Stabilna konvergencija slučajnih varijabli

Pavlović, Jelena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Pavlović

STABILNA KONVERGENCIJA SLUčAJNIH VARIJABLI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Snježana
Lubura Strunjak

Zagreb, travanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji koja mi je bila velika podrška tijekom studiranja. Posebno hvala mojoj mentorici na strpljenju, savjetima i pomoći tijekom izrade ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Jedan od najvažnijih teorema u teoriji vjerojatnosti je centralni granični teorem. On, u svom najpoznatijem obliku, tvrdi da suma od n nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s konačnom varijancom po distribuciji konvergira k normalnoj razdiobi, kada n teži prema beskonačnosti. Drugim riječima, ako uzmemo dovoljno velike uzorke duljine n iz populacije s konačnom varijancom, srednje vrijednosti tih uzoraka će aproksimirati normalnu razdiobu s parametrima μ i σ^2/n, gdje je μ srednja vrijednost populacije, a σ^2 njezina varijanca, bez obzira koja je distribucija populacije. Ovaj teorem je ključan u teoriji vjerojatnosti jer implicira da se probabilističke i statističke metode koje vrijede za normalne distribucije mogu primijeniti na mnoge probleme koji uključuju druge vrste distribucija. Postoje različite verzije centralnog graničnog teorema, od kojih se svaka primjenjuje u specifičnim uvjetima, a obično se iskazuju u terminima konvergencije po distribuciji.

Konvergencija slučajnih varijabli po distribuciji te slaba konvergencija vjerojatnosnih mjera, kao nešto općenitiji koncept, neki su od temeljnih pojmova u teoriji vjerojatnosti. Premda je najslabiji osnovni tip konvergencije slučajnih varijabli, konvergencija po distribuciji ima veliki značaj u statističkom zaključivanju. Ona pruža uvid u asimptotsko ponašanje slučajnih varijabli te ima fundamentalnu ulogu u graničnim teoremima s ciljem utvrđivanja ponašanja uzoračkih statistika s porastom veličine uzorka.

Iako se obično iskazuju u terminima konvergencije po distribuciji, mnogi granični teoremi, uz iste pretpostavke, vrijede i za jednu jaču vrstu konvergencije slučajnih varijabli, što otvara mogućnost dobivanja dodatnih rezultata koji nisu dostupni putem obične konvergencije po distribuciji. Ta se konvergencija naziva stabilnom konvergencijom slučajnih varijabli. Stabilna, odnosno općenitija $\mathcal{G}$-stabilna konvergencija slučajnih varijabli, zajedno s miješanom konvergencijom kao posebnim slučajem, centralna je tema ovog rada.

Mađarski matematičar Alfréd Rényi postavio je osnove ovog tipa konvergencije prije više od 60 godina. Prvo je razvijena ideja miješane konvergencije, potaknuta slabom konvergencijom vjerojatnosnih mjera. Naime, konvergencija po distribuciji $X_n \xrightarrow{d} \nu$, pri čemu je ν vjerojatnosna mjera, može se ekvivalentno prikazati kao slaba konvergencija pripadnih distribucija, $P_{X_n} \xrightarrow{w} \nu$. Ako sada vjerojatnosnu mjeru P zamijenimo uvjetnim vjerojatnosnim mjerama P_F te zahtijevamo da vrijedi $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} \nu$ za svaki $F \in \mathcal{F}$, $P(F) > 0$, pri čemu je $P_F^{X_n} = P_{X_n}(\cdot|F)$, dobivamo upravo jednu od karakterizacija miješane konvergencije. Dakle, slabiji zahtjev, koji podrazumijeva slabu konvergenciju niza distribucija $(P_{X_n})_n$, postrožili smo dodatnim uvjetom da ta konvergencija vrijedi pod svakom vjerojatnosnom mjerom P_F, za sve moguće skupove $F \in \mathcal{F}$ pozitivne vjerojatnosti P. Ako niz uvjetnih distribucija od X_n slabo konvergira za svaki takav F, tada nužno vrijedi i konvergencija niza $(X_n)_n$ po distribuciji.

$\mathcal{G}$-stabilna konvergencija je zapravo slaba konvergencija uvjetnih distribucija obzirom na σ-podalgebru $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$. Uvjetnu distribuciju $P_{X|\mathcal{G}}$, pri čemu je $X : \Omega \to \mathcal{X}$ slučajni element, definirat ćemo kao posebno preslikavanje definirano na prostoru $\Omega \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$, koje zovemo Markovljevom jezgrom. Stoga je teorija Markovljevih jezgri pogodna početna točka za razvijanje teorije stabilne konvergencije te će ona biti predstavljena u drugom poglavlju ovog rada.

U prvom poglavlju su istaknuti neki osnovni pojmovi i rezultati koji će nam poslužiti u razvijanju teorije slabe konvergencije Markovljevih jezgri te kasnije prilikom uvođenja koncepta stabilne konvergencije. S obzirom da ćemo promatrati slučajne elemente koji poprimaju vrijednosti u proizvoljnom separabilnom, metrizabilnom i potpunom topološkom prostoru $\mathcal{X}$, prvo poglavlje započinjemo nekim ključnim pojmovima vezanima uz topološke i metričke prostore. Zatim se kratko osvrćemo na neke vrste neprekidnosti u topološkim i metričkim prostorima, a budući da je jedan od temeljnih koncepata ovog rada slaba konvergencija nizova, dan je i kratak pregled općenite slabe topologije te veza konvergencije nizova odnosno hipernizova u slaboj topologiji s pojmom slabe konvergencije nizova te hipernizova. Također, u istom su poglavlju predstavljeni neki osnovni pojmovi i rezultati iz teorije mjere koji će biti korisni u daljnjoj analizi slabe konvergencije Markovljevih jezgri i stabilne konvergencije slučajnih varijabli. Konačno, prvo poglavlje završavamo s potpoglavljem *Vjerojatnosni prostori i slučajne varijable* što nam predstavlja polazišnu točku za uvođenje teorije Markovljevih jezgri. U tom su potpoglavlju navedeni neki temeljni pojmovi iz teorije vjerojatnosti s time da je najveći fokus upravo na slaboj konvergenciji vjerojatnosnih mjera. Osim toga, u ovom dijelu poopćavamo neke osnovne pojmove, koji se obično iskazuju u terminima prostora $\mathbb{R}$, uzimanjem općenitog separabilnog, metrizabilnog i potpunog topološkog prostora $\mathcal{X}$ umjesto njega.

U drugom poglavlju uvodimo pojam Markovljeve jezgre K s $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ te definiramo slabu topologiju na prostoru $\mathcal{K}^1$ svih takvih preslikavanja. Zatim uvodimo pojam slabe konvergencije hiperniza u prostoru $\mathcal{K}^1$ te u nastavku navodimo i proučavamo različite karakterizacije slabe konvergencije na prostoru svih Markovljevih jezgri s $(\Omega, \mathcal{G})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Umjesto općenitih Markovljevih jezgri, u trećem poglavlju promatramo uvjetne distribucije slučajnih varijabli uz danu σ-podalgebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, a slabu konvergenciju niza $(P_{X_n|\mathcal{G}})_n$ prema Markovljevoj jezgri $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ nazivamo $\mathcal{G}$-stabilnom konvergencijom slučajnih varijabli $(X_n)_n$ prema K. Također, definiramo i $\mathcal{G}$-miješanu konvergenciju kao poseban slučaj $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, u kojem granična Markovljeva jezgra ne ovisi o $\omega \in \Omega$. Središnji teorem ovog poglavlja je teorem o karakterizacijama $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, čiji dokaz pojednostavljuje teorija pokazana u drugom poglavlju. Zatim, proučavamo neka značajna svojstva $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, njen odnos s drugim tipovima konvergencije slučajnih varijabli te analiziramo neke važne rezultate koje ovaj tip konvergencije omogućuje. Ovo poglavlje završavamo s alternativnim pristupom definiranja $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, u kojemu je limes konvergencije slučajna varijabla, te predstavljamo rezultate od ranije u kontekstu ovog novog pristupa koji omogućava nešto intuitivnije razumijevanje određenih rezultata i jasniju usporedbu s drugim vrstama konvergencije.

U četvrtom poglavlju istražit ćemo različite korisne primjene $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, analizirati njene prednosti u usporedbi s drugim vrstama konvergencije i proučiti neke specifične rezultate koje ona omogućuje. Ove prednosti i rezultate demonstrirat ćemo kroz nekoliko primjera, a neke od njih ćemo dodatno potkrijepiti simulacijama u zadanom kontekstu.

Za kraj ovog uvodnog dijela, napomenimo da se stabilna konvergencija pokazala izuzetno korisnom u razvoju teorije martingalnih centralnih graničnih teorema u diskretnom vremenu, kao i u teoriji graničnih teorema za stohastičke procese. Nedavno se pak stabilna konvergencija pokazala kao ključan alat u istraživanju diskretiziranih procesa, aproksimaciji stohastičkih integrala i stohastičkih diferencijalnih jednadžbi, te statistici financijskih podataka visoke frekvencije. Ovaj koncept pruža osnovu za razumijevanje ponašanja slučajnih varijabli u širem spektru situacija, što ga čini važnim sredstvom u mnogim područjima matematike i primijenjenih znanosti.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Topološki i metrički prostori

Za početak uvodimo neke osnovne pojmove topoloških i metričkih prostora.

Definicija 1.1.1. ***Topološki prostor*** *je par* $(X, \mathcal{U})$ *skupa* X *i familije* $\mathcal{U}$ *podskupova od* X *za koju vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$*;*

(ii) $\mathcal{U}$ *je zatvorena na proizvoljne unije;*

(iii) $\mathcal{U}$ *je zatvorena na konačne presjeke.*

Familija $\mathcal{U}$ zove se **topološka struktura** ili **topologija** prostora $(X, \mathcal{U})$, a njeni elementi **otvoreni skupovi**.

Za skup $S \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako je $X \setminus S$ otvoren. **Interior** $\mathrm{Int} S$ skupa $S \subseteq X$ je unija svih otvorenih skupova koji su sadržani u S. **Zatvarač** $\mathrm{Cl} S$ skupa $S \subseteq X$ je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže S.

Okolina točke $x_0 \in X$ u prostoru X je svaki skup $O \subseteq X$ takav da je $x_0 \in \mathrm{Int}\, O$. Familiju svih okolina točke x_0 označavamo s $\mathcal{O}(x_0)$.

Za skup $D \subseteq X$ kažemo da je **gust** u X ako je $\mathrm{Cl} D = X$.

Definicija 1.1.2. ***Metrički prostor*** *je par* (X, d) *skupa* X *i preslikavanja* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *za koje vrijede sljedeća svojstva:*

(i) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X$*;*

(ii) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$*;*

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$*;*

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$ *(nejednakost trokuta).*

Preslikavanje d zovemo ***metrika*** *ili* ***udaljenost*** *na skupu X.*

Ako je topologiju $\mathcal{U}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$ moguće dobiti iz neke metrike d, onda kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{U})$ **metrizabilan**.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor.* ***Baza topologije $\mathcal{U}$*** *je familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ koja ima svojstvo da se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{U}$ može prikazati kao unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$.*

U svakom metričkom prostoru, unija svih kugala $K(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x_0, x) < r\}$, $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$ čini bazu topološkog prostora.

Definicija 1.1.4. *Neka su $(X', \mathcal{U}')$ i $(X'', \mathcal{U}'')$ topološki prostori. Topološki prostor $(X, \mathcal{U})$ koji se sastoji od skupa $X = X' \times X''$ i jedinstvene topologije $\mathcal{U}$ na X kojoj je baza familija*

$$\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' = \{U' \times U'' : \ U' \in \mathcal{U}, U" \in \mathcal{U}''\}$$

zove se ***direktni produkt topoloških prostora*** *X' i X''.*

Definicija 1.1.5. *Kažemo da je prostor X* ***separabilan*** *ako postoji prebrojiv skup $D \subseteq X$ koji je gust u X.*

Vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 1.1.6. *Metrički prostor (X, d) ima prebrojivu bazu ako i samo ako je separabilan.*

Ako je metrički prostor (X, d) separabilan, onda je i svaki njegov potprostor (Y, d_Y), $Y \subseteq X$ i $d_Y := d|_{Y \times Y}$, također separabilan.

Definicija 1.1.7. *Za topološki prostor X kažemo da je* ***Hausdorffov*** *ako za svaki par točaka $x_0, x_0' \in X$ takvih da je $x_0 \neq x_0'$ postoje disjunktne okoline O od x_0 i O' od x_0'.*

U nastavku uvodimo pojam hiperniza te definiramo konvergenciju hiperniza u metričkom prostoru.

Definicija 1.1.8. ***Usmjereni skup*** *$(A, \leq)$ je uređeni par koji se sastoji od nepraznog skupa A i binarne relacije $\leq$ definirane na A za koju vrijedi:*

(i) $\alpha \leq \alpha, \ \forall \alpha \in A;$

(ii) $\alpha \leq \beta, \ \beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma;$

(iii) Za sve $\alpha, \beta \in A$ postoji $\gamma \in A$ sa svojstvom $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$.

Svako preslikavanje $x : A \to X$ naziva se **hiperniz** u X. Hiperniz označavamo s $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ili kraće s $(x_\alpha)_\alpha$.

Definicija 1.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor i $(A, \leq)$ usmjereni skup. Kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ **konvergira** u X ako postoji $x_0 \in X$ takav da*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha_0 \in A \text{ takav da } \alpha_0 \leq \alpha \implies d(x_0, x_\alpha) < \epsilon.$$

U tom slučaju pišemo $x_0 = \lim_\alpha x_\alpha$.

*Kažemo da je hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ **Cauchyjev** ako vrijedi*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha_0 \in A \text{ takav da } \alpha_0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \implies d(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) < \epsilon.$$

Kako je skup prirodnih brojeva s prirodnim uređajem primjer usmjerenog skupa, jasno je da pojam hiperniza poopćuje pojam niza. Dakle, iz gornjih definicija lako slijede odgovarajuće definicije za nizove.

Definicija 1.1.10. *Kažemo da je metrički prostor (X, d) **potpun** ako svaki Cauchyjev niz $(x_n)_n$ u X konvergira prema nekoj točki $x_0 \in X$.*

U metričkom prostoru (X, d) za skup $S \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u S takav da $x_n \to x_0$, vrijedi $x_0 \in S$.

Ako je topološki prostor Hausdorffov, tada je limes konvergentnog hiperniza jedinstven. Budući da je svaki metrički prostor Hausdorffov, limes konvergentnog hiperniza u metričkom prostoru je jedinstven.

Za kraj ovog potpoglavlja, proučavamo pojam kompaktnosti.

Definicija 1.1.11. *Kažemo da je familija $\mathcal{U} = (U_a, a \in A)$ podskupova U_a skupa X **pokrivač** skupa X ako je $X = \bigcup_{a\in A} U_a$.*
*Ako je svaki od skupova $U_a, a \in A$ otvoren u X, kažemo da je $\mathcal{U}$ **otvoreni pokrivač**.*

Podfamilija od $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}' = (U_{a'}, a' \in A')$ gdje je $A' \subseteq A$, je **potpokrivač** pokrivača $\mathcal{U}$ ako je i sama pokrivač skupa X.

Definicija 1.1.12. *Za topološki prostor X kažemo da je **kompaktan** ako za svaki otvoreni pokrivač od X postoji konačan potpokrivač.*

Ako je X metrički prostor, tada kompaktnost možemo karakterizirati na više načina:

Teorem 1.1.13. *Za metrički prostor (X, d) sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *Prostor (X, d) je kompaktan.*

(ii) *Za svaki otvoreni prebrojivi pokrivač prostora X postoji konačan potpokrivač.*

(iii) *Svaki niz $(x_n)_n$ u X ima barem jedno gomilište.*

(iv) *Za svaki niz $(x_n)_n$ u X postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira u X.*

(v) *Svaki silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova $F_n \subseteq X$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$, ima neprazni presjek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

(vi) *Svaki beskonačan skup $A \subseteq X$ ima barem jedno gomilište u X.*

1.2 Gornje i donje semineprekidne i neprekidne funkcije

Definicija 1.2.1. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje f* ***neprekidno*** *u točki $x_0 \in X$ ako*

$$(\forall V \in \mathcal{O}(f(x_0)))\ (\exists U \in \mathcal{O}(x_0))\ f(U) \subseteq V.$$

Ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, tada uvjet neprekidnosti u točki x_0 možemo izraziti na sljedeći način:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 1.2.2. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje neprekidno u točki $x_0 \in X$. Ako niz $(x_n)_n$ u X konvergira prema točki x_0, onda niz $(f(x_n))_n$ u Y konvergira prema točki $f(x_0)$.*

Obrat općenito ne vrijedi, no ako umjesto konvergencije nizova zahtijevamo konvergenciju hipernizova, tada obrat vrijedi:

Teorem 1.2.3. *Neka su X i Y topološki prostori, $f : X \to Y$ i $x \in X$. Funkcija f je neprekidna u x ako i samo ako za svaki hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ u X takav da je $x = \lim_\alpha x_\alpha$ vrijedi $f(x) = \lim_\alpha f(x_\alpha)$.*

U metričkim prostorima vrijedi i obrat Teorema 1.2.2.

Definicija 1.2.4. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$* ***uniformno neprekidna*** *na X ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X)\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Za funkciju f kažemo da je ***Lipschitz-neprekidna*** *na X ako postoji konstanta $L > 0$ takva da je*

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

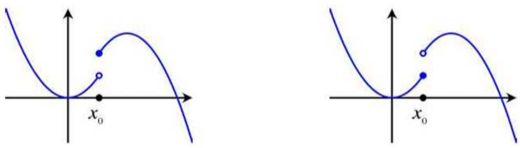
U nastavku uvodimo pojam gornje i donje semineprekidnih funkcija.

Definicija 1.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Kažemo da je funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$* ***donje semineprekidna*** *ako je $\{f \leq y\} = \{x \in X : f(x) \leq y\}$ zatvoren u X za svaki $y \in \overline{\mathbb{R}}$, ili ekvivalentno, ako je $f(x) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha)$ za svaki hiperniz $(x_\alpha)_\alpha \subseteq X$ i $x \in X$ takav da $x_\alpha \to x$.*

Za funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je ***gornje semineprekidna*** *ako je $-f$ donje semineprekidna, tj. ako je za svaki $y \in \overline{\mathbb{R}}$ skup $\{f \geq y\} = \{x \in X : f(x) \geq y\}$ zatvoren u X ili, ekvivalentno, ako je $f(x) \geq \limsup_\alpha f(x_\alpha)$ za svaki hiperniz $(x_\alpha)_\alpha \subseteq X$ i $x \in X$ takav da $x_\alpha \to x$.*

Ako je X metrički prostor, tada donju semineprekidnost funkcije možemo izraziti na sljedeći način: funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je donje semineprekidna u x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji okolina U od x_0 takva da je $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ za svaki $x \in U$.

Funkcija koja je u isto vrijeme i gornje i donje semineprekidna je neprekidna.



Slika 1.1: Gornje semineprekidna funkcija u x_0 (lijevo) i donje semineprekidna funkcija u x_0 (desno).

1.3 Slabe topologije

U ovom potpoglavlju uvodimo pojam slabe topologije i slabe konvergencije na općenitom skupu X.

Za topologije τ_1 i τ_2 na istom skupu X kažemo da je τ_1 **slabija** od τ_2, odnosno da je τ_2 jača od τ_1, ako je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Definicija 1.3.1. *Neka je X neprazan skup i $(f_j)_{j\in J}$ familija preslikavanja $f_j : X \to Y_j$, pri čemu su Y_j, $j \in J$ topološki prostori. Označimo pripadne topologije na Y_j s τ_j.* ***Slaba topologija na X inducirana familijom*** *$(f_j)_{j\in J}$ je najmanja topologija na X u odnosu na koju su sva preslikavanja f_j, $j \in J$ neprekidna. Tu topologiju obično označavamo s $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$.*

Dakle, slaba topologija $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ je takva topologija u kojoj je za svaki $j \in J$ i za svaki otvoren $V \subseteq Y_j$, skup $f_j^{-1}(V)$ otvoren u X. Drugim riječima, $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ je najmanja topologija na X koja sadrži familiju $\mathcal{E} = \{f_j^{-1}(V) : \ V \in \tau_j, \ j \in J\}$. Zapravo, dovoljno je zahtjevati da je $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ najmanja topologija na X koja sadrži familiju $\mathcal{E}_0 = \{f_j^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}_j, \ j \in J\}$, gdje je $\mathcal{B}_j$ baza topologije τ_j.

Familije $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}_0$ su podbaze slabe topologije $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$, što znači da se ta topologija sastoji od skupa X te svih unija svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{E}$, odnosno $\mathcal{E}_0$.

Vrijedi sljedeći rezultat:

Propozicija 1.3.2. *Neka je dana slaba topologija $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ na skupu X. Hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ u X konvergira s obzirom na slabu topologiju $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ k $x \in X$ ako i samo ako vrijedi $f_j(x) = \lim_\alpha f_j(x_\alpha)$, $\forall j \in J$.*

Dokaz.

Neka hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ konvergira k x obzirom na slabu topologiju $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$. Kako su sva preslikavanja f_j neprekidna obzirom na tu topologiju, po Teoremu 1.2.3 slijedi da je $f_j(x) = \lim_\alpha f_j(x_\alpha)$ za svaki $j \in J$.

Obratno, pretpostavimo da za hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ vrijedi $f_j(x) = \lim_\alpha f_j(x_\alpha)$ za sve $j \in J$. Neka je $U \subseteq X$ proizvoljan otvoren skup takav da je $x \in U$. Jer je $\mathcal{E}$ podbaza slabe topologije, postoje $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ i skupovi $V_{j_1} \in \tau_{j_1}, \ldots, V_{j_n} \in \tau_{j_n}$ takvi da je $x \in \bigcap_{i=1}^n f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U$. Iz toga slijedi da je $f_{j_i}(x) \in V_{j_i}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Po pretpostavci, za svaki i postoji α_i takav da za sve $\alpha \geq \alpha_i$ vrijedi $f_{j_i}(x_\alpha) \in V_{j_i}$. Konačno, uzmimo $\alpha_0 = \max_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$. Sada, za sve $\alpha \geq \alpha_0$ vrijedi $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U$. $\square$

Konvergenciju niza $(x_\alpha)_\alpha$ prema $x \in X$ obzirom na slabu topologiju $\sigma(X, (f_j)_{j\in J})$ označavamo s $x_\alpha \xrightarrow{w} x$.

U potpoglavlju Vjerojatnosni prostori i slučajne varijable definirat ćemo slabu topologiju na prostoru vjerojatnosnih mjera i u skladu s time slabu konvergenciju vjerojatnosnih mjera.

1.4 Prostori mjere

Osnove teorije vjerojatnosti leže upravo u apstraktnoj teoriji mjere. Prije ograničavanja na vjerojatnosne prostore, promotrit ćemo neke pojmove i rezultate koji vrijede u općenitijim prostorima.

Neka je X proizvoljan skup. Za nepraznu familiju $\mathcal{F}$ podskupova od X kažemo da je:

1. **prsten skupova** na X ako vrijedi:
   (i) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$;
   (ii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$.
2. **algebra** na X ako je $\mathcal{F}$ prsten i sadrži cijeli X.
3. **σ-prsten** na X ako vrijedi:
   (i) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$;
   (ii) $(A_n)_n \subset \mathcal{F} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
4. **σ-algebra** na X ako vrijedi:
   (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
   (ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$;
   (iii) $(A_n)_n \subset \mathcal{F} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
5. **π-sustav** na X ako vrijedi:
   (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
   (ii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$.

Neka je $\mathcal{A}$ neka familija podskupova na X. σ-algebru dobivenu presjekom svih σ-algebri koje sadrže $\mathcal{A}$ nazivamo σ-algebrom generiranom familijom $\mathcal{A}$ i označavamo s $\sigma(\mathcal{A})$. σ-algebru generiranu otvorenim skupovima na X zovemo **Borelovom σ-algebrom** na X i označavamo s $\mathcal{B}(X)$, a njene elemente zovemo Borelovim skupovima.

Uređeni par $(X, \mathcal{F})$ nepraznog skupa X i σ-algebre $\mathcal{F}$ na X nazivamo **izmjerivim prostorom**, a elemente familije $\mathcal{F}$ **izmjerivim skupovima**.

Definicija 1.4.1. *Preslikavanje $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ za koje vrijedi:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) *Ako je* $(A_n)_n$ *niz u parovima disjunktnih skupova iz* $\mathcal{F}$*, tada je*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-}aditivnost);$$

zovemo ***mjerom*** *na izmjerivom prostoru* $(X, \mathcal{F})$.

Uređenu trojku $(X, \mathcal{F}, \mu)$ zovemo **prostorom mjere**. Mjera μ je **konačna** ako je $\mu(X) < +\infty$, a σ**-konačna** ako postoji niz $(X_n)_n$ u $\mathcal{F}$ takav da je $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ i $\mu(X_n) < +\infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Mjera je **vjerojatnosna** ako je $\mu(X) = 1$.

Prostor mjere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ je **potpun** ako je za svaki $N \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(N) = 0$ i svaki $A \subset N$ nužno $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.4.2. *Familija* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *je* ***Dynkinova klasa*** *ako je*

(i) $X \in \mathcal{D}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{D},\ B \subseteq A \implies A \setminus B \in \mathcal{D}$ *(zatvorenost na prave razlike);*

(iii) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \in \mathcal{D}$*, onda je* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neka familija podskupova. S

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D}:\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D} \\ \mathcal{D} \text{ Dynkinova klasa}}} \mathcal{D}$$

definiramo Dynkinovu klasu generiranu s $\mathcal{E}$. To je najmanja Dynkinova klasa koja sadrži $\mathcal{E}$.

Napomena 1.4.3. Lako se pokaže da svaka Dynkinova klasa $\mathcal{D}$ ima sljedeća svojstva:

(1) $\emptyset \in \mathcal{D}$;

(2) $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$;

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{D}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Nadalje, ako neka familija podskupova na X zadovoljava svojstva $(1) - (3)$, tada je ona Dynkinova klasa na X.

Teorem 1.4.4. *Dynkinova klasa* $\mathcal{D}$*, koja je ujedno i* π*-sustav, je* σ*-algebra.*

Lema 1.4.5. (Dynkinova lema) *Neka je* C π*-sustav na* X *i* $C \subset \mathcal{D}$*, gdje je* $\mathcal{D}$ *neka familija podskupova na* X *zatvorena na komplementiranje i disjunktne prebrojive unije. Tada je* $\sigma(C) \subset \mathcal{D}$.

Napomena 1.4.6. Koristeći Napomenu 1.4.3. zaključujemo da svaka Dynkinova klasa zadovoljava svojstva familije $\mathcal{D}$ iz Dynkinove leme. Stoga, za π-sustav C i Dynkinovu klasu $\mathcal{D}$ takvu da je $C \subset \mathcal{D}$, vrijedi $\sigma(C) \subset \mathcal{D}$.

Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **$(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-izmjeriva** ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za sve $B \in \mathcal{G}$.

Definicija 1.4.7. *Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori. σ-algebru na $X \times Y$ generiranu familijom skupova oblika $A \times B$, za $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ nazivamo **produktnom σ-algebrom** i označavamo s $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.*

Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere. Postoji jedinstvena mjera ξ na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ takva da za sve $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\xi(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Mjeru ξ nazivamo **produktnom mjerom** i označavamo je s $\mu \otimes \nu$.

Teorem 1.4.8. (Fubini - Tonellijev teorem) *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere.*

(i) Neka je $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-izmjeriva. Tada je

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

(ii) Neka je $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mu \otimes \nu$-integrabilna. Tada je za μ-gotovo svaki $x \in X$ funkcija $y \mapsto f(x,y)$ ν-integrabilna, dok je funkcija $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ μ-integrabilna. Analogno, za ν-gotovo svaki $y \in Y$ funkcija $x \mapsto f(x,y)$ μ-integrabilna, dok je funkcija $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ ν-integrabilna. Također vrijedi:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Za dokaz ovog i mnogih drugih teorema u teoriji mjere koristimo postupak koji nazivamo Lebesgueovom indukcijom: tvrdnju prvo dokažemo za proizvoljnu izmjerivu karakterističnu funkciju, a potom se, uz pomoć linearnosti integrala, tvrdnja lagano proširuje i na sve jednostavne nenegativne izmjerive funkcije. Budući da za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju postoji niz jednostavnih nenegativnih funkcija koji k početnoj funkciji konvergira po točkama, koristeći teorem o monotonoj konvergenciji tvrdnju lako proširujemo i na sve nenegativne izmjerive funkcije. Konačno, tvrdnja za općenite izmjerive funkcije lagano slijedi korištenjem prethodno dokazane tvrdnje i linearnosti integrala, budući da proizvoljnu izmjerivu funkciju f možemo napisati kao zbroj dvije nenegativne izmjerive funkcije: $f = f^+ - f^-$, gdje su $f^+ = \max(f, 0)$ te $f^- = \max(-f, 0)$.

Za proizvoljnu izmjerivu funkciju $f : X \to [0, +\infty]$ preslikavanje $\mu_f : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ dano s

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$$

je mjera na $(X, \mathcal{F})$.

Definicija 1.4.9. ***Realna mjera*** *na izmjerivom prostoru* $(X, \mathcal{F})$ *je funkcija* $\nu : \mathcal{F} \to [-\infty, +\infty]$ *takva da je*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) ν *poprima najviše jednu od vrijednosti* $-\infty$ *i* $+\infty$*;*

(iii) ν *je* σ*-aditivna.*

Definicija 1.4.10. *Za realnu mjeru* ν *reći ćemo da je* ***apsolutno neprekidna*** *s obzirom na nenegativnu mjeru* μ *ako je* $\nu(N) = 0$ *za svaki* $N \in \mathcal{F}$ *za koji je* $\mu(N) = 0$*. U tom slučaju pišemo* $\nu \ll \mu$*.*

Za svaku funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ čiji integral postoji, vrijedi $\mu_f \ll \mu$.

Za kraj ovog potpoglavlja navodimo Radon-Nikodymov teorem koji ima brojne važne primjene u teoriji vjerojatnosti.

Teorem 1.4.11. (Radon-Nikodymov teorem) *Neka je* ν σ*-konačna realna, a* μ σ*-konačna nenegativna mjera na* $(X, \mathcal{F})$*. Ako je* $\nu \ll \mu$*, tada postoji izmjeriva funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *takva da je* $\nu = \mu_f$*, a svaka druga funkcija s istim svojstvom jednaka je* f μ*-gotovo svuda. Ako je* ν *nenegativna, tada je i* f *nenegativna* μ*-gotovo svuda.*

Funkciju f za koju vrijedi $\nu = \mu_f$ zovemo **Radon-Nikodymovom derivacijom** mjere ν obzirom na mjeru μ, te ju označavamo s $\frac{d\nu}{d\mu}$. Može se pokazati da za sve nenegativne σ-konačne mjere ν i μ takve da je $\nu \ll \mu$, te funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čiji integral obzirom na mjeru ν postoji, vrijedi:

$$\int g \, d\nu = \int g \, \frac{d\nu}{d\mu} \, d\mu.$$

1.5 Vjerojatnosni prostori i slučajne varijable

U ovom potpoglavlju navodimo neke osnovne pojmove i rezultate iz područja vjerojatnosti i statistike koji nam služe kao polazna točka za izgradnju teorije stabilne konvergencije slučajnih varijabli.

Krećemo od prostora mjere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je Ω neki neprazni skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra na njemu i P vjerojatnosna mjera. Taj prostor nazivamo **vjerojatnosnim prostorom**.

Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takvo da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zovemo **slučajnom varijablom**.

Mjeru $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ takvu da je

$$P_X(B) = P(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

zovemo vjerojatnosnom mjerom induciranom slučajnom varijablom X ili **zakonom razdiobe od** X.

Za slučajnu varijablu X definiramo **funkciju distribucije od** X, $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, s

$$F_X(x) = P_X(< -\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

F_X je neopadajuća funkcija, zdesna neprekidna takva da je $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Svaku funkciju $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja je neopadajuća, zdesna neprekidna i takva da je $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ zovemo **vjerojatnosnom funkcijom distribucije**.

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **diskretna** ako postoji prebrojiv skup $D = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $P_X(D) = 1$. Pripadna funkcija distribucije F_X diskretne slučajne varijable X u nekoj točki $x \in \mathbb{R}$ može se prikazati kao $F_X(x) = \sum_{a_i \leq x} p_i$, pri čemu je $p_i = P(X = a_i),\ i \in \mathbb{N}$.

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **apsolutno neprekidna** ako postoji nenegativna Borelova funkcija $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da se funkcija distribucije F_X može prikazati na sljedeći način:

$$F_X(x) = \int_{\langle -\infty, x]} f_X(y) d\lambda(y),\ x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju f_X zovemo **funkcijom gustoće slučajne varijable** X.

Preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ takvo da je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zovemo **n-dimenzionalnim slučajnim vektorom**. Prethodno navedene pojmove za slučajne vektore definiramo na sličan način.

Kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje ako integral $\int_\Omega XdP$ postoji. Tada je **matematičko očekivanje od** X jednako

$$\mathbb{E}(X) = \int XdP.$$

Kažemo da slučajna varijabla X ima **konačno očekivanje** ako je $\mathbb{E}|X| < +\infty$.

$\mathbb{E}(X^r)$ zovemo **r-ti moment od** X, a $\mathbb{E}(|X|^r)$ zovemo **r-ti apsolutni moment od** X. Ako $\mathbb{E}X$ postoji, tada definiramo **r-ti centralni moment od** X s $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^r]$ te **r-ti apsolutni centralni moment od** X s $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^r)$. Drugi centralni moment od X nazivamo **varijancom** od X, a pozitivan drugi korijen varijance **standardnom devijacijom** od X.

S $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označavamo prostor svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s konačnim r-tim momentom.

Nezavisnost

Definicija 1.5.1. *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kažemo da su $X_1, \dots, X_n$* ***nezavisne*** *ako za proizvoljne $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$ vrijedi*

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in B_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i).$$

Ekvivalentno, $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne ako za pripadne funkcije distribucije $F_1, \dots, F_n$ i funkciju distribucije F slučajnog vektora $X = (X_1, \dots, X_n)$ vrijedi

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_n(x_n)$$

za proizvoljan $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ako slučajni vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ ima gustoću f, tada svaka slučajna varijabla X_i ima gustoću f_i, $i = 1, \dots, n$, te su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$$

za sve $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, osim eventualno Borelovog podskupa od $\mathbb{R}^n$ Lebesgueove mjere nula.
Gustoće f_i dobivamo integriranjem funkcije f po svim varijablama osim x_i te ih nazivamo **marginalnim gustoćama** od f.

Neka su $\{X_{m_n} : m = 1, \dots, p, n = 1, \dots, n_m\}$ nezavisne slučajne varijable i $g_m : \mathbb{R}^{n_m} \to \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, p$ Borelove funkcije. Ako je $Y_m = g_m(X_{m1}, \dots, X_{mn_m})$, $m = 1, \dots, p$, tada su slučajne varijable $Y_1, \dots, Y_p$ nezavisne.

Ako su slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ nezavisne te ako su sve one nenegativne ili je $\mathbb{E}X_i$ konačno za svaki $i = 1, \dots, n$, tada postoji $\mathbb{E}\big(\prod_{i=1}^n X_i\big)$ i vrijedi:

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}X_i.$$

Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable čije varijance postoje, tada postoji i varijanca od $\sum_{i=1}^n X_i$ i vrijedi:

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)$$

Konvergencija slučajnih varijabli

U ovom odjeljku navodimo neke osnovne tipove konvergencije slučajnih varijabli te neke najvažnije rezultate vezane uz njih.

Definicija 1.5.2. *Kažemo da niz $(X_n : n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira gotovo sigurno*** *prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Tu konvergenciju označavamo s $X_n \xrightarrow{g.s.} X$, a limes je g.s.-jedinstven.

Definicija 1.5.3. *Kažemo da niz $(X_n : n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema slučajnoj varijabli X ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_n P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Tu konvergenciju označavamo s $X_n \xrightarrow{P} X$, a limes je g.s.-jedinstven.

Definicija 1.5.4. *Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka su $X_n, X \in \mathcal{L}^p$, $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da niz $(X_n : n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira u srednjem reda p*** *prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$\lim_n \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Tu konvergenciju označavamo s $X_n \xrightarrow{m^p} X$.

Definicija 1.5.5. *Kažemo da niz* $(X_n : n \in \mathbb{N})$ *slučajnih varijabli* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučajnoj varijabli X ako je*

$$\lim_n F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad x \in C(F_X),$$

pri čemu su F_{X_n} *funkcije distribucije od* X_n*,* F_X *funkcija distribucije od X, a* $C(F_X)$ *skup svih točaka neprekidnosti od* F_X*. Tu konvergenciju označavamo s* $X_n \xrightarrow{d} X$*.*

Odnos ovih konvergencija dan je sljedećim teoremom.

Teorem 1.5.6. *Vrijede sljedeće implikacije*

(i) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$*;*

(ii) $X_n \xrightarrow{m^p} X \implies X_n \xrightarrow{P} X,\ (1 \leq p < \infty)$*;*

(iii) $X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$*.*

Propozicija 1.5.7. *Neka je* $c \in \mathbb{R}$*. Vrijedi:*

$$X_n \xrightarrow{d} c \iff X_n \xrightarrow{P} c.$$

Slaba konvergencija

U nastavku se bavimo pitanjem slabe konvergencije niza funkcija distribucije i niza konačnih mjera. Sada funkcije distribucije ne moraju nužno biti vjerojatnosne, dovoljno je da su ograničene i normirane, odnosno da u $-\infty$ imaju vrijednost 0.

Definicija 1.5.8. *Kažemo da niz funkcija distribucije* $(F_n : n \in \mathbb{N})$ ***slabo konvergira*** *prema funkciji distribucije F ako vrijedi:*

$$F(x) = \lim_n F_n(x), \quad x \in C(F).$$

Tu konvergenciju označavamo s $F_n \xrightarrow{w} F$*.*

Dakle, ako niz slučajnih varijabli konvergira po distribuciji k nekoj slučajnoj varijabli X, pripadne funkcije distribucije konvergiraju slabo prema funkciji distribucije od X.

Iako je pojam slabe konvergencije niza funkcija distribucije vezan za prostor realnih brojeva, koncept slabe konvergencije niza konačnih mjera može se primijeniti na općeniti metrički prostor.

Taj općenitiji pristup slaboj konvergenciji niza konačnih mjera biti će nam od velike važnosti u ovom radu. Naime, u nastavku ćemo promatrati izmjeriva preslikavanja $X : \Omega \to \mathcal{X}$, gdje je $\mathcal{X}$ separabilan, metrizabilan i potpun topološki prostor, snabdjeven Borelovom σ-algebrom $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Takva preslikavanja nazivamo slučajnim elementima, ali ćemo ih u nastavku zbog jednostavnosti također zvati slučajnim varijablama.

Pojmovi od ranije, poput zakona razdiobe slučajne varijable, matematičkog očekivanja, prostora $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i nezavisnosti lagano se poopćavaju uzimanjem prostora $\mathcal{X}$ umjesto prostora $\mathbb{R}$ te pripadne σ-algebre $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ umjesto $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Uvedimo sada pojam slabe konvergencije konačnih mjera. Po uzoru na općeniti slučaj opisan u potpoglavlju Slabe topologije, možemo uvesti slabu topologiju na prostoru svih konačnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.To je topologija inducirana preslikavanjima oblika

$$\mu \mapsto \int g \, d\mu, \quad g \in C_b(\mathcal{X}),$$

odnosno najmanja topologija na prostoru svih konačih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ u odnosu na koju su sva preslikavanja $\mu \mapsto \int g \, d\mu, \ g \in C_b(\mathcal{X})$ neprekidna.

Koristeći Propoziciju 1.3.2, lako vidimo da je slaba konvergencija konačnih mjera zapravo konvergencija obzirom na pripadnu slabu topologiju. Stoga, slabu konvergenciju konačnih mjera definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.5.9. *Neka su $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ konačne mjere na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Kažemo da niz $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$* ***slabo konvergira*** *prema μ ako vrijedi:*

$$\lim_n \int g \, d\mu_n = \int g \, d\mu, \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X}),$$

pri čemu $C_b(\mathcal{X})$ označava skup svih neprekidnih i ograničenih funkcija na $\mathcal{X}$, obzirom na metriku d.
Tu konvergenciju označavamo s $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Slaba konvergencija vjerojatnosnih mjera može se okarakterizirati na razne načine, što možemo vidjeti u idućem teoremu.

Teorem 1.5.10. (Portmanteau) *Neka je $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ niz konačnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ te neka je μ također konačna mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

(ii) $\lim_n \int h \, d\mu_n = \int h \, d\mu$ *za svaki* $h \in U_b(\mathcal{X})$;

(iii) $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *za svaki zatvoren skup* $F \subset \mathcal{X}$;

(iv) $\liminf_n \mu_n(O) \geq \mu(O)$ *za svaki otvoren skup* $O \subset \mathcal{X}$*;*

(v) $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *takav da je* $\mu(\delta B) = 0$,

pri čemu $U_b(\mathcal{X})$ *označava skup svih uniformno neprekidnih i ograničenih funkcija na* $\mathcal{X}$.

Napomena 1.5.11. Slično se definira slaba konvergencija hipernizova konačnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Kažemo da hiperniz $(\mu_\alpha)_\alpha$ **slabo konvergira** prema μ ako vrijedi:

$$\lim_\alpha \int g \, d\mu_\alpha = \int g \, d\mu, \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X}).$$

Teorem 1.5.10 vrijedi i ako umjesto nizova uzmemo hipernizove konačnih mjera.

Napomena 1.5.12. U slučaju niza konačnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vrijedi sljedeći rezultat:

Neka su $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ *konačne mjere na* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *i* $F, F_1, F_2, \ldots$ *pripadne funkcije distribucije. Tada vrijedi:*

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \iff F_n \xrightarrow{w} F.$$

Prema tome, za niz realnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ i X je ekvivalentno:

(i) $X_n \xrightarrow{d} X$*;*

(ii) $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$*;*

(iii) $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$.

Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ s vrijednostima u $\mathcal{X}$, konvergenciju gotovo sigurno definiramo na isti način kao ranije, dok konvergenciju po vjerojatnosti lagano proširujemo uzimanjem metrike d na skupu $\mathcal{X}$ umjesto apsolutne vrijednosti. S druge strane, konvergenciju po distribuciji smo ranije definirali preko pripadnih funkcija distribucije, što ne možemo prenijeti na slučaj općenitog prostora $\mathcal{X}$.

Reći ćemo da niz $(X_n)_n$ s vrijednostima u $\mathcal{X}$ konvergira po distribuciji k slučajnoj varijabli X ako vrijedi $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$. Štoviše, reći ćemo i da niz $(X_n)_n$ konvergira po distribuciji k vjerojatnosnoj mjeri ν ako $P_{X_n} \xrightarrow{w} \nu$.

Napomena 1.5.13. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathcal{X}$. Pretpostavimo da za niz pripadnih vjerojatnosnih mjera $(P_{X_n})_n$ vrijedi $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$, gdje je $X : \Omega \to \mathcal{X}$ neka slučajna varijabla. Tada iz definicije slabe konvergencije vjerojatnosnih mjera slijedi

$$\lim_n \int g \, dP_{X_n} = \int g \, dP_X, \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X}),$$

što korištenjem teorema o zamjeni varijabli možemo ekvivalentno zapisati na sljedeći način:

$$\lim_n \int g(X_n)\, dP = \int g(X)\, dP, \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X}),$$

odnosno

$$\lim_n \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)), \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X}).$$

Dakle, ekvivalentno je:

(i) $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$;

(ii) $\mathbb{E}(g(X_n)) \to \mathbb{E}(g(X)), \quad \forall g \in C_b(\mathcal{X})$.

Definicija 1.5.14. *Neka je $\mathcal{M}$ familija konačnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

*(i) Kažemo da je $\mathcal{M}$ **napeta familija** ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K_\epsilon \subset \mathcal{X}$ takav da je $\mu(\mathcal{X} \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ za sve $\mu \in \mathcal{M}$.*

*(ii) Kažemo da je $\mathcal{M}$ **relativno kompaktna** familija ako za svaki niz u $\mathcal{M}$ postoji podniz koji slabo konvergira prema konačnoj mjeri na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Teorem 1.5.15. (Prohorovljev teorem) *Neka je $\mathcal{X}$ potpun, separabilan i metrizabilan prostor te neka je $\mathcal{M}$ familija vjerojatnosnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. $\mathcal{M}$ je relativno kompaktna familija ako i samo ako je $\mathcal{M}$ napeta.*

Uvjetno matematičko očekivanje

S $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označavamo prostor svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s konačnim očekivanjem.

Definicija 1.5.16. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takva da je $\mathbb{E}|X| < +\infty$ te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra of $\mathcal{F}$. Slučajnu varijablu Y za koju vrijedi:*

(i) Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva;

(ii) $\mathbb{E}|Y| < +\infty$;

(iii) $\mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_G X), \quad \forall G \in \mathcal{G}$;

*zovemo **uvjetnim matematičkim očekivanjem od** X **uz dano** $\mathcal{G}$ i označavamo s $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.*

U nastavku navodimo osnovna svojstva uvjetnog matematičkog očekivanja.

Teorem 1.5.17. *Neka su X i X_n, $n \in \mathbb{N}$ slučajne varijable iz prostora $\mathcal{L}^1$, te neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{G}$ σ-podalgebre od $\mathcal{F}$. Tada vrijedi:*

(i) $\mathbb{E}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}X$.

(ii) *Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$ g.s.*

(iii) *(Linearnost uvjetnog očekivanja) Za svaki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{E}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|\mathcal{G}) = \alpha_1 \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \alpha_2 \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ g.s.*

(iv) *(Monotonost uvjetnog očekivanja) Ako je $X \geq 0$ g.s., tada je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ g.s. Ako je $X_1 \leq X_2$ g.s., tada je $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ g.s.*

(v) *(Teorem o uvjetnoj monotonoj konvergenciji) Ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ g.s. i $\lim_n \uparrow X_n = X$ g.s., tada je $\lim_n \uparrow \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ g.s.*

(vi) *(Uvjetna Fatouova lema) Ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $X_n \geq 0$ g.s., tada je $\mathbb{E}(\liminf_n X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G})$ g.s.*

(vii) *(Teorem o uvjetnoj dominiranoj konvergenciji) Ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $|X_n| \leq V$ g.s., za neku slučajnu varijablu $V \in \mathcal{L}^1$, i $\lim_n X_n = X$ g.s., tada je $\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ g.s.*

(viii) *(Jensenova uvjetna nejednakost) Ako je $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija takva da je $\Phi(X) \in \mathcal{L}^1$, tada je $\Phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{G}]$ g.s.*

(ix) *Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, tada je $\mathbb{E}([X|\mathcal{G}]\,|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ g.s.*

(x) *Ako je Z $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla takva da je $Z \cdot X \in \mathcal{L}^1$, tada je $\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z \cdot \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ g.s.*

(xi) *Ako su X i $\mathcal{G}$ nezavisni, tada je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$ g.s.*

Definicija 1.5.18. *Neka je $B \in \mathcal{F}$. **Uvjetna vjerojatnost od B uz dano $\mathcal{G}$** definira se formulom*

$$P(B|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G}).$$

Poglavlje 2

Slaba konvergencija Markovljevih jezgri

2.1 Markovljeve jezgre s $(\Omega, \mathcal{G})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ izmjeriv prostor. U nastavku pretpostavljamo da je $\mathcal{X}$ separabilan, metrizabilan i potpun topološki prostor.

Označimo s $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ skup svih vjerojatnosnih mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. **Slaba topologija na** $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ je topologija generirana preslikavanjima

$$\nu \to \int h\, d\nu, \quad h \in C_b(\mathcal{X}),$$

gdje je $C_b(\mathcal{X})$ skup svih neprekidnih i ograničenih funkcija $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.
To je najmanja topologija na $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ u kojoj su sva preslikavanja $\nu \to \int h\, d\nu$ neprekidna.

Neka je $(\nu_\alpha)_\alpha$ hiperniz u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$. Kažemo da hiperniz $(\nu_\alpha)_\alpha$ **slabo konvergira k** $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ ako vrijedi

$$\lim_\alpha \int h\, d\nu_\alpha = \int h\, d\nu, \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Slaba topologija na $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ je Hausdorffova, stoga je limes konvergentnog hiperniza jedinstven. Nadalje, relativno kompaktni podskupovi u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ su upravo oni napeti.

Definicija 2.1.1. *Preslikavanje* $K : \Omega \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0, 1]$ *takvo da vrijedi:*

(i) $K(\omega, \cdot) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{X})$, $\forall \omega \in \Omega$;

(ii) $K(\cdot, B)$ *je* $\mathcal{F}$*-izmjerivo,* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;

zovemo ***Markovljevom jezgrom s*** $(\Omega, \mathcal{F})$ ***u*** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Skup svih Markovljevih jezgri s $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ označavamo s $\mathcal{K}^1 = \mathcal{K}^1(\mathcal{F}) = \mathcal{K}^1(\mathcal{F}, \mathcal{X})$.

Za σ-podalgebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ s $\mathcal{K}^1(\mathcal{G}) = \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{K}^1$ označavamo skup svih $\mathcal{G}$-izmjerivih Markovljevih jezgri, to jest Markovljevih jezgri s $(\Omega, \mathcal{G})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Za $K \in \mathcal{K}^1$ i Borelovu funkciju $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, gdje je $\mathcal{Y}$ separabilan i metrizabilan prostor, s K^g označavamo Markovljevu jezgru s $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ takvu da je $K^g(\omega, \cdot) = K(\omega, \cdot)^g$ za $\omega \in \Omega$, to jest za $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ vrijedi:

$$K^g(\omega, C) = K(\omega, C)^g = K(\omega, g^{-1}(C)), \quad \omega \in \Omega.$$

Za Markovljevu jezgru $K \in \mathcal{K}^1$ i vjerojatnosnu mjeru Q na $\mathcal{F}$ definiramo **produktnu mjeru** na produktnoj σ-algebri $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ s

$$(Q \otimes K)(C) := \iint \mathbb{1}_C(\omega, x) K(\omega, dx) dQ(\omega), \quad C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{2.1}$$

odnosno marginalnu mjeru na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ s

$$QK(B) := Q \otimes K(\Omega \times B) = \int K(\omega, B) dQ(\omega), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{2.2}$$

Za funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definiramo **tenzorski produkt** $f \otimes h : \Omega \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ s

$$f \otimes h(\omega, x) := f(\omega) h(x), \quad (\omega, x) \in \Omega \times \mathcal{X}. \tag{2.3}$$

Efikasnije računanje integrala po produktnoj mjeri, uz uvjet da su zadovoljene odgovarajuće pretpostavke, omogućuje nam Fubinijev teorem. Sljedeći teorem je varijanta Fubinijevog teorema za produktne mjere oblika $P \otimes K$ gdje je P vjerojatnosna mjera, a K Markovljeva jezgra u $\mathcal{K}^1$.

Teorem 2.1.2.

(i) **(Fubinijev teorem za Markovljeve jezgre)** *Neka je $K \in \mathcal{K}^1$ i $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ i $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, za koju postoji integral $\int g \, d(P \otimes K)$. Tada vrijedi:*

$$\int g \, d(P \otimes K) = \iint g(\omega, x) K(\omega, dx) dP(\omega). \tag{2.4}$$

(ii) **(Jedinstvenost)** *Za* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^1$ *je* $\{\omega \in \Omega : K_1(\omega, \cdot) = K_2(\omega, \cdot)\} \in \mathcal{F}$. *Nadalje,* $K_1(\cdot, B) = K_2(\cdot, B)$ *P-g.s. za svaki* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *povlači* $K_1 = K_2$ *P-g.s.*

Dokaz.

(i) Dokaz provodimo Lebesgueovom indukcijom.
Za $g = \mathbb{1}_C$, $C \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ vrijedi:

$$\int \mathbb{1}_C \, d(P \otimes K) = (P \otimes K)(C) \overset{(2.1)}{=} \iint \mathbb{1}_C(\omega, x) K(\omega, dx) dP(\omega).$$

Za nenegativnu jednostavnu izmjerivu funkciju $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tvrdnja slijedi iz linearnosti integrala.

Za nenegativnu izmjerivu funkciju g tvrdnja teorema slijedi korištenjem teorema o monotonoj konvergenciji. Konačno, tvrdnja teorema se lako pokaže i za proizvoljnu izmjerivu funkciju g ako je zapišemo u obliku $g = g^+ - g^-$ te iskoristimo svojstvo aditivnosti integrala.

(ii) Budući da je $\mathcal{X}$ separabilan topološki prostor, on ima prebrojivu bazu $\mathcal{B}$. Također, vrijedi $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Označimo s $\mathcal{B}_0$ familiju svih konačnih presjeka skupova iz $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}_0$ je π-sustav te vrijedi $\sigma(B_0) = \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Dvije mjere $K_1(\omega, \cdot)$ i $K_2(\omega, \cdot)$ se podudaraju na $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ako se podudaraju na skupu $\mathcal{B}_0$ (vidi [16] Propozicija 3.15. str. 22).

