

# Kekeyin problem okretanja igle

---

**Knežević, Katarina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:092923>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Katarina Knežević

**KAKEYIN PROBLEM OKRETANJA**  
**IGLE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, travanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se mentoru na pomoći u izradi ovog diplomskog rada. Zatim, veliko hvala  
mojoj obitelji na svojoj podršci pruženoj za vrijeme studiranja.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Povijest problema</b>	<b>3</b>
<b>2 Matematički pregled Takeyina problema</b>	<b>5</b>
2.1 Primjeri Takeya skupova . . . . .	5
2.2 Konstrukcija Besicovitchevog skupa . . . . .	12
2.3 Konstrukcija Takeya skupa . . . . .	26
<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>

# Uvod

Prije 107 godina dva su se matematičara, Sōichi Takeya i Abram Besicovitch, neovisno jedan o drugome bavili s dva vrlo slična problema. Dok je iz Japana poteklo pitanje o minimalnoj površini lika unutar kojeg se za puni kut neprekidno može zaokrenuti jedinična igla, u Rusiji je u to vrijeme konstruiran skup koji je uz male izmjene, osim što je predstavljao rješenje prethodnog problema, dokazao da površina takvog skupa može biti proizvoljno mala. U narednim desetljećima je ova tema zanimala mnoge matematičare te su iz njihovih istraživanja proizašli novi zaključci i primjene u ne toliko bliskim područjima matematike poput harmonijske analize i kombinatorike. Cilj ovog diplomskog rada je pružiti povijesni pregled ovoga problema te dokazati da je površina takvog skupa zaista proizvoljno mala. Rad je organiziran u dva dijela. U prvom dijelu dan je povijesni pregled Takeyina problema okretanja igle, a zatim u drugom dijelu slijedi konstrukcija takvog skupa, skupa proizvoljno male površine (uz potpuni dokaz), a svaki je korak potkrijepljen s mnogo slika.



# Poglavlje 1

## Povijest problema

Japanski matematičar Sōichi Takeya se 1917. godine zapitao: *Koja je najmanja površina potrebna da bi se jedinična igla u ravnini neprekidno zaokrenula za puni kut?*

Kada bismo jediničnu iglu na ravnoj površini zaokrenuli za puni kut to bismo najlakše mogli napraviti unutar kruga jediničnog promjera, odnosno polumjera jednakog polovini duljine jedinične igle. No, Takeya je zanimala najmanja takva površina pa je pretpostavio da bi odgovarajuća površina bila površina jednakostraničnog trokuta jedinične visine. Kada bi se pak dozvolila nekonveksnost, Takeyina pretpostavka bila je da se radi o površini hipocikloide s tri vrha. Matematičar Julius Pal je 1921. godine dokazao da, u konveksnom slučaju, upravo površina jednakostraničnog trokuta jedinične visine predstavlja najmanju površinu u kojoj se jedinična igla može neprekidno zaokrenuti za puni kut, kako je Takeya i pretpostavio. Možemo li pronaći neki nekonveksni lik u kojem je moguće neprekidno zaokrenuti iglu za puni kut, a koji bi imao manju površinu od površine hipocikloide s tri vrha?

Iste se godine, 1917., matematičar Abram Besicovitch bavio pitanjima vezanima za integraciju. Dvije godine kasnije Besicovitch je konstruirao skup površine 0 koji sadrži jediničnu dužinu u svim smjerovima. Takav se skup po njemu naziva *Besicovitchev skup*. Njegov je rad objavljen u Rusiji, ali zbog tadašnje političke situacije nije bio šire dostupan. Ta je konstrukcija ponovno objavljena 1928. u *Mathematische Zeitschrift*. Nakon što je Besicovitch 1924. napustio Rusiju i kada se upoznao sa sličnim problemom, Takeyininim problemom okretanja igle, uočio je da je traženo rješenje mala modifikacija skupa kojeg je on već bio konstruirao. Tada je pokazao i da površina mora biti pozitivna, ali može biti proizvoljno mala, a to je rješenje objavljeno 1928. Upravo se takav skup u kojem se igla neprekidno može zaokrenuti za puni kut zove *Takeya skup*. No, ne postoji skup površine nula u kojem se jedinična dužina može zaokrenuti za puni kut.

Val Alphen je 1941. pokazao da Takeya skupovi mogu imati proizvoljno malu površinu i postoje unutar kruga radijusa  $2 + \epsilon$  gdje je  $\epsilon$  proizvoljan pozitivan broj [2]. Na problemu



su radili, neovisno jedan o drugome, Bloom i Schoenberg, koji su pronašli jednostavno povezane Kakeya skupove s površinom koja se približava Bloom-Schoenbergovom broju. Ta je površina bila manja od površine hipocikloide s tri vrha i tada je Schoenberg pretpostavio da se manja površina ne može pronaći. Postoji više načina kako konstruirati Besicovitchev skup. Većina se služi idejom podjele trokuta na mnogo manjih trokuta koji se zatim preklapaju te, kako broj podjela ide u beskonačnost, u ravnini dobivamo Besicovitchev skup [6]. Besicovitchevu vrlo kompliciranu konstrukciju pojednostavio je Perron pomoću “Perronovih stabala” (eng. *Perron trees*), a kasnije i Schoenberg. Primjer konstrukcije Besicovitchevog skupa bez trokuta dao je Kahane, koji je konstruirao Besicovitchev skup pomoću Cantorovog skupa. Cunningham je 1971. konstruirao jednostavno povezan Kakeya skup proizvoljno male površine.

Kakeya skupovi koriste se za konstrukciju kontraprimjera u harmonijskoj analizi. Fefferman je iskoristio Besicovitcheve skupove 1971. kako bi konstruirao kontraprimjer za problem povezan s Fourierovim redovima [6].

Kakeyin problem može se razmatrati i u općenitim prostorima. Dokazano je i da postoje Kakeya skupovi proizvoljno male površine u sferi. Rotacija se umjesto ravnine događa na površini jedinične sfere, a luk velike kružnice služi kao zamjena za iglu [7].

Davies je pokazao da, iako Besicovitchevi skupovi imaju površinu nula, ti skupovi nužno imaju Hausdorffovu dimenziju 2 [9]. Možemo li analogno znati i za više dimenzije? Upravo se pretpostavka da Besicovitchev skup ima Hausdorffovu dimenziju  $n$  u  $\mathbb{R}^n$  naziva Kakeyina slutnja (eng. *Kakeya conjecture*) i ona je još uvijek otvoreni problem u matematici.

Kakeyina slutnja ima i svoj analogon u konačnim poljima kojeg je 1999. pretpostavio Thomas Wolff, a 2008. dokazao Zeev Dvir.

Još jedna primjena Kakeya skupova u harmonijskoj analizi je i Bochner–Riesz slutnja. Kada bi se mogao konstruirati Besicovitchev skup u  $\mathbb{R}^n$  Hausdorffove dimenzije manje od  $n$ , onda bi Feffermanova konstrukcija poslužila kao kontraprimjer i za tu slutnju. [6]

Kakeya skupovi povezani su i s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, točnije, s valnom jednadžbom, kombinatorikom, harmonijskom analizom i teorijom brojeva.

## Poglavlje 2

# Matematički pregled Kekeyinog problema

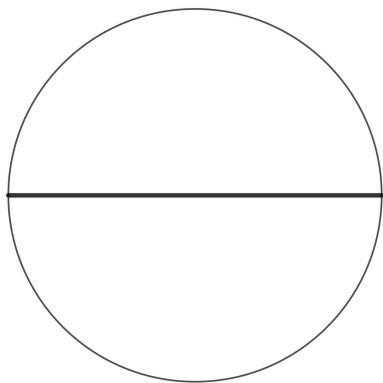
### 2.1 Primjeri Kekeya skupova

#### Krug

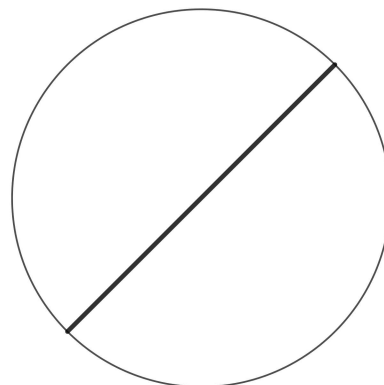
Na slikama 2.1-2.4 prikazano je neprekidno zakretanje jedinične igle za puni kut unutar kruga.

Površina kruga promjera duljine 1 je

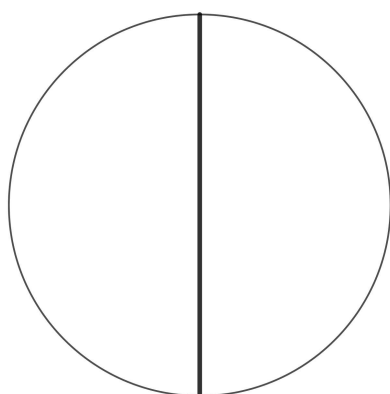
$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398.$$



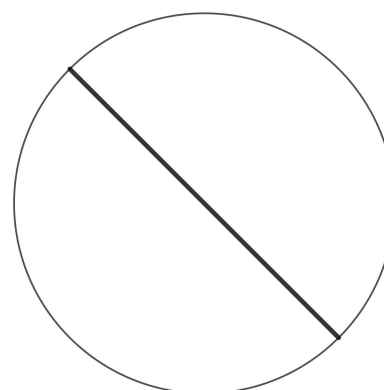
Slika 2.1



Slika 2.2



Slika 2.3



Slika 2.4

### Trokut sa zakrivljenim stranicama

Neprekidno zakretanje igle unutar trokuta sa zakrivljenim stranicama prikazano je na slikama 2.5-2.10.

Trokut sa zakrivljenim stranicama možemo konstruirati spajajući tri kružna isječka s veličinom pripadnog središnjeg kuta od  $60^\circ$  i jediničnim polumjerom.

Površina svakog kružnog isječka je

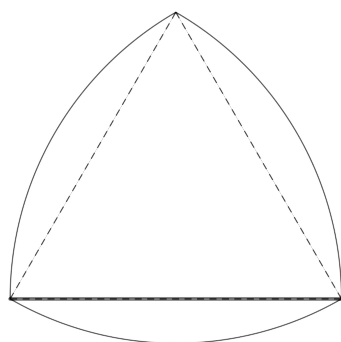
$$P_i = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}, \quad i = 1, 2, 3,$$

a površina jednakostraničnog trokuta kojeg tvore jedinični polumjeri iznosi

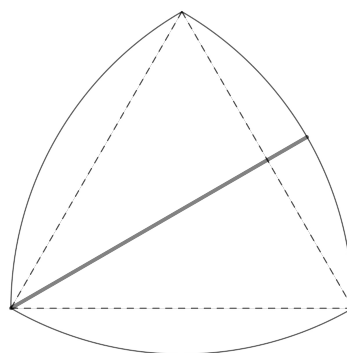
$$P_{\text{trokuta}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Dakle, površina u kojoj se jedinična igla zaokrenula za puni kut je

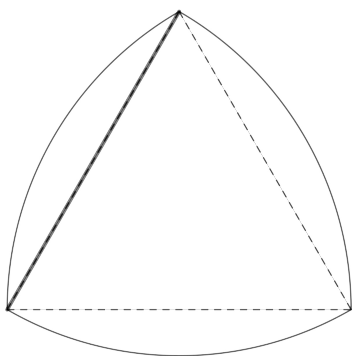
$$P = 3 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.704771.$$



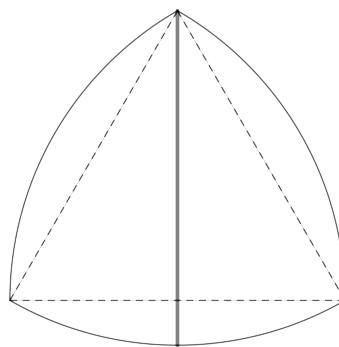
Slika 2.5



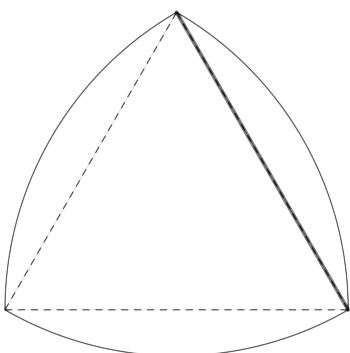
Slika 2.6



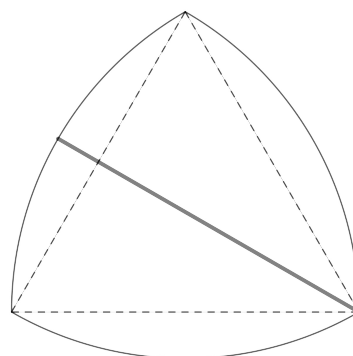
Slika 2.7



Slika 2.8



Slika 2.9

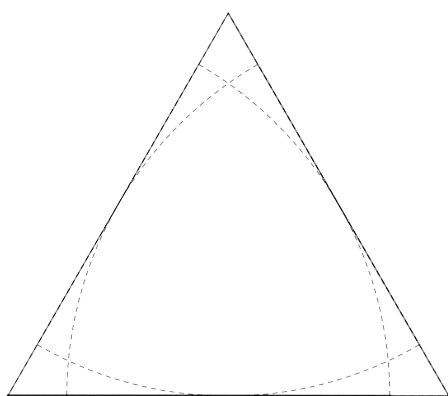


Slika 2.10

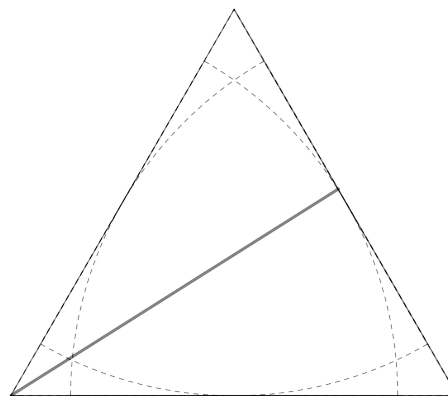
### Jednakostranični trokut s jediničnom visinom

