Spektar matrice

Gakić, Ante

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Gakić

SPEKTAR MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, srpanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojoj obitelji, prijateljima, kao i svima koji su me na bilo koji način pratili na ovom putovanju i pomogli mi da se izgradim u ono što jesam te ukazali na ono što mogu biti.

Sadržaj

Uvod

Matrice su neizostavan alat u proučavanju linearne algebre. Na kolegijima Linearna algebra 1 i 2 smo, između ostalog, proučavali linearne operatore i njihova svojstva. S obzirom na to da svakom linearnom operatoru možemo pridružiti njegov matrični zapis u bazi prostora, račun s linearnim operatorima se često svodi na računanje s matricama. Međutim, ako se radi o matricama velikog reda, tada ni računanje s matricama nije jednostavno. Zato je važno za zadani linearni operator A odabrati bazu prostora u kojoj će matrični zapis od A biti što je moguće jednostavnija matrica, po mogućnosti dijagonalna. Ovdje se pokazuje da je spektar linearnog operatora od iznimne važnosti. U ovom radu proučavat ćemo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore kvadratne matrice, a zatim istražiti različite iterativne metode za računanje svojstvenih vrijednosti te naposlijetku primijeniti spektar na probleme iz stvarnog života.

Uvodno poglavlje postavit će teorijske temelje ispitivanjem osnovnih koncepata vezanih uz spektar kvadratne matrice i njihovih svojstava.

U drugom poglavlju proširujemo znanje o računanju svojstvenih vrijednosti. Dosad smo ih određivali kao nultočke karakterističnog polinoma. Budući da ne postoji formula za određivanje nultočaka polinoma stupnja većeg od četiri, a sam proces računanja determinanti može biti dugotrajan, posebnu pozornost ćemo posvetiti iterativnim tehnikama koje zaobilaze takve postupke. Metoda potencija, za koju ćemo prikazati nekoliko varijanti, omogućuje učinkovito aproksimiranje dominantnih svojstvenih vrijednosti matrica i njima pripadnih svojstvenih vektora. Također će se razmatrati Geršgorinov teorem o krugovima koji pomaže u procjeni položaja svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravnini.

U trećem poglavlju ćemo na pojednostavljenim modelima prikazati primjenu svojstvenih vrijednosti. Analiza Markovljevih lanaca koristi svojstvene vrijednosti za određivanje dugoročnog ponašanja stohastičkih procesa. Lesliejev matrični model rasta populacije predviđa dinamiku rasta populacije. Rangiranje sportskih timova koristi tehnike temeljene na svojstvenim vektorima, što omogućuje objektivno rangiranje. Konačno, *PageRank* algoritam, temelj Googleovog pretraživača, koristi izračune svojstvenih vrijednosti za rangiranje mrežnih stranica na temelju njihove relevantnosti i strukture poveznica.

Integrirajući teorijske rezultate s praktičnim primjenama, ovaj rad nastoji istaknuti svestranost i važnost svojstvenih vrijednosti.

Poglavlje 1

Spektar matrice

U ovom poglavlju obradit ćemo sve pojmove usko vezane za spektar matrice koje smo dosad povezivali s pojmom linearnog operatora. Prije nego krenemo s proučavanjem spektra i dokazivanjem tvrdnji, navest ćemo neke otprije poznate pojmove i tvrdnje.

1.1 Osnovni pojmovi

Matrice

Definicija 1.1.1. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Matrica tipa*** *(m, n) s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ je svako preslikavanje*

$$A\colon \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{F}.$$

Ako je $m = n$, onda kažemo da je A ***kvadratna matrica reda*** *n.*

Skup svih matrica tipa (m, n) s elementima iz polja $\mathbb{F}$ označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$, a skup svih kvadratnih matrica reda n s elementima iz polja $\mathbb{F}$ s $M_n(\mathbb{F})$. Ove oznake često kratimo u M_{mn} i M_n, ali kada je bitno naglasiti polje, pišemo $M_{mn}(\mathbb{C})$, $M_{mn}(\mathbb{R})$ odnosno $M_n(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{R})$. Matrice prikazujemo u obliku tablica i to tako da definiramo

$$a_{ij} = A(i, j), \quad \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n,$$

te dobivene brojeve složimo u tablicu od m redaka i n stupaca tako da a_{ij} smjestimo u i-ti redak i j-ti stupac.

Navest ćemo niz poznatih tvrdnji koje će nam biti potrebne u daljnjem radu. Njihove dokaze nećemo navoditi.

Teorem 1.1.2. *Neka je $A \in M_n$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) A je invertibilna (to jest postoji matrica $A^{-1} \in M_n$ takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$).

b) Sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ima jedinstveno rješenje za svaki* $\mathbf{b} \in M_{n1}$.

c) Sustav $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ima samo trivijalno rješenje.*

d) A *je produkt elementarnih matrica.*

e) Rang matrice $r(A)$ *je jednak* n.

f) Stupci matrice A *čine bazu za* M_{n1}.

g) Retci matrice A *čine bazu za* M_{1n}.

Determinante

Pojam determinante definirat ćemo rekurzivnim relacijama.

Definicija 1.1.3. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n, n \geq 2$. *Ako je* $n = 2$, ***determinanta matrice*** A *je skalar*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Za $n \geq 3$, ***determinanta*** *od* A *je skalar*

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\det A_{1j} \end{aligned} \tag{1.1}$$

pri čemu je $A_{ij} \in M_{n-1}$ *podmatrica matrice* A *nastala uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice.*

U gornjoj definiciji determinantu smo definirali na rekurzivan način. Mogli smo ju definirati i na drugi način. U [1], determinanta matrice $A \in M_n$ definirana je kao

$$\det A = \sum_{p \in S_n} sign(p) a_{1p_{(1)}} a_{2p_{(2)}} \dots a_{np_{(n)}},$$

pri čemu je p permutacija reda n, $sign(p)$ predznak permutacije, a S_n skup svih permutacija reda n.

Teorem 1.1.4 (Laplaceov razvoj)**.** *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n, n \geq 2$. *Vrijedi*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

što nazivamo ***Laplaceovim razvojem po*** i***-tom retku*** *i*

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

što nazivamo ***Laplaceovim razvojem po*** j***-tom stupcu determinante****, pri čemu je*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Teorem 1.1.5. *Determinanta gornjetrokutaste i donjetrokutaste matrice je produkt elemenata na glavnoj dijagonali. Specijalno, ako je $A = [a_{ij}] \in M_n$ gornje ili donjetrokutasta matrica, tada*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Teorem 1.1.6 (Binet-Cauchy)**.** *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Teorem 1.1.7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Matrica A je invertibilna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$. *Posebno, ako je $A \in M_n$ invertibilna matrica. Tada je*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Dokaz. Neka je $\det A \neq 0$ i $r(A) = n$ rang matrice A. Tada $\det D_r \neq 0$ i onda $r = n$, pri čemu je D_r kanonska matrica ranga r tipa (m, n). Slijedi A je invertibilna. Obratno, pretpostavimo da je A invertibilna. Tada postoji matrica A^{-1} takva da $AA^{-1} = I$ te prema teoremu 1.1.6, vrijedi $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. Stoga $\det A \neq 0$.

Kako znamo da je A invertibilna, vrijedi $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. Upravo smo dokazali da je tada $\det A \neq 0$, stoga dijeljenjem slijedi rezultat. □

Teorem 1.1.8. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) *A je invertibilna.*

b) *$r(A) = n$.*

c) $\det A \neq 0$.

1.2 Svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori i potprostori

Ukoliko promatramo Markovljeve lance ili Lesliejev model populacijskog rasta, možemo ustvrditi da se pojavljuje stacionarni vektor stanja. Poopćavanjem, želimo pronaći postoji li za kvadratnu matricu A nenul vektor $\mathbf{x}$ takav da je $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{F}$. To se naziva *problem traženja svojstvenih vrijednosti*. U ovom radu će nam u fokusu biti pojam svojstvenih vrijednosti, stoga ćemo ga definirati.

Definicija 1.2.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je **svojstvena vrijednost** matrice A ukoliko postoji nenul vektor $\mathbf{x} \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da vrijedi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Takav vektor $\mathbf{x}$ naziva se **svojstveni vektor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

*Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se **spektar matrice** A i označava $\sigma(A)$.*

U sljedećim primjerima pokazujemo kako provjeriti je li neki vektor zaista svojstveni vektor dane matrice te kako pronalazimo svojstvenu vrijednost pridruženu tom vektoru i obratno, ukoliko imamo zadanu vrijednost, kako provjeriti je li ona svojstvena vrijednost zadane matrice te kako pronaći njoj pripadni svojstveni vektor.

