevića Sakcinskog u Ivancu, a nakon toga 2013. godine upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec. Nakon završene srednje škole, 2017. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2021. godine i stekla naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.