Slike 2.11-2.19 prikazuju da je neprekidno zakretanje jedinične igle za puni kut u ravni moguće unutar jednakostraničnog trokuta jedinične visine. Površina jednakostraničnog trokuta jedinične visine je

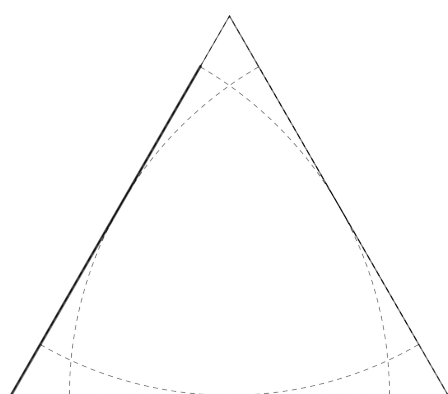
$$P = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.57735.$$



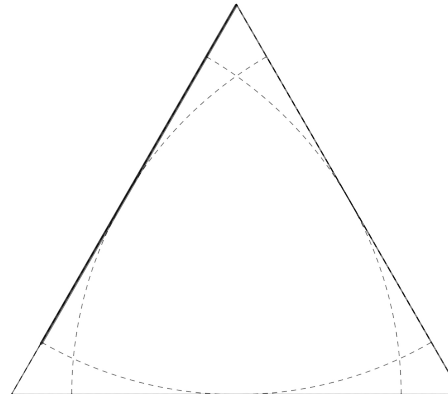
Slika 2.11



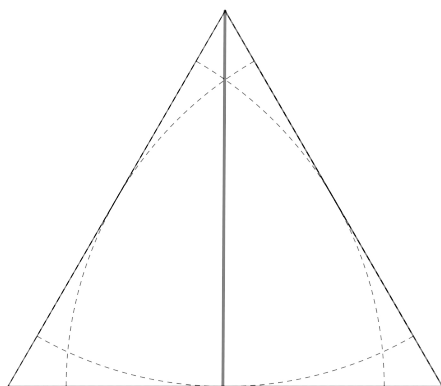
Slika 2.12



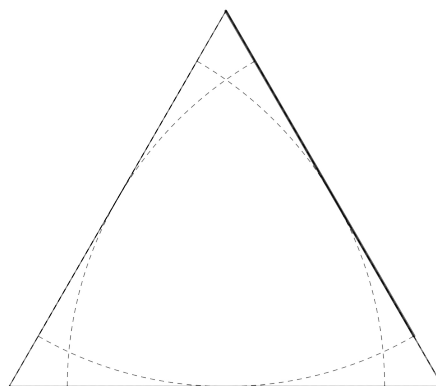
Slika 2.13



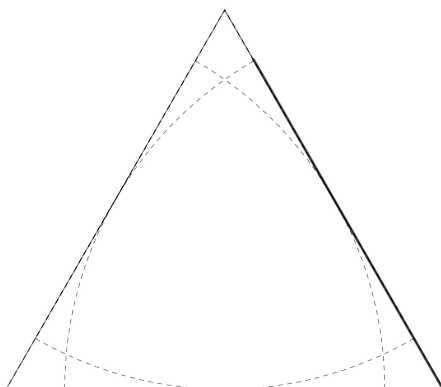
Slika 2.14



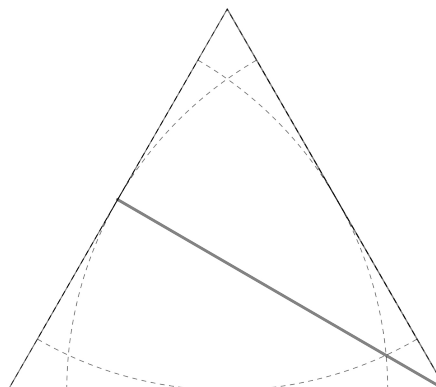
Slika 2.15



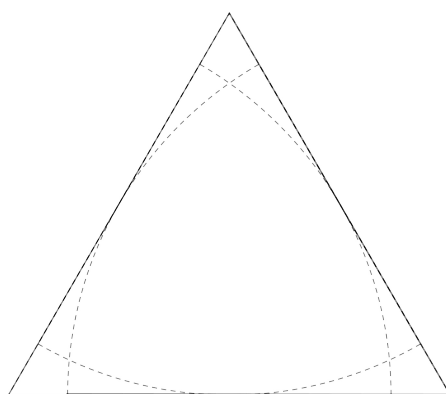
Slika 2.16



Slika 2.17



Slika 2.18

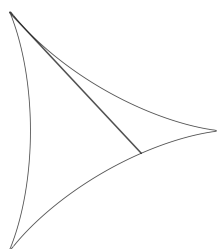


Slika 2.19

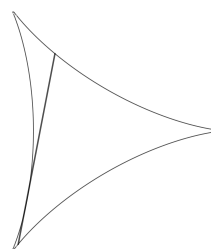
**Hipocikloida s tri vrha**

Na slikama 2.20-2.25 prikazano je neprekidno zakretanje jedinične igle za puni kut u rav-  
nini unutar površine hipocikloide s tri vrha. Površina hipocikloide s tri vrha je

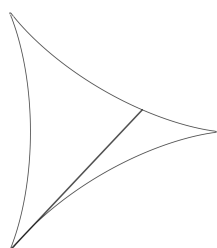
$$P = \frac{\pi}{8} \approx 0.392699.$$



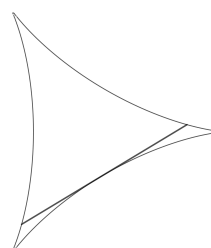
Slika 2.20



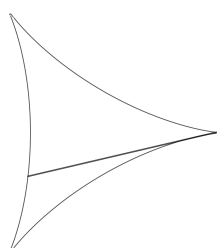
Slika 2.21



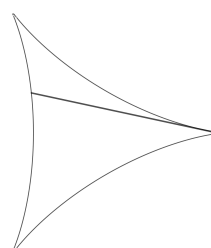
Slika 2.22



Slika 2.23



Slika 2.24



Slika 2.25

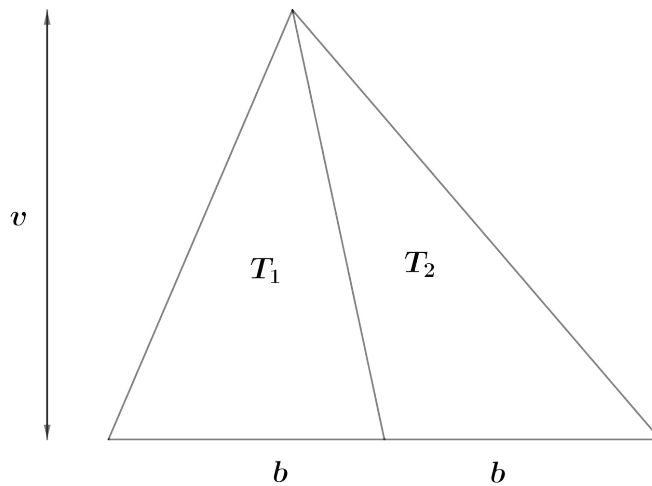


## 2.2 Konstrukcija Besicovitchevog skupa

U nastavku će biti prikazano kako konstruirati rješenje na Kekeyino pitanje kao što je učinjeno u [7] pomoću Perronovih stabala. Za to će biti potrebna lema koja slijedi.

**Lema 1.** Neka je  $T$  trokut s visinom  $v$  i osnovicom duljine  $2b$ . Podijelimo trokut  $T$  na dva trokuta,  $T_1$ ,  $T_2$  s osnovicom duljine  $b$ , vidjeti sliku 2.26. Pomaknemo trokute  $T_1$  i  $T_2$  duž osnovice u suprotnim smjerovima tako da je duljina preklopljenih dijelova jednaka  $2(1 - \alpha)b$ , gdje je  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ , vidjeti sliku 2.27. Tada je površina novog lika  $S$  koji je sastavljen od malih trokuta  $A_1$ ,  $A_2$  i trokuta  $T'$

$$P(S) = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)P(T).$$

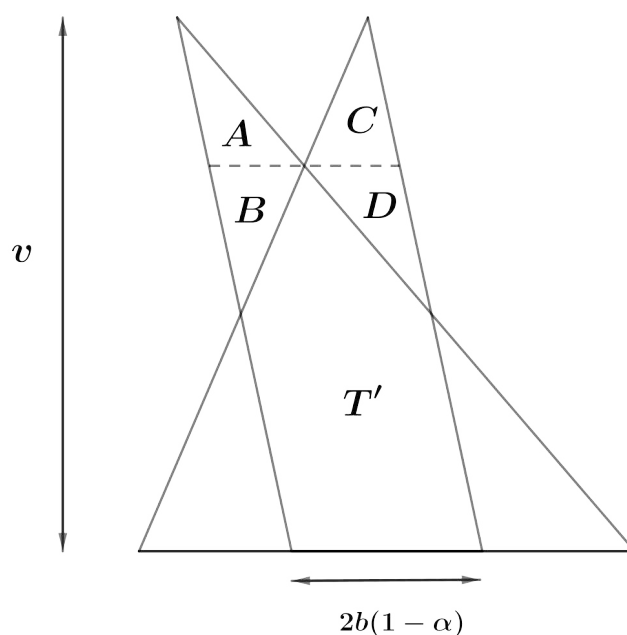


Slika 2.26

*Dokaz.* Duljina osnovice trokuta  $T'$  je

$$2b(1 - \alpha) + 2(b - 2b(1 - \alpha)) = 2b - 2b\alpha - 4b + 4b\alpha = 2b\alpha.$$

Trokuti  $T'$  i  $T$  su slični po KK teoremu o sličnosti s koeficijentom sličnosti  $\frac{2b\alpha}{2b} = \alpha$ .



Slika 2.27

Stoga je površina trokuta  $T'$

$$P(T') = \alpha^2 P(T).$$

Lik  $S$  sastavljen je od trokuta  $T'$  i dva trokuta iznad trokuta  $T'$ . Podijelimo ta dva trokuta konstruirajući paralelu s osnovicom trokuta  $T'$  na trokute  $A, B, C, D$ . Visina trokuta  $T'$  je  $\alpha v$ , a visina trokuta  $A$  i  $C$  je  $v - \alpha v = v(1 - \alpha)$ . Trokuti  $A$  i  $D$  su slični trokutu  $T_2$  po KK teoremu o sličnosti s koeficijentom sličnosti

$$\frac{v(1 - \alpha)}{v} = 1 - \alpha.$$

Analogno, trokuti  $B$  i  $C$  su slični trokutu  $T_1$  s koeficijentom sličnosti  $\frac{v(1 - \alpha)}{v} = 1 - \alpha$ . Uočimo sada da je duljina osnovica trokuta  $A, B, C, D$  jednaka  $(1 - \alpha)b$  pa prema SKS teoremu o sukkladnosti vrijedi

$$A \cong D \quad \text{i} \quad B \cong C.$$

Slijedi,

$$P(A) = P(D) = (1 - \alpha)^2 P(T_1) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 P(T)$$

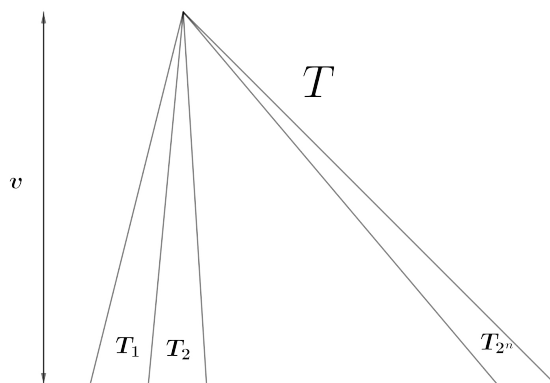
$$P(B) = P(C) = (1 - \alpha)^2 P(T_2) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 P(T).$$

Stoga je površina lika  $S$  nastalog pomakom trokuta  $T_1$  i  $T_2$  duž osnovice trokuta  $T$  jednaka

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(T') \\
&= 2(1 - \alpha)^2 P(T) + \alpha^2 P(T) \\
&= (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) P(T)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

□

Pomoću postupka opisanog u Lemi 1, podijelimo osnovicu trokuta  $T$  jedinične visine na  $2^n$  jednakih dužina. Krajnje točke svakih od  $2^n$  dužina spojimo s vrhom trokuta  $T$  te smo dobili  $2^n$  trokuta koje ćemo označiti s  $T_1, T_2, \dots, T_{2^n}$ , vidjeti sliku 2.28.



Slika 2.28: Podjela trokuta jedinične visine na  $2^n$  trokuta

Susjedne trokute  $T_{2i-1}$  i  $T_{2i}$  ( $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ ) preklopimo na način opisan u Lemi 1. Na taj način dobivamo lik  $S_i^1$ , vidjeti sliku 2.29, sastavljen od unutarnjeg trokuta kojeg ćemo označiti s  $T_i$  te dva mala trokuta iznad trokuta  $T_i$ . Sada prema Lemi 1 slijedi

$$P(S_i^1) = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) P(T_{2i-1} \cup T_{2i}).$$

Likove  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ ) možemo pomaknuti jedan do drugoga zato što je stranica trokuta  $T_{2i-1}$  paralelna i jednake duljine kao suprotna stranica trokuta  $T_{2i}$  i primijetiti da trokuti  $T_i^1$  ( $1 \leq i \leq 2^{n-2}$ ) čine trokut sličan trokutu  $T$  koji ćemo nazvati  $T^1$ . Dakle,  $P(T^1) = \alpha^2 P(T)$  i zbog preklapanja  $S_i^1$  ( $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ ) je

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} P(S_i^1) \leq (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) P(T).$$

Zatim susjedne likove  $S_{2i-1}^1, S_{2i}^1$  ( $1 \leq i \leq 2^{n-2}$ ) preklopimo i dobivamo likove  $S_i^2$ , s unutarnjim trokutom  $T_i^2$ , vidjeti sliku 2.30. Kada pomaknemo likove  $S_i^2$  jedan do drugoga, unutarnji trokuti  $T_i^2$  tvore trokut sličan trokutu  $T^1$  koji ćemo nazvati  $T^2$ .