Primjer 1.2.2. *Vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ je svojstveni vektor matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ pridružen svojstvenoj vrijednosti -1 jer je $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -1\mathbf{v}$.*

Primjer 1.2.3. *Pokažimo da je $\lambda = -2$ svojstvena vrijednost matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i odredimo sve njene pripadne svojstvene vektore.*

Po definiciji svojstvene vrijednosti, moramo pokazati da postoji nenul vektor $\mathbf{x}$ takav da je $A\mathbf{x} = -2\mathbf{x}$, to jest da vrijedi $(A + 2I)\mathbf{x} = 0$. Imamo

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem sustava $(A + 2I)\mathbf{x} = 0$ dobijemo rješenje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{F}.$$

Prema tome, svi vektori oblika $\begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix}, t \neq 0$ su svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti -2.

Definicija 1.2.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$, te neka je $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost od A. Skup svih svojstvenih vektora pridruženih λ, zajedno s nulvektorom, nazivamo* ***svojstvenim potprostorom*** *pridruženim λ i označavamo E_λ. Dakle, $E_\lambda = \{\mathbf{x} \in M_{n1}(\mathbb{F}) : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$.*

U primjeru 1.2.3, za svojstvenu vrijednost $\lambda = -2$ svojstveni potprostor je $E_{-2} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{F} \right\}$.

U sljedećem primjeru ilustrirat ćemo kako pronaći bazu za svojstveni potprostor.

Primjer 1.2.5. *Pokažimo da je $\lambda = 3$ svojstvena vrijednost matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ i nađimo bazu za svojstveni potprostor E_3.*

Pokažimo da je $\lambda = 3$ svojstvena vrijednost matrice A. Imamo

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je $r(A - 3I) = 1$. Ako je Ω prostor svih rješenja sustava $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$, tada je $\dim(\Omega) = 3 - r(A - 3I) = 2$. *Očito je $E_3 = \Omega$.*

Odredimo sada svojstveni potprostor. Rješavanjem sustava $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$, dobijemo

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{F} \right\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{F} \right\} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

U dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom realnom prostoru, možemo geometrijski interpretirati pojam svojstvenog vektora: jednadžba $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ nam govori da su vektori $A\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}$ kolinearni.

Budući da smo spomenuli geometrijsku interpretaciju svojstvenih vektora, opisat ćemo postupak kojim geometrijski pronalazimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore.

Primjer 1.2.6. *Pronađimo geometrijskim putem svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Iz*

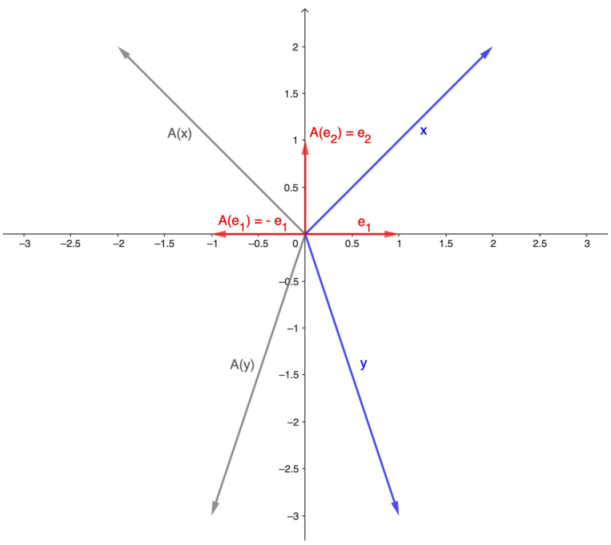
$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

dobijemo da je

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}, \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Slijedi da je A matrica zrcaljenja s obzirom na y-os. Kako smo opisali u prethodnom primjeru, vektor $\mathbf{x}$ će biti svojstveni vektor od A ukoliko će $\mathbf{x}$ i $A\mathbf{x}$ biti kolinearni vektori. Uočimo da će jedini vektori kojima matrica A neće promijeniti smjer biti vektori koji su ili paralelni ili okomiti na os zrcaljenja, to jest y-os. To će biti redom vektori oblika $t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$, kojima je svojstvena vrijednost -1 i $t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$, kojima je svojstvena vrijednost 1. Dakle, pronašli smo svojstvene vrijednosti $\lambda = -1$ i $\lambda = 1$. Odgovarajući svojstveni potprostori su:

$$E_{-1} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad E_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right].$$



Slika 1.1: Zrcaljenje s obzirom na y-os

Ako je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor od A koji je pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, onda je i svaki vektor oblika $\mu\mathbf{x}, \mu \neq 0$, također svojstveni vektor od A. Stoga, želimo li geometrijski pronaći svojstvene vektore, trebamo samo razmatrati utjecaj matrice na jedinične vektore.

Za sada smo razmatrali matrice koje uvijek imaju svojstvene vrijednosti pa time i svojstvene vektore. Geometrijski smo interpretirali svojstvene vektore kao vektore koje će matrica preslikati u njima kolinearne vektore. Možemo se pitati kako bez računanja odrediti matricu koja neće imati svojstvenih vrijednosti. Iz prethodnih zaključaka, trebamo matricu koja će svaki vektor preslikati u njemu nekolinearan vektor. Geometrijskom interpretacijom, možemo uzeti matricu rotacije oko ishodišta za kut različit od 0° i 180° (u prvom slučaju bismo imali identitetu pa je kolinearnost trivijalno ispunjena, dok bi u drugom slučaju imali centralnu simetriju).

1.3 Karakteristični polinom

Kako općenito pronaći svojstvene vrijednosti za danu matricu? Ono što znamo je da je λ svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako rang matrice $A - \lambda I$ nije pun. Za matrice znamo da su invertibilne ako i samo ako im je determinanta različita od nule.

Uzmemo li u obzir prethodne tvrdnje, zaključujemo da je λ svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako vrijedi $\det(A - \lambda I) = 0$.

Definicija 1.3.1. *Neka je $A \in M_n$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se* ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom*** *matrice A.*

Jednadžbu $\det(A - \lambda I) = 0$ nazivamo ***karakterističnom jednadžbom*** *matrice A.*

Propozicija 1.3.2. *Neka je $A \in M_n$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Skalar λ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je $k_A(\lambda) = 0$.*

Dokaz. Ako je λ svojstvena vrijednost matrice A, tada postoji $\mathbf{x} \neq 0$ takav da $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, to jest $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Slijedi, rang matrice $A - \lambda I$ nije pun, odnosno $\det(A - \lambda I) = 0$. Obratno, ako je λ nultočka karakterističnog polinoma, vrijedi $\det(A - \lambda I) = 0$, što znači da matrica $A - \lambda I$ nije invertibilna. Slijedi, postoji $\mathbf{x} \neq 0$ takav da $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pa je λ svojstvena vrijednost od A i $\mathbf{x}$ njoj pridružen svojstveni vektor. □

Pokažimo sad na primjeru kako bismo pronašli svojstvene vrijednosti matrice reda 2.

Primjer 1.3.3. *Pronađimo svojstvene vrijednosti te njima pridružene svojstvene vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ iz primjera 1.2.2.*

Iskoristimo definiciju karakterističnog polinoma. Tražimo sve λ koji zadovoljavaju jednadžbu $k_A(\lambda) = 0$, to jest $\det(A - \lambda I) = 0$. Računamo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = -1$ te su to prema prethodnoj propoziciji svojstvene vrijednosti od A.

Da bismo našli svojstvene vektore pridružene tim svojstvenim vrijednostima, za svaku svojstvenu vrijednost rješavamo sustav $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.

Za $\lambda = 5$ *rješavamo sustav* $(A - 5I)\mathbf{x} = 0$*, to jest sustav*

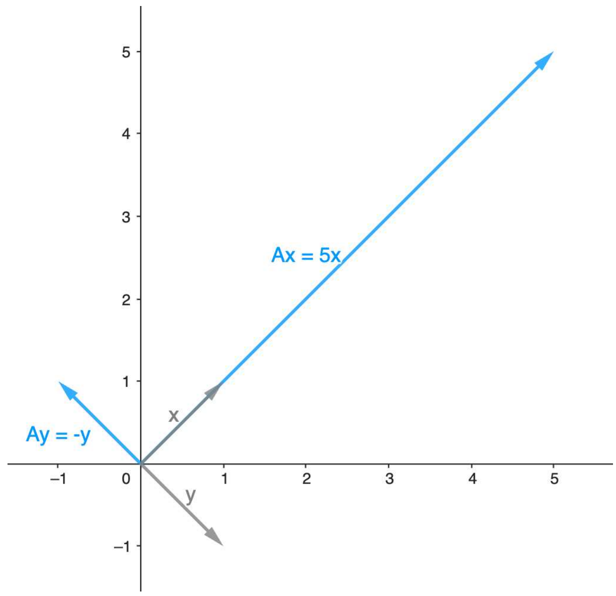
$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

iz kojeg slijedi da je nenul vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti* 5 *ako i samo ako vrijedi* $x_1 - x_2 = 0$*, to jest* $x_1 = x_2$*. Dakle, svojstveni potprostor je* $E_5 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$.