Stavimo $\mathcal{B}_0 = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega : K_1(\omega, \cdot) = K_2(\omega, \cdot)\} &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : K_1(\omega, B_i) - K_2(\omega, B_i) = 0\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{\infty} (K_1 - K_2)(\cdot, B_i)^{-1}(\{0\})
\end{aligned}$$

pa, budući da je $(K_1 - K_2)(\cdot, B_i)$ $\mathcal{F}$-izmjerivo preslikavanje, vrijedi $(K_1 - K_2)(\cdot, B_i)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ te konačno imamo $\{\omega \in \Omega : K_1(\omega, \cdot) = K_2(\omega, \cdot)\} \in \mathcal{F}$.

Slično, iz

$$\{K_1 = K_2\} = \{\omega \in \Omega : K_1(\omega, \cdot) = K_2(\omega, \cdot)\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : K_1(\omega, B_i) = K_2(\omega, B_i)\}$$

slijedi

$$P(\{K_1 \neq K_2\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega \in \Omega : K_1(\omega, B_i) \neq K_2(\omega, B_i)\}).$$

Prema pretpostavci je $P(\{\omega \in \Omega : \ K_1(\omega, B_i) \neq K_2(\omega, B_i)\}) = 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, stoga imamo $P(\{K_1 \neq K_2\}) = 0$, odnosno $K_1 = K_2$ P-g.s.

□

2.2 Slaba konvergencija Markovljevih jezgri s $(\Omega, \mathcal{G})$ u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$

U ovom potpoglavlju uvodimo slabu konvergenciju Markovljevih jezgri i proučavamo neke osnovne karakterizacije te slabe konvergencije.

S $\mathcal{L}^1(P)$ ćemo označiti prostor svih $\mathcal{F}$- izmjerivih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$, apsolutno integrabilnih u odnosu na mjeru P. Slično, za σ-podalgebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ predstavlja prostor svih $\mathcal{G}$-izmjerivih, apsolutno integrabilnih funkcija obzirom na mjeru P.

Definicija 2.2.1. *Topologiju na $\mathcal{K}^1$ generiranu preslikavanjima*

$$K \to \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \quad f \in \mathcal{L}^1(P), \ h \in C_b(\mathcal{X}) \tag{2.5}$$

*zovemo **slabom topologijom na $\mathcal{K}^1$**. Označavmo ju s $\tau = \tau(P) = \tau(\mathcal{F}, P)$.*

Definicija 2.2.2. *Kažemo da hiperniz $(K_\alpha)_\alpha$ u $\mathcal{K}^1$ **slabo konvergira** ka $K \in \mathcal{K}^1$ ako vrijedi:*

$$\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), \ h \in C_b(\mathcal{X}). \tag{2.6}$$

Pišemo: $K_\alpha \xrightarrow{w} K$.

Ako za usmjereni skup uzmemo skup prirodnih brojeva sa svojim prirodnim uređajem, iz gornje definicije lako slijedi definicija slabe konvergencije za nizove $(K_n)_n$ u $\mathcal{K}^1$.

Za $F \in \mathcal{F}$, takav da je $P(F) > 0$, definiramo $P_F := P(\cdot|F) = \frac{P(\cdot \cap F)}{P(F)}$. Tu mjeru zovemo uvjetnom vjerojatnosnom mjerom uz dano F.

Sljedeći teorem je središnji teorem ovog poglavlja. U njemu su sadržane osnovne karakterizacije slabe konvergencije Markovljevih jezgri.

Teorem 2.2.3. *Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$, $(K_\alpha)_\alpha$ hiperniz u $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ te $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$. Nadalje, neka je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ familija zatvorena na konačne presjeke takva da je $\Omega \in \mathcal{E}$ i $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $K_\alpha \xrightarrow{w} K$;

(ii) $\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P),\ h \in C_b(\mathcal{X})$;

(iii) $QK_\alpha \xrightarrow{w} QK$ *u* $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ *za svaku vjerojatnosnu mjeru* Q *na* $\mathcal{F}$ *takvu da je* $Q \ll P$;

(iv) $P_F K_\alpha \xrightarrow{w} P_F K$ $\forall F \in \mathcal{E}$ *takav da je* $P(F) > 0$.

Dokaz.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Pretpostavimo: $K_\alpha \xrightarrow{w} K$.
Neka je Q proizvoljna vjerojatnosna mjera na $\mathcal{F}$ takva da je $Q \ll P$. Prema Radon-Nikodymovom teoremu, postoji izmjeriva funkcija f takva da je $Q = P_f$ tj.

$$Q(F) = \int_F f \, dP, \quad \forall F \in \mathcal{F}. \tag{2.7}$$

Funkcija f je Radon-Nikodymova derivacija mjere Q obzirom na mjeru P, $f = \frac{dQ}{dP}$.

Pokažimo da niz mjera $(QK_\alpha)_\alpha$ slabo konvergira ka QK.
Neka je $h \in C_b(\mathcal{X})$ proizvoljna. Korištenjem Fubinijevog teorema za Markovljeve jezgre, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \int h \, dQK_\alpha &= \lim_\alpha \iint h(x) K_\alpha(\omega, dx) dQ(\omega) = \\
&\overset{(2.7)}{=} \lim_\alpha \iint h(x) f(\omega) K_\alpha(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \\
&\overset{(i)}{=} \int f \otimes h \, d(P \otimes K) = \\
&= \int h \, dQK.
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Slijedi direkno jer je $P_F \ll P$ za svaki $F \in \mathcal{E}$ takav da je $P(F) > 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da $\forall F \in \mathcal{E}$, $P(F) > 0$, vrijedi: $P_F K_\alpha \xrightarrow{w} P_F K$, to jest

$$\lim_\alpha \int h \, dP_F K_\alpha = \int h \, dP_F K, \ \forall h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Definirajmo skup:

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P) \ : \ \lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \ \forall h \in C_b(\mathcal{X}) \right\}.$$

Očito je $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ iz čega slijedi tvrdnja (ii).
Definirajmo familiju

$$\mathcal{D} = \{G \in \mathcal{G} \ : \ \mathbb{1}_G \in \mathcal{L}\}.$$

Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka.

1. korak: Pokažimo da je $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, to jest da $\forall G \in \mathcal{E}$ vrijedi $\mathbb{1}_G \in \mathcal{L}$.

Neka je $G \in \mathcal{E}$, $P(G) > 0$ proizvoljan. Tada je $\mathbb{1}_G \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ te za proizvoljni $A \in \mathcal{G}$ vrijedi:

$$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{1}{P(G)} \int \mathbb{1}_{A \cap G} dP = \int_A \frac{1}{P(G)} \mathbb{1}_G dP.$$

Iz toga vidimo da je Radon-Nikodymova derivacija mjere P_G obzirom na mjeru P jednaka $\frac{1}{P(G)} \mathbb{1}_G$. Prema tome, imamo

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \int \mathbb{1}_G \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) &= \lim_\alpha \iint \mathbb{1}_G(\omega) h(x) K_\alpha(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \lim_\alpha P(G) \iint h(x) K_\alpha(\omega, dx) \, dP_G(\omega) = \\
&= \lim_\alpha P(G) \int h \, dP_G K_\alpha = \\
&\overset{(iv)}{=} P(G) \int h \, dP_G K = \\
&= \int \mathbb{1}_G \otimes h \, d(P \otimes K),
\end{aligned}$$

pri čemu prva i treća jednakost slijede iz Fubinijevog teorema za Markovljeve jezgre.
Dakle, vrijedi $\{\mathbb{1}_G \ : \ G \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{L}$, odnosno $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.
Budući da je po pretpostavci $\Omega \in \mathcal{E}$, iz prethodnog slijedi $\Omega \in \mathcal{D}$.

2. korak: Pokažimo da je $\mathcal{D}$ zatvorena na prave razlike.

Neka su $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subseteq B$. Pokažimo da je $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

Budući da je $\mathcal{G}$ σ-algebra te je po definiciji familije $\mathcal{D}$ $A, B \in \mathcal{G}$, slijedi $B \setminus A \in \mathcal{G}$.

Za proizvoljan $h \in C_b(\mathcal{X})$ imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_\alpha \int \mathbb{1}_{B\setminus A} \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) &= \lim_\alpha \iint \mathbb{1}_{B\setminus A}(\omega) h(x) K_\alpha(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \lim_\alpha \int_{B\setminus A} \int h(x) K_\alpha(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \lim_\alpha \int_B \int h(x) K_\alpha(\cdot, dx) dP - \lim_\alpha \int_A \int h(x) K_\alpha(\cdot, dx) dP = \\
&= \int_B \int h(x) K(\cdot, dx) dP - \int_A \int h(x) K(\cdot, dx) dP = \\
&= \int \mathbb{1}_{B\setminus A} \otimes h \, d(P \otimes K),
\end{aligned}$$

pri čemu treća i peta jednakost slijede iz činjenice da je $B \setminus A$ prava razlika, a četvrta jednakost iz pretpostavke da su $A, B \in \mathcal{D}$, to jest $\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B \in \mathcal{L}$.
Dakle, $\mathcal{D}$ je zatvorena na prave razlike.

3. korak: Dokažimo sljedeću tvrdnju: ako je $(f_k)_k$ rastuć niz nenegativnih $\mathcal{G}$-izmjerivih funkcija takav da je $(f_k)_k \subset \mathcal{L}$ te $f_k \nearrow f$, gdje je f nenegativna funkcija sadržana u $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$, tada je $f \in \mathcal{L}$.

Neka je $h \in C_b(\mathcal{X})$ proizvoljna. Tada imamo

$$\begin{aligned}
&\Big| \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \Big| = \\
&\quad = \Big| \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) \pm \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) \pm \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \\
&\qquad - \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \Big| = \\
&\quad = \Big| \int (f \otimes h - f_k \otimes h) \, d(P \otimes K_\alpha) + \int (f_k \otimes h - f \otimes h) \, d(P \otimes K) \\
&\qquad + \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \Big| \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int |f \otimes h \; - \; f_k \otimes h| \, d(P \otimes K_\alpha) + \int |f_k \otimes h \; - \; f \otimes h| \, d(P \otimes K) \\
&\qquad + \left| \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \right| = \\
&\overset{(2.4)}{=} \iint |f(\omega)h(x) - f_k(\omega)h(x)| K_\alpha(\omega, dx) dP(\omega) \\
&\qquad + \iint |f_k(\omega)h(x) - f(\omega)h(x)| K(\omega, dx) dP(\omega) \\
&\qquad + \left| \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \right| = \\
&= \iint \underbrace{|h(x)|}_{\leq ||h||_\infty} |f - f_k| K_\alpha(\cdot, dx) dP + \iint \underbrace{|h(x)|}_{\leq ||h||_\infty} |f_k - f| K(\cdot, dx) dP \\
&\qquad + \left| \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \right| \leq \\
&\leq ||h||_\infty \int |f - f_k| \underbrace{\left(\int K_\alpha(\cdot, dx) \right)}_{=1} dP + ||h||_\infty \int |f_k - f| \underbrace{\left(\int K(\cdot, dx) \right)}_{=1} dP \\
&\qquad + \left| \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \right| = \\
&= 2||h||_\infty \int |f - f_k| dP + \left| \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f_k \otimes h \, d(P \otimes K) \right|.
\end{aligned}
$$

Budući da su $f_k \in \mathcal{L}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, puštanjem $\alpha \to +\infty$, drugi sumand iz prethodne relacije ide u nulu. Slijedi:

$$
\limsup_{\alpha} \left| \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) - \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \right| \leq 2||h||_\infty \int |f - f_k| dP.
$$

Nadalje, iz $f_k \nearrow f$ i teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$
\lim_k \int |f_k - f| \, dP = 0.
$$

Konačno, dobivamo:

$$
\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K),
$$

to jest $f \in \mathcal{L}$.

Iz prethodno dokazane tvrdnje slijedi da je $\mathcal{D}$ zatvorena na prebrojive rastuće unije. Naime, za skupove $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \in \mathcal{D}$, vrijedi:

$$G_n \in \mathcal{G} \quad \text{i} \quad \mathbb{1}_{G_n} \in \mathcal{L},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Jer je $\mathcal{G}$ σ-algebra, imamo: $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}$.
Niz funkcija $(\mathbb{1}_{G_n})_n$ je nenegativan, rastuć i sadržan u $\mathcal{L}$, te vrijedi:

$$\mathbb{1}_{G_n} \nearrow \mathbb{1}_{\cup_n G_n}.$$

Prema prethodno dokazanoj tvrdnji, slijedi $\mathbb{1}_{\cup_n G_n} \in \mathcal{L}$, odnosno $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{D}$.

4. korak: Pokazali smo da je $\Omega \in \mathcal{D}$ te da je $\mathcal{D}$ zatvorena na prave razlike i na prebrojive rastuće unije. Prema tome, $\mathcal{D}$ je Dynkinova klasa.

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\emptyset \in \mathcal{E}$ (inače umjesto familije $\mathcal{E}$ uzimamo familiju $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$. Za $\mathcal{E}'$ vrijedi $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$ i $\sigma(\mathcal{E}') = \sigma(\mathcal{E})$).
Po pretpostavci je familija $\mathcal{E}$ zatvorena na konačne presjeke, stoga je $\mathcal{E}$ π-sustav. Dokazali smo da je $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ pa, koristeći Dynkinovu lemu i Napomenu 1.4.6, dobivamo:

$$\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}.$$

Nadalje, familija $\mathcal{E}$ je takva da je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$, dok iz definicije familije $\mathcal{D}$ slijedi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$. Kombiniranjem prethodnih relacija, dobivamo da je

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{G},$$

to jest, vrijedi: $\mathcal{D} = \mathcal{G}$. Time smo pokazali da su karakteristične funkcije $\mathbb{1}_G$, za svaki $G \in \mathcal{G}$ sadržane u $\mathcal{L}$. Koristeći Lebesgueovu indukciju, na standardan način tvrdnju proširujemo na sve nenegativne jednostavne funkcije, zatim na sve nenegativne izmjerive funkcije te konačno na sve izmjerive funkcije. Time smo pokazali da je $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P) = \mathcal{L}$, što smo i trebali dokazati.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Neka je $f \in \mathcal{L}^1(P)$ proizvoljna.

Tada je $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ pa zbog (ii) vrijedi:

$$\lim_{\alpha} \int \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \otimes h \, d(P \otimes K), \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}). \tag{2.8}$$

Sada, zbog $\mathcal{G}$-izmjerivosti od K_α i K vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \lim_\alpha \int \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \\ \overset{(2.8)}{=} \int \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \otimes h \, d(P \otimes K) = \\ = \int f \otimes h \, d(P \otimes K),\end{aligned}$$

za svaki $h \in C_b(\mathcal{X})$.

□

Slaba topologija na $\mathcal{K}^1$ nije nužno Hausdorffova pa granična jezgra nije nužno jedinstvena, ali jest P-g.s. jedinstvena. Naime, ako pretpostavimo da za neke $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^1$ vrijedi

$$\int f \otimes h \, d(P \otimes K_1) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K_2), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X}),$$

tada to specijalno vrijedi i za $f = \frac{1}{P(F)} \mathbb{1}_F$, $\forall F \in \mathcal{F}, P(F) > 0$, pa dobivamo

$$\int h \, dP_F K_1 = \int h \, dP_F K_2, \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Iz gornje relacije slijedi $P_F K_1 = P_F K_2$, $\forall F \in \mathcal{F}$, $P(F) > 0$, to jest vrijedi:

$$K_1(\cdot, B) = K_2(\cdot, B), \quad P\text{-g.s.} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Sada, prema Teoremu 2.1.2 (ii) slijedi da je $K_1 = K_2$ P-g.s.

Definicija 2.2.4. *Neka je $K \in \mathcal{K}^1$ i $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Tada postoji g.s.-jedinstvena jezgra $H \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ takva da vrijedi*

$$P \otimes H|\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}) = (P|\mathcal{G}) \otimes H = P \otimes K|\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{2.9}$$

Markovljevu jezgru H zovemo ***uvjetnim očekivanjem od K uz dano $\mathcal{G}$****, te označavamo s $\mathbb{E}(K|\mathcal{G})$.*

Za σ-podalgebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, slabu topologiju na $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ označavamo s $\tau(\mathcal{G}) = \tau(\mathcal{G}, P)$. Pokazat ćemo da je preslikavanje $K \to \mathbb{E}(K|\mathcal{G})$ s $\mathcal{K}^1$ u $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ ili u $\mathcal{K}^1$ slabo neprekidno.

Korolar 2.2.5. *Neka je $(K_\alpha)_\alpha$ hiperniz u $\mathcal{K}^1$, $K \in \mathcal{K}^1$ i neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Tada vrijedi:*

(i) $\tau(\mathcal{G})$ *se podudara s topologijom induciranom s* τ *na* $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$*, to jest,* $\tau(\mathcal{G}) = \tau \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$.

(ii) Ako $K_\alpha \xrightarrow{w} K$*, tada* $\mathbb{E}(K_\alpha|\mathcal{G}) \xrightarrow{w} \mathbb{E}(K|\mathcal{G})$.

(iii) Ako je $\{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\} \subseteq \mathcal{G} \implies \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ *je* τ*-zatvoren u* $\mathcal{K}^1$.

Dokaz.

(i) Topologija $\tau(\mathcal{G})$ je najmanja topologija na $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ obzirom na koju su preslikavanja

$$K \to \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \ f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), h \in C_b(\mathcal{X}) \tag{2.10}$$

neprekidna.
S druge strane, $\tau \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ je relativna topologija na $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$, to jest topologija čiji su elementi skupovi $U \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G}), \ U \in \tau$. Preslikavanja

$$K \to \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \ f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X}) \tag{2.11}$$

su neprekidna obzirom na tu topologiju.

Odmah se vidi da je $\tau(\mathcal{G}) \subseteq \tau \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$. Ako pokažemo da neprekidnost svih preslikavanja iz (2.10) povlači neprekidnost svih preslikavanja iz (2.11), slijedit će $\tau \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G}) \subseteq \tau(\mathcal{G})$.

Pretpostavimo da su sva preslikavanja $K \to \int f \otimes h d(P \otimes K), \ f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), h \in C_b(\mathcal{X})$ neprekidna. Prema Teoremu 1.2.3 to znači da za svaki hiperniz $(K_\alpha)_\alpha$ u $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ takav da $K_\alpha \xrightarrow{w} K_0$, vrijedi

$$\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K_0), \ f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), \ h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Prema implikaciji (ii)$\Rightarrow$(i) Teorema 2.2.3, to povlači

$$\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K_0), \ f \in \mathcal{L}^1(P), \ h \in C_b(\mathcal{X}),$$

odnosno slijedi neprekidnost preslikavanja $K \to \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \ f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X})$. Dakle, topologije $\tau \cap \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ i $\tau(\mathcal{G})$ se podudaraju.

(ii) Neka su $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$ proizvoljne. Tada vrijedi:

$$\int f \otimes h \, d(P \otimes \mathbb{E}(K_\alpha|\mathcal{G})) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha),$$

za svaki α, te

$$\int f \otimes h \, d(P \otimes \mathbb{E}(K|\mathcal{G})) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K).$$

Koristeći pretpostavku i gornje relacije, dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes \mathbb{E}(K_\alpha|\mathcal{G})) = \lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) &= \\ = \int f \otimes h \, d(P \otimes K) &= \\ = \int f \otimes h \, d(P \otimes \mathbb{E}(K|\mathcal{G})).\end{aligned}$$

(iii) Neka je $(K_\alpha)_\alpha$ hiperniz u $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ t.d. $K_\alpha \xrightarrow{w} K$, $K \in \mathcal{K}^1$. Ako pokažemo da je $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$, tada će vrijediti da je $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ τ-zatvoren.
Budući da je $K_\alpha \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$, vrijedi: $K_\alpha = \mathbb{E}(K_\alpha|\mathcal{G})$. Nadalje,

$$K_\alpha \xrightarrow{w} K \quad \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \quad K_\alpha = \mathbb{E}(K_\alpha|\mathcal{G}) \xrightarrow{w} \mathbb{E}(K|\mathcal{G}).$$

Sada imamo $K_\alpha \xrightarrow{w} K$ i $K_\alpha \xrightarrow{w} \mathbb{E}(K|\mathcal{G})$, pa zbog P-g.s. jedinstvenosti slabog limesa Markovljevih jezgri slijedi da je $\mathbb{E}(K|\mathcal{G}) = K$ P-g.s.
Zbog $\mathcal{G}$-izmjerivosti od $\mathbb{E}(K|\mathcal{G})$ i pretpostavke na $\mathcal{G}$, vrijedi $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$.

□

U nastavku navodimo karakterizacije slabe konvergencije Markovljevih jezgri pomoću neprekidnosti te gornje i donje semineprekidnosti.

Teorem 2.2.6. *Neka je $(K_\alpha)_\alpha$ hiperniz u $\mathcal{K}^1$ te neka je $K \in \mathcal{K}^1$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $K_\alpha \xrightarrow{w} K$*;*

(ii) $\lim_\alpha \int g d(P \otimes K_\alpha) = \int g d(P \otimes K)$ *za svaku izmjerivu ograničenu funkciju* $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *takvu da je* $g(\omega, \cdot) \in C_b(\mathcal{X}),\ \forall \omega \in \Omega$*;*

(iii) $\limsup_\alpha \int g \, d(P \otimes K_\alpha) \leq \int g \, d(P \otimes K)$ *za svaku izmjerivu, odozgo omeđenu funkciju* $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *takvu da je* $\forall \omega \in \Omega$ $g(\omega, \cdot)$ *gornje semineprekidna;*

(iv) $\liminf_\alpha \int g \, d(P \otimes K_\alpha) \geq \int g \, d(P \otimes K)$ *za svaku izmjerivu, odozdo omeđenu funkciju* $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *takvu da je* $\forall \omega \in \Omega$ $g(\omega, \cdot)$ *donje semineprekidna.*

Za dokaz vidjeti [14], Teorem 2.6, str 16.

Za kraj ovog poglavlja uvodimo karakterizacije kompaktnosti na skupu $\mathcal{K}^1$. Zbog jednostavnosti, sada gledamo klase ekvivalencije Markovljevih jezgri, to jest identificiramo one Markovljeve jezgre koje su P-g.s. ekvivalentne. Jednu takvu klasu označavamo s

$$[K] = \{K' \in \mathcal{K}^1(P) \ : \ K' = K \ P\text{-g.s.}\},$$

a prostor svih takvih klasa ekvivalencije označavamo s $K^1(P) = \{[K] : K \in \mathcal{K}^1(P)\}$.

Slaba topologija na $K^1(P)$ je Hausdorffova.

Za σ-podalgebru $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, s $K^1(\mathcal{G}, P)$ označavamo potprostor od $K^1(P)$ svih klasa ekvivalencije koje sadrže barem jedan reprezentant iz $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$.
Prema Korolaru 2.2.5 (iii), slijedi da je prostor $K^1(\mathcal{G}, P)$ slabo zatvoren u $K^1(P)$.

Za hiperniz u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ kažemo da je napet ako je odgovarajući podskup napet. Jer je $\mathcal{X}$ potpun, separabilan i metrizabilan, svaki slabo konvergentan niz u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ je napet. (U ovom prostoru vrijedi Prohorovljev teorem jer su mjere iz $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ vjerojatnosne pa su specijalno i konačne). Nadalje, slaba konvergencija $\nu_n \to \nu$ u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ očito implicira slabu kompaktnost skupa $\{\nu_n : \nu \in \mathbb{N}\} \cup \{\nu\}$. Dakle, $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ je relativno slabo kompaktan pa i napet.

Teorem 2.2.7. *Za podskup $\Gamma \subseteq K^1(P)$ vrijedi:*

(i) Γ je relativno $\tau(P)$-kompaktan ako i samo ako je $PK = \{PK \ : \ K \in \Gamma\}$ relativno kompaktan u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$.

(ii) Pod pretpostavkom da vrijedi (i), Γ je relativno sekvencijalno $\tau(P)$-kompaktan, to jest za hiperniz $(K_\alpha)_\alpha$ u K^1 takav da je $(PK_\alpha)_\alpha$ napet, vrijedi da $(K_\alpha)_\alpha$ ima slabo konvergentan podniz.

Za dokaz vidjeti [14], Teorem 2.7, str 18.

Poglavlje 3

Stabilna konvergencija slučajnih varijabli

U nastavku ponovo pretpostavljamo da je $\mathcal{X}$ separabilan, metrizabilan i potpun topološki prostor. Neka je d metrika koja inducira topologiju na $\mathcal{X}$. U prethodnom poglavlju promatrali smo slabu konvergenciju Markovljevih jezgri, to jest konvergenciju hiperniza $(K_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, P)$ prema $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, P)$, $K_\alpha \xrightarrow{w} K$:

$$\lim_\alpha \int f \otimes h \, d(P \otimes K_\alpha) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X}).$$

U ovom poglavlju promatramo slabu konvergenciju uvjetnih distribucija odgovarajućih slučajnih varijabli, uz danu σ-podalgebru od $\mathcal{F}$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ i $X : \Omega \to \mathcal{X}$ slučajna varijabla. Distribuciju (ili zakon razdiobe) od X označavamo s P_X. **Uvjetna distribucija od X uz dano $\mathcal{G}$**, $P_{X|\mathcal{G}}$ je Markovljeva jezgra u $\mathcal{K}^1(\mathcal{G}, P)$ za koji vrijedi

$$P_{X|\mathcal{G}}(\cdot, B) = P(X \in B|\mathcal{G}), \quad P - \text{g.s. za svaki } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{3.1}$$

Prema Teoremu 2.1.2.(ii), uvjetna distribucija $P_{X|\mathcal{G}}$ je P-g.s. jedinstvena Markovljeva jezgra. Koristeći Definiciju 1.5.18, izraz (3.1) možemo zapisati kao

$$P_{X|\mathcal{G}}(\cdot, B) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X \in B\}}|\mathcal{G}\right), \quad P - \text{g.s. za svaki } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{3.2}$$

$P_{X|\mathcal{G}}$ je karakterizirana Radon-Nikodymovim jednadžbama

$$P \otimes P_{X|\mathcal{G}} = P \otimes \delta_X \quad \text{na } \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}), \tag{3.3}$$

gdje δ_X označava Diracovu jezgru $\delta_X : \Omega \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ definiranu s $\delta_X(\omega) := \delta_{X(\omega)}$, odnosno

$$\delta_X(\omega, B) = \delta_{X(\omega)}(B) = \mathbb{1}_{\{X(\omega)\in B\}} = \begin{cases} 1, & X(\omega) \in B \\ 0, & X(\omega) \notin B. \end{cases}$$

Za proizvoljne $G \in \mathcal{G}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(P \otimes P_{X|\mathcal{G}})(G \times B) &= \iint \mathbb{1}_{G\times B}(\omega, x) P_{X|\mathcal{G}}(\omega, dx) dP(\omega) = \\ &= \iint \mathbb{1}_G(\omega)\mathbb{1}_B(x) P_{X|\mathcal{G}}(\omega, dx) dP(\omega) = \\ &= \int_G P_{X|\mathcal{G}}(\omega, B) dP(\omega).\end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}(P \otimes \delta_X)(G \times B) &= \iint \mathbb{1}_{G\times B}(\omega, x)\delta_X(\omega, dx) dP(\omega) = \\ &= \iint \mathbb{1}_G(\omega)\mathbb{1}_B(x)\delta_X(\omega, dx) dP(\omega) = \\ &= \int_G \delta_X(\omega, B) dP(\omega) = \\ &= \int_G \underbrace{\delta_{X(\omega)}(B)}_{=0 \text{ na } \{\omega\in G: X(\omega)\notin B\}} dP(\omega) = \\ &= \int_{\{\omega\in G: X(\omega)\in B\}} dP(\omega) = \\ &= P(X^{-1}(B) \cap G),\end{aligned}$$

pa se (3.3) ekvivalentno može napisati kao

$$\int_G P_{X|\mathcal{G}}(\omega, B) dP(\omega) = P(X^{-1}(B) \cap G), \quad \forall G \in \mathcal{G}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \tag{3.4}$$

Za slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathcal{X}$ i Borel-izmjerivu funkciju $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, takvu da je $f(X) \in \mathcal{L}^1(P)$, vrijedi:

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{X}} f(x) dP_{X|\mathcal{G}}(\cdot, x). \tag{3.5}$$

Naime, za $f = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ imamo

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X)|\mathcal{G}) \overset{(3.2)}{=} P_{X|\mathcal{G}}(\cdot, B) = \int_B dP_{X|\mathcal{G}}(\cdot, x) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{1}_B(x) dP_{X|\mathcal{G}}(\cdot, x).$$

Sada se ova relacija na standardan način proširi prvo na sve nenegativne jednostavne funkcije, zatim na nenegativne izmjerive funkcije te konačno na sve izmjerive funkcije takve da je $f(X) \in \mathcal{L}^1(P)$.