Slika 2.29: Lik  $S_i^1$ Slika 2.30: Lik  $S_i^2$ 

Dakle,  $P(T^2) = \alpha^2 P(T^1) = \alpha^4 P(T)$ . Sada je

$$\sum_{i=1}^{2^{n-2}} P(S_i^2) \leq (\alpha^4 + 2(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)^2 \alpha^2) P(T).$$

Ako nastavimo s opisanim procesom preklapanja, u  $n$ -tom koraku dobivamo jedan lik  $S$  za čiju površinu vrijedi

$$\begin{aligned}
P(S) &\leq \alpha^{2n}P(T) + 2(1 - \alpha)^2(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2n-2})P(T) \\
&\leq \alpha^{2n}P(T) + 2(1 - \alpha)^2(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2n-2} + \dots)P(T) \\
&= \left( \alpha^{2n} + \frac{2(1 - \alpha)^2}{1 - \alpha^2} \right) P(T) \\
&\leq (\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha))P(T)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

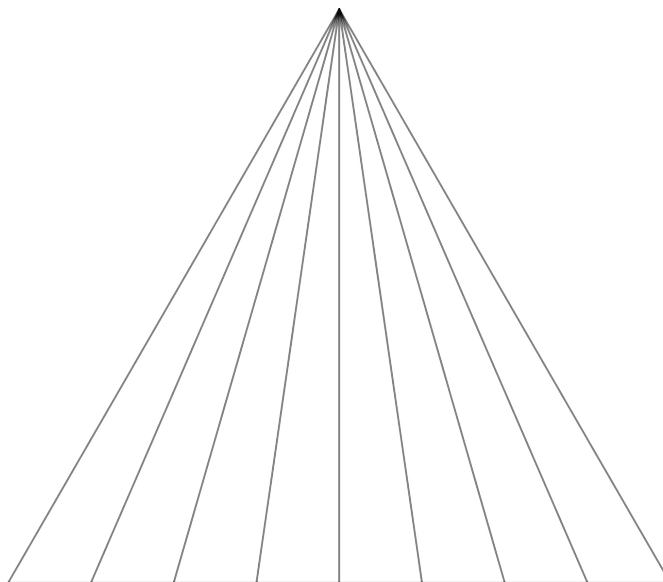
Sada ćemo dokazati da površina skupa  $S$  može biti proizvoljno mala kao u [3]. Neka je  $\epsilon > 0$ . Neka je  $1 - \alpha < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  i neka je  $\alpha^{2n} < \frac{\epsilon}{2}$ .

$$\begin{aligned}
P(S) &\leq (\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha))P(T) \\
&\leq \left( \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) P(T) \\
&= \epsilon P(T)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

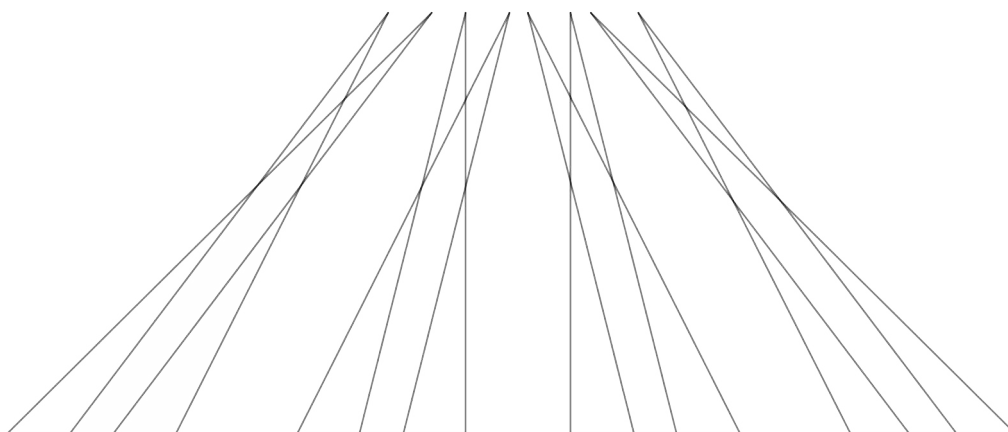
Dakle,

$$P(S) \leq \epsilon P(T).$$

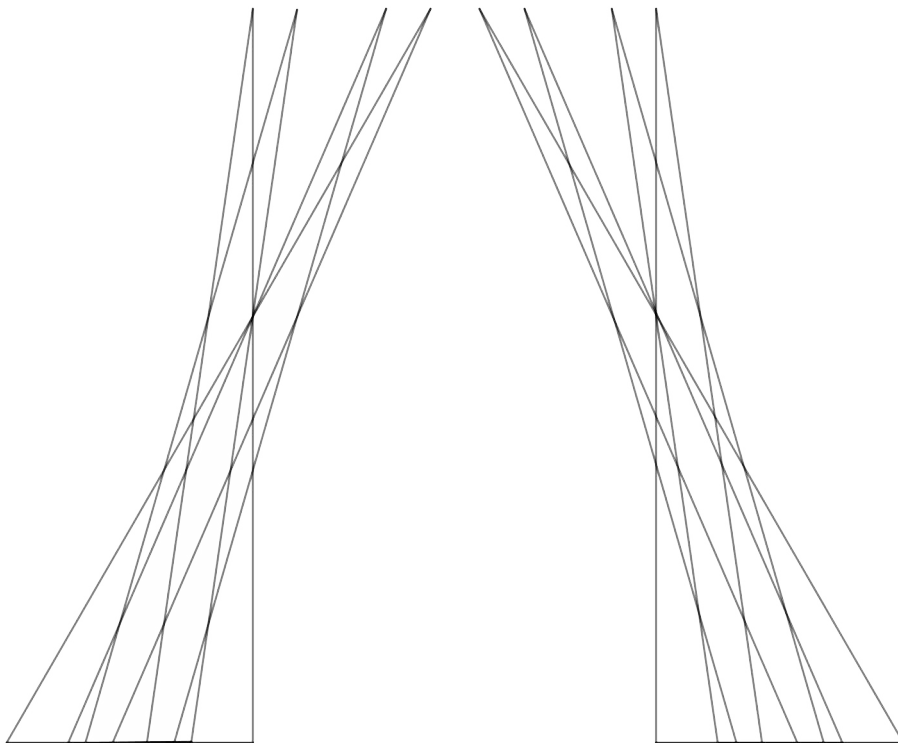
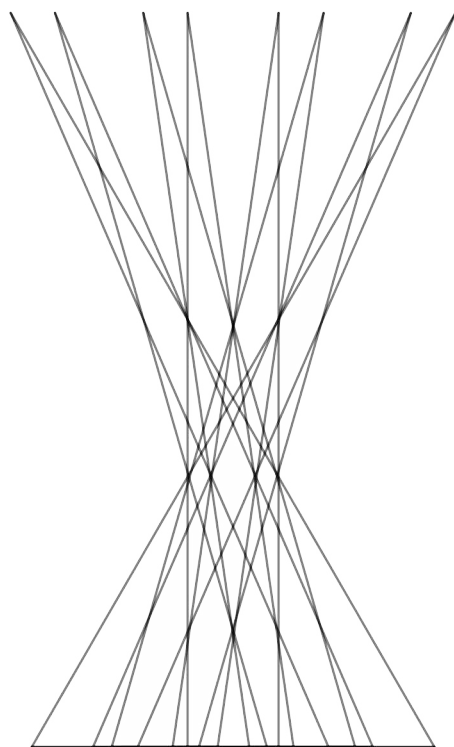
Kako je  $\epsilon$  bio proizvoljno mali, slijedi da je i površina lika  $S$  proizvoljno mala. Na slikama 2.31, 2.32, 2.33, 2.34 prikazana je konstrukcija za  $n = 3$  od početnog jednakostraničnog trokuta jedinične visine.



Slika 2.31: Podjela trokuta na  $2^3$  trokuta

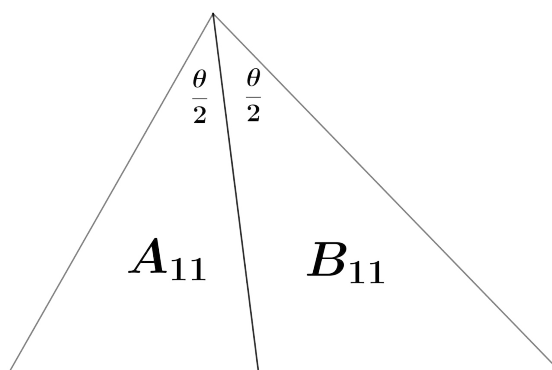


Slika 2.32: Likovi  $S_1^1, S_2^1, S_3^1, S_4^1$

Slika 2.33: Likovi  $S_1^2$  i  $S_2^2$ Slika 2.34: Lik  $S$

### Još jedan način konstrukcije Besicovitchevog skupa pomoću trokuta

Osim dijeljenja osnovice trokuta jedinične visine na jednake dijelove, prikazat ćemo još jedan način konstrukcije Besicovitchevog skupa pomoću trokuta. U ovom slučaju dijelit ćemo kut pri vrhu trokuta na dva jednaka dijela kao što je učinjeno u [7]. Neka je  $T$  trokut s kutom pri vrhu  $\theta$  i osnovicom duljine  $b$ . Simetralom kuta  $\theta$  trokuta  $T$  podijelimo trokut  $T$  na dva trokuta,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  (2.35).



Slika 2.35

Pomičemo trokute  $A_{11}$  i  $B_{11}$  u suprotnim smjerovima duž osnovice trokuta  $T$  tako da se preklape za  $(1 - \alpha)b$ , gdje je  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Neka je  $a_{11}$  vrh trokuta  $A_{11}$  pri kutu  $\frac{\theta}{2}$  i neka je  $b_{11}$  vrh trokuta  $B_{11}$  pri kutu  $\frac{\theta}{2}$ . Preklapanjem je nastao lik  $S_1$  sadržan od trokuta  $T'$  sličnom trokutu  $T$  (po KK teoremu o sličnosti), vidjeti sliku 2.36.

Produžimo preko vrha  $a_{11}$  trokuta  $A_{11}$  tako da je udaljenost točaka  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  i točke  $a_{11}$  jednaka 1. Povučemo paralele sa simetralom kuta trokuta  $A_{11}$  kroz točke  $a_{21}$  i  $a_{22}$ . Na taj način smo dobili trokute  $A_{21}$  i  $A_{22}$ , vidjeti sliku 2.37.

Primijenimo li analogni postupak na trokut  $B_{11}$  dobivamo trokute  $B_{21}$  i  $B_{22}$ .

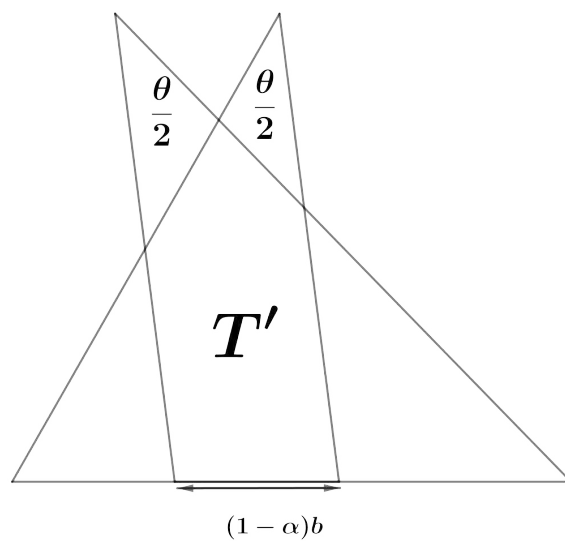
Uočimo da su trokuti  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$  jednakokračni trokuti s krakovima duljine 1 i kutom  $\pi - \frac{\theta}{2}$  između njih. Dakle,

$$A_{21} \cong A_{22} \cong B_{21} \cong B_{22}.$$

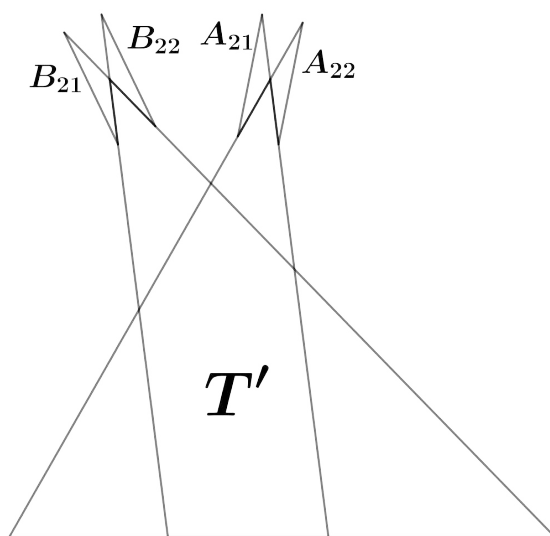
Uočimo i da su kutovi uz osnovice trokuta  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$  sukladni i jednaki  $\frac{\theta}{4}$ . U svakom sljedećem koraku broj trokuta će se udvostručiti, a kut pri vrhu smanjivat će se dva puta. Na slici 2.38 prikazan je lik koji nastaje za  $n = 3$ . Dakle, u  $n$ -tom koraku, nastat će  $2^n$  trokuta s kutom  $\frac{\theta}{2^n}$  pri vrhu. Na opisani način dobivamo lik koji nalikuje stablu. Označimo taj lik sa  $S$ , a njegovu površinu s  $P(S)$ . Označimo skup svih nastalih trokuta u  $i$ -tom koraku  $S_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

Površina lika  $S$  je jednaka zbroju površine lika  $S_1$  i površina trokuta nastalih u svakom koraku, tj.