Za $\lambda = -1$ *rješavamo sustav* $(A + I)\mathbf{x} = 0$*, to jest sustav*

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

čija su rješenja oblika $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$*. Dakle, svojstveni potprostor je* $E_{-1} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\right]$.



Slika 1.2: Primjer 2.2.2.

Na gornjoj slici smo geometrijski prikazali kako su svojstveni vektori preslikani pod utjecajem matrice A. Vektor $\mathbf{x}$ *iz svojstvenog potprostora* E_5 *će biti preslikan u* $5\mathbf{x}$*, a vektor* $\mathbf{y}$ *iz svojstvenog potprostora* E_{-1} *u* $-\mathbf{y}$.

Primjer 1.3.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *matrica rotacije. Uvjerimo se računski da matrica rotacije za kut od* 60° *nema svojstvene vrijednosti.*

Za kut $\phi = 60^\circ$ *vrijedi* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Riješimo karakterističnu jednadžbu matrice A. Kako je* $k_A(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4}$, *zaključujemo da jednadžba* $k_A(\lambda) = 0$ *nema realna rješenja, odnosno matrica A nema svojstvene vrijednosti.*

Razmotrimo karakterističnu jednadžbu iz prethodnog primjera. Njena (kompleksna) rješenja su $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Iz definicije svojstvenih vrijednosti znamo da rješenja moraju biti iz istog polja $\mathbb{F}$ nad kojim promatramo matricu. Kad bismo matricu A gledali kao kompleksnu matricu, ona bi imala dvije svojstvene vrijednosti.

Napomena 1.3.5. *Polinom s realnim koeficijentima ne mora uvijek imati realne nultočke. Osnovni teorem algebre nam govori da polinom stupnja n ima n nultočaka u* $\mathbb{C}$ *računajući njihove kratnosti. Zato je bitno unaprijed napomenuti polje u kojem se računaju svojstvene vrijednosti. Ukoliko nema posebne napomene, podrazumijevamo da su svojstvene vrijednosti matrice kojoj su elementi realni brojevi također realni brojevi.*

Primjer 1.3.6. *Pronađimo svojstvene vrijednosti matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *ako:*
a) matricu A promatramo kao element u $M_2(\mathbb{R})$,
b) matricu A promatramo kao element u $M_2(\mathbb{C})$.

Za početak odredimo $k_A(\lambda)$, *a zatim riješimo karakterističnu jednadžbu. Imamo*

$$k_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1.$$

a) Karakteristična jednadžba nema rješenja u skupu realnih brojeva, tako da $A \in M_2(\mathbb{R})$ *nema realne svojstvene vrijednosti.*
b) U polju $\mathbb{C}$, *karakteristična jednadžba ima rješenja* $\lambda_1 = 1 + i$ *i* $\lambda_2 = 1 - i$ *i to su svojstvene vrijednosti matrice* $A \in M_2(\mathbb{C})$.

Primjer 1.3.7. *Pronađimo svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom matrice A je $k_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. *Rješavanjem jednadžbe* $k_A(\lambda) = 0$ *dobijemo da su* $\lambda = 1$ *i* $\lambda = 2$ *svojstvene vrijednosti od A. Kako je* $\lambda = 1$ *kratnosti* 2, *a* $\lambda = 2$ *kratnosti* 1, *označimo ih s* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *i* $\lambda_3 = 2$.

Pronađimo sada E_1. *To je prostor rješenja sustava* $(A - I)\mathbf{x} = 0$. *To jest,*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases},$$

čije je rješenje $x_1 = x_3, x_2 = x_3$. *Prema tome,* $E_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\right]$.

Svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti 2 *dobivamo rješavanjem sustava* $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$, *što se svodi na relacije* $x_1 = \frac{1}{4}x_3, x_2 = \frac{1}{2}x_3$. *Slijedi da je* $E_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}\right\}\right]$.

Primijetimo da, iako je A kvadratna matrica reda 3, ona ima samo dvije svojstvene vrijednosti. Međutim, ako brojimo kratnosti, A ima točno tri svojstvene vrijednosti (2 je jednostruka, a 1 dvostruka svojstvena vrijednost od A) što slijedi iz osnovnog teorema algebre. Primijetimo, oba potprostora, E_1 i E_2, su jednodimenzionalni.

Definicija 1.3.8. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *te* $\lambda \in \sigma(A)$. *Dimenzija prostora* E_λ *naziva se* ***geometrijska kratnost*** *svojstvene vrijednosti* λ. ***Algebarska kratnost*** *svojstvene vrijednosti* λ *je kratnost koju* λ *ima kao nultočka karakterističnog polinoma* $k_A(\lambda)$. *Oznake su* $g(\lambda)$ *i* $a(\lambda)$. *Uočimo da je* $1 \leq a(\lambda) \leq n$ *i* $1 \leq g(\lambda) \leq n$ *za svaki* $\lambda \in \sigma(A)$.

Primjer 1.3.9. *Za matricu* $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 0\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ *odredimo svojstvene vrijednosti, njihove algebarske i geometrijske kratnosti, te baze svojstvenih potprostora.*

Kako je $k_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$, *iz* $k_A(\lambda) = 0$ *slijedi da su* 0 *i* 2 *svojstvene vrijednosti od A. Odmah vidimo da je* $a(0) = 1$ *i* $a(2) = 2$.

Svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti 0 *dobivamo rješavanjem sustava* $A\mathbf{x} = 0$. *Rješenje ovog sustava je oblika* $\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_1\end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{F}$, *pa je potprostor* $E_0 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right]$. *Dakle,* $g(0) = 1$.

Svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti 2 *dobivamo rješavanjem sustava* $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$ *koji se svodi na relaciju* $x_1 = x_2 - x_3$. *Slijedi da je* $E_2 = \left[\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right]$ *te da je* $g(2) = 2$.

Teorem 1.3.10. *Svojstvene vrijednosti gornjetrokutastih i donjetrokutastih matrica su elementi na glavnoj dijagonali.*

Dokaz. Ako je A gornjetrokutasta matrica, tada je i $A - \lambda I$ gornjetrokutasta, pa je njena determinanta jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali. Ako matrica A na glavnoj dijagonali ima redom $a_{11}, \dots, a_{nn}$, tada $A - \lambda I$ na dijagonali ima redom $a_{11} - \lambda, \dots, a_{nn} - \lambda$. Tada je $k_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$ pa su rješenja karakteristične jednadžbe upravo $a_{11}, \dots, a_{nn}$. Analogno i za donjetrokutaste matrice. □

Primjer 1.3.11. *Svojstvene vrijednosti matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *su prema prethodnom teoremu* $2, 1$ *i* 3.

Teorem 1.3.12. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Matrica* A *je invertibilna ako i samo ako* 0 *nije svojstvena vrijednost matrice* A.

Dokaz. Po teoremu 1.1.7, A je invertibilna ako i samo ako je $\det A \neq 0$ što je ekvivalentno s $k_A(0) \neq 0$ odnosno s tim da 0 nije svojstvena vrijednost matrice A. □

Teorem 1.3.13. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *te neka je* $\lambda \in \mathbb{F}$ *svojstvena vrijednost s pripadnim svojstvenim vektorom* $\mathbf{x}$. *Vrijedi:*

a) Za svaki $n \in \mathbb{N}$, λ^n *je svojstvena vrijednost matrice* A^n *s pripadnim svojstvenim vektorom* x.

b) Ako je A *invertibilna, tada je* $1/\lambda$ *svojstvena vrijednost matrice* A^{-1} *s pripadnim svojstvenim vektorom* $\mathbf{x}$.

c) Ako je A *invertibilna, tada za bilo koji* $n \in \mathbb{Z}$, λ^n *je svojstvena vrijednost od* A^n *s pripadnim vektorom* $\mathbf{x}$.

Dokaz. a) Neka je $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tada je $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Induktivno dobijemo da je $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Odavde slijedi prva tvrdnja.

b) Neka je A invertibilna matrica. Prema teoremu 1.3.12, znamo da mora vrijediti $\lambda \neq 0$. Iz $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, slijedi $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}(\lambda\mathbf{x})$, to jest $x = \lambda(A^{-1}(x))$, odnosno $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$.

c) Neka je A invertibilna matrica, te neka je $n \in \mathbb{Z}$. Dokazali smo da tvrdnja vrijedi za svaki pozitivan cijeli broj. Sada ćemo dokazati tvrdnju za negativne cijele brojeve. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Prema tvrdnji b) je $A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$. Sada prema tvrdnji a) slijedi $A^{-k} = (A^{-1})^k\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^k}\mathbf{x} = \lambda^{-k}$ što dokazuje tvrdnju c) za negativne potencije. Još trebamo pokazati za 0, odnosno želimo pokazati $A^0\mathbf{x} = \lambda^0\mathbf{x}$. Kako je $A^0 = I$, a $\lambda^0 = 1$, vrijedi jednakost. Tvrdnja je sada dokazana za svaki $k \in \mathbb{Z}$. □

Pokažimo na sljedećem primjeru primjenu prethodnog teorema.