U nastavku promatramo nizove slučajnih varijabli definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te uvodimo pojam stabilne konvergencije slučajnih varijabli. Tome ćemo pristupiti na dva načina: u prvom pristupu definiramo stabilnu konvergenciju niza slučajnih varijabli prema Markovljevoj jezgri K, dok je u drugom pristupu, umjesto općenite jezgre K, limes stabilne konvergencije zapravo uvjetna distribucija neke slučajne varijable X uz danu σ-algebru.

3.1 Definicija i osnovne karatkerizacije

Definicija 3.1.1. *Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, kažemo da* ***konvergira $\mathcal{G}$-stabilno*** *prema $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ ako pripadni niz uvjetnih distribucija $P_{X_n|\mathcal{G}}$ konvergira slabo prema Markovljevoj jezgri K, to jest ako vrijedi*

$$P_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} K. \tag{3.6}$$

Pišemo: $X_n \to K$ $\quad\mathcal{G}$-stabilno.

U slučaju da granična jezgra K ne ovisi o $\omega \in \Omega$, to jest ako je $K = \nu$ P-g.s. za neku mjeru $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{X})$, onda kažemo da niz $(X_n)_n$ ***konvergira $\mathcal{G}$-miješano*** *prema ν.*

Pišemo: $X_n \to \nu$ $\quad\mathcal{G}$-miješano.

$\mathcal{F}$-stabilnu i $\mathcal{F}$-miješanu konvergenciju kraće nazivamo stabilnom i miješanom konvergencijom.

U smislu definicije slabe konvergencije niza Markovljevih jezgri, konvergencija $X_n \to K$, $\mathcal{G}$-stabilno znači:

$$\lim_n \int f \otimes h \, d(P \otimes P_{X_n|\mathcal{G}}) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Korištenjem Fubinijevog teorema za Markovljeve jezgre, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int f \otimes h \, d(P \otimes P_{X_n|\mathcal{G}}) &= \iint f(\omega) h(x) P_{X_n|\mathcal{G}}(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \int f(\omega) \underbrace{\int h(x) P_{X_n|\mathcal{G}}(\omega, dx)}_{\mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}](\omega)} dP(\omega) = \\
&\overset{(3.5)}{=} \int f(\omega) \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}](\omega) dP(\omega) = \\
&= \mathbb{E}(f \, \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]),
\end{aligned}$$

stoga relaciju (3.6) možemo ekvivalentno zapisati na sljedeći način:

$$\lim_n \mathbb{E}(f \, \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]) = \int f \int h(x) K(\cdot, dx) dP, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), \ h \in C_b(\mathcal{X}). \tag{3.7}$$

Slično, konvergencija $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano znači:

$$\lim_n \int f \otimes h \, d(P \otimes P_{X_n|\mathcal{G}}) = \int f \otimes h \, d(P \otimes \nu), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), h \in C_b(\mathcal{X}),$$

odnosno

$$\lim_n \mathbb{E}(f \, \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]) = \int f \, dP \int h \, d\nu, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P), \ h \in C_b(\mathcal{X}). \tag{3.8}$$

Uočimo:

(i) $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno $\implies X_n \xrightarrow{d} PK$;

(ii) $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano $\implies X_n \xrightarrow{d} \nu$.

Naime, ako pretpostavimo da $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno, tada vrijedi (3.7), pa specijalno za $f \equiv 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_n \mathbb{E}(1 \cdot \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]) = \int 1 \int h(x) K(\cdot, dx) dP, \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}) \\
\implies \quad &\lim_n \mathbb{E}(h(X_n)) = \int h(x) dPK(x), \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}) \\
&\lim_n \int h \, dP_{X_n} = \int h \, dPK, \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}),
\end{aligned}$$

odnosno $P_{X_n} \xrightarrow{w} PK$.
Dakle, pokazali smo tvrdnju (i). Analogno se pokaže tvrdnja (ii).

U smislu Definicije 2.2.4 uvjetnog očekivanja Markovljeve jezgre K uz dano $\mathcal{G}$, za $\mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G})$ vrijedi

$$P \otimes \mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G}) = P \otimes \delta_X \quad \text{na } \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

S druge strane, iz Radon-Nikodymovih jednadžbi primijenjenih na $P_{X|\mathcal{G}}$, imamo

$$P \otimes P_{X|\mathcal{G}} = P \otimes \delta_X \quad \text{na } \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Iz gornje dvije jednakosti i P-g.s. jedinstvenosti od $\mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G})$, slijedi:

$$P_{X|\mathcal{G}} = \mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G}). \tag{3.9}$$

Stoga vrijedi:

$$X_n \to K \quad \mathcal{G}\text{-stabilno} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G}) \xrightarrow{w} K. \tag{3.10}$$

U slučaju kada je $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{G}$-stabilna konvergencija se podudara s konvergencijom po distribuciji. Naime, tada je K $\mathcal{G}$-izmjeriva jezgra, pa je $K = \nu$, za neku mjeru $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{X})$, a $\mathcal{G}$-stabilna konvergencija je zapravo $\mathcal{G}$-miješana konvergencija. Također, jer je $\mathcal{G}$ trivijalna σ-algebra, vrijedi $P_{X_n|\mathcal{G}} = P_{X_n}$, pa imamo:

$$X_n \to \nu \quad \mathcal{G}\text{-miješano} \quad \Longleftrightarrow \quad P_{X_n} \xrightarrow{w} \nu \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} \nu.$$

Sljedeća lema će nam poslužiti kao koristan alat u dokazivanju središnjeg teorema ovog potpoglavlja.

Lema 3.1.2.

(i) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $P_{X|\mathcal{G}} = \delta_X$.

(ii) $P_{X|\mathcal{G}} = P_X \iff \sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ su nezavisne.

(iii) Neka je $\mathcal{Y}$ separabilan i metrizabilan topološki prostor i $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ Borel-izmjeriva funkcija. Tada je $P_{g(X)|\mathcal{G}} = (P_{X|\mathcal{G}})^g$.

(iv) *Neka je Q vjerojatnosna mjera na $\mathcal{F}$ takva da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva. Tada je $Q_{X|\mathcal{G}} = P_{X|\mathcal{G}}$ Q-g.s. Posebno, vrijedi $Q \otimes P_{X|\mathcal{G}} = Q \otimes \delta_X$ na $\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ i $QP_{X|\mathcal{G}} = Q\delta_X = Q_X$.*

(v) *Neka je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva. Tada je $P_{(X,Y)|\mathcal{G}} = P_{X|\mathcal{G}} \otimes \delta_Y$.*

(vi) *Neka je $Z : \Omega \to \mathcal{X}$ slučajna varijabla takva da je $P_Z = P_X$. Ako su $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ nezavisne te ako su $\sigma(Z)$ i $\mathcal{G}$ nezavisne, tada vrijedi $P_{(X,Y)|\mathcal{G}} = P_{(Z,Y)|\mathcal{G}}$.*

Dokaz.

(i) Za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ vrijedi:

$$P_{X|\mathcal{G}}(\cdot, B) = P(X \in B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X\in B\}}|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_{\{X\in B\}} = \delta_X(\cdot, B),$$

pri čemu predzadnja jednakost slijedi iz $\mathcal{G}$-izmjerivosti od X. Sada iz tvrdnje (ii) Teorema 2.1.2 slijedi $P_{X|\mathcal{G}} = \delta_X$ P-g.s.

(ii) Familije $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ su nezavisne ako vrijedi:

$$P(X^{-1}(B) \cap G) = P(X^{-1}(B))P(G), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), G \in \mathcal{G}.$$

Za svaki svaki $G \in \mathcal{G}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ vrijedi:

$$(P \otimes P_X)(G \times B) = P(G)P_X(B) \quad \text{i} \quad (P \otimes \delta_X)(G \times B) = P(X^{-1}(B) \cap G).$$

Tvrdnja slijedi iz (3.3) i g.s. jedinstvenosti uvjetne distribucije $P_{X|\mathcal{G}}$.

(iii) Za $G \in \mathcal{G}$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_G (P_{X|\mathcal{G}})^g(\omega, C)dP(\omega) &= \int_G P_{X|\mathcal{G}}(\omega, g^{-1}(C))dP(\omega) = \\ &= \int_G P(X(\omega) \in g^{-1}(C)|\mathcal{G})dP(\omega) = \\ &= \int_G P(g(X)(\omega) \in C|\mathcal{G})dP(\omega) = \\ &= \int_G P_{g(X)|\mathcal{G}}(\omega, C)dP(\omega).\end{aligned}$$

Jer su $G \in \mathcal{G}$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ bili proizvoljni, slijedi $(P_{X|\mathcal{G}})^g = P_{g(X)|\mathcal{G}}$.

(iii), (iv), (v) Za dokaz vidjeti [14], Leme A.4 i A.5 str.189,199.

□

Napomena 3.1.3. U potpoglavlju 1.5 definirali smo zakon razdiobe slučajne varijable $X : \Omega \to \mathcal{X}$ kao vjerojatnosnu mjeru $P_X : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0, 1]$ takvu da je

$$P_X(B) = P(X \in B), \ B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Na P_X možemo gledati i kao na uvjetnu distribuciju $P_{X|\{\emptyset,\Omega\}}$ slučajne varijable X uz danu trivijalnu σ-algebru $\{\emptyset, \Omega\}$.

U nastavku promatramo najvažnije karakterizacije $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, sadržane u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1.4. *Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ te neka je $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ familija zatvorena na konačne presjeke takva da je $\Omega \in \mathcal{E}$ i $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X_n \to K \quad \mathcal{G}$*-stabilno;*

(ii) $\lim_n \mathbb{E} f h(X_n) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K)$ *za svaki* $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ *i* $h \in C_b(\mathcal{X})$*;*

(iii) $Q_{X_n} \xrightarrow{w} QK$ *za svaku vjerojatnosnu mjeru Q na $\mathcal{F}$ takvu da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva;*

(iv) $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} P_F K$ *za svaki $F \in \mathcal{E}$ takav da je $P(F) > 0$, pri čemu P_F^X označava uvjetnu vjerojatnosnu mjeru obzirom na P_X uz dano F;*

(v) $\lim_n \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega) = \int g \, d(P \otimes K)$ *za svaku izmjerivu i ograničenu funkciju* $g : (\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *takvu ta je* $g(\omega, \cdot) \in C_b(\mathcal{X})$ *za svaki* $\omega \in \Omega$*;*

(vi) $\limsup_n \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega) \leq \int g \, d(P \otimes K)$ *za svaku izmjerivu funkciju* $g : (\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$*, omeđenu odozgo takvu da je $g(\omega, \cdot)$ gornje semineprekidna za svaki $\omega \in \Omega$;*

(vii) $(X_n, Y) \to K \otimes \delta_Y$ *$\mathcal{G}$-stabilno za svaki separabilan, metrizabilan prostor $\mathcal{Y}$ i svaku $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y s vrijednostima u $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$, gdje je $K \otimes \delta_Y \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, $K \otimes \delta_Y(\omega, \cdot) = K(\omega, \cdot) \otimes \delta_{Y(\omega)}$;*

(viii) $(X_n, \mathbb{1}_F) \xrightarrow{d} P(K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F})$ *za svaki $F \in \mathcal{E}$.*

Dokaz.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Slijedi iz Teorema 2.2.3 (i) $\Leftrightarrow$ (ii).
Naime, $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno po definiciji znači $P_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} K$.
Iz Teorema 2.2.3 slijedi da je to ekvivalentno s

$$\lim_n \int f \otimes h \, d(P \otimes P_{X_n|\mathcal{G}}) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), h \in C_b(\mathcal{X}),$$

što je prema (3.7) ekvivalentno s

$$\lim_n \mathbb{E}(f \, \mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Iz svojstava uvjetnog matematičkog očekivanja za $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ slijedi: $\mathbb{E}(f\mathbb{E}[h(X_n)|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[f \, h(X_n)|\mathcal{G}]) = \mathbb{E}(f \, h(X_n))$.
Dakle, konvergencija $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno je ekvivalentna s

$$\lim_n \mathbb{E}(f \, h(X_n)) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P), h \in C_b(\mathcal{X}),$$

što smo i trebali dokazati.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Neka je Q proizvoljna vjerojatnosna mjera na $\mathcal{F}$ takva da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva.
Prema Teoremu 2.2.3 iz $P_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} K$ slijedi $QP_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} QK$. S druge strane, iz Leme 3.1.2 (iv) vidimo da za Q vrijedi $QP_{X_n|\mathcal{G}} = Q\delta_{X_n} = Q_{X_n}$, pa tvrdnja očito slijedi.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Tvrdnja slijedi direktno jer je $\forall F \in \mathcal{E}$ takav da je $P(F) > 0$, P_F vjerojatnosna mjera, apsolutno neprekidna u odnosu na P te je dP_F/dP $\mathcal{G}$-izmjeriva.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Slijedi direktno iz Teorema 2.2.3 (iv) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi): Za izmjerivu funkciju $g : (\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ omeđenu odozgo vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int g \, d(P \otimes P_{X_n|\mathcal{G}}) &\overset{(3.3)}{=} \int g \, d(P \otimes \delta_{X_n}) = \\
&= \iint g(\omega, x) \delta_{X_n}(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \iint g(\omega, x) \delta_{X_n(\omega)}(dx) dP(\omega) = \\
&= \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega).
\end{aligned}$$

Sada se lako vidi da ove ekvivalencije slijede iz Teorema 2.2.6 uz restringiranje na topologiju $\tau(\mathcal{G})$ na $\mathcal{K}^1(\mathcal{G})$.

(v) $\Rightarrow$ (vii): Neka je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla definirana na separabilnom, metrizabilnom prostoru $\mathcal{Y}$. Kako bismo dokazali da vrijedi $(X_n, Y) \to K \otimes \delta_Y$ $\mathcal{G}$-stabilno, iskoristit ćemo prethodno dokazanu ekvivalenciju (i) $\Leftrightarrow$ (iv), to jest dokazat ćemo da vrijedi $P_F^{(X_n,Y)} \xrightarrow{w} P_F(K \otimes \delta_Y)$ $\forall F \in \mathcal{E}, P(F) > 0$.

Dakle, pokažimo da za proizvoljan $F \in \mathcal{E}$ takav da je $P(F) > 0$ i proizvoljnu funkciju $h \in C_b(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ vrijedi:

$$\lim_n \int h \, dP_F^{(X_n,Y)} = \int h \, dP_F(K \otimes \delta_Y).$$

Definirajmo funkciju $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ s $g(\omega, x) := \mathbb{1}_F(\omega) h(x, Y(\omega))$.

Uočimo, g je ograničena na $\Omega \times \mathcal{X}$ i vrijedi $g(\omega, \cdot) \in C_b(\mathcal{X})$ za svaki $\omega \in \Omega$, jer je $h \in C_b(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Nadalje, jer su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ separabilni prostori, vrijedi $\mathcal{B}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, iz čega se vidi da je g $\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$-izmjeriva. Prema tome, možemo primijeniti tvrdnju (v) za ovako definiranu funkciju g. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\lim_n \int h \, dP_F^{(X_n,Y)} &= \lim_n \int h(X_n, Y) \, dP_F = \\
&= \lim_n \frac{1}{P(F)} \int \mathbb{1}_F(\omega) h(X_n(\omega), Y(\omega)) dP(\omega) = \\
&= \lim_n \frac{1}{P(F)} \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega) = \\
&\overset{(v)}{=} \frac{1}{P(F)} \int g \, d(P \otimes K) = \\
&= \frac{1}{P(F)} \iint \mathbb{1}_F(\omega) h(x, Y(\omega)) K(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \iint h(x, Y(\omega)) K(\omega, dx) dP_F(\omega) = \\
&= \iiint h(x, y) \delta_Y(\omega, dy) K(\omega, dx) dP_F(\omega) = \\
&= \int_\Omega \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} h(x, y) (K \otimes \delta_Y)(\omega, d(x, y)) dP_F(\omega) = \\
&= \int h \, dP_F(K \otimes \delta_Y).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $P_F^{(X_n,Y)} \xrightarrow{w} P_F(K \otimes \delta_Y)$ $\forall F \in \mathcal{E}, P(F) > 0$, pa iz ekvivalencije (i) $\Leftrightarrow$ (iv) slijedi tvrdnja (vii).

(vii) $\Rightarrow$ (viii): Pretpostavimo da vrijedi (vii). To specijalno vrijedi i za $Y = \mathbb{1}_F$, $F \in \mathcal{E}$. Ranije je pokazano da $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno povlači $X_n \xrightarrow{d} PK$, pa se analogno pokaže da iz $(X_n, \mathbb{1}_F) \to K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F}$ $\mathcal{G}$-stabilno slijedi $(X_n, \mathbb{1}_F) \xrightarrow{d} P(K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F})$.

(viii) $\Rightarrow$ (iv): Pokažimo da $\forall F \in \mathcal{E}$, $P(F) > 0$ vrijedi $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} P_F K$, to jest da $\forall h \in C_b(\mathcal{X})$ vrijedi $\lim_n \int h\, dP_F^{X_n} = \int h\, dP_F K$.

Prema pretpostavci vrijedi $(X_n, \mathbb{1}_F) \xrightarrow{d} P(K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F})$, odnosno $P_{(X_n, \mathbb{1}_F)} \xrightarrow{w} P(K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F})$.

Neka su $F \in \mathcal{E}$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$ proizvoljni. Neka je $k \in C_b(\mathbb{R})$ takva da je $k(x) = x$ za $x \in [0, 1]$. Tada je $h \otimes k \in C_b(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ te vrijedi:

$$\begin{aligned}
\lim_n \int h\, dP_F^{X_n} &= \frac{1}{P(F)} \lim_n \int h(X_n) \mathbb{1}_F\, dP = \\
&= \frac{1}{P(F)} \lim_n \int (h \otimes k)(X_n, \mathbb{1}_F)\, dP = \\
&= \frac{1}{P(F)} \lim_n \int (h \otimes k)\, dP_{(X_n, \mathbb{1}_F)} = \\
&\overset{(viii)}{=} \frac{1}{P(F)} \int h \otimes k\, dP(K \otimes \delta_{\mathbb{1}_F}) = \\
&= \frac{1}{P(F)} \iiint h(x) k(y) \delta_{\mathbb{1}_F}(\omega, dy) K(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \frac{1}{P(F)} \iint h(x) k(\mathbb{1}_F(\omega)) K(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \frac{1}{P(F)} \iint h(x) \mathbb{1}_F(\omega) K(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \iint h(x) K(\omega, dx) dP_F(\omega) = \\
&= \int h\, dP_F K.
\end{aligned}$$

Dakle, slijedi tvrdnja (iv).

□

Za razliku od konvergencije po distribuciji, stabilna konvergencija $X_n \to K$ je svojstvo slučajnih varijabli, a ne njihovih distribucija. Pogledajmo sljedeći primjer koji ilustrira ovu tvrdnju.

Neka je $U \sim U(0,1)$, uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu $(0,1)$. Definirajmo nizove slučajnih varijabli $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ na istom vjerojatnosnom prostoru na sljedeći način:

$$X_n = \begin{cases} U, & \text{n paran} \\ 1-U, & \text{n neparan} \end{cases}, \qquad Y_n = U, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jer je U simetrična slučajna varijabla, vrijedi $P_U = P_{1-U}$. Dakle, imamo $P_{X_n} = P_{Y_n},\ n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne $f \in \mathcal{L}^1(P)$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$ vrijedi:

$$\lim_n \mathbb{E}(f\, h(Y_n)) = \lim_n \mathbb{E}(f\, h(U)) = \mathbb{E}(f\, h(U)).$$

S druge strane, imamo

$$\begin{aligned}\int f \otimes h\, d(P \otimes \delta_U) &= \iint f(\omega)h(x)\delta_U(\omega, dx)\, dP(\omega) = \\ &= \int f(\omega)h(U(\omega))dP(\omega) = \\ &= \mathbb{E}(f\, h(U)).\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $\lim_n \mathbb{E}(f\, h(Y_n)) = \int f \otimes h\, d(P \otimes \delta_U)$, za svaki $f \in \mathcal{L}^1(P)$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$, to jest $Y_n \to \delta_U$ stabilno.

Međutim, $(X_n)_n$ ne konvergira stabilno ka δ_U. Naime, iz gornjeg računa slijedi da $(X_{2k})_k$ konvergira stabilno ka δ_U, a slično se pokaže da $(X_{2k-1})_k$ konvergira stabilno ka δ_{1-U}. Kada bi vrijedilo da cijeli niz $(X_n)_n$ konvergira stabilno prema δ_U, tada bi zbog gotovo sigurne jedinstvenosti granične jezgre moralo vrijediti $\delta_U = \delta_{1-U}$ iz čega slijedi $U = 1 - U$ g.s., to jest $U = \frac{1}{2}$ g.s., što ne vrijedi.
Dakle, za razliku od niza $(Y_n)_n$, $(X_n)_n$ ne konvergira stabilno k δ_U, iako su im zakoni razdiobe jednaki.

Ekvivalencije $\mathcal{G}$-miješane konvergencije, dane u sljedećem korolaru, posljedice su ekvivalencija iz Teorema 3.1.4.

Korolar 3.1.5. *Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $K = \nu$ g.s. za neku mjeru $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathcal{X})$ te neka je $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ familija zatvorena na konačne presjeke takva da je $\Omega \in \mathcal{E}$ i $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X_n \to \nu$ *$\mathcal{G}$-miješano;*

(ii) $\lim_n \mathbb{E} f h(X_n) = \int f\, dP \int h\, d\nu$ *za svaki $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$;*

(iii) $Q_{X_n} \xrightarrow{w} \nu$ *za svaku vjerojatnosnu mjeru* Q *na* $\mathcal{F}$ *takvu da je* $Q \ll P$ *i* dQ/dP *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva;*

(iv) $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} \nu$ *za svaki* $F \in \mathcal{E}$ *takav da je* $P(F) > 0$*, pri čemu* P_F^X *označava uvjetnu vjerojatnosnu mjeru obzirom na* P_X *uz dano* F*;*

(v) $(X_n, Y) \xrightarrow{d} \nu \otimes P_Y$ *za svaki separabilan, metrizabilan prostor* $\mathcal{Y}$ *i svaku* $\mathcal{G}$*-izmjerivu slučajnu varijablu* Y *s vrijednostima u* $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$*.*

Dokaz.

Ekvivalencije (i) − (iv) slijede direktno iz Teorema 3.1.4.

(i) ⇒ (v): Iz $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano, prema Teoremu 3.1.4. (i) ⇒ (vii) slijedi $(X_n, Y) \to \nu \otimes \delta_Y$ $\mathcal{G}$-stabilno za svaki separabilan, metrizabilan prostor $\mathcal{Y}$ i svaku $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y s vrijednostima u $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$.
Iz toga slijedi $(X_n, Y) \xrightarrow{d} P(\nu \otimes \delta_Y)$.

Uočimo, za proizvoljan $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
P(\nu \otimes \delta_Y)(C) &= P \otimes (\nu \otimes \delta_Y)(\Omega \times C) = \\
&= \int (\nu \otimes \delta_Y)(\omega, C) dP(\omega) = \\
&= \iiint \mathbb{1}_C(x, y) \delta_Y(\omega, dy) d\nu(x) dP(\omega) = \\
&= \iint \mathbb{1}_C(x, Y(\omega)) d\nu(x) dP(\omega) = \\
&= \iint \mathbb{1}_C(x, y) d\nu(x) dP_Y(y) = \\
&= (\nu \otimes P_Y)(C).
\end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi $P(\nu \otimes \delta_Y) = \nu \otimes P_Y$ gotovo sigurno. Konačno, imamo $(X_n, Y) \xrightarrow{d} \nu \otimes P_Y$.

(v) ⇒ (i): Direktna posljedica Teorema 3.1.4.

□

Propozicija 3.1.6. *Neka su* $\sigma(X_n)$ *i* $\mathcal{G}$ *nezavisne* σ*-algebre za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada su sljedeće tvrdnje ekivivalentne:*

(i) $(X_n)_n$ *konvergira* $\mathcal{G}$*-stabilno;*

(ii) $(X_n)_n$ *konvergira* $\mathcal{G}$*-miješano;*

(iii) $(X_n)_n$ *konvergira po distribuciji.*

Dokaz.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno za neki $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$.
Tada za $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ i $h \in C_b(\mathcal{X})$, prema Teoremu 3.1.4, vrijedi:

$$\lim_n \mathbb{E}(f\, h(X_n)) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K).$$

Uočimo sljedeće:

$$\mathbb{E}(f\, h(X_n)) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(f\, h(X_n)|\mathcal{G})\Big) = \mathbb{E}\Big(f\, \mathbb{E}(h(X_n)|\mathcal{G})\Big) = \mathbb{E}\Big(f\, \mathbb{E}(h(X_n))\Big) =$$
$$= \mathbb{E}(h(X_n))\mathbb{E}(f) = \left(\int f \, dP\right)\mathbb{E}(h(X_n)),$$

pri čemu druga jednakost slijedi iz $\mathcal{G}$-izmjerivosti od f, a treća zbog nezavisnosti $\sigma(X_n)$ i $\mathcal{G}$.
Dakle, vrijedi:

$$\lim_n \left(\int f \, dP\right)\mathbb{E}(h(X_n)) = \int f \otimes h \, d(P \otimes K).$$

Ova relacija specijalno vrijedi i za $f \equiv 1$, pa iz toga dobivamo:

$$\lim_n \mathbb{E}(h(X_n)) = \int 1 \otimes h \, d(P \otimes K) = \int h \, dPK,$$

odnosno vrijedi:

$$\lim_n \mathbb{E}(f\, h(X_n)) = \lim_n \left(\int f \, dP\right)\mathbb{E}(h(X_n)) = \int f \, dP \int h \, dPK.$$

Sada iz Korolara 3.1.5 slijedi: $X_n \to PK$ $\mathcal{G}$-miješano.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Već smo pokazali da iz $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano slijedi: $X_n \xrightarrow{d} \nu$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Pretpostavimo da vrijedi $X_n \xrightarrow{d} \nu$. To znači da $P_{X_n} \xrightarrow{w} \nu$, odnosno

$$\lim_n \mathbb{E}(h(X_n)) = \lim_n \int h \, dP_{X_n} = \int h \, d\nu, \quad \forall h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Zbog nezavisnosti $\sigma(X_n)$ i $\mathcal{G}$, pokaže se da vrijedi $\mathbb{E}(f\, h(X_n)) = (\int f\, dP)\mathbb{E}(h(X_n))$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ (kao u (i) $\Rightarrow$ (ii)).
Kombiniranjem prethodne dvije relacije, dobivamo:

$$\lim_n \mathbb{E}(f\, h(X_n)) = \left(\int f\, dP\right) \lim_n \mathbb{E}(h(X_n)) = \int f\, dP \int h\, d\nu.$$

Prema Korolaru 3.1.5. sada slijedi: $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Direktno.