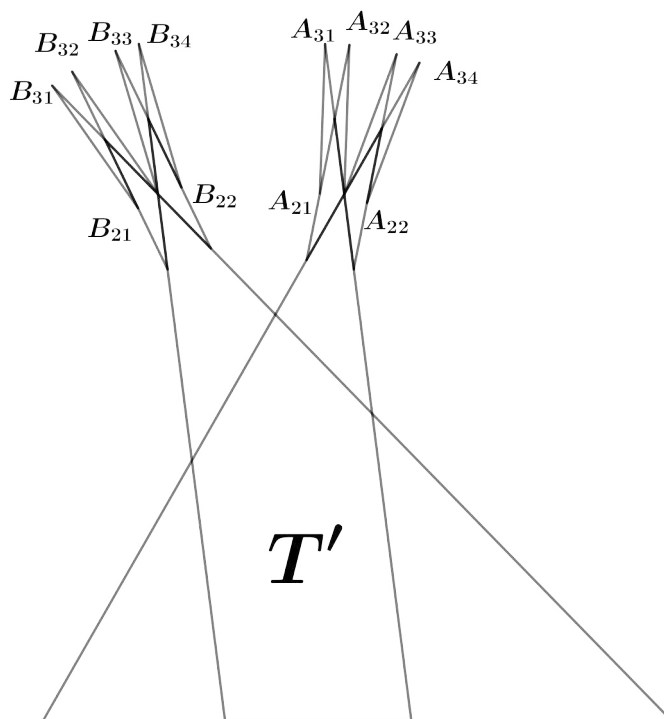
Slika 2.36



Slika 2.37

$$P(S) = P(S_1) + \sum_{i=2}^n P(S_i).$$

Uočimo da je  $P(S_1)$  konstantna i da je  $P(S_i) \leq 2^i (2^{\frac{\theta}{2^i}}) = 2\theta, i = 2, \dots, n$ .



Slika 2.38

Dakle,

$$P(S) = P(S_1) + \sum_{i=2}^n P(S_i) \leq P(S_1) + \sum_{i=2}^n 2\theta = P(S_1) + 2(n-1)\theta.$$

Neka je  $C$  vrh pri kutu  $\frac{\theta}{2^n}$  takav da je udaljenost  $v$  točke  $C$  i njezine ortogonalne projekcije  $E$  na osnovicu *stabla* unutar *stabla*. Produžimo stranicu duljine 1 čija je  $C$  jedna od krajnjih točaka do osnovice *stabla* te označimo kut pod kojim se sijeku  $\alpha$ , a točku sjecišta točkom  $D$ , vidjeti sliku 2.39.

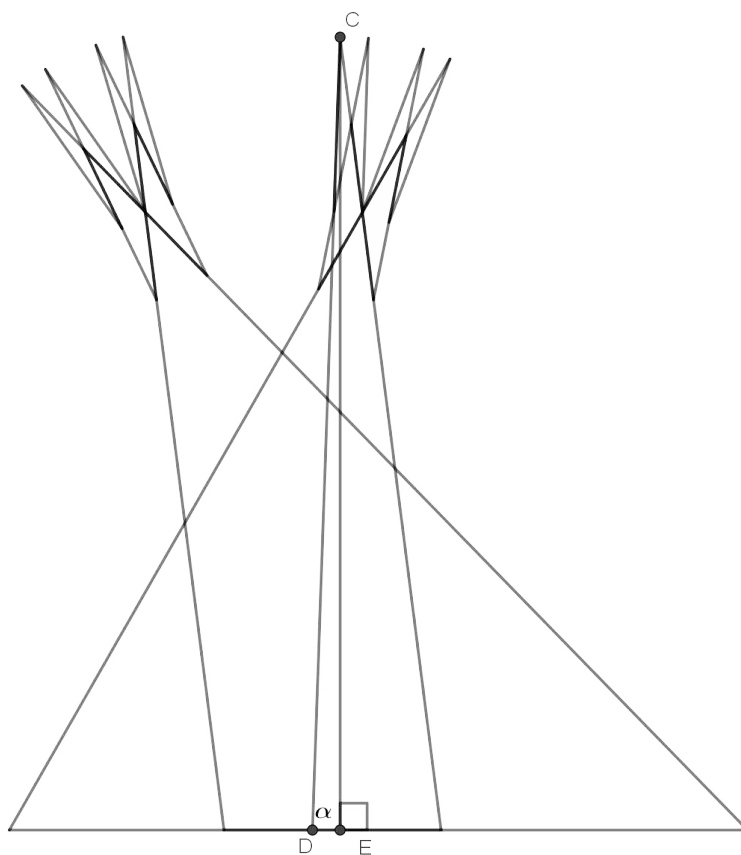
Sada je  $d(C, D) = a + (n-1)$ ,  $a > 0$ . Promotrimo pravokutni trokut  $CDE$ . Sada je

$$\sin \alpha = \frac{v}{n-1+a}.$$

Slijedi

$$v = (n-1+a) \sin \alpha.$$

Sada možemo proporcionalno sabiti cijelo *stablo* tako da  $v$  sada postaje  $v'$  i vrijedi  $v' = 1$ . Dakle, dobili smo skup  $S'$  visine 1 sličan skupu  $S$ .



Slika 2.39

Tada je

$$\frac{P(S')}{P(S)} = \frac{v'^2}{v^2} = \frac{1}{[(n-1+a)\sin\alpha]^2}.$$

Slijedi

$$P(S') = \frac{P(S)}{[(n-1+a)\sin\alpha]^2} \leq \frac{P(S_1) + 2(n-1)\theta}{[(n-1+a)\sin\alpha]^2}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_1) + 2(n-1)\theta}{[(n-1+a)\sin\alpha]^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_1) + 2n\theta - 2\theta}{(n^2 + 1 + a^2 - 2n - 2a + 2an)\sin^2\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(\frac{P(S_1)}{n} + 2\theta - \frac{2\theta}{n}\right)}{n\left(n + \frac{1}{n} + \frac{a^2}{n} - 2 + \frac{2a}{n} + 2a\right)\sin^2\alpha} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{P(S_1)}{n} + 2\theta - \frac{2\theta}{n}}{\left(n + \frac{1}{n} + \frac{a^2}{n} - 2 + \frac{2a}{n} + 2a\right)\sin^2\alpha} \\
&= \frac{2\theta}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

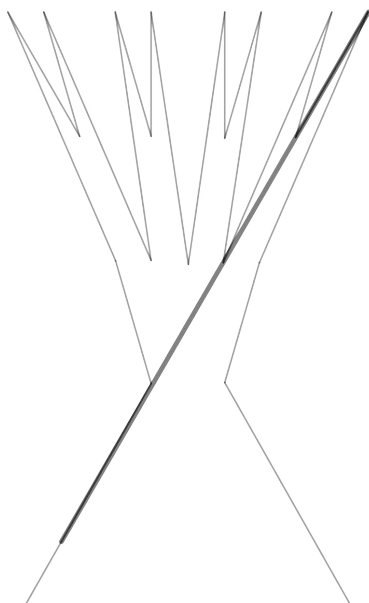
Tada je

$$P(S') \rightarrow 0 \quad \text{kada} \quad n \rightarrow \infty$$

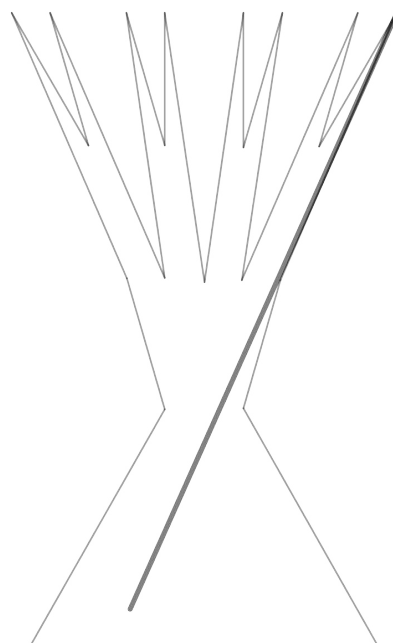
Dakle, površina lika  $S$  može biti po volji malena.

### Zaokretanje igle u Besicovitchevom skupu

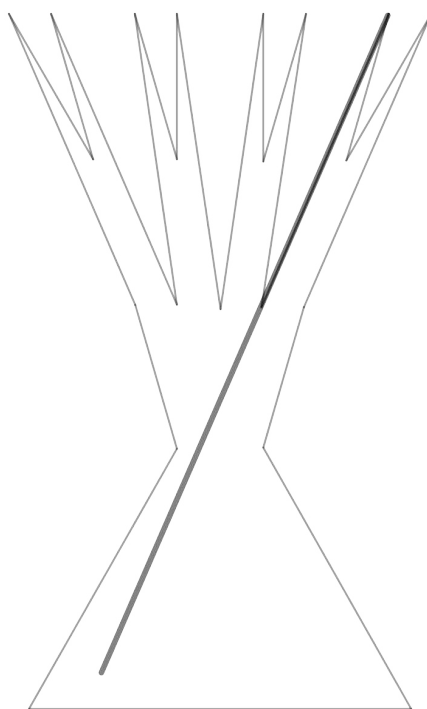
Pokušavajući zaokrenuti iglu, prikazano na slikama 2.40, 2.41, 2.42 možemo primijetiti da je u svakom koraku potreban “skok” kako bi iglu premjestili paralelno. Primjenom Palovog trika moći ćemo iglu zakrenuti bez ikakvih “skokova”, tj. neprekidno.



Slika 2.40



Slika 2.41



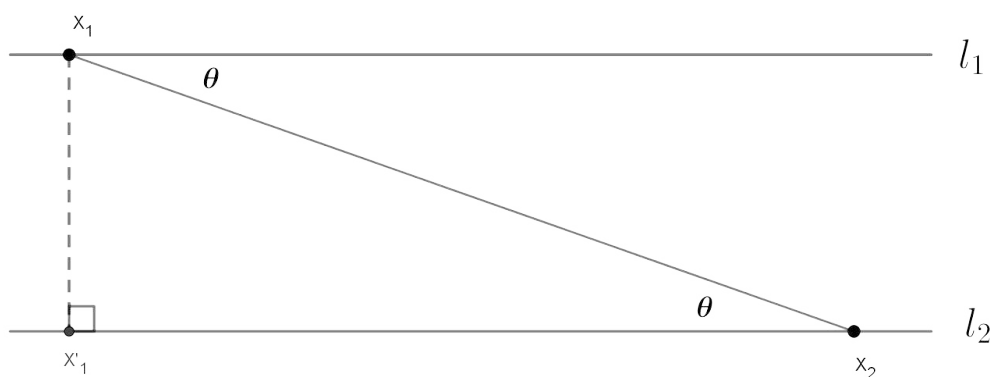
Slika 2.42

## 2.3 Konstrukcija Kakeya skupa

Promotrimo sliku 2.44. Kako bismo izbjegli “skok” pri zaokretanju igle poslužit će nam sljedeća lema, a dokaz slijedi kao u [7]. Putanja igle prikazana je na slikama 2.45-2.50.

**Lema 2.** *Neka su  $l_1, l_2$  paralelni pravci. Za svaki  $\epsilon > 0$  postoji kompaktni skup  $E$  takav da vrijedi  $P(E) < \epsilon$ , u kojem se jedinična dužina može neprekidno pomaknuti od  $l_1$  do  $l_2$ .*

*Dokaz.* Neka su  $X_1 \in l_1$  i  $X_2 \in l_2$  krajnje točke dužine  $\overline{X_1X_2}$  i neka je  $X'_1$  ortogonalna projekcija točke  $X_1$  na pravac  $l_2$ , vidjeti sliku 2.43.



Slika 2.43

Označimo s  $d$  udaljenost između  $l_1$  i  $l_2$ , s  $d'$  udaljenost između  $X'_1$  i  $X_2$  te kut između  $\overline{X_1X_2}$  i  $l_1, l_2$  s  $\theta$ . Uočimo da u pravokutnom trokutu  $X'_1X_2X_1$  vrijedi  $\operatorname{tg} \theta = \frac{d}{d'}$  iz čega slijedi  $d' = \frac{d}{\operatorname{tg} \theta}$ . Ako odaberemo točke  $X_1, X_2$  tako da su jako daleko jedna od druge, kut  $\theta$  može biti proizvoljno mali pa za svaki  $\epsilon > 0$  vrijedi  $d' = \frac{d}{\operatorname{tg} \pi \epsilon}$ . Dakle,  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{d}{d'} < \pi \epsilon$ . Neka je  $M$  površina koju jedinična dužina napravi pomičući se po pravcima  $l_1, l_2$ . Ta je površina jednaka 0. Neka su  $S_1, S_2$  kružni isječci između dužine  $\overline{X_1X_2}$  i pravaca  $l_1, l_2$  jediničnog polumjera. Površina svakog kružnog isječka  $S_1, S_2$  manja je od  $\frac{\epsilon}{2}$ . Neka je  $E = M \cup S_1 \cup S_2$ . Sada slijedi

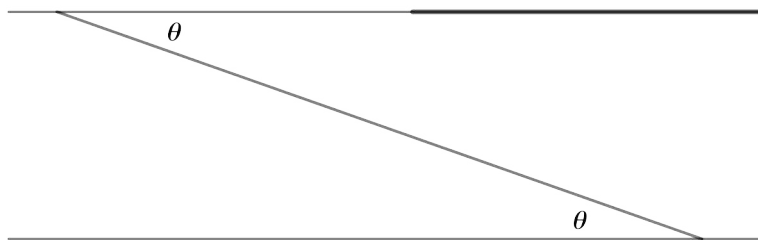
$$P(E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle,  $P(E) < \epsilon$ .