Primjer 1.3.14. *Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrica sa svojstvenim vektorima $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ koji redom odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = 2$ te $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo $A^{10}\mathbf{x}$. Kako su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A, vrijedi*

$$A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2.$$

Primijetimo da je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ baza za $\mathbb{R}^2$, stoga vektor $\mathbf{x}$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Lako provjerimo da je $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$. Koristeći teorem 1.3.13 a), imamo

$$\begin{aligned} A^{10}\mathbf{x} &= A^{10}(2v_1 + 3\mathbf{v}_2) = 2(A^{10}\mathbf{v}_1) + 3(A^{10}\mathbf{v}_2) \\ &= 2\lambda_1^{10}\mathbf{v}_1 + 3\lambda_2^{10}\mathbf{v}_2 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \cdot 2^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -\frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Primijetimo kako korištenjem teorema koji smo dokazali nismo morali računati matricu A^{10}. Štoviše, nismo uopće morali množiti matrice. Iskažimo teorem koji generalizira prethodni primjer.

Teorem 1.3.15. *Neka je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ te neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ svojstveni vektori s pripadnim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Ako je vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ takav da ga možemo zapisati kao linearnu kombinaciju svojstvenih vektora*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m \tag{1.2}$$

onda, za bilo koji $k \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$A^k\mathbf{x} = a_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + a_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.$$

Dokaz. Dokaz slijedi direktno djelovanjem matricom A^k na jednadžbu (1.2) slijeva, a zatim korištenjem teorema 1.3.13. □

Primijetimo da u teoremu napominjemo "ako" možemo zapisati vektor $\mathbf{x}$ kao linearnu kombinaciju svojstvenih vektora. Ne možemo tvrditi da ćemo uvijek moći pronaći takav zapis. To će se dogoditi ukoliko postoji baza za $\mathbb{R}^n$ koja se sastoji od svojstvenih vektora matrice A. Tu mogućnost ćemo istražiti u daljnjem radu. Sljedećim teoremom ćemo istražiti tvrdnju koja govori da su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima linearno nezavisni.

Teorem 1.3.16. *Neka je $A \in M_n$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od A s pripadnim svojstvenim vektorima $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Tada je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ linearno nezavisan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ linearno zavisan skup. Tada neki od vektora tog skupa možemo zapisati kao linearnu kombinaciju prethodnih. Neka je $\mathbf{v}_{k+1}$ prvi od vektora $\mathbf{v}_i$ koji možemo zapisati na taj način. Drugim riječima, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je linearno nezavisan skup. Tada postoje skalari $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvi da

$$\mathbf{v}_{k+1} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k. \tag{1.3}$$

Množeći obje strane jednadžbe (1.3) s A slijeva i koristeći činjenicu da je $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ za svaki i, slijedi:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_{k+1} &= A(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k) \\ &= a_1A\mathbf{v}_1 + a_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + a_kA\mathbf{v}_k \\ &= a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\lambda_k\mathbf{v}_k. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sada množimo obje strane jednadžbe (1.3) s λ_{k+1} kako bismo dobili

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = a_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k. \tag{1.5}$$

Oduzimanjem jednadžbe (1.5) od jednadžbe (1.4), dobijemo

$$\mathbf{0} = a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k.$$

Iz linearne nezavisnosti skupa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ slijedi

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = a_1(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = a_1(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Kako su λ_i međusobno različite svojstvene vrijednosti, izrazi u zagradama su različiti od 0. Dakle, $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, zbog čega

$$\mathbf{v}_{k+1} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

što je nemoguće, budući da svojstveni vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ ne može biti nulvektor. Došli smo do kontradikcije, što znači da je pretpostavka da je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ linearno zavisan netočna. Zaključujemo, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ je linearno nezavisan skup. □

1.4 Sličnost i dijagonalizacija

Proučavanjem gornjetrokutastih i donjetrokutastih, kao i dijagonalnih matrica, ustanovili smo da je lako očitati njihove svojstvene vrijednosti. Željeli bismo povezati proizvoljnu matricu (bilo kojeg tipa) s gornje ili donjetrokutastom ili dijagonalnom matricom, pritom čuvajući svojstvene vrijednosti. Dakako, poznato nam je da kvadratnu matricu možemo transformirati u gornje ili donjetrokutastu koristeći Gaussovu eliminaciju, ali nažalost, time se ne očuvaju svojstvene vrijednosti. U ovom potpoglavlju obradit ćemo drukčije transformacije matrice, i to one pri kojima se svojstvene vrijednosti očuvaju.

Definicija 1.4.1. *Neka su $A, B \in M_n$. Kažemo da je matrica A **slična** matrici B ukoliko postoji invertibilna matrica $P \in M_n$ takva da $P^{-1}AP = B$. Označavamo $A \sim B$.*

Napomena 1.4.2. *Iz jednadžbe $P^{-1}AP = B$ u definiciji sličnih matrica slijedi $AP = PB$.*

Prethodna napomena bit će nam korisna u zadatcima jer primjenom posljednje jednakosti možemo izbjeći računanje inverza matrice što nije uvijek trivijalno. Pokažimo na sljedećem primjeru kako odrediti jesu li matrice slične, pritom koristeći napomenu.

Primjer 1.4.3. *Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Tada je $A \sim B$ jer*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

to jest $AP = PB$, gdje je $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorem 1.4.4. *Relacija **biti sličan** je relacija ekvivalencije na skupu kvadratnih matrica istog reda.*

Dokaz. Neka su $A, B, C \in M_n$.

a) Refleksivnost. $A \sim A$ slijedi iz $A = I^{-1}AI$, pri čemu je I jedinična matrica.

b) Simetričnost. Ako je $A \sim B$, postoji invertibilna matrica $P \in M_n$ takva da $B = P^{-1}AP$ to jest $BP = AP$. Množenjem P^{-1} slijeva dobivamo $P^{-1}BP = A$, to jest $B \sim A$.

c) Tranzitivnost. Ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, tada postoje invertibilne matrice $P, R \in M_n$ takve da $B = P^{-1}AP$ i $C = R^{-1}BR$. Slijedi, uz činjenicu da je i PR invertibilna, $C = R^{-1}(P^{-1}AP)R = (RP)^{-1}A(PR)$ pa zaključujemo da je i $A \sim C$. □

Sljedeći teorem nam govori o svojstvima koja slične matrice čuvaju te će nam pomoći što efikasnije odrediti jesu li matrice slične.

Teorem 1.4.5. *Neka su $A, B \in M_n$ slične matrice. Vrijedi:*

a) $\det A = \det B$.

b) A je invertibilna ako i samo ako je B invertibilna.

c) A i B imaju isti rang.

d) A i B imaju isti karakteristični polinom.

e) A i B imaju iste svojstvene vrijednosti.

Dokaz. Kako je $A \sim B$, vrijedi $B = P^{-1}AP$ za neku invertibilnu matricu $P \in M_n$.

a) Uzimajući determinantu obje strane i primjenjujući Binet-Cauchyjev teorem, imamo

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \left(\frac{1}{\det P}\right) \det A \det P = \det A.$$

b) Iz tvrdnje a) znamo da su determinante matrica A i B jednake. Prema tome, $\det A \neq 0$ ako i samo ako $\det B \neq 0$, to jest matrica A je invertibilna ako i samo ako je B invertibilna.

c) Iz $B = P^{-1}AP$ slijedi $r(B) = r(P^{-1}AP) \leq \min\{r(P^{-1}), r(A), r(P)\} = r(A)$ zbog regularnosti P. Dakle, $r(B) \leq r(A)$. Zamjenom uloga A i B slijedi $r(A) \leq r(B)$, zato $r(A) = r(B)$.

d) Karakteristični polinom matrice B je

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\
&= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\
&= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I).
\end{aligned}$$

Slijedi da su karakteristični polinomi matrica B i A isti.

e) Trivijalno slijedi iz d). □

Napomena 1.4.6. *Dvije matrice mogu imati zajednička svojstva a) - e) prethodnog teorema, ali i dalje ne biti slične. Na primjer,* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *obje imaju determinantu* 1 *i rang* 2. *Invertibilne su, karakteristični polinom im je* $(1-\lambda)^2$ *i svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. *Međutim, A nije slična matrici B jer* $P^{-1}AP = P^{-1}IP = I \neq B$ *za bilo koju invertibilnu matricu P.*

Teorem 1.4.5 je koristan u pokazivanju da dvije matrice ***nisu*** *slične jer daje nužne (ne i dovoljne) uvjete za sličnost matrica.*

Primjer 1.4.7. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Matrice A i B nisu slične budući da je* $\det A = -8$, *a* $\det B = 8$.