□

3.2 Svojstva $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije

U nastavku ćemo iskazati i dokazati neka osnovna svojstva $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, no prije toga promotrimo sljedeću pomoćnu lemu.

Lema 3.2.1. *Neka su $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebre i neka je $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. Vrijedi:*

(i) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(K|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1)$.

(ii) $\mathbb{E}(P_{X|\mathcal{G}_2}|\mathcal{G}_1) = P_{X|\mathcal{G}_1}$.

Dokaz.

(i) Stavimo $H := \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_2)$ i $J := \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1)$.
Trebamo dokazati $\mathbb{E}(H|\mathcal{G}_1) = J$.

Iz definicije uvjetnog matematičkog očekivanja Markovljeve jezgre uz danu σ-algebru, (2.9) slijedi:

$$P \otimes H = P \otimes K \quad \text{na } \mathcal{G}_2 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$
$$P \otimes J = P \otimes K \quad \text{na } \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Jer je $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, prva relacija vrijedi i na $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$, stoga imamo:

$$P \otimes H = P \otimes J \quad \text{na } \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

iz čega slijedi $\mathbb{E}(H|\mathcal{G}_1) = J$.

(ii) Prisjetimo se, pomoću Radon-Nikodymovih jednadžbi i definicije uvjetnog matematičkog očekivanja Markovljeve jezgre uz danu σ-algebru, u (3.9) smo pokazali da je $P_{X|\mathcal{G}} = \mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G})$. Stoga, koristeći prethodno dokazanu tvrdnju, lagano slijedi:

$$\mathbb{E}(P_{X|\mathcal{G}_2}|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\delta_X|\mathcal{G}_1) = P_{X|\mathcal{G}_1}.$$

□

U sljedećoj propoziciji sadržana su neka od važnijih svojstava stabilne konvergencije.

Propozicija 3.2.2.

(i) Ako je niz $(P_{X_n})_n$ napet u $\mathcal{M}^1(\mathcal{X})$, tada $(X_n)_n$ ima stabilno konvergentan podniz.

(ii) Neka su $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebre od $\mathcal{F}$ i neka je $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G}_2)$. Ako $X_n \to K$ $\mathcal{G}_2$-stabilno, tada $X_n \to \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1)$ $\mathcal{G}_1$-stabilno.

(iii) Neka je $\mathcal{Y}$ separabilan i metrizabilan prostor, Y slučajna varijabla s vrijednostima u $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ te $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$. Tada: $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno ako i samo ako $(X_n, Y) \xrightarrow{d} P(K \otimes \delta_Y)$.

Dokaz.

(i) Najprije uočimo sljedeće:

$$P\delta_X(A) = P \otimes \delta_X(\Omega \times A) = \int \delta_X(\omega, A) dP(\omega) =$$
$$= \int \delta_{X(\omega)}(A) dP(\omega) = \int_{X \in A} dP = P(X \in A) = P_X(A),$$

za proizvoljan $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, stoga za proizvoljnu slučajnu varijablu X vrijedi $P_X = P\delta_X$ P-g.s.

Prema pretpostavci je niz $(P\delta_{X_n})_n$ napet, pa iz Teorema 2.2.7. (ii) slijedi da postoji podniz $(X_k)_k$ od $(X_n)_n$ takav da $\delta_{X_k} \xrightarrow{w} K$ za neki $K \in \mathcal{K}^1$. Budući da je $P_{X_k|\mathcal{F}} = \mathbb{E}(\delta_{X_k}|\mathcal{F}) = \delta_{X_k}$, imamo $P_{X_k|\mathcal{F}} \xrightarrow{w} K$, što znači da podniz $(X_k)_k$ konvergira stabilno prema $K \in \mathcal{K}^1$.

(ii) Neka $X_n \to K$ $\mathcal{G}_2$-stabilno. To znači da $P_{X_n|\mathcal{G}_2} \xrightarrow{w} K$.

Iz Korolara 2.2.5 (ii) tada slijedi: $\mathbb{E}(P_{X_n|\mathcal{G}_2}|\mathcal{G}_1) \xrightarrow{w} \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1)$.

S druge strane, prema Lemi 3.2.1 (ii) vrijedi: $\mathbb{E}(P_{X_n|\mathcal{G}_2}|\mathcal{G}_1) = P_{X_n|\mathcal{G}_1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dakle, vrijedi:

$$P_{X_n|\mathcal{G}_1} \xrightarrow{w} \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1),$$

to jest $X_n \to \mathbb{E}(K|\mathcal{G}_1)$ $\mathcal{G}_1$-stabilno.

(iii) $\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi $(X_n, Y) \xrightarrow{d} P(K \otimes \delta_Y)$, odnosno:

$$P_{(X_n,Y)} \xrightarrow{w} P(K \otimes \delta_Y). \tag{3.11}$$

Prema Teoremu 3.1.4 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), dovoljno je pokazati da je potprostor $\mathcal{L}$ od $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ definiran s

$$\mathcal{L} := \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P) : \lim_n \mathbb{E}(f\, h(X_n)) = \int f \otimes h\, d(P \otimes K),\ \forall h \in C_b(\mathcal{X}) \right\}$$

upravo jednak $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$.

Uočimo, funkcije f oblika $f = k(Y),\ k \in C_b(\mathcal{Y})$ sadržane su u $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\lim_n \mathbb{E}(f\, h(X_n)) &= \lim_n \mathbb{E}(h \otimes k(X_n, Y)) = \\
&= \lim_n \int (h \otimes k) dP_{(X_n,Y)} = \\
&\overset{(3.11)}{=} \int (h \otimes k)\, dP(K \otimes \delta_Y) = \\
&= \iiint h(x)k(y)K(\omega, dx)\delta_Y(\omega, dy)dP(\omega) = \\
&= \iint h(x)k(Y(\omega))K(\omega, dx)dP(\omega) = \\
&= \iint h(x)f(\omega)K(\omega, dx)dP(\omega) = \\
&= \int f \otimes h\, d(P \otimes K),
\end{aligned}$$

stoga vrijedi $\{k(Y) :\ k \in C_b(\mathcal{Y})\} \subseteq \mathcal{L}$.

Budući da je $C_b(\mathcal{Y})$ gust u $\mathcal{L}^1(P_Y)$, prostor $\{k(Y) :\ k \in C_b(\mathcal{Y})\}$ je gust u $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$.

Slijedi: $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P) = \overline{\{k(Y) :\ k \in C_b(\mathcal{Y})\}} \subseteq \mathcal{L}$, odnosno $\mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P) = \mathcal{L}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Slijedi direktno iz Teorema 3.1.4.

$\square$

$\mathcal{G}$-stabilna konvergencija niza slučajnih varijabli $(X_n)_n$ ima nešto jača svojstva kada je X_n $\mathcal{G}$-izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}$. To možemo vidjeti u idućoj propoziciji.

Propozicija 3.2.3. *Neka je X_n $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te neka je $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X_n \to K$ *$\mathcal{G}$-stabilno;*

(ii) $X_n \to K$ *stabilno;*

(iii) $\delta_{X_n} \xrightarrow{w} K$.

Dokaz.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Jer je X_n $\mathcal{G}$-izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $P_{X_n|\mathcal{G}} = P_{X_n|\mathcal{F}}$, iz čega direktno slijedi tražena ekvivalencija.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Konvergencija $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno je po definiciji jednaka konvergenciji $P_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} K$.

Budući da su X_n $\mathcal{G}$-izmjerive, prema tvrdnji (i) Leme 3.1.2 vrijedi $P_{X_n|\mathcal{G}} = \delta_{X_n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, konvergencija $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno je ekvivalentna konvergenciji $\delta_{X_n} \xrightarrow{w} K$.

□

U nastavku analiziramo slučaj kada je limes $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije Diracova jezgra. Za početak, prisjetimo se konvergencije po vjerojatnosti. Za niz $(X_n)_n$ slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ kažemo da konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli $X : \Omega \to \mathcal{X}$ ako vrijedi:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_n P(d(X_n, X) \geq \epsilon) = 0, \tag{3.12}$$

gdje je d bilo koja metrika na prostoru $\mathcal{X}$. Jer je $\mathcal{X}$ separabilan, vrijedi $\mathcal{B}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ iz čega slijedi da je $d(X_n, X)$ $\mathcal{F}$-izmjeriva funkcija. Relacija (3.12) je ekvivalentna s $\lim_n \mathbb{E}(d(X_n, X) \wedge 1)=0$.

Napomena 3.2.4. Relacija (3.12) ne ovisi o izboru metrike d na $\mathcal{X}$ (vidi [10] str. 335).

U slučaju da je limes $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije Diracova jezgra, ta konvergencija postaje ekvivalentna konvergenciji po vjerojatnosti. Ova je tvrdnja sadržana u sljedećem korolaru.

Korolar 3.2.5. (Konvergencija po vjerojatnosti) *Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ i $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathcal{X}$ sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X_n \xrightarrow{P} X$;

(ii) $X_n \to \delta_X$ *$\mathcal{G}$-stabilno.;*

(iii) $Q_{X_n} \xrightarrow{w} Q_X$ *za svaku vjerojatnosnu mjeru Q na $\mathcal{F}$ takvu da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva.*

Ovaj korolar vrijedi i u slučaju $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Dokaz.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Neka je Q vjerojatnosna mjera na $\mathcal{F}$ takva da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva.

Po pretpostavci vrijedi $X_n \xrightarrow{P} X$, to jest $\forall \epsilon > 0$ je $\lim_n P(d(X_n, X) \geq \epsilon) = 0$.

Uočimo, $\{d(X_n, X) \geq \epsilon\}_n$ je padajuć niz skupova, pa po neprekidnosti mjere obzirom na padajuće nizove skupova vrijedi:

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{d(X_n, X) \geq \epsilon\}\right) = \lim_n P(d(X_n, X) \geq \epsilon) = 0.$$

Kako je Q apsolutno neprekidna u odnosu na P, vrijedi i

$$\forall \epsilon > 0, \quad 0 = Q\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{d(X_n, X) \geq \epsilon\}\right) = \lim_n Q(d(X_n, X) \geq \epsilon).$$

Dakle, $X_n \xrightarrow{Q} X$. Konvergencija po vjerojatnosti povlači slabu konvergenciju pripadnih vjerojatnosnih mjera pa konačno dobivamo: $Q_{X_n} \xrightarrow{w} Q_X$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Ranije smo pokazali da za vjerojatnosnu mjeru Q vrijedi $Q_X = Q\delta_X$.

Sada ova ekvivalencija slijedi direktno iz ekvivalencije (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Teorema 3.1.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pretpostavimo: $X_n \to \delta_X$ $\mathcal{G}$-stabilno.

Definirajmo funkciju $g : \Omega \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ s $g(\omega, x) := d(x, X(\omega)) \wedge 1$.

Funkcija g je $\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$-izmjeriva i $g(\omega, \cdot) \in C_b(\mathcal{X}),\ \forall \omega \in \Omega$.
Teorem 3.1.4 (i) $\Rightarrow$ (v) tada povlači:

$$\lim_n \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega) = \int g\, d(P \otimes \delta_X).$$

Sada, koristeći prethodnu jednakost, pokažimo da niz $(X_n)_n$ konvergira po vjerojatnosti ka X:

$$\begin{aligned}
\lim_n \mathbb{E}(d(X_n, X) \wedge 1) &= \lim_n \int (d(X_n(\omega), X(\omega) \wedge 1) dP(\omega) = \\
&= \lim_n \int g(\omega, X_n(\omega)) dP(\omega) = \\
&= \int g\, d(P \otimes \delta_X) = \\
&= \iint g(\omega, x) \delta_X(\omega, dx) dP(\omega) = \\
&= \int g(\omega, X(\omega)) dP(\omega) = \\
&= \int (d(X(\omega), X(\omega)) \wedge 1) dP(\omega) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, $X_n \xrightarrow{P} X$.

□

Napomena 3.2.6. Ako niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ konvergira po distribuciji, $X_n \xrightarrow{d} X$ i niz slučajnih varijabli $(Y_n)_n$ konvergira po vjerojatnosti, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ te ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$ dobro definiran slučajni vektor (X_n, Y_n), to općenito ne povlači konvergenciju niza $\{(X_n, Y_n)\}_n$ po distribuciji (vidi Napomenu 4.7).

S druge strane, ako konvergenciju po distribuciji zamijenimo $\mathcal{G}$-stabilnom konvergencijom, tada će ista tvrdnja vrijediti. Ta velika prednost $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije u odnosu na konvergenciju po distribuciji sadržana je u dijelu (ii) idućeg teorema, a intuitivniji iskaz dan je u potpoglavlju 3.3.

Teorem 3.2.7. *Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ takav da $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno, $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$ te neka je $\mathcal{Y}$ separabilan i metrizabilan prostor, a Y_n, Y slučajne varijable s vrijednostima u $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$, $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Neka je $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Ako $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, tada $Y_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno.

(ii) Ako $Y_n \xrightarrow{P} Y$ i Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada $(X_n, Y_n) \to K \otimes \delta_Y$ $\mathcal{G}$-stabilno.

(iii) Ako je $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ Borel-izmjeriva i PK-g.s. neprekidna funkcija, tada $g(X_n) \to K^g$ $\mathcal{G}$-stabilno, pri čemu je $K^g(\omega, \cdot) := K(\omega, \cdot)^g$.

Dokaz.

(i) Neka je $F \in \mathcal{G}$, $P(F) > 0$ proizvoljan. Jer je $P_F \ll P$, iz $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$ slijedi $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P_F} 0$.
S druge strane, prema Teoremu 3.1.4 (iv) iz $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno slijedi $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} P_F K$.
Prethodne dvije relacije povlače $P_F^{Y_n} \xrightarrow{w} P_F K$ (vidi Propoziciju 5.2).
Dakle, vrijedi $Y_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno.

(ii) Po pretpostavci X_n konvergira $\mathcal{G}$-stabilno prema $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$, a Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla s vrijednostima u separabilnom i metrizabilnom prostoru $\mathcal{Y}$, pa Teorem 3.1.4 (i) $\Rightarrow$ (vii) povlači: $(X_n, Y) \to K \otimes \delta_Y$ $\mathcal{G}$-stabilno.

$Y_n \xrightarrow{P} Y$ možemo ekvivalentno zapisati kao $d_Y(Y_n, Y) \xrightarrow{P} 0$.

Koristeći verziju nejednakosti trokuta za metričke prostore, imamo:

$$d_2((X_n, Y_n), (X_n, Y)) \leq d_X(X_n, X_n) + d_Y(Y_n, Y) \xrightarrow{P} 0,$$

pri čemu je d_2 metrika na prostoru $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, d_X metrika na $\mathcal{X}$ i d_Y metrika na $\mathcal{Y}$. (Prema Napomeni 3.2.4, konvergencija po vjerojatnosti ne ovisi o odabiru metrike).

Sada iz $(X_n, Y) \to K \otimes \delta_Y$ $\mathcal{G}$-stabilno i $d_2((X_n, Y_n), (X_n, Y)) \xrightarrow{P} 0$, primjenom tvrdnje (i), slijedi tvrdnja (ii).

(iii) Konvergenciju $g(X_n) \to K^g$ $\mathcal{G}$-stabilno dokazat ćemo pomoću tvrdnje (iii) Teorema 3.1.4, to jest pokazat ćemo da za proizvoljnu vjerojatnosnu mjeru Q na $\mathcal{F}$, takvu da je $Q \ll P$ i dQ/dP je $\mathcal{G}$-izmjeriva, vrijedi: $Q_{g(X_n)} \xrightarrow{w} QK^g$.

Pretpostavili smo da $X_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno, stoga vrijedi: $Q_{X_n} \xrightarrow{w} QK$.

Jer je $Q \ll P$, imamo $QK \ll PK$ pa vrijedi da je g neprekidna i QK-g.s.

U dokazu tvrdnje (i) Teorema 5.1, pokazano je da za P_X-g.s. neprekidnu funkciju $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ iz $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$ slijedi $P_{g(X_n)} \xrightarrow{w} P_{g(X)}$, pri čemu su $(X_n)_n$ i X slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru.
Nadalje, vrijedi $P_{g(X)} = (P_X)^g$ (dokaz kao za tvrdnju (iii) Leme 3.1.2).

Dakle, na analogan način dobivamo da iz $Q_{X_n} \xrightarrow{w} QK$ i QK-g.s. neprekidnosti funkcije g slijedi

$$Q_{g(X_n)} \xrightarrow{w} (QK)^g.$$

Za proizvoljan $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ imamo:

$$(QK)^g(C) = QK(g^{-1}(C)) = \int K(\omega, g^{-1}(C))dQ(\omega) = \int K^g(\omega, C)dQ(\omega) = QK^g(C).$$

Dakle, vrijedi $(QK)^g = QK^g$.

Konačno, dobivamo

$$Q_{g(X_n)} \xrightarrow{w} QK^g,$$

što smo i trebali dokazati.

□

U nastavku navodimo neke rezultate u slučaju specifične strukture prostora $\mathcal{X}$.

Korolar 3.2.8. *Neka je $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklidski skalarni produkt na $\mathbb{R}^d$. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ te $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ familija zatvorena na konačne presjeke takva da je $\Omega \in \mathcal{E}$ i $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X_n \to K$ *$\mathcal{G}$-stabilno;*

(ii) $\lim_n \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \ \exp(i\langle u, X_n\rangle)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F \int \exp(i\langle u, x\rangle)K(\cdot, dx))$*, za svaki $F \in \mathcal{E}$ i $u \in \mathbb{R}^d$;*

(iii) (Cramér-Wold) $\langle u, X_n\rangle \to K^u$ $\mathcal{G}$-stabilno za svaki $u \in \mathbb{R}^d$, gdje je $K^u \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ dan s $K^u(\omega, \cdot) := K(\omega, \cdot)^{\langle u, \cdot \rangle}$.

Za dokaz pogledati [14] Korolar 3.8. str 27.

Propozicija 3.2.9. *Neka $0 < T < \infty$, $\mathcal{X} = C(I)$, $I = [0, T]$ ili $I = \mathbb{R}^+$ te $X^n = (X^n_t)_{t \in I}$ slučajni proces s neprekidnim putevima. Neka je $K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X^n \to K$ *$\mathcal{G}$-stabilno;*

(ii) $(P_{X^n})_{n \geq 1}$ je napet i $(X^n_{t1}, \dots, X^n_{t_k}) \to K^{\pi_{t_1,\dots,t_k}}$ $\mathcal{G}$-stabilno za svaki $k \geq 1$ i za svaki odabir $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, $t_j \in I$, pri čemu je $\pi_{t_1,\dots,t_k} : C(I) \to \mathbb{R}^k$ projekcija definirana s $\pi_{t_1,\dots,t_k}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_k))$.

Za dokaz pogledati [14] Propoziciju 3.9 str 28.

Sljedeći je teorem koristan alat za dokazivanje stabilne konvergencije.

Teorem 3.2.10. **(Teorem aproksimacije)** *Neka su $X_{n,r}$ i Y_n slučajne varijable s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ te $K_r, K \in \mathcal{K}^1(\mathcal{G})$, $n, r \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi:*

(i) $X_{n,r} \to K_r$ *$\mathcal{G}$-stabilno kada $n \to \infty$ za svaki $r \in \mathbb{N}$,*

(ii) $K_r \xrightarrow{w} K$ *kada $r \to \infty$,*

(iii) $\lim_r \limsup_n P(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon) = 0$ *za svaki $\epsilon > 0$,*

tada $Y_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno.

Dokaz.

Neka je $F \in \mathcal{G}$ takav da je $P(F) > 0$ proizvoljan.
Iz tvrdnje (i) i Teorema 3.1.4 slijedi:

$$P_F^{X_{n,r}} \xrightarrow{w} P_F K_r \text{ kada } n \to \infty, \text{ za svaki } r \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

S druge strane, iz tvrdnje (ii) i Teorema 2.2.3 slijedi:

$$P_F K_r \xrightarrow{w} P_F K \text{ kada } r \to \infty. \tag{3.14}$$

Da bismo pokazali da $Y_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno, prema Teoremu 3.1.4 dovoljno je pokazati da vrijedi: $P_F^{Y_n} \xrightarrow{w} P_F K$.
Neka je $B \subset \mathcal{X}$ proizvoljan zatvoren skup i $\epsilon > 0$. Definirajmo skup B_ϵ na sljedeći način:

$$B_\epsilon := \{y \in \mathcal{X} : d(y, B) \leq \epsilon\}.$$

Iz definicije skupa B_ϵ slijedi:

$$\{Y_n \in B\} \subseteq \{X_{n,r} \in B_\epsilon\} \cup \{d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon\}.$$

Naime, za proizvoljan $\omega \in \Omega$ takav da je $Y_n(\omega) \in B$, dvije su mogućnosti: ili je $X_{n,r}(\omega) \in B_\epsilon$ ili $X_{n,r}(\omega) \notin B_\epsilon$. Jer je $Y_n(\omega) \in B$, slučaj $X_{n,r}(\omega) \notin B_\epsilon$ povlači $d(X_{n,r}(\omega), Y_n(\omega)) > \epsilon$.
Sada imamo,

$$\begin{aligned} P_F^{Y_n}(B) &= P(Y_n \in B|F) \\ &\leq P(X_{n,r} \in B_\epsilon|F) + P(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon|F) \\ &= P_F^{X_{n,r}}(B_\epsilon) + P_F(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon), \end{aligned}$$

pa primjenom limesa superiora po n slijedi:

$$\limsup_n P_F^{Y_n}(B) \leq \limsup_n P_F^{X_{n,r}}(B_\epsilon) + \limsup_n P_F(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon). \tag{3.15}$$

Sada, iz (3.13) i zatvorenosti od B_ϵ, primjenom Teorema 1.5.10 dobivamo:

$$\limsup_n P_F^{X_{n,r}}(B_\epsilon) \leq P_F K_r(B_\epsilon).$$

Zatim primijenimo limes superior po r na relaciju (3.15):

$$\limsup_n P_F^{Y_n}(B) \leq \limsup_r P_F K_r(B_\epsilon) + \lim_r \limsup_n P_F(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon). \tag{3.16}$$

Slično kao ranije, iz (3.14) primjenom Teorema 1.5.10 dobivamo:

$$\limsup_r P_F^{X_r}(B_\epsilon) \leq P_F K(B_\epsilon)$$

pa zbog toga i tvrdnje (iii), relaciju (3.16) možemo zapisati kao

$$\limsup_n P_F^{Y_n}(B) \leq P_F K(B_\epsilon).$$

Puštanjem $\epsilon \downarrow 0$, slijedi $B_\epsilon \downarrow B$ pa dobivamo:

$$\limsup_n P_F^{Y_n}(B) \leq P_F K(B).$$

Jer je B bio proizvoljan zatvoren podskup od $\mathcal{X}$, iz Teorema 1.5.10 slijedi

$$P_F^{Y_n} \xrightarrow{w} P_F K,$$

to jest $Y_n \to K$ $\mathcal{G}$-stabilno.

□

3.3 Alternativni pristup

Svaka granična jezgra $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije $X_n \to K$ može se prikazati kao uvjetna distribucija neke slučajne varijable definirane na odgovarajućem proširenju vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, uz danu σ-podalgebru od $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Za graničnu jezgru K, definiramo slučajnu varijablu X na sljedeći način: stavimo $\overline{\Omega} = \Omega \times \mathcal{X}$, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\overline{P} = P \otimes K$ te na tom proširenom vjerojatnosnom prostoru $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ definiramo slučajnu varijablu $X : \overline{\Omega} \to \mathcal{X}$ s $X(\omega, x) := x$.

Neka su $G \in \mathcal{G}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ proizvoljni. Stavimo $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$ te $\overline{G} = G \times \mathcal{X}$. Tada je:

$$\begin{aligned}
\overline{P} \otimes \delta_X(\overline{G} \times B) &= \iint \mathbb{1}_{\overline{G}\times B}(\overline{\omega}, x)\delta_X(\overline{\omega}, dx)d\overline{P}(\overline{\omega}) = \\
&= \int \mathbb{1}_{\overline{G}}(\overline{\omega})\left(\int \mathbb{1}_B(x)\delta_X(\overline{\omega}, dx)\right)d\overline{P}(\overline{\omega}) = \\
&= \int \mathbb{1}_{\overline{G}}(\overline{\omega})\delta_X(\overline{\omega}, B)d(P \otimes K)(\overline{\omega}) = \\
&= \iint \mathbb{1}_{G\times\mathcal{X}}(\omega, x)\delta_X((\omega, x), B)K(\omega, dx)dP(\omega) = \\
&= \iint \mathbb{1}_{G\times B}(\omega, x)K(\omega, dx)dP(\omega) = \\
&= P \otimes K(G \times B).
\end{aligned}$$

Prema (3.3) imamo $\overline{P} \otimes \overline{P}_{X|\overline{\mathcal{G}}} = \overline{P} \otimes \delta_X$ na $\overline{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})$, pa iz gornjeg računa slijedi

$$\overline{P} \otimes \overline{P}_{X|\overline{\mathcal{G}}}(\overline{G} \times B) = P \otimes K(G \times B)$$

za proizvoljne $G \in \mathcal{G}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Prema tome, možemo poistovjetiti Markovljevu jezgru K s uvjetnom distribucijom $\overline{P}_{X|\overline{\mathcal{G}}}$.