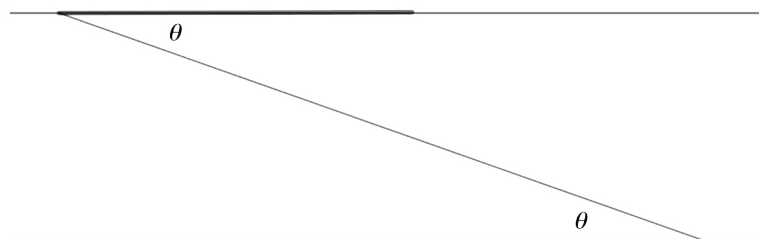
□



Slika 2.44

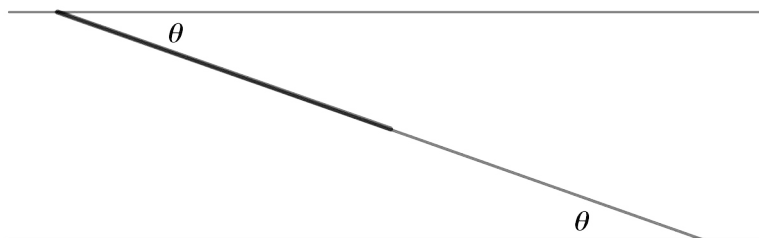


Slika 2.45

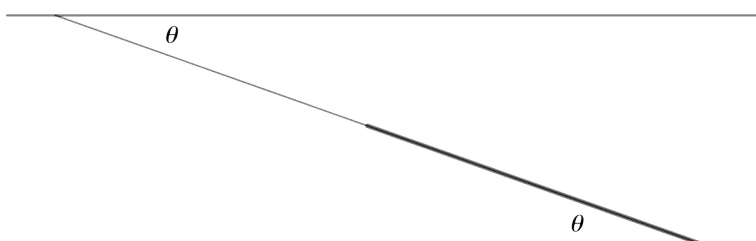


Slika 2.46

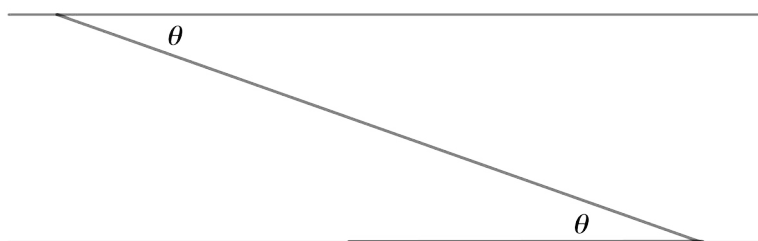




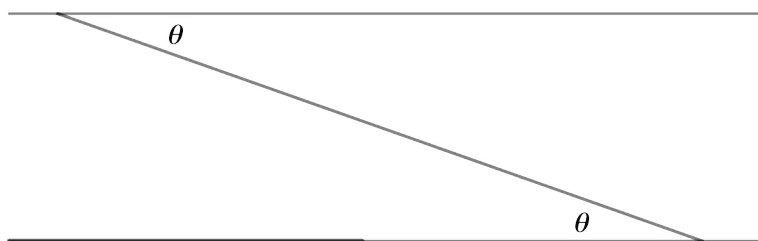
Slika 2.47



Slika 2.48



Slika 2.49



Slika 2.50

Sada možemo dokazati da je površina Kekeya skupa proizvoljno mala kao u [5].

**Teorem 1.** *Neka je  $\epsilon > 0$ . Tada postoji Kekeya skup  $K$  takav da je  $P(K) < \epsilon$ .*

*Dokaz.* Konstruiramo Besicovitchev skup tako da dijelimo jednakostranični trokut  $T$  na  $2^n$  trokuta te njihovim preslagivanjem dobivamo skup  $S$  proizvoljno male površine, tj.  $P(S) < \frac{\epsilon}{12}$ . Primjenjujući Lemu 2 možemo skupu  $S$  dodati skup  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^n - 1$ , takav da je  $P(A_i) = \frac{\epsilon}{12(2^n - 1)}$ , u kojem se jedinična dužina može neprekidno kretati unutar  $S$ . Tada dobivamo skup  $K_1 = F \cup (\bigcup_{i=1}^{2^n - 1} A_i)$  tako da  $P(K_1) < \frac{\epsilon}{12} + \frac{\epsilon}{12} = \frac{\epsilon}{6}$ . Dakle, dobili smo skup  $K_1$  površine manje od  $\frac{\epsilon}{6}$  u kojem se jedinična dužina može zaokrenuti za kut  $\frac{\pi}{3}$ . Rotacijom skupa  $K_1$  za kutove  $\frac{\pi}{3}$  i  $\frac{2\pi}{3}$  u negativnom smjeru dobivamo skupove  $K_2$  i  $K_3$ . Opet pomoću leme možemo dodati skupove  $A'_1, A'_2, A'_3$  površina manjih od  $\frac{\epsilon}{6}$  unutar kojih možemo zaokrenuti jediničnu dužinu iz  $K_1$  u  $K_2$ , iz  $K_2$  u  $K_3$  i iz  $K_3$  u  $K_1$ . Neka je  $K$  skup takav da  $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3$ . Tada je

$$P(K) < \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \epsilon.$$

Dakle,  $P(K) < \epsilon$ . □

Dakle, uvjerali smo se da za proizvoljni  $\epsilon > 0$  postoji skup u ravnini u kojem se neprekidno može zaokrenuti igla za puni kut površine najviše  $\epsilon$ . Vrijedi li to i za  $\epsilon = 0$ ? U nastavku slijedi dokaz kao u [10] da skup u kojem se neprekidno može zaokrenuti igla mora imati pozitivnu površinu.

*Dokaz.* Neka je skup  $E \subset \mathbb{R}^2$  skup u kojem se jedinična dužina može neprekidno zaokrenuti za puni kut. Tada postoji neprekidno preslikavanje  $l : t \mapsto l(t)$ , od  $t \in [0, 1]$  do jediničnih dužina  $l(t) \subset E$ . Svaku takvu dužinu možemo parametrizirati na način

$$l(t) = \{(x(t) + s \cos \omega(t), y(t) + s \sin \omega(t)) : -0.5 \leq s \leq 0.5\},$$

gdje su  $x, y, \omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne funkcije. Znamo da su u kompaktnom skupu sve neprekidne funkcije uniformno neprekidne pa postoji  $\epsilon > 0$  tako da

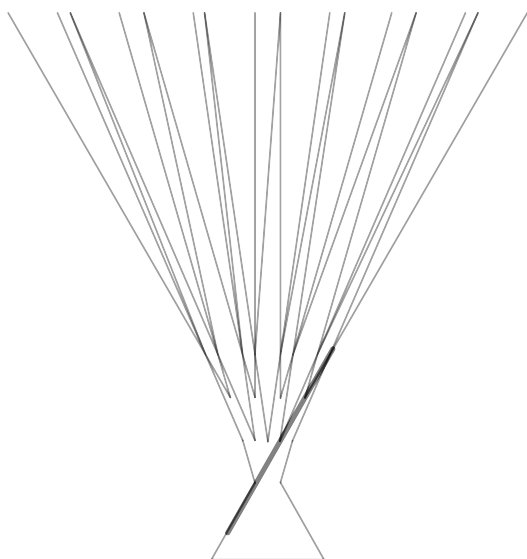
$$|x(t) - x(t')|, |y(t) - y(t')|, |\omega(t) - \omega(t')| \leq 0.001,$$

vrijedi kad god da su  $t, t' \in [0, 1]$  takvi da je  $|t - t'| \leq \epsilon$ . Uočimo da  $\omega(t)$  ne može biti konstantna funkcija od  $t$  jer inače igla ne bi mogla rotirati. Dakle, moraju postojati  $t_0, t_1 \in [0, 1]$  s  $|t_0 - t_1| \leq \epsilon$  i  $\omega(t_0) \neq \omega(t_1)$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $t_0 < t_1$  i  $x(t_0) = y(t_0) = \omega(t_0) = 0$ . Neka je  $a$  bilo koji realni broj između  $-0.4$  i  $0.4$ . Uočimo da za bilo koji  $t_0 \leq t \leq t_1$  pravac  $x = a$  siječe dužinu  $l(t)$  u točki  $(a, y_a(t))$  koja stoga mora pripadati skupu  $E$ . Uočimo da  $y_a(t)$  varira neprekidno u  $t$ . Prema Bolzano-Weierstrassovom

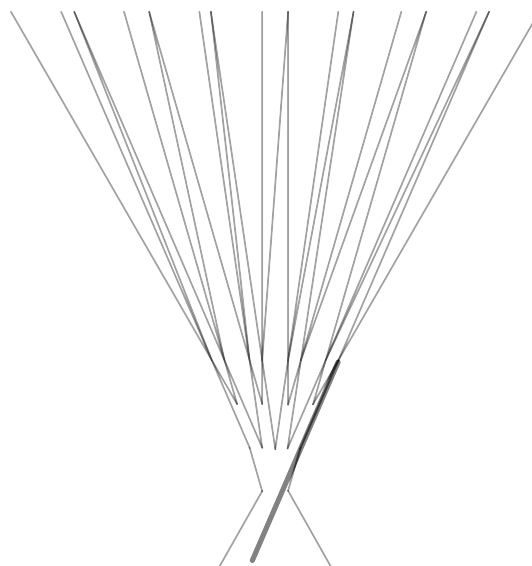
teoremu zaključujemo da interval između  $(a, y_a(t_0))$  i  $(a, y_a(t_1))$  pripada skupu  $E$ . Ako pogledamo unije za  $a$  između  $-0.4$  i  $0.4$ , skup  $E$  sadrži netrivialni krivocrtni trapez. Dakle, skup u kojem se jedinična dužina može neprekidno zarotirati za puni kut mora imati pozitivnu površinu.  $\square$

U nastavku slijede ilustracije zakretanja igle za  $60^\circ$ .

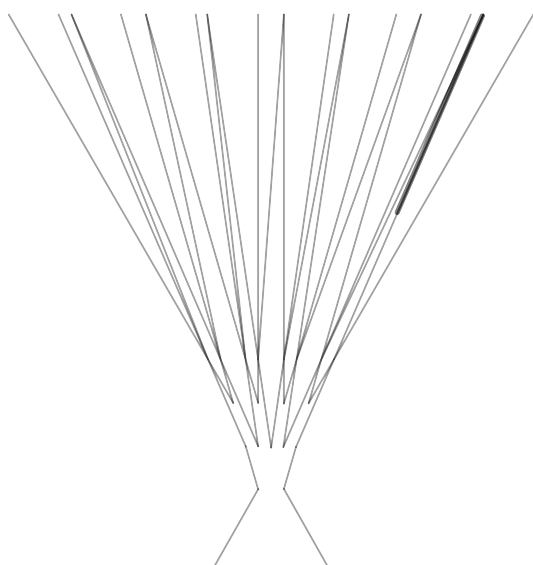
**Neprekidno zakretanje igle za  $60^\circ$**