Primjer 1.4.8. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. *Lako dobijemo da je* $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ *i* $k_B(\lambda) = \lambda^2 - 4$, *stoga matrice nisu slične. Primijetimo da matrice A i B imaju istu determinantu:* $\det A = \det B = -4$ *zbog čega obje imaju rang* 2.

Najbolja moguća situacija je ukoliko je kvadratna matrica slična dijagonalnoj matrici. Kao što ćemo prikazati, ovisnost dijagonalizabilnosti matrice usko je povezana sa svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima matrice.

Definicija 1.4.9. *Matrica* $A \in M_n$ *je* ***dijagonalizabilna*** *ako je slična dijagonalnoj matrici, to jest ako postoje dijagonalna matrica* $D \in M_n$ *i invertibilna matrica* $P \in M_n$ *takve da je* $P^{-1}AP = D$.

Primjer 1.4.10. *Matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *iz primjera 1.4.8 je dijagonalizabilna budući da za matrice* $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *i* $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *vrijedi* $P^{-1}AP = D$, *što direktno provjerimo. (Možemo provjeriti vrijedi li* $AP = PD$ *prema napomeni 1.4.2 jer tako ne moramo tražiti inverz.)*

Pitamo se kako naći matrice P i D. Primijetimo da su elementi na glavnoj dijagonali matrice D svojstveni vektori matrice A, čiji smo karakteristični polinom izračunali u primjeru 1.4.8. Kako smo dobili matricu P je manje očito. Kao što ćemo demonstrirati, njeni elementi su dobiveni iz svojstvenih vektora matrice A. Sljedećim teoremom ćemo jasnije prikazati poveznicu.

Teorem 1.4.11. *Neka je* $A \in M_n$. *Matrica A je dijagonalizabilna ako i samo ako A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.*

Pritom, ako su P invertibilna matrica i D dijagonalna matrica takve da $P^{-1}AP = D$, *tada stupce od P sačinjava n linearno nezavisnih svojstvenih vektora od A, a elementi na glavnoj dijagonali od D su svojstvene vrijednosti od A s redom pripadnim svojstvenim vektorima u P.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $P^{-1}AP = D$, odnosno $AP = PD$. Neka su stupci matrice P jednaki $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ i neka su elementi glavne dijagonale matrice D jednaki $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Kako je P invertibilna, vrijedi $\mathbf{p}_i \neq 0$ za svaki i. Tada

$$A\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & \cdots & A\mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{p}_1 & \lambda_2\mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{p}_n \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Izjednačavanjem stupaca, imamo

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

što dokazuje da su stupci od P svojstveni vektori od A koji pripadaju redom svojstvenim vrijednostima na glavnoj dijagonali matrice D. Kako je P invertibilna, njeni stupci su linearno nezavisni.

Obratno, ako A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ koji redom pripadaju svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, onda

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n$$

iz čega slijedi jednadžba (1.7), koja je ekvivalentna jednadžbi (1.6). Posljedično, ako je $P \in M_n$ sa stupcima $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$, onda iz jednadžbe (1.6) slijedi $AP = PD$. Kako su stupci od P linearno nezavisni, P je invertibilna pa vrijedi $P^{-1}AP = D$, to jest A je dijagonalizabilna. □

Primjer 1.4.12. *Ukoliko je moguće, pronađimo matricu P koja dijagonalizira matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Promatrali smo matricu A u primjeru 1.3.7 gdje smo izračunali da su njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *i* $\lambda_3 = 2$.

Svojstveni potprostor E_1 *ima bazu* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$*, a svojstveni potprostor* $\lambda_3 = 2, E_2$ *ima bazu* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Kako su svi drugi svojstveni vektori kolinearni s jednim od dvaju vektora baza, postoje tri linearno nezavisna svojstvena vektora. Po teoremu 1.4.11, A nije dijagonalizabilna.

Primjer 1.4.13. *Ukoliko je moguće, pronađimo matricu P koja dijagonalizira matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovu matricu smo promatrali u primjeru 1.3.9 gdje smo izračunali da su njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$ *i* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Svojstveni potprostor E_0 ima bazu $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, *a svojstveni potprostor E_2 ima bazu* $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Lako vidimo da su ova tri vektora linearno nezavisna. Stoga, ako uzmemo

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

P je invertibilna. Vrijedi

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} = D.$$

Napomena 1.4.14. *Ukoliko imamo dovoljno svojstvenih vektora, možemo ih složiti u stupce od P bilo kojim redoslijedom, no svojstvene vrijednosti na glavnoj dijagonali matrice D će biti poredane s obzirom na poredak njihovih odgovarajućih svojstvenih vektora u P. Na primjer, da smo u prethodnom primjeru stavili*

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

dobili bismo

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

U prethodnom primjeru, morali smo provjeriti linearnu nezavisnost. Znali smo da su skupovi $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ i $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3\}$ linearno nezavisni prema teoremu 1.3.16, no iz toga nismo mogli zaključiti da je i skup $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ linearno nezavisan. Sljedeći teorem nam garantira da se spajanjem baza svojstvenih vektora očuva linearna nezavisnost skupa.

Teorem 1.4.15. *Neka je $A \in M_n$ te neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od A. Neka su $\mathcal{B}_i$ baze svojstvenih potprostora E_{λ_i}. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) Skup $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ je linearno nezavisan.

b) Suma geometrijskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A je najviše n, to jest $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) \leq n$.

c) *Ako je* $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n$, *tada je skup* $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ *baza za* M_n *u kojoj* A *ima dijagonalni matrični zapis.*

Dokaz. a) Neka je $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \dots, \mathbf{v}_{ig_i}\}$, za $i = 1, \dots, k$. Trebamo pokazati da je skup

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1g_1}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2g_2}, \mathbf{v}_{k1}, \mathbf{v}_{k2}, \dots, \mathbf{v}_{kg_k}\}$$

linearno nezavisan. Uzmimo linearnu kombinaciju elemenata ovog skupa i izjednačimo ju s nulvektorom. Dobivamo

$$\sum_{j=1}^{g_1} c_{1j}\mathbf{v}_{1j} + \sum_{j=1}^{g_2} c_{2j}\mathbf{v}_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{g_k} c_{kj}\mathbf{v}_{kj} = \mathbf{0}.$$

Za svaki $i = 1, \dots, k$ označimo s $\mathbf{x}_i$ vektor $\sum_{j=1}^{g_i} c_{ij}\mathbf{v}_{ij}$. Tada je $\mathbf{x}_i \in E_{\lambda_i}$, za svaki $i = 1, \dots, k$ te prethodnu jednadžbu možemo zapisati kao

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{1.8}$$

Tvrdimo da je $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \ldots = \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Pretpostavimo suprotno, to jest da nisu svi ovi vektori jednaki nulvektoru. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ različiti od nulvektora te da je $\mathbf{x}_{p+1} = \ldots = \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Tada su $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ svojstveni vektori od A pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Prema teoremu 1.3.16 skup $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ je linearno nezavisan. S druge strane, jednakost $\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ se reducira u $\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_p = \mathbf{0}$, što znači da je $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ linearno zavisan skup čime smo došli do kontradikcije.

Time smo dokazali da je $\mathbf{x}_i = 0$ za svaki $i = 1, \dots, k$, odnosno

$$\sum_{j=1}^{g_i} c_{ij}\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Za svaki $i = 1, \dots, k$ skup $\{\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \dots, \mathbf{v}_{ig_i}\}$ je baza za E_{λ_i}, odakle slijedi $c_{ij} = 0$ za svaki $j = 1, \dots, g_i$.

b) Tvrdnja slijedi iz prve tvrdnje i iz činjenice da u n-dimenzionalnom prostoru linearno nezavisan skup može imati najviše n elemenata.

c) Ako je $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n$, tada imamo linearno nezavisan skup od $n = \dim M_{n1}$ elemenata, dakle bazu za M_{n1}, sastavljenu od svojstvenih vektora za A. □

Teorem 1.4.16. *Neka je* $A \in M_n$ *matrica s* n *različitih svojstvenih vrijednosti. Tada je* A *dijagonalizabilna.*

Dokaz. Neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ svojstveni vektori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima matrice A. Po teoremu 1.3.16, skup $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je linearno nezavisan pa je prema teoremu 1.4.11 matrica A dijagonalizabilna. □

Primjer 1.4.17. *Matrica* $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *ima svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$ *i* $\lambda_3 = 2$. *Po prethodnom teoremu, znamo da je dijagonalizabilna. No ukoliko želimo pronaći* P, *takvu da je* $P^{-1}AP$ *dijagonalna, moramo provesti postupak traženja svojstvenih vektora.*

Poglavlje zaključujemo teoremom koji povezuje dijagonalizabilnost matrice s algebarskom i geometrijskom kratnosti svojstvenih vrijednosti. Prvo ćemo dokazati lemu koja vrijedi za sve kvadratne matrice, bez obzira jesu li dijagonalizabilne.