Budući da svaku graničnu jezgru možemo prikazati na ovaj način, to nam daje motivaciju za definiciju $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije u kojoj limes nije Markovljeva jezgra, već slučajna varijabla.

Definicija 3.3.1. *Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra of $\mathcal{F}$. Za niz $(X_n)_n$ slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ kažemo da konvergira $\mathcal{G}$-stabilno ka slučajnoj varijabli $X : \Omega \to \mathcal{X}$ ako vrijedi*

$$P_{X_n|\mathcal{G}} \xrightarrow{w} P_{X|\mathcal{G}}$$

kada $n \to \infty$.
Pišemo: $X_n \to X$ $\mathcal{G}$-stabilno.

Na sličan način na koji je izvedena relacija (3.7), pokaže se da konvergenciju $X_n \to X$ $\mathcal{G}$-stabilno možemo ekvivalentno zapisati kao

$$\lim_n \mathbb{E}(f\,\mathbb{E}(h(X_n)|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(f\,\mathbb{E}(h(X)|\mathcal{G})), \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P),\ h \in C_b(\mathcal{X}).$$

Ovakav pristup definiranja $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije ponekad se naziva i "X-pristup". U skladu s time, prvi opisani pristup u kojemu je limes konvergencije Markovljeva jezgra K, nazivamo "K-pristup".

Svi rezultati iz potpoglavlja 3.1. i 3.2 vrijede i u "X-pristupu", uz odgovarajuće preinake u samim iskazima tvrdnji.

Ovaj alternativni pristup donosi malo drugačiju perspektivu ranije spomenutih rezultata koja ih čini intuitivnijima za razumijevanje te jasnije ističe glavne karakteristike i prednosti ovog tipa konvergencije u odnosu na druge vrste konvergencije.

U nastavku navodimo neke od tih rezultata u ovom "novom svjetlu".

Teorem 3.3.2. *Neka su X_n, X slučajne varijable s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ familija zatvorena na konačne presjeke takva da je $\Omega \in \mathcal{E}$ i $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{G}$.*
Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) $X_n \to X \quad \mathcal{G}$*-stabilno;*

(ii) $\lim_n \mathbb{E} f h(X_n) = \mathbb{E} f h(X)$ *za svaki* $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{G}, P)$ *i* $h \in C_b(\mathcal{X})$*;*

(iii) $Q_{X_n} \xrightarrow{w} Q_X$ *za svaku vjerojatnosnu mjeru* Q *na* $\mathcal{F}$ *takvu da je* $Q \ll P$ *i* dQ/dP *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva;*

(iv) $P_F^{X_n} \xrightarrow{w} P_F^X$ *za svaki* $F \in \mathcal{E}$ *takav da je* $P(F) > 0$*;*

(v) $\lim_n \int g(\omega, X_n(\omega))\, dP(\omega) = \int g(\omega, X(\omega))\, dP(\omega)$ *za svaku izmjerivu i ograničenu funkciju* $g : (\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *takvu da je* $g(\omega, \cdot) \in C_b(\mathcal{X})$ *za svaki* $\omega \in \Omega$*;*

(vi) $\limsup_n \int g(\omega, X_n(\omega))\, dP(\omega) \leq \int g(\omega, X(\omega))\, dP(\omega)$ *za svaku izmjerivu funkciju* $g : (\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{X})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$*, omeđenu odozgo takvu da je* $g(\omega, \cdot)$ *gornje semineprekidna za svaki* $\omega \in \Omega$*;*

(vii) $(X_n, Y) \to (X, Y)$ $\mathcal{G}$*-stabilno za svaki separabilan i metrizabilan prostor* $\mathcal{Y}$ *te svaku* $\mathcal{G}$*-izmjerivu slučajnu varijablu* Y *s vrijednostima u* $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$*;*

(viii) $(X_n, \mathbb{1}_F) \xrightarrow{d} (X, \mathbb{1}_F)$ *za svaki* $F \in \mathcal{E}$*.*

Posljedica ovog teorema su i sljedeće dvije karakterizacije:

(i) Neka je $\mathcal{Y}$ *separabilan i metrizabilan prostor i* $Y : \Omega \to \mathcal{Y}$ *slučajna varijabla takva da je* $\mathcal{G} = \sigma(Y)$*. Tada vrijedi:*

$$X_n \to X \ \mathcal{G}\text{-stabilno} \iff (X_n, Y) \xrightarrow{d} (X, Y).$$

(ii) *Neka je* $\mathcal{G} = \sigma(X_n,\ n \geq 1)$. *Vrijedi:*

$$X_n \to X\ \mathcal{G}\text{-stabilno} \iff (X_n, X_1, \ldots, X_k) \xrightarrow{d} (X, X_1, \ldots, X_k),\ \forall k \geq 1.$$

Teorem 3.3.3. *Neka* $X_n \to X$ $\mathcal{G}$*-stabilno te neka su* Y_n, Y *slučajne varijable s vrijednostima u* $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ *za* $n \in \mathbb{N}$*, pri čemu je* $\mathcal{Y}$ *separabilan i metrizabilan prostor. Tada vrijedi:*

(i) *Neka je* $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. *Ako* $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$*, tada* $Y_n \to X$ $\mathcal{G}$*-stabilno.*

(ii) *Ako* $Y_n \xrightarrow{P} Y$ *i* Y *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva, tada* $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ $\mathcal{G}$*-stabilno.*

(iii) *Ako je* $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *Borel-izmjeriva i* P_X*-g.s. neprekidna funkcija, tada* $g(X_n) \to g(X)$ $\mathcal{G}$*-stabilno.*

Iz tvrdnje (ii) prethodnog teorema, jasna je prednost $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije u odnosu na konvergenciju po distribuciji.

Teorem aproksimacije također možemo iskazati na nešto intuitivniji način.

Teorem 3.3.4. (Teorem aproksimacije) *Neka su* $X_{n,r}, X_r, X$ *i* Y_n *slučajne varijable s vrijednostima u* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$*,* $n, r \in \mathbb{N}$.
Ako vrijedi:

(i) $X_{n,r} \to X_r$ $\mathcal{G}$*-stabilno kada* $n \to \infty$ *za svaki* $r \in \mathbb{N}$*,*

(ii) $X_r \to X$ $\mathcal{G}$*-stabilno kada* $r \to \infty$*,*

(iii) $\lim_r \limsup_n P(d(X_{n,r}, Y_n) > \epsilon) = 0$ *za svaki* $\epsilon > 0$*,*

tada $Y_n \to X$ $\mathcal{G}$*-stabilno.*

Specijalan slučaj iz iduće propozicije može se pokazati korištenjem Teorema 3.3.4.

Propozicija 3.3.5. *Neka je* $\mathcal{X} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i$ *za separabilan i metrizabilan prostor* $\mathcal{Y}_i$*,* $i \in \mathbb{N}$. *Za slučajne varijable* $X^n = (X_k^n)_{k\geq 1}$ *s vrijednostima u* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$*,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $X = (X_k)_{k\geq 1}$*, ekvivalentno je:*

(i) $X^n \to X$ $\mathcal{G}$*-stabilno;*

(ii) $(X_1^n, \ldots, X_k^n) \to (X_1, \ldots, X_k)$ $\mathcal{G}$*-stabilno,* $\forall k \in \mathbb{N}$.

Sličan rezultat vrijedi i za slučajne procese s neprekidnim putevima.

Korolar 3.3.6. *Neka je $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}^+)$. Za slučajne procese s neprekidnim putevima $X^n = (X^n_t)_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ i $X = (X_t)_{t\geq 0}$ sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) $X^n \to X$ *$\mathcal{G}$-stabilno;*

(ii) $(X^n_t)_{t\in[0,k]} \to (X_t)_{t\in[0,k]}$ *$\mathcal{G}$-stabilno,* $\forall k \in \mathbb{N}$.

Poglavlje 4

Posljedice i primjena $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije

Konvergencija po distribuciji jedan je od najvažnijih tipova konvergencije slučajnih varijabli i ključan pojam u teoriji vjerojatnosti. Posebno važnu ulogu ima u asimptotskoj teoriji vjerojatnosti - aproksimirati distribuciju slučajnih varijabli kada veličina uzorka raste prema beskonačnosti, što pojednostavljuje analizu i donošenje zaključaka o ponašanju statističkih metoda za velike uzorke.

Jedan od najvažnijih rezultata u ovoj teoriji je centralni granični teorem. Centralni granični teorem ima nekoliko varijanti koje se obično iskazuju u terminima konvergencije po distribuciji.

U ovom ćemo poglavlju pokazati da klasični CGT, kao i neki drugi asimptotski rezultati, vrijede i u slučaju stabilne konvergencije. Stabilna konvergencija nadilazi određena ograničenja konvergencije po distribuciji, otvarajući put ka rezultatima koji nisu dostupni samo putem klasične konvergencije po distribuciji.

Prije samih primjera koji će ilustrirati jakost stabilne konvergencije, promotrimo sljedeći važan rezultat.

Teorem 4.1. (O neprekidnoj funkciji) *Neka su $(X_n)_n$ i X slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ te neka je $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ P_X-g.s. neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

(i) $X_n \xrightarrow{d} X \implies g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$;

(ii) $X_n \xrightarrow{P} X \implies g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$;

(iii) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X)$.

(Za dokaz vidjeti Poglavlje 5. Dodaci).

Napomena 4.2. Teorem o neprekidnoj funkciji vrijedi i u slučaju $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, što je dano u tvrdnji (iii) Teorema 3.3.3. Ovi će se rezultati pokazati vrlo korisnima u nastavku.

Promotrimo sada sljedeći primjer.

Primjer 4.3. (Klasični CGT) Jedna od najpoznatijih varijanti centralnog graničnog teorema je Lévyjev centralni granični teorem:

Neka je $(Z_n)_n$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih realnih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s očekivanjem* μ *i varijancom* $\sigma^2 \in (0, +\infty)$. *Tada vrijedi:*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \mu) \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{4.1}$$

a) Označimo $X_n := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \mu), \ n \in \mathbb{N}$.

Ako s Φ označimo funkciju distribucije standardne normalne razdiobe, tada relaciju (4.1) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_n P(X_n \leq x) = \Phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

odnosno, ako $\Phi(x)$ zapišemo pomoću integrala funkcije gustoće standardne normalne razdiobe:

$$\lim_n P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, Lévyjev centralni granični teorem opravdava korištenje normalne distribucije kao približne distribucije za sume velikog broja jednako distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabli, bez obzira na njihovu početnu distribuciju.

Za bilo koji realan broj $x \in \mathbb{R}$, niz $(P(X_n \leq x))_n$ konvergira prema broju $\Phi(x)$. S druge strane, ako realan broj x zamijenimo slučajnom varijablom $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, nije odmah jasno konvergira li niz $(P(X_n \leq Y))_n$ i ako da, prema čemu. Na ovaj ćemo se problem vratiti kasnije.

b) Centralni granični teorem ima ključnu ulogu u analizi asimptotskog ponašanja nekog niza procjenitelja određenog parametra slučajnog uzorka.

Označimo sa $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$ aritmetičku sredinu slučajnog uzorka $Z_1, \ldots, Z_n$. Tada formulaciju (4.1) Lévyjevog centralnog graničnog teorema možemo napisati kao

$$\sqrt{n}(\overline{Z}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2). \tag{4.2}$$

Pretpostavimo da su μ i σ^2 nepoznati parametri te da je μ parametar od interesa. Kada bismo mogli ukloniti nepoznati parametar σ iz (4.2), tada bismo mogli odrediti asimptotsku distribuciju niza procjenitelja $(\overline{Z}_n)_n$ za μ.

To zaista i možemo učiniti uzimanjem niza procjenitelja $(\hat{\sigma}_n^2)_n$ od σ^2, definiranog s

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Z_k - \overline{Z}_n)^2, \ n \in \mathbb{N}$$

za koji se pomoću Jakog zakona velikih brojeva lako pokaže da je jako konzistentan, odnosno da vrijedi $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{g.s.} \sigma^2$. Kako bismo dobili željeni rezultat, iskoristit ćemo sljedeći koristan teorem.

Teorem 4.4. (Cramér-Slutsky) *Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ nizovi realnih slučajnih varijabli i X realna slučajna varijabla. Pretpostavimo da su sve one definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

$$X_n \xrightarrow{d} X, \ Y_n \xrightarrow{P} c \implies X_n Y_n \xrightarrow{d} cX.$$

Dakle, budući da iz $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{g.s.} \sigma^2$ slijedi $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, a iz Teorema 4.1 slijedi i $\frac{1}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sigma}$, tada iz (4.2) primjenom prethodnog rezultata dobivamo

$$\frac{\overline{Z}_n - \mu}{\hat{\sigma}_n}\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0, 1). \tag{4.3}$$

Sada je jedina nepoznanica upravo parametar od interesa, stoga nam realacija (4.3) daje da je niz procjenitelja za μ, $(\overline{Z}_n)_n$ asimptotski normalan s očekivanjem μ i varijancom $\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}$.

Primijetimo da smo do ovog rezultata došli koristeći klasičnu konvergenciju po distribuciji i konvergenciju po vjerojatnosti, te uz pomoć Cramér - Slutskyjevog teorema.

□

Sljedeći primjer pokazuje da ponekad konvergencija po distribuciji nije dovoljna kako bismo došli do određenih asimptotskih rezultata.

Primjer 4.5. (Galton - Watsonov proces grananja) Neka je $(Y_i^n \ : \ i \geq 1, \ n \geq 1)$ familija nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Definirajmo niz $(Z_n)_{n\geq 0}$ sa $Z_0 := 1$ te

$$Z_n := \begin{cases} Y_1^n + \cdots + Y_{Z_{n-1}}^n, & \text{ako je } Z_{n-1} > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za $n \geq 1$.

Z_n interpretiramo kao broj jedinki u n-toj generaciji, a Y_i^n kao broj potomaka u n-toj generaciji nastao od i-tog potomka iz prethodne generacije. Slučajni proces $(Z_n)_{n\geq 0}$ zovemo jednostavnim ili Galton-Watsonovim procesom grananja.

Vrijedi: $Y_i^n \sim Y_1^1 \sim Z_1$. Označimo s $\mu = \mathbb{E}(Y_i^n) = \mathbb{E}(Z_1)$ očekivani broj potomaka jedne jedinke. Lako se pokaže da je očekivani broj potomaka u n-toj generaciji

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n.$$

Pretpostavimo da je $\mu > 1$ te da vrijedi $\lim_n Z_n = +\infty$ g.s.

Definirajmo slučajni proces $X = (X_n)_{n\geq 0}$ s

$$X_n := \frac{Z_n}{\mu^n}, \quad n \geq 0.$$

Može se pokazati da je X martingal obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n \ : \ n \geq 0\}$, pri čemu je $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_i^m \ : \ i \geq 1, 1 \leq m \leq n)$ za $n \geq 1$ (vidi [20] str.38.). Prema tome, za X vrijedi:

(i) $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty, \quad \forall n \geq 0$

(ii) X_n je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, $\quad \forall n \geq 0$

(iii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ g.s. $\quad \forall n \geq 0$.

Budući da je X je nenegativan martingal, možemo iskoristiti sljedeći rezultat:

Ako je $(X_n)_n$ supermartingal takav da je $X_n \geq 0$ g.s. za sve $n \geq 0$, tada postoji $X_\infty = \lim_n X_n$ g.s. te vrijedi $\mathbb{E}(X_\infty) \leq \mathbb{E}(X_0)$.

Dakle, postoji nenegativna slučajna varijabla X_∞ takva da je

$$\lim_n X_n = X_\infty \quad g.s. \tag{4.4}$$

Na ovaj ćemo rezultat primijeniti Teoplitzovu lemu:

Neka je $(a_n)_n$ niz nenegativnih realnih brojeva i $b_n = \sum_{j=1}^n a_j,\ n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ te da je $\lim_n b_n = +\infty$. Ako je $(x_n)_n$ niz realnih brojeva takav da je $x_n \to x$, tada je i $\lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j = x$.

Dakle, ako uzmemo $a_n := \mu^{n-1}$, tada je $b_n = \sum_{j=1}^n \mu^{j-1}$, a zbog $\mu > 1$ imamo $b_n \to +\infty$. Sada iz Teoplitzove leme primijenjene na (4.4) slijedi

$$\lim_n \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n \mu^{j-1} X_{j-1} = X_\infty \quad g.s.,$$

odnosno

$$\lim_n \frac{\mu - 1}{\mu^n - 1} \sum_{j=1}^n Z_{j-1} = X_\infty \quad g.s.,$$

što dalje možemo zapisati kao

$$\lim_n \frac{\mu - 1}{\mu^n} \sum_{j=1}^n Z_{j-1} = X_\infty \quad g.s., \tag{4.5}$$

budući da zbog $\mu^n \to +\infty$, za velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mu^n \sim \mu^n - 1$.

Pretpostavimo da je parametar od interesa očekivani broj potomaka jedne jedinke, μ. Ideja ovog primjera je analizirati asimptotsko ponašanje nekog niza procjenitelja od μ.

Označimo s

$$\hat{\mu}_n^{(H)} := \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}}$$

procjenitelj od μ. Taj procjenitelj se naziva Harrisov procjenitelj od μ. Može se pokazati da je $(\hat{\mu}_n^{(H)})_n$ konzistentan niz procjenitelja od μ, to jest da vrijedi $\hat{\mu}_n^{(H)} \xrightarrow{P} \mu$.

Nadalje, može se pokazati da pod danim pretpostavkama vrijedi sljedeći rezultat:

$$\frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{(\mu - 1)^{\frac{1}{2}}} (\hat{\mu}_n^{(H)} - \mu) \xrightarrow{d} \sigma X_\infty^{-\frac{1}{2}} N, \tag{4.6}$$

gdje je $N \sim N(0, 1)$ nezavisna od X_∞, a σ^2 varijanca potomstva jedne jedinke, $\sigma^2 \in (0, +\infty)$. Pretpostavimo da je varijanca σ^2 poznata. Niz u relaciji (4.6) u nazivniku sadrži nepoznati parametar μ, a osim toga granična distribucija nije poznata. Prema tome, iz gornje relacije ne možemo puno reći o asimptotskim svojstvima niza procjenitelja od μ.

Kada bi Cramér-Stutskyjev teorem vrijedio u slučaju da limes $c \in \mathbb{R}$ zamijenimo pravom slučajnom varijablom Y, tada bi iz (4.5) i (4.6) odmah slijedilo

$$\left(\sum_{i=1}^n Z_{i-1} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\mu}_n^{(H)} - \mu) \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1), \tag{4.7}$$

odnosno dobili bismo sljedeći asimptotski rezultat

$$\hat{\mu}_n^{(H)} \sim AN\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}}\right).$$

Međutim, Cramér-Slutskyjev teorem ne vrijedi ako konstantu c zamijenimo pravom slučajnom varijablom, što ćemo vidjeti u idućem primjeru. Ipak, u nastavku ćemo pokazati da do (4.7) možemo doći korištenjem $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije.

Primjer 4.6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$=$([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ vjerojatnosni prostor, gdje je $\lambda = \lambda_{[0,1]}$ Lebesgueova mjera na $[0,1]$ te neka je $X_n = \mathbb{1}_{[a_n, a_n+\frac{1}{2}]}$, $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(a_n)_n$ niz sadržan u $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Definirajmo slučajnu varijablu $Y : [0,1] \to \mathbb{R}$ s $Y(\omega) = \omega$. Za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi:

$$P_{X_n}(B) = \lambda(X_n \in B) = \lambda\left(\mathbb{1}_{[a_n, a_n+\frac{1}{2}]} \in B\right) = \begin{cases} 1, & \text{ako } 0, 1 \in B \\ \frac{1}{2}, & \text{ako } 0 \notin B, 1 \in B \text{ ili } 0 \in B, 1 \notin B \\ 0, & \text{ako } 0, 1 \notin B. \end{cases}$$

Uočimo, $P_{X_n}(B) = \frac{\delta_0+\delta_1}{2}(B)$, gdje je δ_x Diracova mjera na $[0,1]$ takva da je $\delta_x(B) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$. Dakle, vrijedi $P_{X_n} = \frac{\delta_0+\delta_1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, stoga trivijalno slijedi

$$P_{X_n} \xrightarrow{w} \frac{\delta_0 + \delta_1}{2} = P_{X_1}, \quad \text{tj.} \quad X_n \xrightarrow{d} X_1.$$

Ako definiramo niz slučajnih varijabli $(Y_n)_n$ s $Y_n = Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tada očito vrijedi $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

Pokažimo sada da $(X_n Y_n)_n$ ne konvergira po distribuciji. Dovoljno je pokazati da za neku ograničenu i neprekidnu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niz $(\mathbb{E}(h(X_n Y_n)))_n$ ne konvergira.

Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $h(u) = (u \wedge 1) \vee 0$, $u \in \mathbb{R}$. Funkcija h je ograničena i neprekidna na $\mathbb{R}$ te vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_n Y_n)) &= \int (X_n Y_n \wedge 1) \vee 0 \, d\lambda = \int_0^1 \left(\mathbb{1}_{[a_n, a_n+\frac{1}{2}]}(u) \cdot u \wedge 1\right) \vee 0 \, du = \\ &= \int_0^1 \left(\mathbb{1}_{[a_n, a_n+\frac{1}{2}]}(u) \cdot u\right) \vee 0 \, du = \int_{a_n}^{a_n+\frac{1}{2}} u \, du = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

što ne konvergira u slučaju da niz $(a_n)_n$ ne konvergira.

□

Napomena 4.7. Iz prethodnog primjera i teorema o neprekidnom preslikavanju zaključujemo da $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} Y$ ne povlači $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$.

Naime, kada bi to vrijedilo, tada bi iz Teorema 4.1 uz neprekidno preslikavanje $g(x, y) = xy$ slijedilo i $X_n Y_n \xrightarrow{d} XY$, što prema prethodnom primjeru ne vrijedi.

S druge strane, ako u Cramér - Slutskyjevom teoremu konvergenciju po distribuciji zamijenimo $\mathcal{G}$-stabilnom konvergencijom, tada će tvrdnja vrijediti i uz zamjenu konstante c pravom slučajnom varijablom. Dakle, vrijedi **generalizirana verzija Cramér-Slutskyjevog teorema**:

Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ nizovi realih slučajnih varijabli, X i Y realne slučajne varijable te neka je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva. Pretpostavimo da su sve one definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada vrijedi:

$$X_n \to X \ \mathcal{G}\text{-stabilno} \quad \text{i} \quad Y_n \xrightarrow{P} Y \implies X_n Y_n \to XY \ \mathcal{G}\text{-stabilno}.$$

Naime, pokazali smo u Teoremu 3.3.3 (ii) da iz $X_n \to X$ $\mathcal{G}$-stabilno i $Y_n \xrightarrow{P} Y$, pri čemu je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva, slijedi $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ $\mathcal{G}$-stabilno.

Ako na to primijenimo tvrdnju (iii) iz istog teorema za Borel-izmjerivu i neprekidnu funkciju $g(x, y) = xy$, dobivamo $g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)$ $\mathcal{G}$-stabilno, to jest

$$X_n Y_n \to XY \ \ \mathcal{G}\text{-stabilno}.$$

Ovakva generalizacija Cramér-Slutskyjevog teorema dobiva najveću snagu ako je $\mathcal{G}$ dovoljo velika σ-algebra.

Vratimo se na primjer 4.5 Galton-Watsonovog procesa grananja.

Označimo $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n\right)$. Vrijedi sljedeći teroem:

Teorem 4.8. *Pod istim pretpostavkama kao ranije, vrijedi:*

$$\frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{(\mu - 1)^{\frac{1}{2}}} (\hat{\mu}_n^{(H)} - \mu) \to \sigma X_\infty^{-\frac{1}{2}} N \quad \mathcal{F}_\infty\text{-stabilno,} \tag{4.8}$$

pri čemu je $N \sim N(0, 1)$ i N je nezavisna od $\mathcal{F}_\infty$.

(Za dokaz vidjeti [14] Korolar 10.6 str.184.)

Sada, primjenom generaliziranog Cramér-Slutskyjevog teorema na (4.5) i (4.8) dobivamo

$$\left(\sum_{j=1}^{n} Z_{j-1} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\mu}_n^{(H)} - \mu) \to \sigma N \quad \mathcal{F}_\infty\text{-miješano}$$

te posljedično

$$\left(\sum_{j=1}^{n} Z_{j-1}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{\mu}_n^{(H)} - \mu) \xrightarrow{d} \sigma N(0,1).$$

Dakle, $(\hat{\mu}_n^{(H)})_n$ je asimptotski normalan niz procjenitelja s očekivanjem μ i standardnom devijacijom $\frac{\sigma}{\left(\sum_{j=1}^{n} Z_{j-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Ilustrirajmo ovaj rezultat sljedećim primjerom.

Definirajmo familiju $(Y_i^n : i \geq 1, n \geq 1)$ nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na sljedeći način:

$$Y_i^n := V_i^n + 2 \quad i \geq 1, n \geq 1,$$

pri čemu je $(V_i^n)_{i,n}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s Poissonovom razdiobom $V_i^n \sim \text{Pois}(1.5),\ i, n \geq 1$.

Definirajmo jednostavni proces grananja $(Z_n)_{n\geq 0}$ na prethodno opisani način. Uočimo,

$$\mu = \mathbb{E}(Y_i^n) = \mathbb{E}(V_i^n + 2) = \mathbb{E}(V_i^n) + 2 = 1.5 + 2 = 3.5$$

te

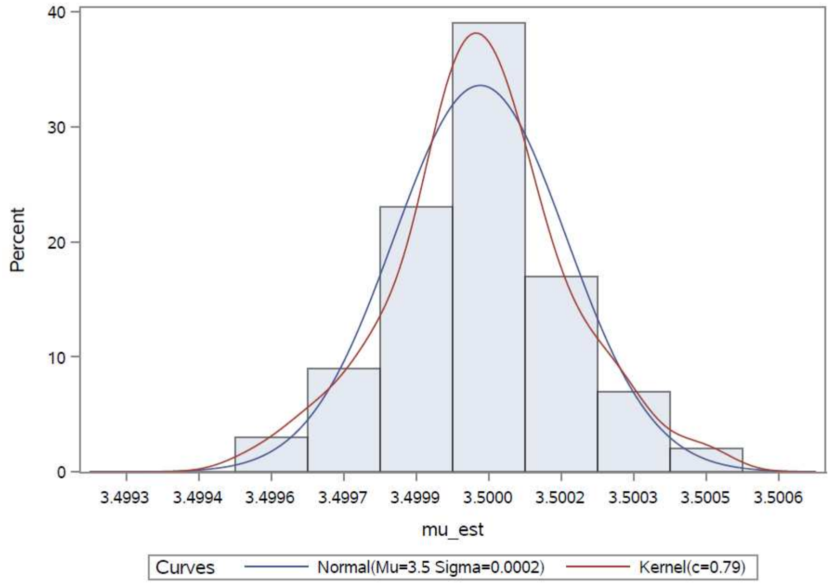
$$\sigma^2 = \text{Var}(Y_i^n) = \text{Var}(V_i^n + 2) = \text{Var}(V_i^n) = 1.5.$$

Kako Y_i^n predstavlja broj potomaka i-te jedinke iz prethodne generacije te Y_i^n po svojoj definiciji poprima vrijednosti u skupu $\{2, 3, \dots\}$, u svakoj je generaciji broj jedinki nužno veći od broja jedinki prethodne generacije. Dakle, populacija beskonačno raste pa vrijedi $\lim_n Z_n = +\infty$ g.s.