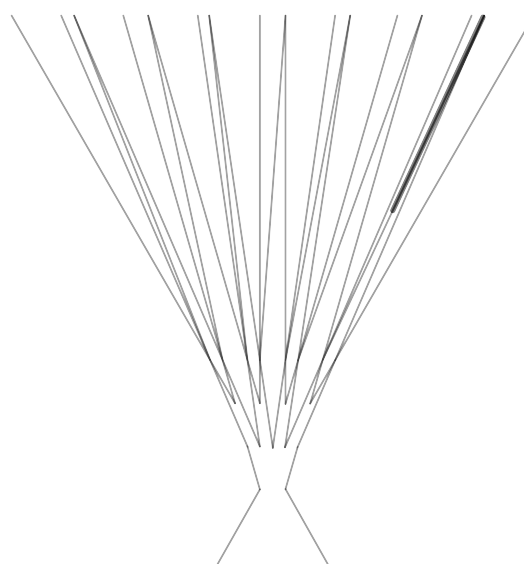
Slika 2.51



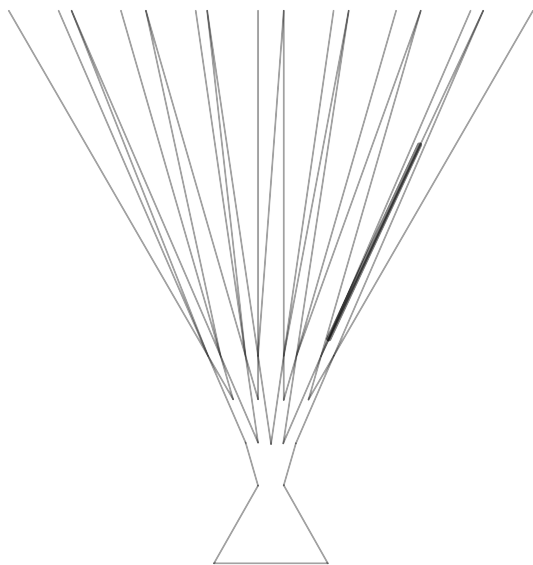
Slika 2.52



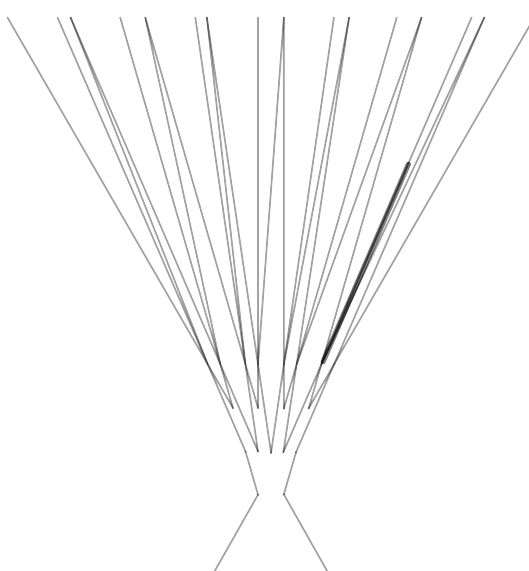
Slika 2.53



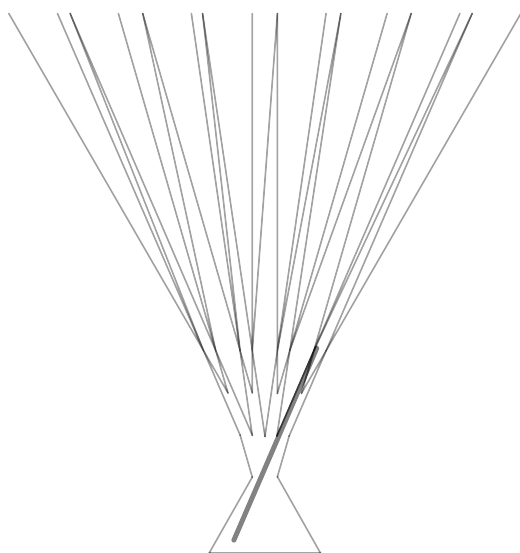
Slika 2.54



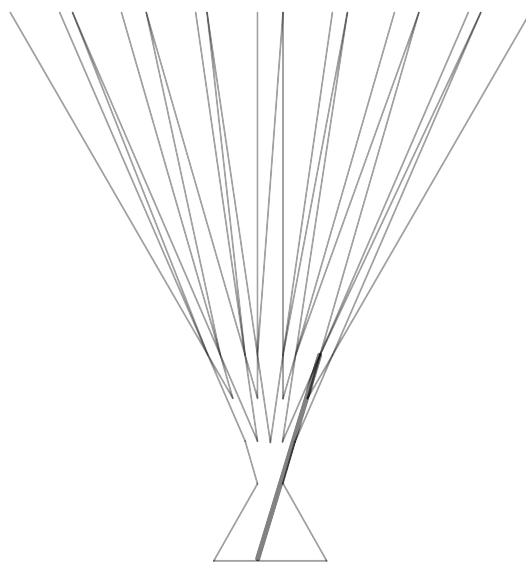
Slika 2.55



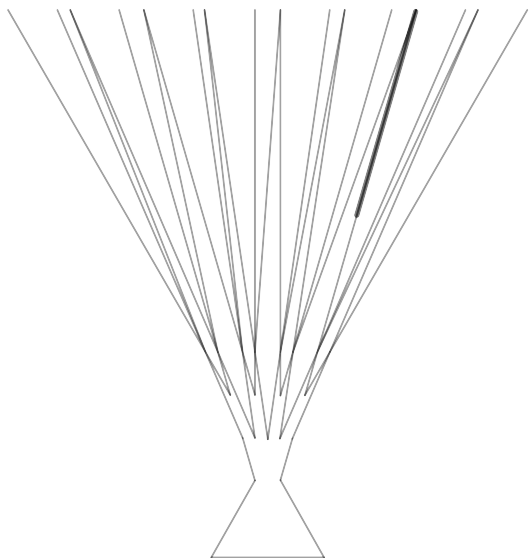
Slika 2.56



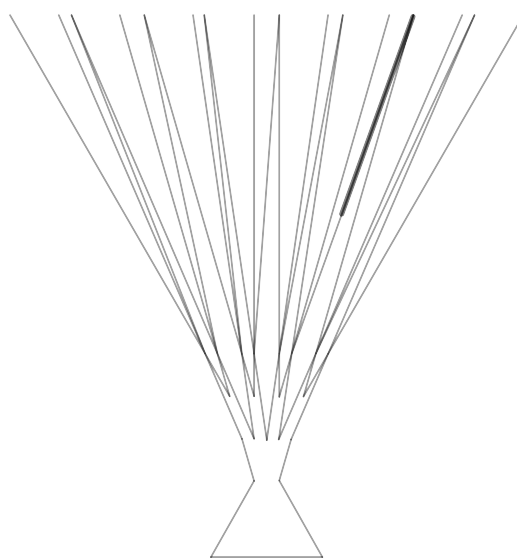
Slika 2.57



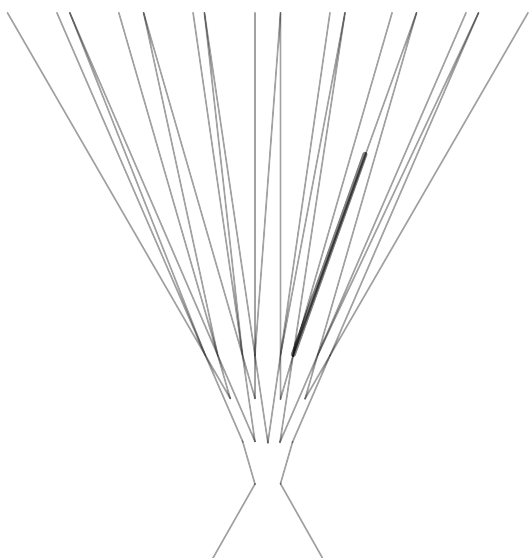
Slika 2.58



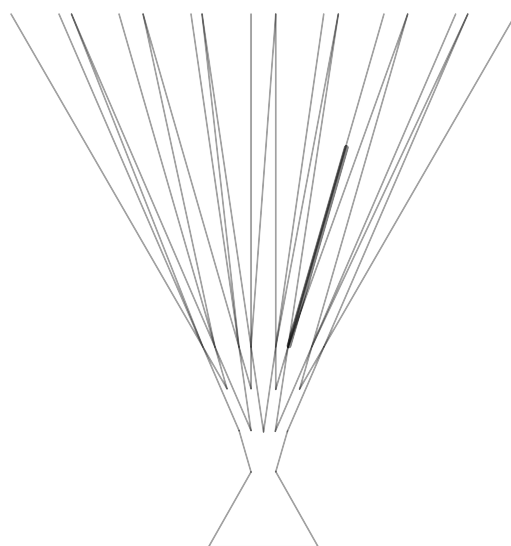
Slika 2.59



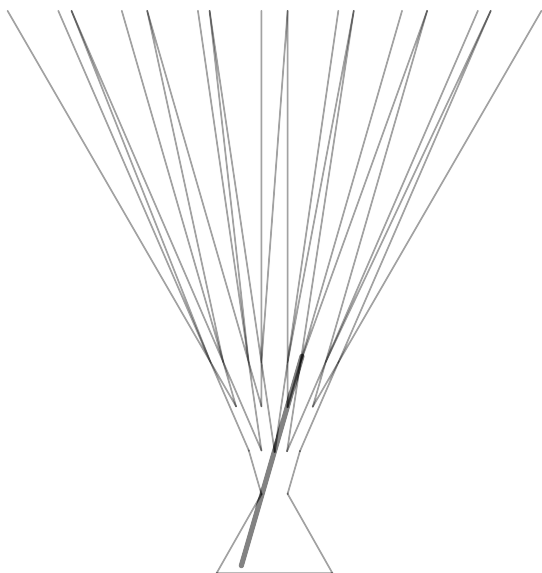
Slika 2.60



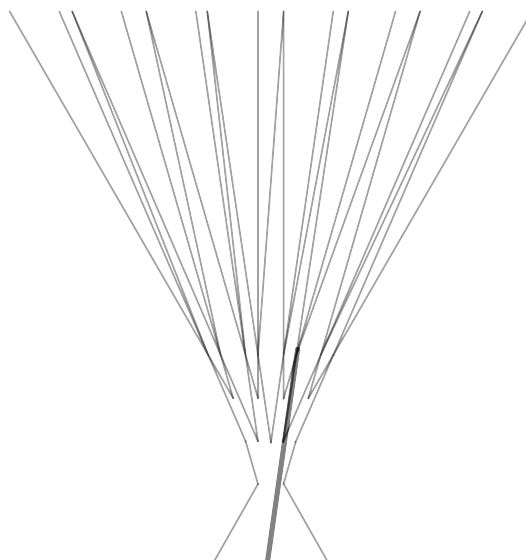
Slika 2.61



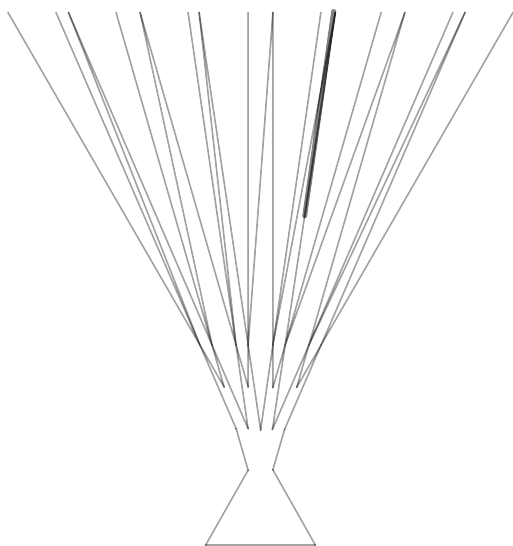
Slika 2.62



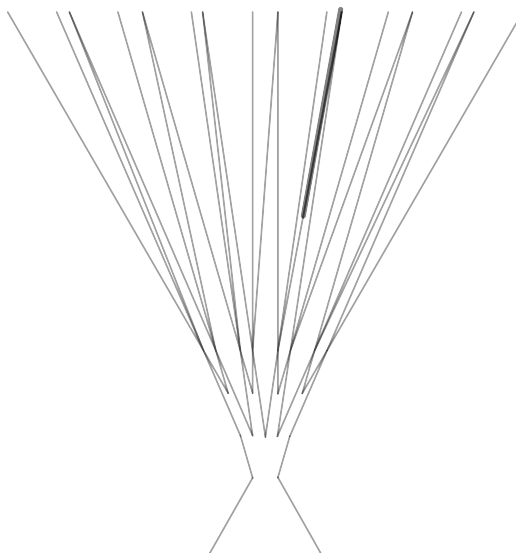
Slika 2.63



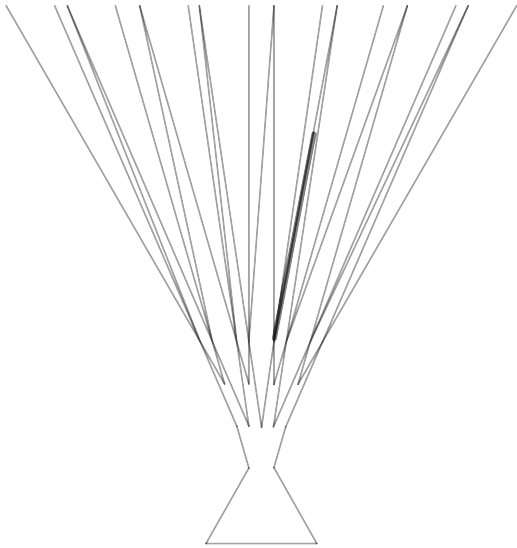
Slika 2.64



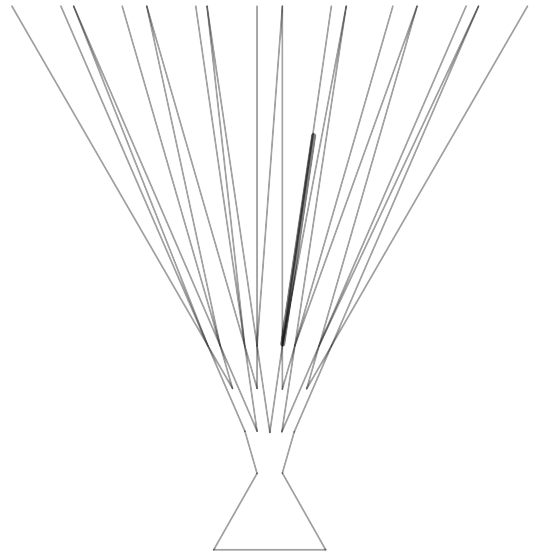
Slika 2.65



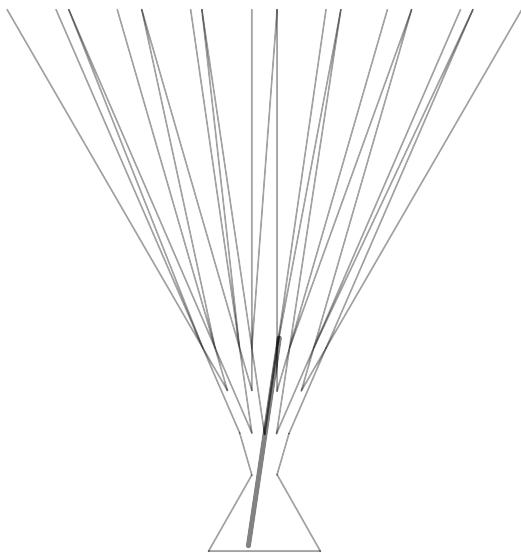
Slika 2.66



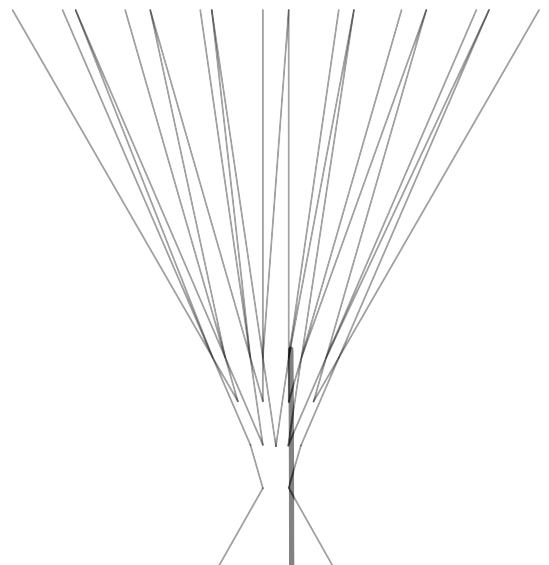
Slika 2.67



Slika 2.68

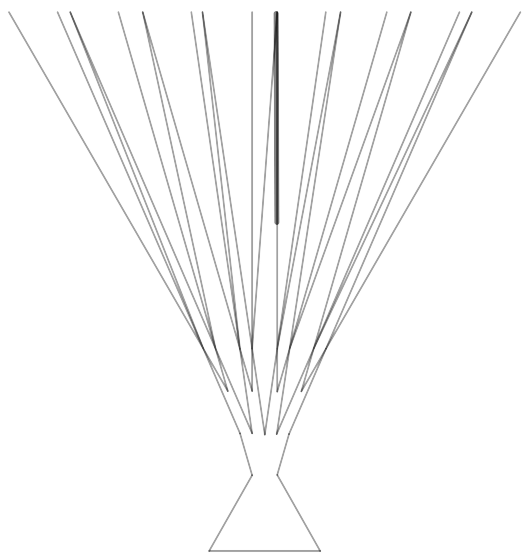


Slika 2.69

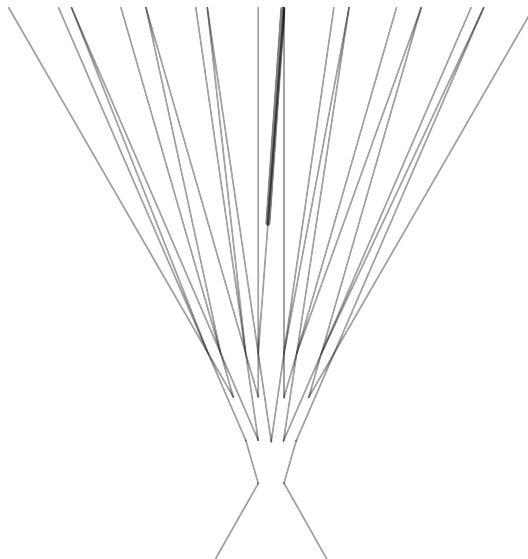


Slika 2.70

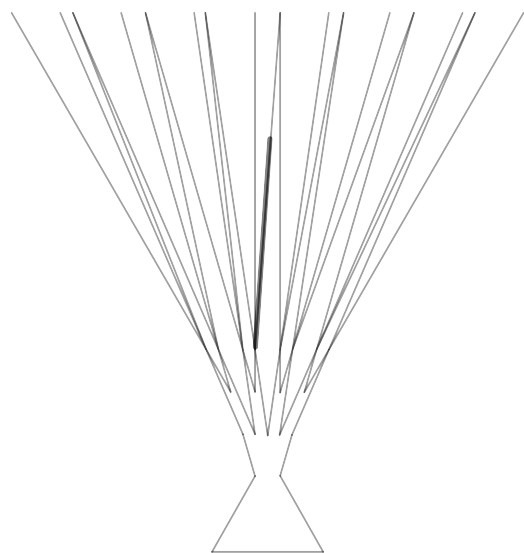




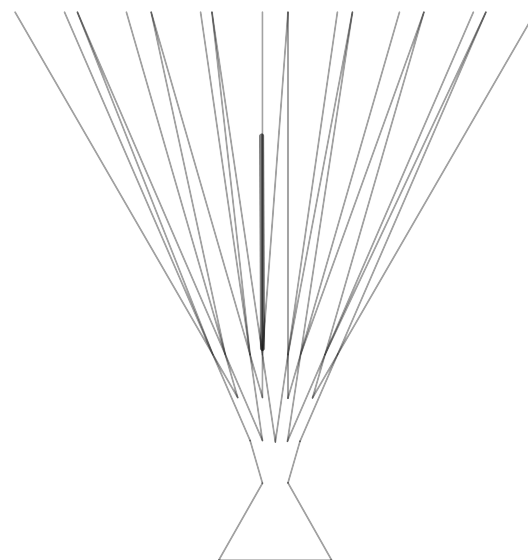
Slika 2.71



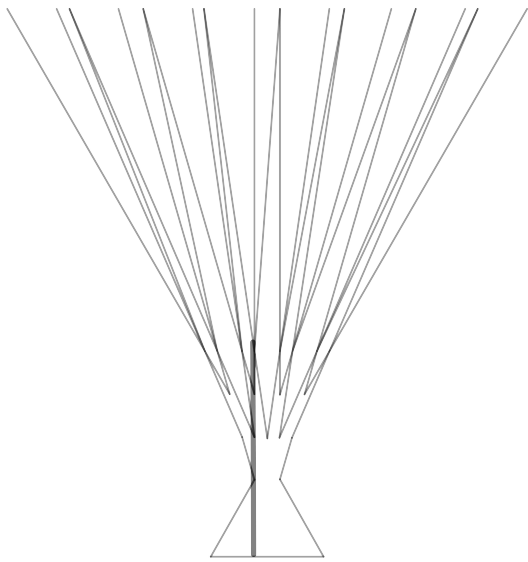
Slika 2.72



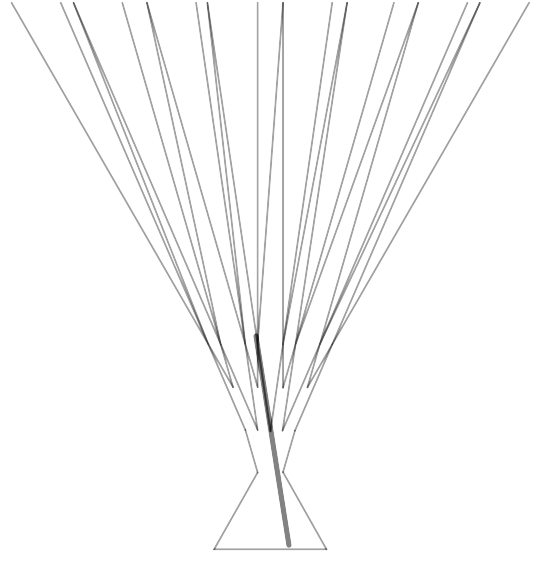
Slika 2.73



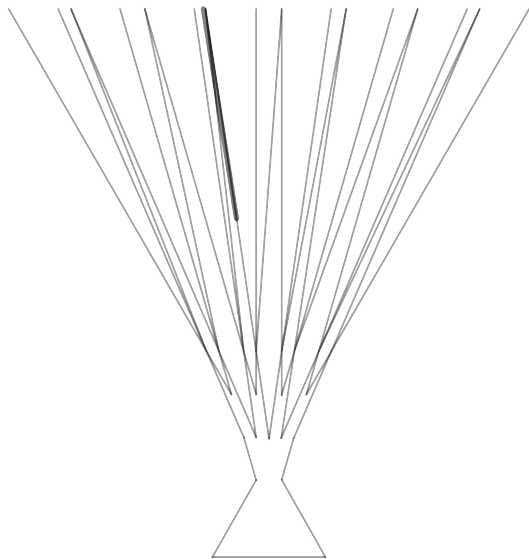
Slika 2.74



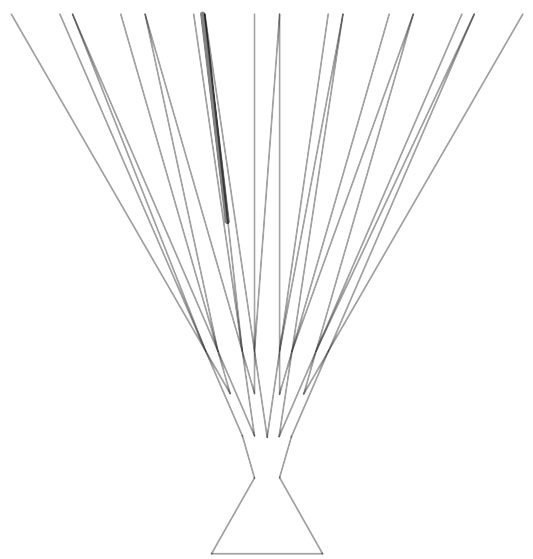
Slika 2.75



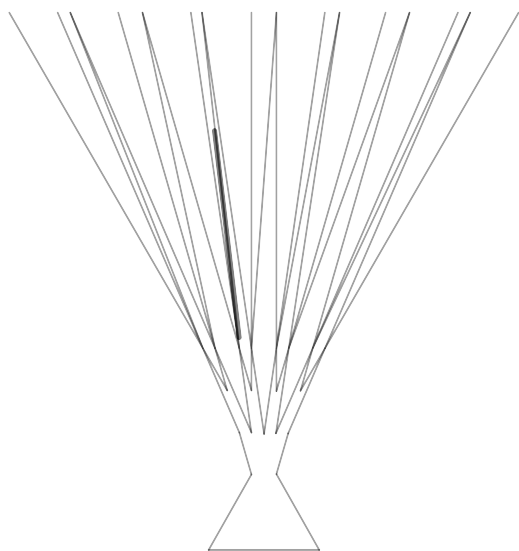
Slika 2.76



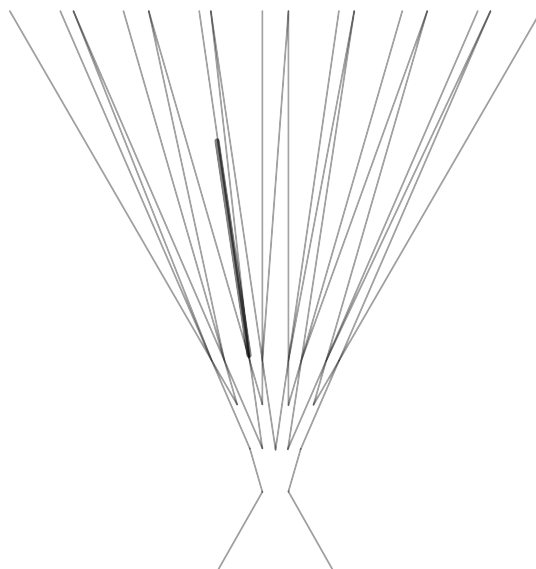
Slika 2.77



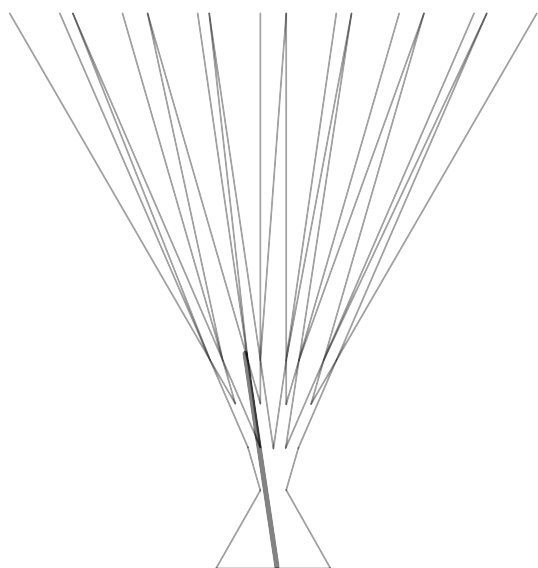
Slika 2.78



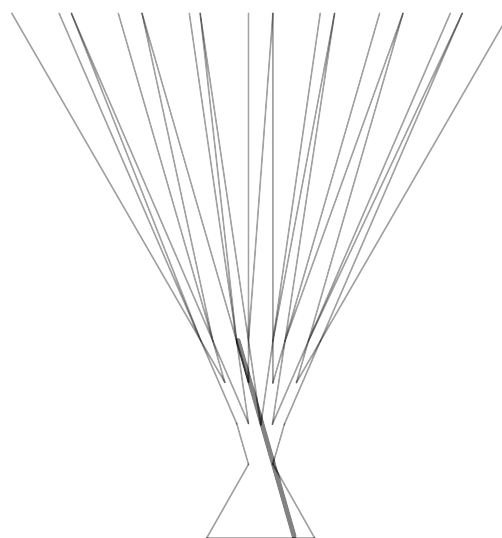
Slika 2.79



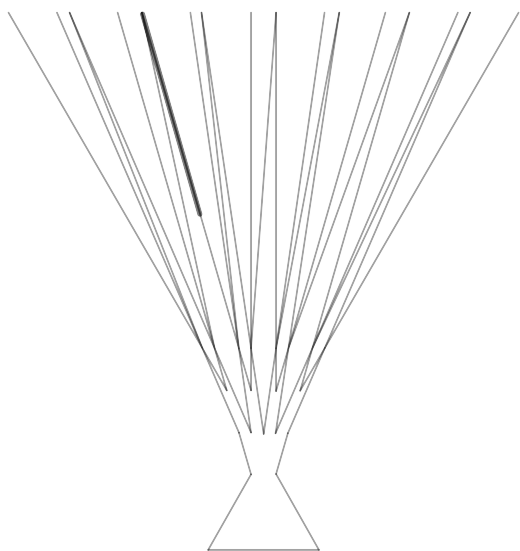
Slika 2.80



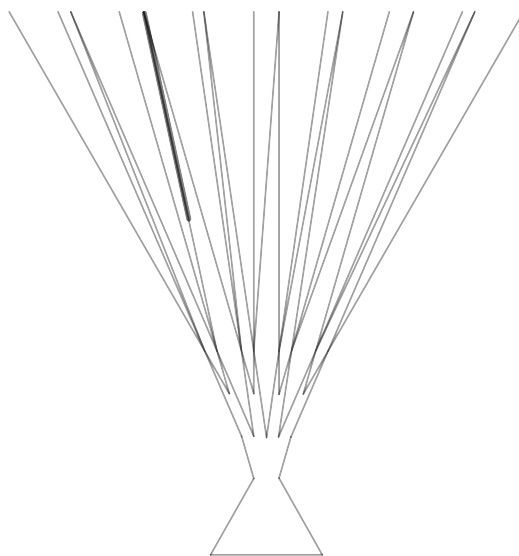
Slika 2.81



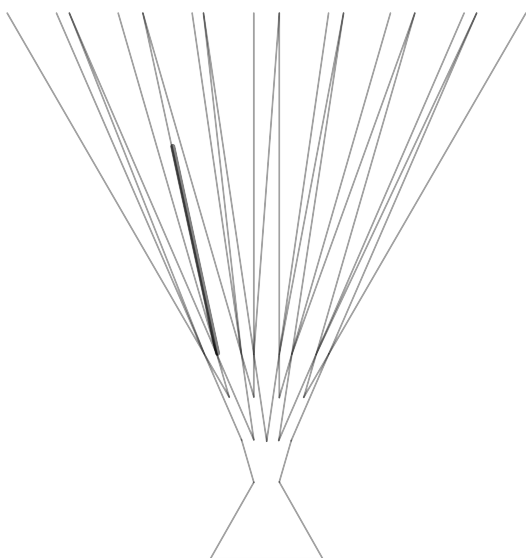
Slika 2.82



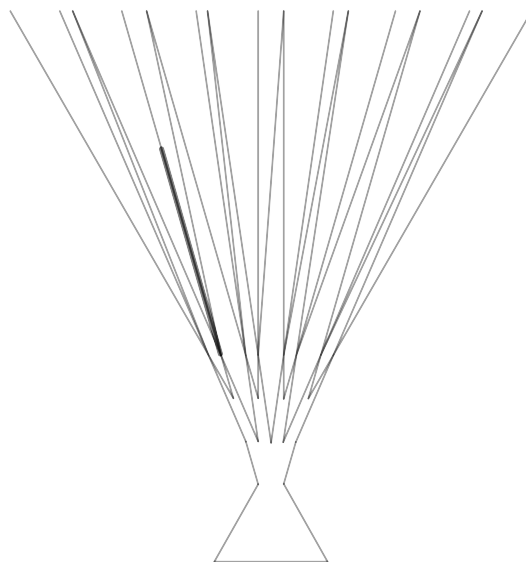
Slika 2.83



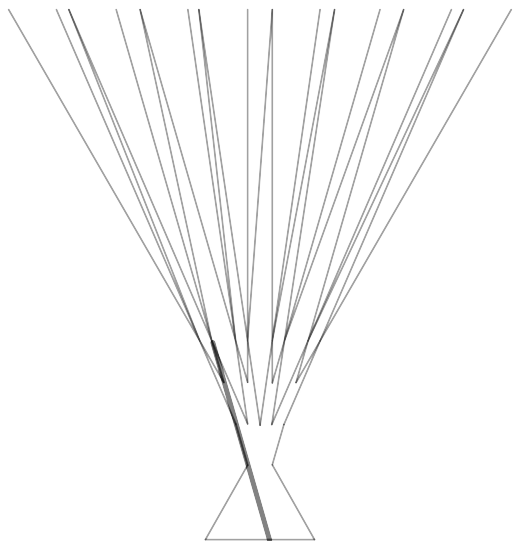
Slika 2.84



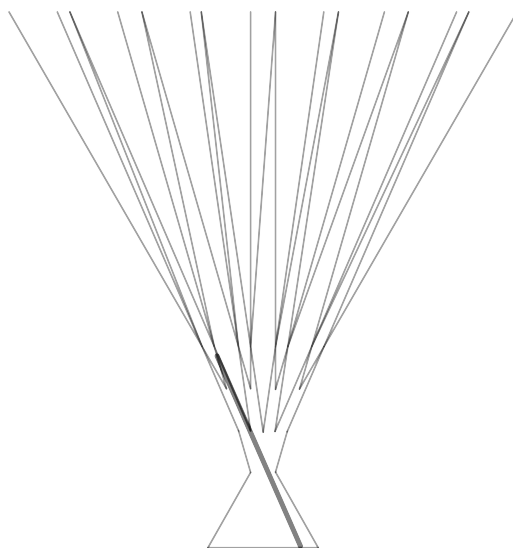
Slika 2.85



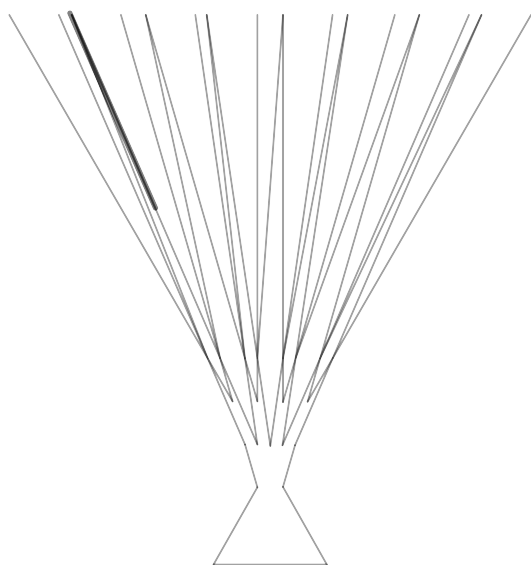
Slika 2.86



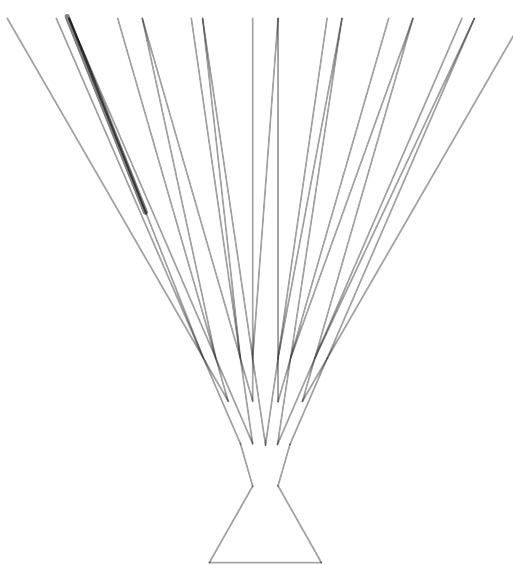
Slika 2.87



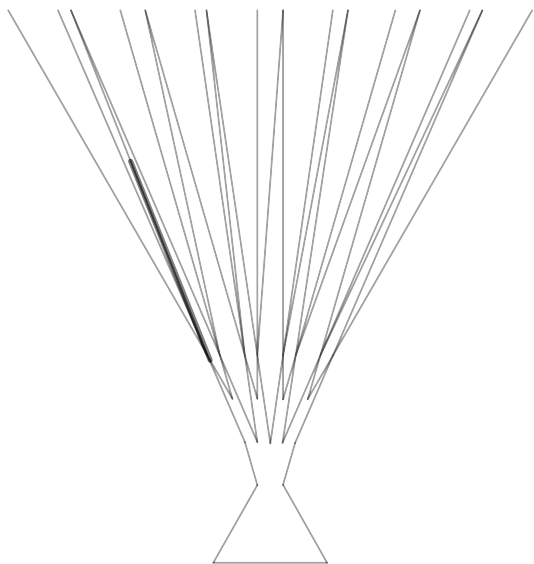