Lema 1.4.18. *Neka je* $A \in M_n$. *Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti matrice* A *je manja ili jednaka od algebarske kratnosti.*

Dokaz. Pretpostavimo da je λ_1 svojstvena vrijednost matrice A s geometrijskom kratnosti p, to jest $\dim E_{\lambda_1} = p$. Specijalno, neka E_{λ_1} ima bazu $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Neka je $Q \in M_n$ proizvoljna matrica čijih prvih p stupaca sačinjavaju elementi baze $\mathcal{B}_i$, na primjer

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_p & \mathbf{v}_{p+1} & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

Tada je Q invertibilna matrica. Nadalje,

$$Q^{-1}AQ = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right]}_{\text{označimo s } B}.$$

Tada $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$.

U matrici $B = Q^{-1}AQ$ imamo elemente $\lambda_1 - \lambda$ na prvih p mjesta dijagonale, što će pri računanju determinante dati $(\lambda_1 - \lambda)^p$. Na ostalih $n - p$ stupaca ne znamo što će se pojaviti, osim da će koeficijenti sadržavati $-\lambda$. Dakle, posljednjih $n - p$ stupaca će dati polinom $q(\lambda)$ stupnja $n - p$. Skalar λ_1 može, ali ne mora biti nultočka polinoma $q(\lambda)$. Stoga imamo

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^p q(\lambda)$$

pa je algebarska kratnost nultočke λ_1 veća od p ili jednaka p, ovisno o tome je li λ_1 nultočka polinoma q. $\square$

Teorem 1.4.19. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *matrica čije su međusobno različite svojstvene vrijednosti* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) *A je dijagonalizabilna.*

b) *$\mathcal{B}$, unija baza svih svojstvenih potprostora od A, sadrži n vektora.*

c) *Algebarska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka je njenoj geometrijskoj kratnosti.*

Dokaz. a) $\Longrightarrow$ b) Ako je A dijagonalizabilna, tada postoji baza $\mathcal{B}$ sastavljena od svojstvenih vektora za A. Poredajmo elemente te baze tako da prvo navedemo svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti λ_1, zatim one pridružene λ_2 i tako redom:

$$\{\underbrace{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{1g_1}}_{\in E_{\lambda_1}}, \underbrace{\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \ldots, \mathbf{v}_{2g_2}}_{\in E_{\lambda_2}}, \ldots, \underbrace{\mathbf{v}_{k1}, \mathbf{v}_{k2}, \ldots, \mathbf{v}_{kg_k}}_{\in E_{\lambda_k}}\}.$$

Ovaj skup je baza za M_n i zato je $g_1 + \ldots + g_k = n$. Po definiciji je $g(\lambda_i) = \dim E_{\lambda_i}$ za svaki $i = 1, \ldots, k$, pa zato u E_{λ_i} može biti najviše $g(\lambda_i)$ linearno nezavisnih vektora. Kako je $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{ig_i}$ linearno nezavisan skup u E_{λ_i}, mora biti $g_i \leq g(\lambda_i)$ za svaki $i = 1, \ldots, k$. Uz pomoć teorema 1.4.15, slijedi

$$n = g_1 + \ldots + g_k \leq g(\lambda_i) + \ldots + g(\lambda_k) \leq n,$$

odakle slijedi $g(\lambda_i) + \ldots + g(\lambda_k) = n$.
b) $\Longrightarrow$ c) Neka je geometrijska kratnost od λ_i jednaka $g_i = \dim E_{\lambda_i}$ te neka su algebarske kratnosti od λ_i jednake a_i. Iz svojstva b) vrijedi

$$n = g_1 + \ldots + g_k. \tag{1.9}$$

Prema osnovnom teoremu algebre, polinom stupnja n ima točno n nultočaka u polju kompleksnih brojeva brojeći kratnosti, a kako su a_i po definiciji kratnosti nultočaka λ_i karakterističnog polinoma, slijedi

$$n = a_1 + \ldots + a_k. \tag{1.10}$$

Iz jednadžbi (1.9) i (1.10) imamo

$$g_1 + \ldots + g_k = a_1 + \ldots + a_k.$$

Po lemi 1.4.18, $g_i \leq a_i$, za svaki $i = 1, \ldots, k$, odakle dobivamo $g_i = a_i$ za svaki $i = 1, \ldots, k$.
c) $\Longrightarrow$ a) Pretpostavimo da su algebarske kratnosti a_i jednake geometrijskim kratnostima g_i za svaku svojstvenu vrijednost λ_i od A. Prema osnovnom teoremu algebre, $a_1 + \ldots + a_k = n$, pa vrijedi

$$g_1 + \ldots + g_k = a_1 + \ldots + a_k = n.$$

Sada iz teorema 1.4.15, slijedi tvrdnja. □

Napomena 1.4.20. *U prethodnom teoremu, tvrdnje smo izrekli za kvadratne matrice nad poljem $\mathbb{C}$ jer osnovni teorem algebre govori kako u kompleksnom polju polinom stupnja n ima točno n nultočaka. U realnom slučaju, spektru matrice A pripadaju samo one nultočke karakterističnog polinoma koje pripadaju skupu realnih brojeva, stoga je suma algebarskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A manja ili jednaka n.*

Primjer 1.4.21. *a) Matrica* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ *iz primjera 1.3.7 ima dvije različite svojstvene vrijednosti,* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *i* $\lambda_3 = 2$*. Kako svojstvena vrijednost* $\lambda_1 = \lambda_2$ *ima algebarsku kratnost* 2*, ali geometrijsku kratnost* 1*, prema prethodnom teoremu, A nije dijagonalizabilna.*

b) Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *iz primjera 1.3.9 ima dvije različite svojstvene vrijednosti,* $\lambda_1 = 0$ *i* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$*. Kako svojstvena vrijednost* λ_1 *ima algebarsku i geometrijsku kratnost 1, a* $\lambda_2 = \lambda_3$ *ima algebarsku i geometrijsku kratnost* 2*, prema prethodnom teoremu, A je dijagonalizabilna.*

Pokažimo na primjeru primjenu dijagonalizacije za računanje potencija matrice.

Primjer 1.4.22. *Izračunajmo* A^{10} *ako je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom matrice A je $k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$*. Svojstvene vrijednosti su* $\lambda_1 = -1$ *i* $\lambda_2 = 2$ *s pripadnim svojstvenim vektorima* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$*. Slijedi A je dijagonalizabilna i* $P^{-1}AP = D$*, gdje*

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tada je $A = PDP^{-1}$*. Računamo*

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Induktivno slijedi, $A^n = PD^nP^{-1}$ *za sve* $n \geq 1$*. Tvrdnja vrijedi općenito, za bilo koju dijagonalizabilnu matricu.*

Kako je

$$D^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix},$$

imamo

$$
\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2(-1)^n+2^n}{3} & \frac{(-1)^{n+1}+2^n}{3} \\ \frac{2(-1)^{n+1}+2^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^{n+2}+2^{n+1}}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Kako se u primjeru traži A^{10}*, stavimo* $n = 10$ *pa imamo*

$$
A^{10} = \begin{bmatrix} \frac{2(-1)^{10}+2^{10}}{3} & \frac{(-1)^{11}+2^{10}}{3} \\ \frac{2(-1)^{11}+2^{11}}{3} & \frac{(-1)^{12}+2^{11}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}.
$$

Poglavlje 2

Određivanje svojstvenih vrijednosti

Jedina metoda računanja svojstvenih vrijednosti koju zasad poznajemo jest rješavanje karakteristične jednadžbe. No postoje određeni problemi na koje nailazimo pri razmatranju ove metode. Naime, metoda se oslanja na računanje determinante što može biti dugotrajan proces za matrice višeg reda. Nadalje, ne postoji formula za određivanje nultočaka za polinome stupnja većeg od 4. Stoga moramo aproksimirati svojstvene vrijednosti u većini problema. Nažalost, metode aproksimacije nultočaka polinoma su osjetljive na pogreške zaokruživanja te su stoga nepouzdane. Zato ćemo u potpunosti zaobići karakterističnu jednadžbu i iskoristiti drukčiji pristup u kojem prvo aproksimiramo svojstvene vektore, a zatim određujemo njima pripadne svojstvene vrijednosti.