Generirat ćemo $n = 100, 500$ i 1000 uzoraka koji predstavljaju proces granjanja $(Z_n)_n$ do generacije $N = 15$ (populacija jako brzo raste pa je već u petnaestoj generaciji ukupan broj jedinki u populaciji reda veličine 10^7 odnosno 10^8), te ćemo za svaki uzorak izračunati Harrisov procjenitelj $\hat{\mu}_N^{(H)}$ parametra μ.

Promotrimo dobivene podatke za $n = 100$ generiranih procesa grananja do 15-te generacije. Lilliefors test proveden nad uzorkom od 100 izračunatih Harrisovih procjenitelja $(\hat{\mu}_{N,n}^{(H)})_n$ daje p-vrijednost od 0.1198, stoga ne odbacujemo nultu hipotezu o normalnosti uzorka niti na jednoj standardnoj razini značajnosti.

Na Slici 4.1 prikazan je histogram realizacija uzorka procjenitelja $(\hat{\mu}_{N,n}^{(H)})_n$ zajedno s funkcijom gustoće normalne razdiobe s procijenjenim parametrima očekivanja i standardne devijacije te s procijenjenom funkcijom gustoće. Prisjetimo se, očekujemo asimptotsku normalnost niza $(\hat{\mu}_{N,n}^{(H)})_n$ s parametrom očekivanja $\mu = 3.5$ i standardnom devijacijom $\sigma / \sqrt{\sum_{j=1}^{N} Z_{j-1}}$.

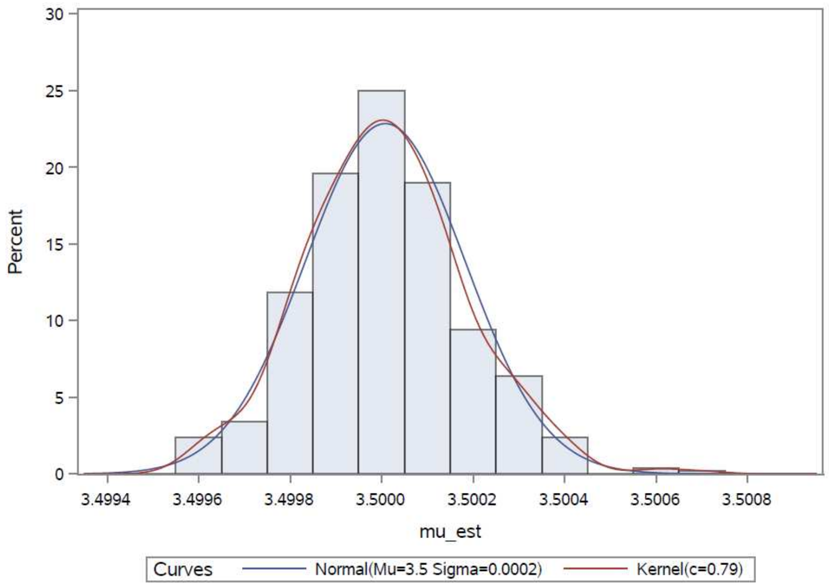


Slika 4.1: Distribucija Harrisovih procjenitelja za n = 100

Aritmetička sredina uzorka $(\hat{\mu}^{(H)}_{N,n})_n$ iznosi 3.500007 što je gotovo jednako egzaktnoj vrijednosti parametra μ. Ako za svaki od 100 generiranih procesa grananja odredimo vrijednost od $\sigma / \sqrt{\sum_{j=1}^{N} Z_{j-1}}$ te potom uzmemo aritmetičku sredinu tih vrijednosti, ona iznosi 0.000184, što je približno jednako uzoračkoj standardnoj devijaciji niza $(\hat{\mu}^{(H)}_{N,n})_n$ koja iznosi 0.000178. Dakle, za 100 generiranih procesa grananja do 15-te generacije, distribucija realizacija Harrisovih procjenitelja je približno jednaka $N(3.5, 0.000184^2)$.

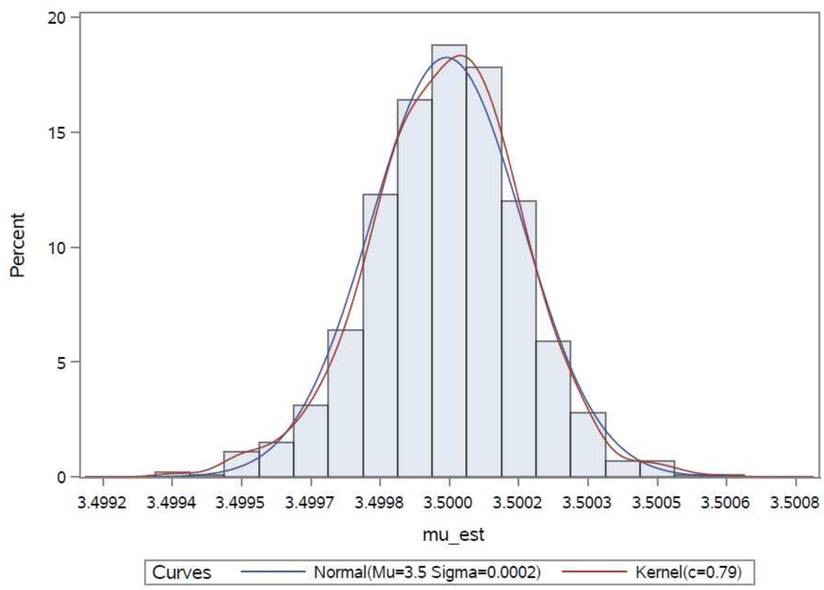
Pogledajmo je li distribucija uzorka $(\hat{\mu}^{(H)}_{N,n})_n$ još bliža očekivanoj normalnoj razdiobi za $n = 500$. P-vrijednost Lilliefors testa za dobivenu realizaciju Harrisovih procjenitelja duljine 500 je nešto veća od p-vrijednosti u prethodnom slučaju, i iznosi 0.1876. Dakle, ponovo ne odbacujemo pretpostavku normalnosti.

Ako pogledamo histogram uzorka procjenitelja na Slici 4.2, možemo vidjeti da on nešto bolje prati graf funkcije gustoće normalne razdiobe s procijenjenim parametrima nego ranije. Aritmetička sredina uzorka $(\hat{\mu}^{(H)}_{N,n})_n$ iznosti 3.500008 što je ponovo gotovo jednako egzaktnoj vrijednosti parametra μ, a standardna devijacija je jednaka 0.000175.



Slika 4.2: Distribucija Harrisovih procjenitelja za n = 500

Promotrimo još slučaj kada je $n = 1000$.



Slika 4.3: Distribucija Harrisovih procjenitelja za n = 1000

Ponovo, ne odbacujemo pretpostavku normalnosti (p-vrijednost Lilliefors testa iznosi 0.215). Izgled histograma, prikazan na Slici 4.3, upućuje na još veću normalnost u podacima nego ranije.

Dakle, možemo zaključiti da s porastom broja uzoraka procesa grananja, distribucija pripadnih realizacija Harrisovih procjenitelja postaje sve bliža normalnoj distribuciji s parametrima μ i $\sigma / \sqrt{\sum_{j=1}^{N} Z_{j-1}}$.

Napomena 4.9. Kodovi korišteni za generiranje uzoraka i grafičke prikaze distribucija podataka pomoću histograma nalaze se u Poglavlju 5. pod Napomenom 5.3. □

Generalizacija Cramér-Slutskyjevog teorema samo je jedna od važnih posljedica $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije.

Prisjetimo se odnosa između $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije i konvergencije po distribuciji te konvergencije po vjerojatnosti.

Ako niz $(X_n)_n$ konvergira $\mathcal{G}$-stabilno prema X, tada po definiciji vrijedi

$$\lim_n \mathbb{E}(f\,\mathbb{E}(h(X_n)|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(f\,\mathbb{E}(h(X)|\mathcal{G})) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(P),\ h \in C_b(\mathcal{X}).$$

To posebno vrijedi i za $f \equiv 1$, iz čega dobivamo

$$\lim_n \mathbb{E}(h(X_n)) = \mathbb{E}(h(X)) \quad \forall\, h \in C_b(\mathcal{X}),$$

to jest konvergenciju po distribuciji $X_n \xrightarrow{d} X$. Dakle, konvergencija $\mathcal{G}$-stabilno povlači konvergenciju po distribuciji.

Nadalje, ako uzmemo trivijalnu σ-algebru $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je $P_{X|\mathcal{G}} = P_X$ te $P_{X_n|\mathcal{G}} = P_{X_n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je u tom specijalnom slučaju konvergencija $\mathcal{G}$-stabilno ekvivalentna konvergenciji po distribuciji.

S druge strane, ako $X_n \to X$ $\mathcal{G}$-stabilno te je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $P_{X|\mathcal{G}} = \delta_X$ pa iz Korolara 3.2.5 slijedi

$$X_n \to X\ \mathcal{G}\text{-stabilno} \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X, \tag{4.9}$$

ako je $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$.

Također, odmah postaje jasno da vrijedi

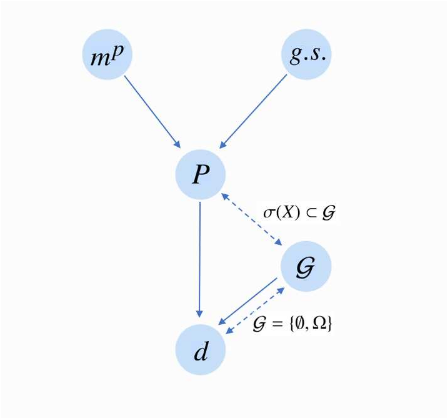
$$X_n \to X \text{ stabilno} \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X,$$

budući da $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ svakako vrijedi jer je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ako $\mathcal{G}$-stabilnu konvergenciju zamijenimo konvergencijom po distribuciji, gornja ekvivalencija će vrijediti samo u slučaju $X = c$ g.s.

Nadalje, ako $X_n \to X$ $\mathcal{G}$-miješano, to znači da su $\sigma(X)$ i $\mathcal{G}$ nezavisne. Stoga, u tom slučaju ne možemo primijeniti Korolar 3.2.5 te ekvivalencija (4.9) vrijedi samo u slučaju konstantnog limesa.

Budući da trivijalna σ-algebra $\mathcal{G}$ reducira $\mathcal{G}$-stabilnu konvergenciju do konvergencije po distribuciji, a $\sigma(X) \subset \mathcal{G}$ ju čini ekvivalentnom konvergenciji po vjerojatnosti, na $\mathcal{G}$-stabilnu konvergenciju možemo gledati kao na tip konvergencije "između" konvergencije po distribuciji i konvergencije po vjerojatnosti. Dijagram odnosa osnovnih tipova konvergencije sada možemo upotpuniti kao što je prikazano na slici dolje.



Slika 4.4: Dijagram odnosa osnovnih tipova konvergencije

Jedna od najkorištenijih generalizacija klasičnog centralnog graničnog teorema je martingalni centralni granični teorem. Ta je generalizacija nadahnuta Lindebergovom verzijom centralnog graničnog teorema koja ne zahtjeva jednaku distribuiranost slučajnih varijabli, već samo nezavisnost te da vrijedi tzv. Lindebergov uvjet:

$$\lim_n \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{x:|x-m_k|\geq \epsilon s_n\}} (x-m_k)^2 dP_{X_k}(x) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

pri čemu je $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $s_n^2 = \mathrm{Var} S_n$, $m_n = \mathbb{E}(X_n)$ te dodatno zahtijevamo $s_1 > 0$ i $\mathrm{Var}(X_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ako još pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, tada Lindebergov uvjet možemo napisati na sljedeći način:

$$\lim_n \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq \epsilon s_n\}}\right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Uvjetna verzija Lindebergovog uvjeta ima ključnu ulogu u stabilnom martingalnom centralnom graničnom teoremu.

Taj ćemo teorem iskazati za slučajni proces $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s

$$X_n := Y_n - Y_{n-1}, \ n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $(Y_n)_{n\geq 0}$ martingal adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Takav slučajni poces X zovemo **nizom martingalnih razlika**. Za njega vrijedi

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0 \ g.s.$$

za svaki $n \geq 1$ te je i sam adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.

Teorem 4.10. (Stabilni martingalni centralni granični teorem) *Neka je $X = (X_k)_{k\geq 1}$ niz martingalnih razlika adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ te neka je $(a_n)_{n\geq 1}$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da $a_n \to +\infty$.*

Ako su zadovoljeni uvjeti

(i) $\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{P} Z^2$;

(ii) $\frac{1}{a_n} \mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} |X_k|\right) \to 0$ *kada* $n \to +\infty$;

ili ako je $(X_k)_{k\geq 1}$ kvadratno integrabilan slučajni proces te vrijede uvjeti:

(iii) $\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}\right) \xrightarrow{P} Z^2$;

(iv) $\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq \epsilon a_n\}} | \mathcal{F}_{k-1}\right) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall \epsilon > 0$ *(uvjetni Lindebergov uvjet);*

tada vrijedi:

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n X_k \to ZN \quad \mathcal{F}_\infty\text{-stabilno},$$

pri čemu je Z neka nenegativna realna slučajna varijabla te $N \sim N(0,1)$ nezavisna od $\mathcal{F}_\infty$.

Ovaj teorem ima brojne zanimljive posljedice, a jedna od njih dana je u sljedećem primjeru.

Primjer 4.11. Neka je $X = (X_n)_{n\geq 1}$ niz martingalnih razlika adaptiran obzirom na prirodnu filtraciju $\mathbb{F}^0 = \{\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0\}$ od X, gdje je $\mathcal{F}_0^0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Označimo $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n^0\right)$. Pretpostavimo da je X stacionaran slučajni proces, to jest da za svaki $k \geq 1$ i svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$(X_1, \dots, X_k) \stackrel{d}{=} (X_{n+1}, \dots, X_{n+k}),$$

te da je $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$.

Pod ovim pretpostavkama, iz Birkhoffove verzije Ergodskog teorema ([21] str. 89. Teorem 10.1.1) slijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{g.s.} \mathbb{E}(X_1^2 | \mathcal{I}_X), \tag{4.10}$$

pri čemu je $\mathcal{I}_X$ invarijantna σ-algebra obzirom na slučajni proces X, to jest $\mathcal{I}_X$ je σ-algebra inducirana invarijantnim skupovima obzirom na operator pomaka $S : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $S((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Za $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ kažemo da je invarijantan ako je $D = S^{-1}(\mathrm{D})$.

Stavimo $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Iz (4.10) odmah slijedi da je zadovoljen uvjet (i) iz Teorema 4.10, uz $Z = \mathbb{E}(X_1^2 | \mathcal{I}_X)^{\frac{1}{2}}$. Pokažimo da vrijedi i uvjet (ii). Naime, jer je $X_n \sim X_1$, $n \in \mathbb{N}$, za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq \epsilon\sqrt{n}\}}) = \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1|\geq \epsilon\sqrt{n}\}}) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

iz čega dalje slijedi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n}|X_k|\right)\right)^2 \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k^2\right) \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq \epsilon\sqrt{n}\}}\right) + \frac{1}{n}\underbrace{\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|< \epsilon\sqrt{n}\}}\right)}_{<\epsilon^2 n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k|\geq \epsilon\sqrt{n}\}}) + \epsilon^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

jer je $\epsilon > 0$ proizvoljan.

Dakle, prema Teoremu 4.10 vrijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}(X_1^2|\mathcal{I}_X)^{\frac{1}{2}} N \quad \mathcal{F}_\infty\text{-stabilno.} \tag{4.11}$$

Jer je $\mathcal{I}_X \subseteq \mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{E}(X_1^2|\mathcal{I}_X)$ je $\mathcal{I}_X$- izmjeriva pa i $\mathcal{F}_\infty$- izmjeriva slučajna varijabla. Stoga možemo primijeniti generalizirani Cramér - Slutskyjev teorem na (4.10) i (4.11) iz čega dobivamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} X_k \to N \ \mathcal{F}_\infty\text{-stabilno,}$$

odnosno

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{4.12}$$

Pogledajmo ovaj rezultat na sljedećem primjeru.

Neka je $X = (X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, $X_n \sim N(0,\sigma^2)$, $n \geq 1$. Za niz X vrijedi

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^0) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\sigma(X_1,\ldots,X_n)) = \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0 \quad \text{g.s.}$$

za svaki $n \geq 0$, pri čemu predzadnja jednakost slijedi zbog nezavisnosti niza $(X_n)_{n\geq 1}$.
X je niz martingalnih razlika (dodatno, možemo ga prikazati kao $X_n = S_n - S_{n-1}$, gdje je $(S_n)_{n\geq 0}$, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ slučajna šetnja s očekivanjem 0. $(S_n)_{n\geq 0}$ je martingal).

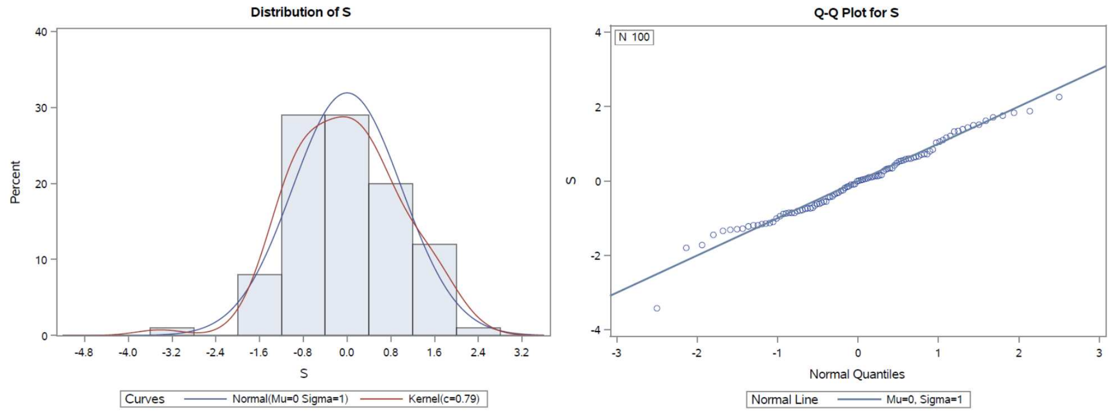
Nadalje, za $n \geq 0$ vrijedi

$$(X_k,\ldots,X_{k+n}) \sim \mathbb{N}(\boldsymbol{\mu},\Sigma), \quad \forall k \geq 1,$$

$\boldsymbol{\mu} = (0,\ldots,0)$, $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{ij}$, $\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = 0$ za $i \neq j$ te $\Sigma_{ii} = \sigma^2$.
Dakle, X je stacionaran gaussovski slučajni proces.

Neka je $\sigma^2 = 2$. Generirat ćemo $n = 100, 500, 1000$ i 20000 slučajnih uzorka iz $N(0,2)$ razdiobe duljine 100 te za svaki od njih odrediti vrijednost statistike $S = \left(\sum_{k=1}^n X_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n X_k$. Prema relaciji (4.12), taj bi uzorak s porastom n-a trebao sve bolje pratiti $N(0,1)$ razdiobu.

U prvom slučaju dobivamo uzorak $(s_n)_n$ duljine 100.



Analysis Variable : S S				
Mean	Std Dev	Skewness	Kurtosis	N
-0.0262696	0.9795651	-0.0950039	0.4148756	100

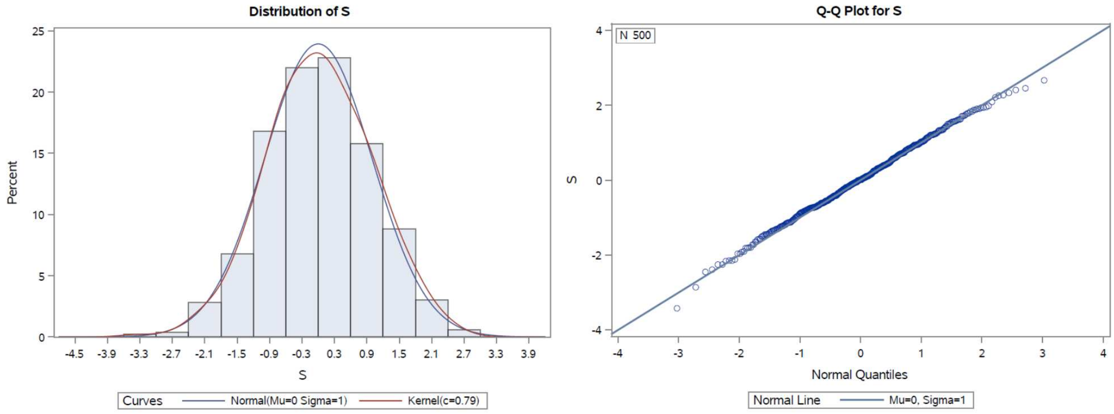
Slika 4.5: Histogram, QQ-graf, deskriptivne statističke mjere za n = 100

P-vrijednost Kolmogorov-Smirnovljevog testa iznosi 0.8439, stoga zaključujemo da ne možemo odbaciti pretpostavku normalnosti promatranog uzorka. Na Slici 4.5 primjećujemo da oblik histograma dobro prati graf funkcije gustoće standardne normalne razdiobe, dok se točke na QQ-grafu relativno dobro grupiraju oko pravca, iako postoje odstupanja na rubovima. Premda primjećujemo prisutnost normalnosti u podacima, ta normalnost nije izrazito blizu idealne standardne normalne razdiobe. Nadalje, koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su blizu nule, što dodatno sugerira da je ponašanje uzorka približno normalno.

Povećajmo sada broj generiranih uzoraka na 500. U generiranju svih uzoraka postavljen je isti seed. Tako prvih 100 vrijednosti u novom uzorku ostaje isto kao ranije te se generira novih 400 vrijednosti. Isti princip se primjenjuje u slučajevima s još većim brojem uzoraka.

Pogledajmo sada je li distribucija uzorka $s_1, \ldots, s_{500}$ "normalnija" u odnosu na uzorak duljine 100.

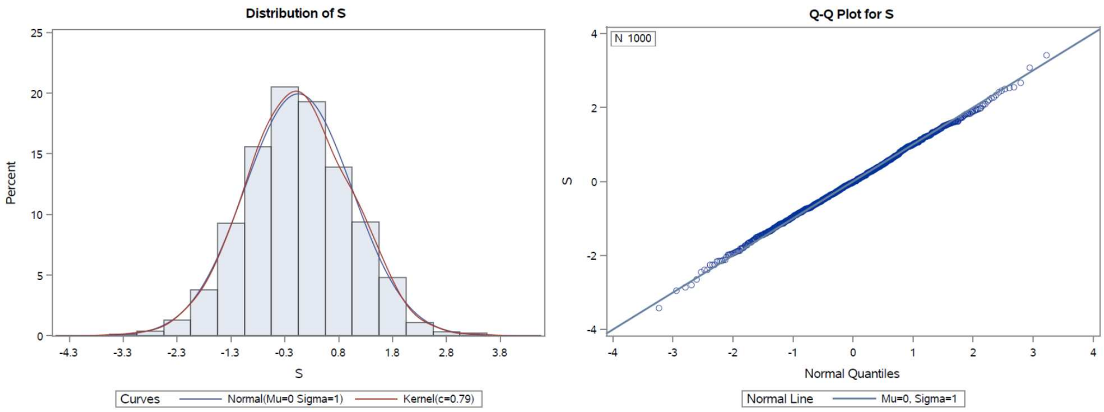
U ovom slučaju je p-vrijednost Kolmogorov-Smirnovljevog testa 0.7156 pa ponovo ne odbacujemo pretpostavku normalnosti. Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su bliži nuli nego u prošlom slučaju, što sugerira nešto veću normalnost. To nam potvrđuje i izgled histograma i QQ-grafa prikazanih na Slici 4.6.



Analysis Variable : S S				
Mean	Std Dev	Skewness	Kurtosis	N
0.0249777	0.9779948	-0.0619383	-0.0286164	500

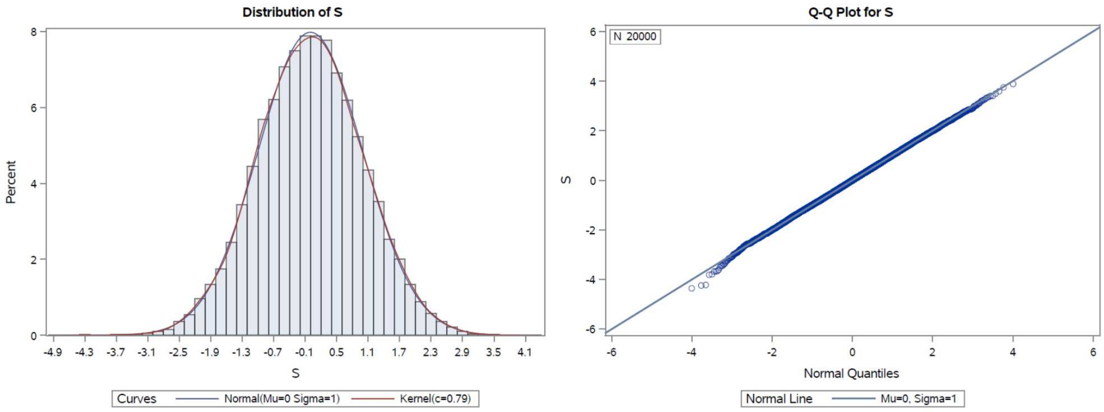
Slika 4.6: Histogram, QQ-graf, deskriptivne statističke mjere za n = 500

Povećanjem broja generiranih uzoraka dobili smo nešto "normalniju" distribuciju od prethodne.



Analysis Variable : S S				
Mean	Std Dev	Skewness	Kurtosis	N
-0.0019297	0.9715059	0.0093200	0.0548227	1000

Slika 4.7: Histogram, QQ-graf, deskriptivne statističke mjere za n = 1000



Analysis Variable : S S				
Mean	Std Dev	Skewness	Kurtosis	N
0.000261789	0.9983551	-0.0065214	0.0087069	20000

Slika 4.8: Histogram, QQ-graf, deskriptivne statističke mjere za n = 20000

Iz posljednja dva primjera vidimo da smo povećanjem broja generiranih uzoraka dodatno poboljšali normalnost uzorka $(s_n)_n$. U oba slučaja p-vrijednost Kolmogorov-Smirnovljevog testa ostaje visoka (0.9235 za $n = 1000$ i 0.9714 za $n = 20000$). Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su još bliži koeficijentima standardne normalne razdiobe, dok izgled histograma i QQ-grafa kod oba primjera ukazuje na veću normalnost u podacima nego prije.