Slika 2.88



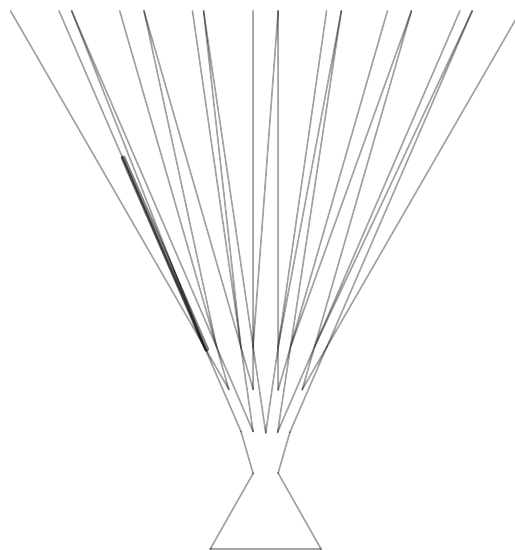
Slika 2.89



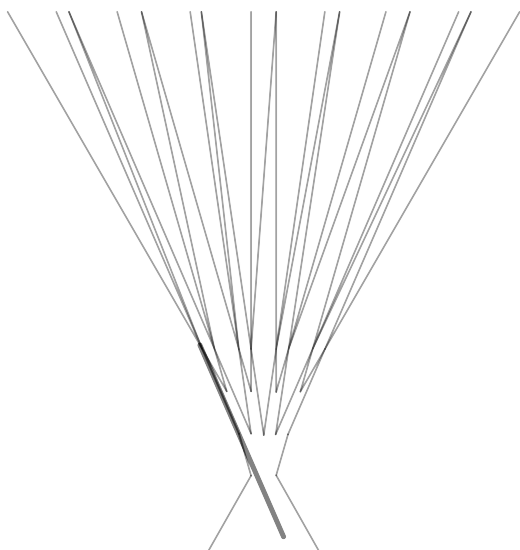
Slika 2.90



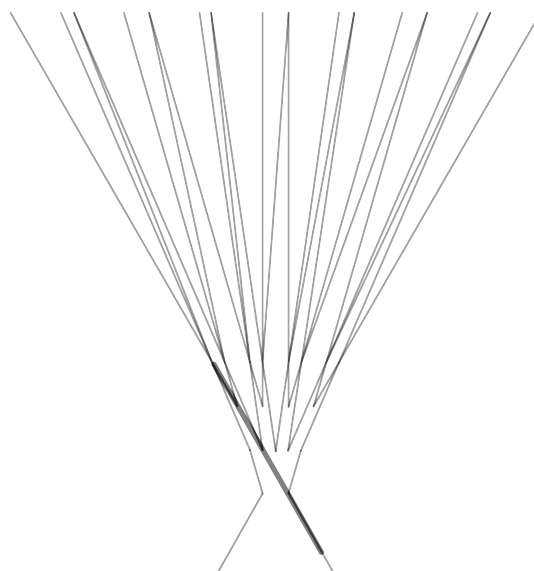
Slika 2.91



Slika 2.92



Slika 2.93



Slika 2.94



# Bibliografija

- [1] Christopher J. Bishop i Stony Brook, *An Introduction to Besicovitch-Kakeya Sets*, Dept. of Math, University of Washington, 2013, <https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/lectures/UW.pdf>, pristupljeno 10.11.2023.
- [2] Fredrick Jr. Cunningham, *The Kakeya problem for simply connected and for star shaped sets*, *The American Mathematical Monthly* **78** (1971), 114–129, <https://maa.org/programs/maa-awards/writing-awards/the-kakeya-problem-for-simply-connected-and-for-star-shaped-sets>, pristupljeno 20.12.2023.
- [3] Miguel de Guzman, *Some paradoxical sets with applications in the geometric theory of real variable*, *L'Enseignement Mathematique* (1983), <https://doi.org/10.5169/seals-52969>, pristupljeno 20.1.2024.
- [4] Kenneth J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, br. 85, Cambridge university press, 1985.
- [5] Julian Fox, *Besicovitch sets, Kakeya sets, and their properties*, <https://math.uchicago.edu/~may/REU2021/REUPapers/Fox.pdf>, pristupljeno 10.11.2023.
- [6] Izabella Laba, *The Kakeya problem, and connections to harmonic analysis*, <https://personal.math.ubc.ca/~ilaba/kakeya.html>, pristupljeno 10.11.2023.
- [7] Rongchuan Tao, Yingzi Yang, Xiaoxiao Zou, Zifan Dong i Siran Chen, *The Kakeya Problem*, *Advances in Pure Mathematics* **9** (2019), br. 2, 78–110, <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=90621#f8>, pristupljeno 20.12.2023.
- [8] Terence Tao, *From Rotating Needles to Stability of Waves: Emerging Connections between*, *Notices of the AMS* **48** (2001), br. 3, <https://www.ams.org/notices/200103/fea-tao.pdf>, pristupljeno 20.12.2023.



- [9] ———, *Dvir's proof of the finite field Kakeya conjecture*, 2008, <https://terrytao.wordpress.com/2008/03/24/dvirs-proof-of-the-finite-field-kakeya-conjecture/>, pristupljeno 25.1.2023.