2.1 Metoda potencija

Kao što ćemo prikazati, metodom potencija ćemo moći odrediti samo najveću (po apsolutnoj vrijednosti) svojstvenu vrijednost matrice A. Stoga ćemo definirati pojam dominantne svojstvene vrijednosti koji ćemo koristiti i kasnije. Metoda potencija iterativno formira niz skalara koji konvergira dominantnoj svojstvenoj vrijednosti i niz vektora koji konvergira pripadnom svojstvenom vektoru, to jest dominantnom svojstvenom vektoru. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da je matrica A dijagonalizabilna u $M_n(\mathbb{R})$.

Definicija 2.1.1. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_n$ takve da*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Tada se svojstvena vrijednost λ_1 naziva ***dominantna svojstvena vrijednost*** *matrice A. Svojstveni vektor koji pripada dominantnoj svojstvenoj vrijednosti λ_1 nazivamo* ***dominantnim svojstvenim vektorom*** *matrice A.*

Primijetimo da iz definicije dominantne svojstvene vrijednosti slijedi da su njena algebarska i geometrijska kratnost jednake 1.

Primjer 2.1.2. *Ne postoji dominantna svojstvena vrijednost za svaku matricu. Na primjer, matrica* $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *čije su svojstvene vrijednosti* -3 *i* 3 *nema dominantnu svojstvenu vrijednost. Slično, matrica* $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *čije su svojstvene vrijednosti* $5, 5$ *i* 4 *nema dominantnu svojstvenu vrijednost.*

Matrica $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *ima dominantnu svojstvenu vrijednost* 5.

Sljedeći teorem je osnova metode potencija.

Teorem 2.1.3. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *dijagonalizabilna matrica koja ima dominantnu svojstvenu vrijednost* λ_1. *Tada postoji nenul vektor* $\mathbf{x}_0$ *takav da niz vektora* $(\mathbf{x}_k)$ *definiran rekurzivno kao*

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}, \quad k \geq 1$$

konvergira dominantom svojstvenom vektoru od A.

Dokaz. Pretpostavimo da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A pri čemu vrijedi

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ redom pripadni svojstveni vektori koji tvore bazu za M_{n1}. Tada vektor $\mathbf{x}_0$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju ovih svojstvenih vektora

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Iz definicije niza $(\mathbf{x}_k)$ slijedi da je

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0, \quad k \geq 1.$$

Kao što smo vidjeli u primjeru 1.3.14,

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{x}_0 &= {\lambda_1}^k c_1\mathbf{v}_1 + {\lambda_2}^k c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + {\lambda_n}^k c_n\mathbf{v}_n \\ &= {\lambda_1}^k c_1\left(\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_n\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $\lambda_1 \neq 0$. (Ako je $\lambda_1 = 0$, tada $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, pa 0 nije dominantna svojstvena vrijednost.)

Činjenica da je λ_1 dominantna svojstvena vrijednost znači da je svaki od razlomaka $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ manji od 1 po apsolutnoj vrijednosti. Stoga

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0, \quad \forall j = 2, \ldots, n.$$

Slijedi da je

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} A^k \mathbf{x}_0 = \lambda_1{}^k c_1 \mathbf{v}_1, \tag{2.2}$$

pri čemu ovdje podrazumijevamo konvergenciju po koordinatama.

Dosadašnji račun je vrijedio za svaki $\mathbf{x}_0$. Sada pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0$ takav da je $c_1 \neq 0$. Budući da je $\lambda_1 \neq 0$ i $\mathbf{v}_1 \neq 0$, vrijedi $\lambda_1{}^k c_1 \mathbf{v}_1 \neq 0$, pa je ovo svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1, dakle dominantni svojstveni vektor. □

Primjer 2.1.4. *Aproksimirajmo dominantni svojstveni vektor matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *koristeći metodu opisanu u prethodnom teoremu.*

Uzmimo $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *za početni vektor. Tada*

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

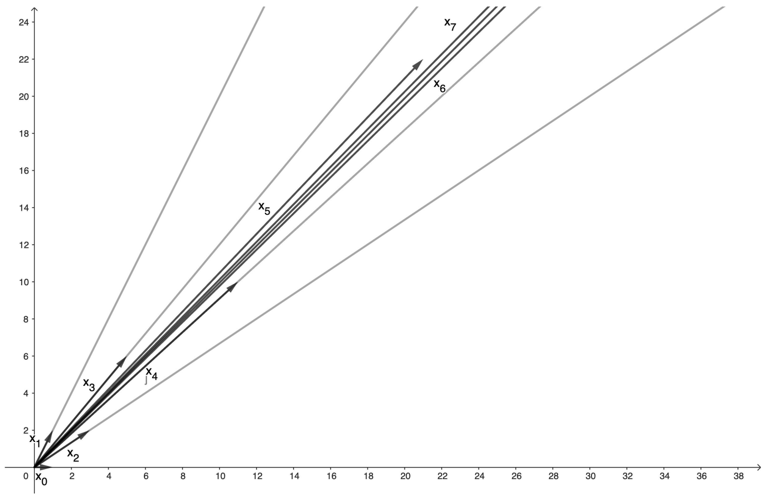
$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

U sljedećoj tablici su dani vektori $\mathbf{x}_k, k = 0, 1, \ldots, 8$*:*

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 43 \\ 42 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 85 \\ 86 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 171 \\ 170 \end{bmatrix}$

Tablica 2.1: Prikaz iteracija pri traženju dominantnog svojstvenog vektora

Na slici 2.1 nalazi se geometrijski prikaz primjera. Znamo da će svojstveni potprostor za dominantni svojstveni vektor imati dimenziju 1*. Dakle, to će biti pravac kroz ishodište u* $\mathbb{R}^2$*. Prvih nekoliko iteracija* $\mathbf{x}_k$ *je prikazano zajedno sa smjerom koji određuju. Izgleda kao da iteracije konvergiraju pravcu kojem je vektor smjera* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$*. Da bismo potvrdili da* *je to dominantni vektor koji tražimo, trebamo promatrati r_k, omjer prve prema drugoj koordinati, koji se približava* 1 *kako k raste. Omjeri su ispisani u prvom retku tablice 2.2. Zaključujemo da je dominantni svojstveni vektor matrice A vektor* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Slika 2.1: Geometrijski prikaz

Kad pronađemo dominantni svojstveni vektor, tražimo pripadnu svojstvenu vrijednost. To ćemo napraviti na sljedeći način. Kako je $\mathbf{x}_k$ *aproksimacija dominantnog svojstvenog vektora, to je* $A\mathbf{x}_k \approx \lambda_1 \mathbf{x}_k$. *S druge strane,* $A\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$. *Dakle,* $\mathbf{x}_{k+1} \approx \lambda_1 \mathbf{x}_k$.

Neka je l_k *omjer prvih koordinata vektora* $\mathbf{x}_{k+1}$ *i* $\mathbf{x}_k$. *Omjer* l_k *će se približavati* λ_1 *kako se k povećava. Omjeri su ispisani u drugom retku tablice i možemo uočiti kako se približavaju* 2, *što je dominantna svojstvena vrijednost.*

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
r_k	–	0.50	1.50	0.83	1.10	0.95	1.02	0.99	1.01
l_k	–	1.00	3.00	1.67	2.20	1.91	2.05	1.98	2.01

Tablica 2.2: Prikaz iteracija pri traženju dominantne svojstvene vrijednosti

Metoda prikazana u prethodnom primjeru ima nedostatak. Koordinate iteracija $\mathbf{x}_k$ jako brzo postaju velike i može doći do značajne pogreške pri zaokruživanju. Da bismo izbjegli ovaj nedostatak, možemo pomnožiti svaku iteraciju nekim skalarom koji će smanjiti veličine koordinata. Tako ćemo dobiti niz $(\mu_k \mathbf{x}_k)$, gdje su $\mu_k \neq 0$, za svaki k. Može se pokazati da i niz $(\mu_k \mathbf{x}_k)$ konvergira dominantnom svojstvenom vektoru, stoga je ovaj pristup prihvatljiv.

Postoje razni načini kako to možemo postići. Jedan je da normiramo svaki $\mathbf{x}_k$, odnosno da svaka iteracija bude jedinični vektor. Lakša metoda, ona koju ćemo koristiti, je da dijelimo svaki $\mathbf{x}_k$ koordinatom s maksimalnom apsolutnom vrijednosti tako da je najveća koordinata modificiranog $\mathbf{x}_k$ jednaka 1. Ovu metodu nazivamo skaliranjem. Stoga ako m_k označava koordinatu vektora $\mathbf{x}_k$ s najvećom apsolutnom vrijednosti, zamijenit ćemo $\mathbf{x}_k$ s $\mathbf{y}_k = \frac{1}{m_k}\mathbf{x}_k$.