Dakle, primjećujemo da se rezultati poboljšavaju porastom broja generiranih uzoraka. Drugim riječima, u slučajevima s više podataka, distribucija djeluje bliža standardnoj normalnoj distribuciji u usporedbi s prethodnim situacijama, što je u skladu s očekivanjima temeljenima na relaciji (4.12).

Napomena 4.12. Kodovi korišteni za generiranje uzoraka i grafičke prikaze distribucija podataka nalaze se u Poglavlju 5. pod Napomenom 5.4.

$\square$

Vratimo se na verziju klasičnog centralnog graničnog teorema. U sljedećem primjeru pokazat ćemo da klasičan CGT vrijedi i u slučaju stabilne odnosno miješane konvergencije. Nadalje, vidjet ćemo da uz pomoć stabilne konvergencije možemo pokazati da postoji $\lim_n P(X_n \leq Y)$ kada je Y prava slučajna varijabla, što iz konvergencije po distribuciji nije moguće dobiti, te ćemo pokazati čemu je taj limes jednak.

Prije toga, promotrimo sljedeću pomoćnu propoziciju.

Propozicija 4.13. *Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ nizovi slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, te neka je $X : \Omega \to \mathcal{X}$ slučajna varijabla. S d označimo metriku na $\mathcal{X}$. Tada vrijedi:*

$$P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X \quad i \quad d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0 \implies P_{Y_n} \xrightarrow{w} P_X.$$

(Za dokaz vidjeti Poglavlje 5. Dodaci).

Primjer 4.14. (Klasični stabilni centralni granični teorem)

a) Neka je $(Z_n)_n$ niz nezavisnih realnih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(b_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$, $(a_n)_n$ niz pozitivnih realnih brojeva takav da $a_n \to +\infty$ te $\nu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$.

Definirajmo niz $(X_n)_n$ slučajnih varijabli s $X_n := \frac{1}{a_n}\left(\sum_{j=1}^n Z_j - b_n\right),\ n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da vrijedi

$$X_n \xrightarrow{d} \nu.$$

Pokažimo da tada vrijedi i

$$X_n \to \nu \text{ miješano.}$$

Neka je $\mathcal{G} = \sigma(Z_n :\ n \geq 1)$ i $\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(Z_1, \dots, Z_k)$. ϵ je algebra za koju vrijedi $\sigma(\epsilon) = \mathcal{G}$. Također, $X_n \in \mathcal{G}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $F \in \mathcal{E}$ proizvoljan takav da je $P(F) > 0$. Tada $\exists k \in \mathbb{N}$ takav da je $F \in \sigma(Z_1, \dots, Z_k)$.

Definirajmo niz slučajnih varijabli $(Y_n)_n$ s

$$Y_n := \frac{1}{a_n}\left(\sum_{j=k+1}^{n} Z_j - b_n\right),\ n > k.$$

Vrijedi:

$$|X_n - Y_n| = \left|\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{k} Z_j\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{na } \Omega. \tag{4.13}$$

Prema Propoziciji 4.13, iz $X_n \xrightarrow{d} \nu$ i $|X_n - Y_n| \to 0$ slijedi $Y_n \xrightarrow{d} \nu$

Nadalje, $\sigma(Z_1, \ldots, Z_k)$ i $\sigma(Z_n : n \geq k+1)$ su nezavisne σ-algebre, stoga je $P_F^{Y_n} = P_{Y_n}$.

Iz $Y_n \xrightarrow{d} \nu$ slijedi $P_{Y_n} \xrightarrow{w} \nu$, a iz prethodne relacije $P_F^{Y_n} \xrightarrow{w} \nu$.

Jer je $F \in \mathcal{E}$ bio proizvoljan, iz Korolara 3.1.5 slijedi $Y_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano. Iz toga i (4.13), prema Teoremu 3.3.3, slijedi $X_n \to \nu$ $\mathcal{G}$-miješano. Konačno, jer su X_n $\mathcal{G}$-izmjerive za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz Propozicije 3.2.3 slijedi

$$X_n \to \nu \text{ miješano.}$$

b) Neka je sada $(Z_n)_n$ niz nezavisnih jednako distribuiranih realnih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom $\sigma^2 \in (0, +\infty)$. Definirajmo niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ s

$$X_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (Z_j - \mu), \; n \in \mathbb{N}.$$

Prema klasičnom CGT-u, vrijedi:

$$X_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

a zatim, prema dijelu a), vrijedi i

$$X_n \to N(0, \sigma^2) \text{ miješano.}$$

U nastavku ćemo pokazati da $\lim_n P(X_n \leq Y)$ postoji i u slučaju prave slučajne varijable Y te odrediti čemu je jednak.

Neka je Y proizvoljna realna slučajna varijabla. Tada prema Korolaru 3.1.5 slijedi

$$(X_n, Y) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \otimes P_Y. \tag{4.14}$$

Definirajmo skup $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$. Skup D je Borelov skup čiji je rub δD skup mjere 0, to jest vrijedi

$$N(0, \sigma^2) \otimes P_Y(\delta D) = 0.$$

Stoga, iz (4.14) prema teoremu Portmanteau slijedi

$$\lim_n P_{(X_n, Y)}(D) = N(0, \sigma^2) \otimes P_Y(D).$$

Dakle, imamo

$$\lim_n P(X_n \leq Y) = \lim_n P_{(X_n,Y)}(D) = N(0,\sigma^2) \otimes P_Y(D) = \iint \mathbb{1}_D(x,y) N(0,\sigma^2)(dx)P_Y(dy)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} N(0,\sigma^2)(dx)P_Y(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(0,\sigma^2)((-\infty, y])dP_Y(y),$$

što, uz funkciju distribucije $F_{N(0,\sigma^2)}$ normalne $N(0,\sigma^2)$ razdiobe, konačno možemo napisati kao

$$\lim_n P(X_n \leq Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{N(0,\sigma^2)}(y)dP_Y(y) = \int_\Omega F_{N(0,\sigma^2)}(Y)dP = \mathbb{E}\Big(F_{N(0,\sigma^2)}(Y)\Big). \quad (4.15)$$

U slučaju da je $Y = c$ g.s. za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$, tada je $\mathbb{E}\Big(F_{N(0,\sigma^2)}(c)\Big) = F_{N(0,\sigma^2)}(c)$, pa iz (4.15) slijedi

$$\lim_n P(X_n \leq c) = F_{N(0,\sigma^2)}(c),$$

što dobivamo i direktno iz klasičnog CGT-a.

Primijetimo da ako u prethodnoj jednakosti konstantu c zamijenimo slučajnom varijablom Y te primijenimo matematičko očekivanje na slučajnu varijablu $F_{N(0,\sigma^2)}(Y)$ u limesu, dobivamo upravo dokazanu relaciju (4.15). Pomoću nje lako možemo odrediti egzaktnu vrijednost od $\lim_n P(X_n \leq Y)$ kada je poznata razdioba slučajne varijable Y.

Primjerice, za niz $\tilde{X}_n := \frac{\overline{Z_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$, $n \in N$ koji ima asimptotski normalnu $N(0,1)$ razdiobu te slučajnu varijablu $Y \sim N(0,1)$ nezavisnu od niza $(\tilde{X}_n)_n$, intuitivno je jasno da bi vrijednost od $P(\tilde{X}_n \leq Y)$ s porastom n-a trebala biti sve bliža $\frac{1}{2}$ jer se za velike n niz $(\tilde{X}_n)_n$ ponaša sve sličnije slučajnoj varijabli Y. Uz prethodno dokazani rezultat sada se to lako i pokaže.

Naime, vrijedi $F_{N(0,1)}(Y) = F_Y(Y) = U \sim U(0,1)$ pa iz (4.15) odmah slijedi

$$\lim_n P(\tilde{X}_n \leq Y) = \mathbb{E}\left(F_{N(0,1)}(Y)\right) = \mathbb{E}\left(U\right) = \frac{1}{2}.$$

Lako se dobije i multivarijatna verzija Stabilnog centralnog graničnog teorema koristeći tvrdnju (iii) Cramér - Wold, iz Korolara 3.2.8.

$\square$

Poglavlje 5

Dodaci

U ovom poglavlju su sadržani neki rezultati korišteni u prethodnim poglavljima te njihovi dokazi.

Teorem 5.1. (O neprekidnoj funkciji) *Neka su* $(X_n)_n$ *i* X *slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s vrijednostima u* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ *te neka je* $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ P_X*-g.s. neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

(i) $X_n \xrightarrow{d} X \implies g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$;

(ii) $X_n \xrightarrow{P} X \implies g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$;

(iii) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X)$.

Dokaz.

(i) Prema pretpostavci imamo $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$. Neka je $B \subset \mathcal{Y}$ proizvoljan zatvoreni skup. Tada vrijedi:

$$\limsup_n P_{g(X_n)}(B) = \limsup_n P_{X_n}(g^{-1}(B)) \leq \limsup_n P_{X_n}(\mathrm{Cl}\, g^{-1}(B)) \leq P_X(\mathrm{Cl}\, g^{-1}(B)),$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz teorema Portmanteau.
Nadalje, vrijedi sljedeća relacija:

$$\mathrm{Cl}\, g^{-1}(B) \subset g^{-1}(B) \cup C(g)^c,$$

pri čemu je $C(g)$ skup svih točaka neprekidnosti od g.

Naime, točka $x \in \mathrm{Cl}\, g^{-1}(B)$ takva da $x \notin g^{-1}(B)$ mora biti gomilište skupa $g^{-1}(B)$. Prema tome, postoji niz $(x_n)_n \subset g^{-1}(B)$ takav da $x_n \to x$.

Kada bi x bila točka neprekidnosti od g, tada bi slijedilo $g(x_n) \to g(x)$, što bi zbog zatvorenosti skupa B i činjenice da je niz $(g(x_n))_n$ sadržan u B, povlačilo $g(x) \in B$, a to je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Dakle, za $x \in \operatorname{Cl} g^{-1}(B)$ takvu da $x \notin g^{-1}(B)$ nužno vrijedi da je $x \in C(g)^c$, to jest vrijedi gornja relacija.

Iz toga slijedi
$$P_X(\operatorname{Cl} g^{-1}(B)) \leq P_X(g^{-1}(B))$$
jer je prema pretpostavci $P_X(C(g)^c) = 0$.

Konačno, kombiniranjem prethodnih nejednakosti dobivamo
$$\limsup_n P_{g(X_n)}(B) \leq P_X(g^{-1}(B)) = P_{g(X)}(B)$$
što, zbog proizvoljnosti zatvorenog skupa B, prema teoremu Portmanteau povlači $P_{g(X_n)} \xrightarrow{w} P_{g(X)}$, odnosno $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

(ii) Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Za $\delta > 0$, definirajmo skup
$$B_\delta = \{x \in \mathcal{X} : \ x \in C(g) \ \text{ i } \exists y \in \mathcal{X} \text{ t.d. } d_{\mathcal{X}}(x, y) < \delta \text{ i } d_{\mathcal{Y}}(g(x), g(y)) \geq \epsilon\}.$$

Pretpostavimo da za neki $\omega \in \Omega$ vrijedi $d_{\mathcal{Y}}(g(X_n(\omega)), g(X(\omega))) \geq \epsilon$.

Ako za taj ω vrijedi $X(\omega) \notin B_\delta$, tada je $X(\omega) \in C(g)^c$ ili $d_{\mathcal{X}}(X(\omega), X_n(\omega)) \geq \delta$. Prema tome, vrijedi:
$$\{d_{\mathcal{Y}}(g(X_n), g(X)) \geq \epsilon\} \subseteq \{X \in B_\delta\} \cup \{X \in C(g)^c\} \cup \{d_{\mathcal{X}}(X, X_n) \geq \delta\},$$
iz čega dalje slijedi
$$P(d_{\mathcal{Y}}(g(X_n), g(X)) \geq \epsilon) \leq P(X \in B_\delta) + P(X \in C(g)^c) + P(d_{\mathcal{X}}(X, X_n) \geq \delta).$$

Jer je g P_X-g.s. neprekidna, imamo $P(X \in C(g)^c) = 0$.

Prema pretpostavci vrijedi $P(d_{\mathcal{X}}(X, X_n) \geq \delta) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Zatim, puštanjem $\delta \to 0$ slijedi $B_\delta \to \emptyset$, odnosno $P(X \in B_\delta) \to 0$. Konačno dobivamo:
$$\lim_n P(d_{\mathcal{Y}}(g(X_n), g(X)) \geq \epsilon) = 0.$$

Jer je $\epsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

(iii) Iz definicije neprekidnosti funkcije g slijedi
$$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega) \implies \lim_n g(X_n(\omega)) = g(X(\omega)),$$

u svakoj točki $\omega \in \Omega$ takvoj da je $X(\omega) \in C(g)$. Tada je

$$\begin{aligned} P(\lim_n g(X_n) = g(X)) &\geq P(\lim_n g(X_n) = g(X),\ X \in C(g)) \\ &\geq P(\lim_n X_n = X,\ X \in C(g)) = 1, \end{aligned}$$

jer je presjek dva gotovo sigurna događaja također gotovo siguran. Dakle $g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X)$.

□

Propozicija 5.2. *Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ nizovi slučajnih varijabli s vrijednostima u $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ te $X : \Omega \to \mathcal{X}$ slučajna varijabla. S d označimo metriku na $\mathcal{X}$. Tada vrijedi:*

$$P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X \quad i \quad d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0 \implies P_{Y_n} \xrightarrow{w} P_X.$$

Dokaz.

Neka je $F \subset \mathcal{X}$ zatvoren skup i $\epsilon > 0$.
Definirajmo skup

$$F_\epsilon = \{x \in \mathcal{X} :\ d(x, F) \leq \epsilon\}.$$

Tada je

$$P(Y_n \in F) \leq P(d(X_n, Y_n) \geq \epsilon) + P(X_n \in F_\epsilon) \tag{5.1}$$

(argument je isti kao u dokazu Teorema 3.2.10).

Jer je F_ϵ zatvoren, a $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$, iz teorema Portmanteau slijedi

$$\limsup_n P(X_n \in F_\epsilon) \leq P(X \in F_\epsilon),$$

stoga iz (5.1) puštanjem $n \to \infty$ dobivamo

$$\limsup_n P(Y_n \in F) \leq P(X \in F_\epsilon),$$

jer je $\lim_n P(d(X_n, Y_n) \geq \epsilon) = 0$ po pretpostavci.

Nadalje, puštanjem $\epsilon \searrow 0$ slijedi $F_\epsilon \searrow F$. Prema tome, imamo

$$\limsup_n P(Y_n \in F) \leq P(X \in F),$$

što zbog proizvoljnosti zatvorenog skupa F povlači

$$P_{Y_n} \xrightarrow{w} P_X$$

prema teoremu Portmanteau. □

Napomena 5.3. U nastavku je priložen R-Studio kod za simuliranje 100 procesa grananja do 15-te genearacije, pri čemu je distribucija broja potomaka jedne jedinke $Y = V + 2$, gdje je $V \sim \text{Pois}(1.5)$. Za svaki takav generirani uzorak računamo procjenu parametra očekivanja $\hat{\mu}_N^{(H)}$ za $N = 15$. Na analogan način se provode simulacije za druga dva slučaja u kojima je broj simulacija do N-te generacije jednak 500 odnosno 1000.

```
set.seed(123)
library(nortest)

#funkcija za generiranje 1 procesa grananja do N-te generacije
simulate_BGW_simple <- function(lambda, N) {

  Z = c()
  Z_0=1

  #prva generacija
  offspring<-rpois(1, lambda)+2
  Z[1]<-offspring

  for (k in 2:N) {
    #Generiramo broj potomaka svake jedinke iz prethodne generacije
    offspring <- rpois(Z[k-1], lambda)+2
    Z[k]<-sum(offspring)

  }
  Zn = (sum(Z[1:(N-1)])+1)#ukupan broj potomaka do generacije N-1
  #procjena ocekivanog broja potomaka jedne jedinke za n = N
  mu = sum(Z[1:N])/Zn
  return(list(mu=mu, Zn = Zn))
}

lambda <- 1.5
N <- 15

# 100 procesa granja
n = 100
mu1<-c(); z_1<-c()

for (i in 1:n){
  rez<-simulate_BGW_simple(lambda, N)
  mu1[i]<-rez$mu
  z_1[i]<-rez$Zn
}

mean(mu1) #3.500007
sigm1 = mean(sqrt(1.5/z_1)) #0.00018409890
```

```
sd(mu1) #0.0001781355
lillie.test(mu1) #p-value = 0.1198
```

Histogrami uzoraka $(\hat{\mu}_{N,i}^{(H)})_{i=1,\ldots,n}$, $n = 100, 500, 1000$ dobiveni su u SAS-u. U nastavku je kod za uzorak duljine 100 koji se nalazi u stupcu "mu_est" data seta "uz100".

```
ods noproctitle;
ods graphics / imagemap=on;

proc univariate data=GWB.UZ100 vardef=df noprint;
        ods select Histogram GoodnessOfFit;
        var mu_est;
        histogram mu_est / normal(mu=est sigma=est) kernel;
run;
```

Napomena 5.4. U primjeru 4.10. smo simulirali $n = 100$, 500, 1000 i 20000 uzoraka duljine 100 iz $N(0, 2)$ razdiobe te smo za svaki uzorak izračunali vrijednost statistike $S = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} X_k$. Budući da se za svaki od četiri slučaja koristi isti seed, dovoljno je jednom generirati svih 20000 uzoraka, za svaki uzorak izračunati vrijednost statistike S pa za prvi slučaj, kada je $n = 100$, uzeti prvih 100 izračunatih vrijednosti, zatim prvih 500 vrijednosti, za treći slučaj prvih 1000 vrijednosti od s te konačno za četvrti slučaj uzmemo svih 20000 vrijednosti. Slijedi kod u R-Studiu korišten za generiranje uzoraka.

```
library(moments)

n1 = 100; n2 = 500; n3 = 1000; n4 = 20000

s<-c()

for (i in 1:20000){
  set.seed(i); x<- rnorm(100, 0, sqrt(2))
  s[i] = sum(x^2)^{-(1/2)}*sum(x)
}
s1 = s[1:n1]
s2 = s[1:n2]
s3 = s[1:n3]
s4 = s

ks.test(s1, "pnorm", 0,1)#p-value = 0.8439
ks.test(s2, "pnorm",0,1)#p-value = 0.7156
```

```
ks.test(s3, "pnorm",0,1)#p-value = 0.9235
ks.test(s4, "pnorm",0,1) #p-value = 0.9714
```

Histogrami, QQ-grafovi i vrijednosti aritmetičke sredine, standardne devijacije te koeficijenata asimetrije i spljoštenosti za uzorke $(s_{ij})_{j=1,\dots,n_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$ dobiveni su u SAS-u. U nastavku je kod za uzorak $(s_i)_{i=1,\dots,100}$ koji se nalazi u stupcu "s" data seta "u100".

```
*n = 100;
proc means data=lib.u100 chartype mean std skew kurt n vardef=df;
        var S;
run;

ods noproctitle;
ods graphics / imagemap=on;

proc univariate data=lib.u100 vardef=df noprint;
    ods select Histogram GoodnessOfFit;
    var S;
    histogram S / normal(mu=0 sigma=1) kernel;
run;

proc univariate data=LIB.U100;
        ods select QQPlot;
        var S;
        qqplot S / normal(mu=0 sigma=1);
        inset n / position=nw;
run;

ods graphics / reset;
```

Na isti način su dobiveni grafički prikazi i vrijednosti deskriptivnih statistika i za $n = 500, 1000$ te 20000.

Bibliografija

[1] Rinaldo A., *Advanced Probability Overview - Lecture 18*, 2018, `https://www.stat.cmu.edu/~arinaldo/Teaching/36752/S18/Scribed_Lectures/Apr5.pdf`.

[2] Damir Bakić, *Normirani prostori*, Bilješke s predavanja (2016).

[3] Niels Becker, *Estimation for discrete time branching processes with application to epidemics*, Biometrics (1977), 515–522.

[4] Patrick Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, 2013.

[5] ______, *Probability and measure*, John Wiley & Sons, 2017.

[6] Ivan Biočić, *Teorija vjerojatnosti-vjezbe*.

[7] Jean Pierre Dion, *Estimation of the mean and the initial probabilities of a branching process*, Journal of Applied Probability **11** (1974), br. 4, 687–694.

[8] Rick Durrett, *Probability: theory and examples*, sv. 49, Cambridge university press, 2019.

[9] D. E. Dutkay, D. Han, Q. Sun i E. Weber, *Hearing the Hausdorff dimension*, (2009), `http://arxiv.org/abs/0910.5433`.

[10] Peter Gänssler i Winfried Stute, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer, 1977.

[11] Miguel González, Rodrigo Martínez i Iné Del Puerto, *Estimation of the variance for a controlled branching process*, Test **14** (2005), 199–213.

[12] Allan Gut, *Probability: a graduate course*, sv. 200, Springer, 2006.

[13] Theodore E Harris, *Branching processes*, The Annals of Mathematical Statistics (1948), 474–494.

[14] Erich Häusler i Harald Luschgy, *Stable convergence and stable limit theorems*, sv. 74, Springer, 2015.

[15] Miljenko Huzak, *Matematicka statistika*, PMF-MO predavanja (2012).

[16] Rudi Mrazović, *Mjera i intergal*, PMF-MO, 2021.

[17] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[18] Hrvoje Šikic, *Mjera i integral, predavanja*, 2012.

[19] Zoran Vondraček, *Markovljevi lanci*, PMF-MO skripta (2008).

[20] ______, *Slucajni procesi*, Prirodoslovno-matematicki fakultet, Zagreb (2010).

[21] Charles Walkden, *Ergodic Theory*, (2018).

[22] Sonja Štimac, *Metrički prostori*, PMF-MO, 2022.

Sažetak

Središnja tema ovog rada je $\mathcal{G}$-stabilna konvergencija, posebna vrsta konvergencije slučajnih varijabli koja predstavlja proširenje klasične konvergencije po distribuciji. $\mathcal{G}$-stabilna konvergencija se pokazala veoma korisnom u teoriji vjerojatnosti, a primjenjuje se i u drugim područjima matematike. Razumijevanje pojma stabilne konvergencije proizlazi iz teorije slabe konvergencije Markovljevih jezgri. Konkretno, $\mathcal{G}$-stabilnu konvergenciju slučajnih varijabli definiramo kao slabu konvergenciju uvjetnih distribucija tih varijabli, koje su po svojoj strukturi zapravo Markovljeve jezgre.

Slaba konvergencija Markovljevih jezgri ima ključnu ulogu u razumijevanju stabilne konvergencije slučajnih varijabli, a njezine karakterizacije uvelike olakšavaju dokazivanje karakterizacija $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, stoga je dio ovog rada posvećen proučavanju koncepta slabe konvergencije Markovljevih jezgri. Kroz rad se dalje istražuju različita svojstva $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije te se proučava njen odnos s drugim vrstama konvergencije slučajnih varijabli. Osim toga, rad demonstrira neke važne rezultate koje ova vrsta konvergencije omogućuje.

Posebno korisnom pokazuje se primjena $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije u kontekstu graničnih teorema, omogućujući, primjerice, verziju centralnog graničnog teorema za martingale formuliranu pomoću stabilne konvergencije. Također, generalizacija Cramér-Slutskyjevog teorema, izražena u terminima stabilne konvergencije, omogućuje neke važne asimptotske rezultate do kojih ne možemo doći putem klasične verzije ovog teorema koja podrazumijeva konvergenciju po distribuciji. Neki od rezultata $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije navedeni u ovom radu dodatno su ilustrirani primjerima i simulacijama.

$\mathcal{G}$-stabilna konvergencija pruža temelj za mnoge značajne rezultate čija kompleksnost često zahtijeva upotrebu naprednih matematičkih alata i teorije radi potpunog razumijevanja. Ipak, u radu su predstavljeni oni rezultati koji se mogu dovoljno dobro objasniti korištenjem poznatih koncepata teorije vjerojatnosti te poznatih pojmova i rezultata iz drugih područja matematike. U konačnici, cilj ovog rada je pružiti pregled i objašnjenje ključnih aspekata $\mathcal{G}$-stabilne konvergencije, nudeći temelj za daljnju analizu, te istovremeno demonstrirati neke od njezinih važnih primjena kao uvod u bogatstvo rezultata koji se još mogu istražiti.

Summary

The main subject of this master's thesis is $\mathcal{G}$-stable convergence, a specific type of convergence of random variables that represents an extension of the classical convergence in distribution. $\mathcal{G}$-stable convergence has proven to be highly useful in probability theory and finds applications in various mathematical areas. Understanding the concept of stable convergence stems from the theory of weak convergence of Markov kernels. Specifically, $\mathcal{G}$-stable convergence of random variables is defined as the weak convergence of their conditional distributions, which are structurally Markov kernels.

The weak convergence of Markov kernels plays a crucial role in understanding the stable convergence of random variables, while its characterizations greatly facilitate proving the characterizations of $\mathcal{G}$-stable convergence. Therefore, a part of the thesis is dedicated to studying the concept of weak convergence of Markov kernels. The thesis further explores different properties of $\mathcal{G}$-stable convergence and examines its relationship with other types of convergence of random variables. Additionally, some important results supported by this type of convergence are presented and further illustrated with examples and simulations.

Particularly noteworthy is the practical application of $\mathcal{G}$-stable convergence in the context of limit theorems, allowing, for example, a version of the central limit theorem for martingales formulated using stable convergence. Also, the generalization of the Cramér-Slutsky theorem, expressed in terms of stable convergence, enables some important asymptotic results that cannot be obtained through the classical version of the theorem, which assumes convergence in distribution.

$\mathcal{G}$-stable convergence provides the foundation for many significant results which often require the use of advanced mathematical tools and theory for complete understanding beacuse of their complexity. However, the thesis presents results that can be adequately explained using familiar concepts from probability theory and other areas of mathematics. Ultimately, the goal of this master's thesis is to provide an overview and explanation of key aspects of $\mathcal{G}$-stable convergence, offering a foundation for further analysis while also demonstrating some of its important applications as an introduction to the multitude of results that can still be explored.

Životopis

Rođena sam 2. srpnja 1998. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole, upisujem II. gimnaziju u Zagrebu. Tijekom srednje škole sudjelujem na natjecanjima iz matematike te sam nagrađena Stipendijom Grada Zagreba na temelju odličnog uspjeha. Pred kraj srednjoškolskog obrazovanja počinjem se dvoumiti oko odabira fakulteta - arhitektura ili matematika. Iako 2017. upisujem Arhitektonski fakultet u Zagrebu, tijekom prve godine studija shvaćam da je moj put ipak matematika. 2018. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a koji završavam 2021. Tijekom studija otkrivam svoj interes prema području vjerojatnosti i statistike te u skladu s time 2018. godine upisujem diplomski studij Matematička statistika.