- [10] Terence Tao, *A remark on the Kakeya needle problem*, 2008, <https://terrytao.wordpress.com/2008/12/31/a-remark-on-the-kakeya-needle-problem/>, pristupljeno 10.11.2023.
- [11] Eric W. Weisstein, *Hypocycloid*, (2003), <https://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html>, pristupljeno 20.12.2023.

# Sažetak

Ovaj diplomski rad bavi se Kakeyininim problemom okretanja igle. Rad počinje opisom povijesnog razvoja problema. Navedeni su i sa slikama potkrijepljeni primjeri Kakeya skupova, tj. likova unutar kojih se jedinična igla neprekidno može zaokrenuti za puni kut. Slijedi konstrukcija Besicovitchevog skupa na dva načina pomoću trokuta te dokaz da površina takvog skupa može biti proizvoljno mala. Zatim se konstruira Kakeya skup, dokazuje se da površina takvog skupa može biti proizvoljno mala i pozitivna te se komentira može li skup u kojem se za puni kut može zaokrenuti igla imati površinu nula. Na kraju rada pomoću slika se prikazuje zakretanje igle za  $60^\circ$ .



# Summary

This thesis deals with Kakeya's needle problem. The paper begins by describing the historical development of the problem. Examples of Kakeya sets, i.e. figures in which a single needle can be continuously rotated through a full angle, are given and illustrated with pictures. Next, the construction of the Besicovitch set in two ways using triangles and the proof that the area of such a set can be arbitrary small is given. Then the Kakeya set is constructed, it is proved that the area of such a set can be arbitrarily small and positive and it is commented on whether a region in which the needle can be rotated for a full angle can have zero area. At the end of the thesis it is illustrated how the needle rotates by  $60^\circ$ .



# Životopis

Moje ime je Katarina Knežević, rođena sam 22. travnja 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Gimnaziju Tituša Brezovačkog te sam nakon polaganja državne mature 2016. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2021. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike nastavničkog smjera na istom odsjeku.