Ilustrirat ćemo ovaj pristup u izračunima iz prethodnog primjera. Za $\mathbf{x}_0$ ništa ne mijenjamo budući da je $m_0 = 1$, stoga

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatim računamo $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ kao i prije, ali sad skaliramo s $m_1 = 2$ da bismo dobili

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sada se izračun mijenja. Uzimamo

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i skaliramo da bismo dobili

$$\mathbf{y}_2 = \frac{1}{1.5}\begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.67 \end{bmatrix}.$$

Sljedećih nekoliko izračuna prikazujemo u tablici 2.3.

Ovu metodu, koju zovemo metoda potencija uz skaliranje, rezimirat ćemo kao algoritam.

Algoritam 2.1.1 (Metoda potencija)**.** Neka je matrica $A \in M_n$ dijagonalizabilna s pripadnom dominantom svojstvenom vrijednosti λ_1.
1. Neka je $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$ proizvoljan početni vektor čija je najveća koordinata jednaka 1.
2. Ponavljamo sljedeće korake za $k = 1, 2, \ldots$:
   a) Izračunati $\mathbf{x}_k = A\mathbf{y}_{k-1}$.
   b) Neka je m_k koordinata od $\mathbf{x}_k$ s najvećom apsolutnom vrijednosti.
   c) Staviti $\mathbf{y}_k = \frac{1}{m_k}\mathbf{x}_k$.

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.5\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.67\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.83\\1.67\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.91\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.95\\1.91\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.98\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.99\\1.98\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0.67\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.83\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0.91\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.95\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0.98\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.99\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0.99\end{bmatrix}$
m_k	1	2	1.5	2	1.83	2	1.95	2	1.99

Tablica 2.3: Tablica skaliranih vektora

Primjer 2.1.5. *Pokažimo kako iskoristiti metodu potencija da bismo aproksimirali dominantnu svojstvenu vrijednost i dominantni svojstveni vektor matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -4 & 12 & -12 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Uzimajući za početni vektor $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, *dobijemo vrijednosti koje prikazujemo u tablici 2.4.*

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-4\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-9.33\\-19.33\\11.67\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8.62\\17.31\\-9.00\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8.12\\16.25\\-8.20\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8.03\\16.05\\-8.04\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8.01\\16.01\\-8.01\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8.00\\16.00\\-8.00\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.17\\-0.67\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.48\\1\\-0.60\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\-0.52\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\-0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\-0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\-0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\-0.50\end{bmatrix}$
m_k	1	6	-19.33	17.31	16.25	16.05	16.01	16.00

Tablica 2.4: Primjer 2.1.5.

Vidimo da se vektori $\mathbf{y}_k$ *približavaju vektoru* $\begin{bmatrix} 0.50 \\ 1 \\ -0.50 \end{bmatrix}$, *a skalari* m_k *broju* 16. *Slijedi da su to dominatni svojstveni vektor i dominantna svojstvena vrijednost.*

Napomena 2.1.6.

• *Ako početni vektor* $\mathbf{x}_0$ *ima koordinatu nula u smjeru dominantnog svojstvenog vektora* $\mathbf{v}_1$ *(na primjer ako je* $c_1 = 0$ *u dokazu teorema 2.1.3), tada metoda potencija neće konvergirati prema dominantnom svojstvenom vektoru. Međutim, sasvim je vjerojatno da će pri računanju daljnjih iteracija u nekom trenutku pogreška pri zaokruživanju proizvesti* $\mathbf{x}_k$ *s nenul koordinatom u smjeru* $\mathbf{v}_1$. *Tada će metoda potencija ipak konvergirati prema vektoru oblika* $\mu\mathbf{v}_1, \mu \neq 0$.

• *Metoda potencija funkcionira i u slučaju da matrica nije dijagonalizabilna, pod određenim uvjetima.*

• *Za neke matrice metoda potencija brzo konvergira prema dominantnom svojstvenom vektoru, dok za druge konvergencija može biti spora. Odgovor leži u dokazu teorema 2.1.3. Kako vrijedi* $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \geq |\frac{\lambda_3}{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\frac{\lambda_n}{\lambda_1}|$, *ukoliko je* $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$ *blizu nule, tada će se svi omjeri* $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$ *brzo približavati nuli.*

Možemo pogledati primjer 2.1.5. Svojstvene vrijednosti su 16, 4 *i* 2, *stoga* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{4}{16} = 0.25$. *Kako je* $0.25^7 \approx 0.00006$, *do sedme iteracije bismo trebali imati aproksimaciju preciznu na točnost od četiri decimale. U to smo se u prethodnom primjeru i uvjerili.*

• *Postoji alternativni način za procjenu dominantne svojstvene vrijednosti* λ_1 *matrice* A *povezan s metodom potencija. Prvo, uočimo da iz* $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ *slijedi*

$$\frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{\langle \lambda_1\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{\lambda_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \lambda_1,$$

pri čemu je $\langle\ ,\ \rangle$ *oznaka za skalarni produkt. Izraz* $R(x) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$ *naziva se* ***Rayleighjev kvocijent***. *Kako računamo iteracije* $\mathbf{x}_k$, *uzastopni Rayleighjevi kvocijenti* $R(\mathbf{x}_k)$ *se približavaju* λ_1. *Može se pokazati da je za simetrične matrice metoda Rayleighjeva kvocijenta otprilike dvostruko brža od metode potencije sa skaliranjem.*

Metoda potencija nam pomaže odrediti dominantnu svojstvenu vrijednost matrice, no kako odrediti ostale svojstvene vrijednosti? Postoje varijacije metode potencija koje se mogu primijeniti.

Metoda potencija s pomakom

Metoda potencija s pomakom koristi opservaciju da ukoliko je λ svojstvena vrijednost matrice A, tada je $\lambda - \alpha$ svojstvena vrijednost matrice $A - \alpha I$ za bilo koji skalar α. Neka su

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A takve da vrijedi $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Stoga ako je λ_1 dominantna svojstvena vrijednost od A, svojstvene vrijednosti od $A - \lambda_1 I$ će biti $0, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \ldots, \lambda_n - \lambda_1$. Sada možemo primijeniti metodu potencija da izračunamo dominantnu svojstvenu vrijednost matrice $A - \lambda_1 I$, a iz toga još jednu svojstvenu vrijednost matrice A.

Primjer 2.1.7. *Izračunajmo metodom potencija s pomakom drugu svojstvenu vrijednost matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *iz primjera 2.1.4.*

U primjeru 2.1.4, odredili smo da je $\lambda_1 = 2$. *Da bismo pronašli* λ_2, *primjenjujemo metodu potencija na*

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uzmemo za početni vektor $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Izračun je prikazan u tablici 2.5.*

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 \\ -3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	2	-3	-3	-3

Tablica 2.5: Primjer 3.2.1.

Izborom početnog vektora $\mathbf{x}_0$, *odredili smo nakon samo dvije iteracije da je svojstvena vrijednost* -3. *Stoga* $\lambda_2 - \lambda_1 = -3$, *pa je* $\lambda_2 = \lambda_1 - 3 = -1$ *druga svojstvena vrijednost matrice A.*

Inverzna metoda potencija

Prisjetimo se svojstva b) teorema 1.3.13 koje kaže da ako je matrica A invertibilna sa svojstvenom vrijednosti λ_1, onda matrica A^{-1} ima svojstvenu vrijednost $\frac{1}{\lambda_1}$. Stoga ako primijenimo metodu potencija na matricu A^{-1}, njena dominantna svojstvena vrijednost će po apsolutnoj vrijednosti biti *recipročna najmanjoj* svojstvenoj vrijednosti matrice A. Da bismo iskoristili inverznu metodu potencija, pratimo iste korake kao u metodi potencija, osim što u koraku 2.a) računamo iteraciju $\mathbf{x}_k = A^{-1}\mathbf{y}_{k-1}$. U pravilu, ne računamo matricu A^{-1} eksplicitno, nego rješavamo ekvivalentnu jednadžbu $A\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_{k-1}$ za $\mathbf{x}_k$ koristeći Gaussovu eliminaciju.

Primjer 2.1.8. *Odredimo drugu svojstvenu vrijednost matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *iz primjera 2.1.4. primjenom inverzne metode potencija.*

Započinjemo odabirom početnog vektora $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *Zatim rješavamo jednadžbu* $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_0$ *iz koje dobivamo sustav*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

čije je rješenje $x_1 = 0, x_2 = 1$. *Stoga* $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Analogno, rješavanjem jednadžbe* $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1$ *dobijemo* $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ *te skaliramo kako bismo dobili* $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. *Ponavljanjem postupka, dobijemo rezultate koje prikazujemo u tablici 2.6 te primjećujemo da vrijednosti* m_k *konvergiraju prema* -1. *Stoga najmanja svojstvena vrijednost od A je recipročna vrijednost od* -1*, što je također* -1.

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.83 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.95 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.02 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.99 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.01 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.33 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.45 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.52 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.49 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.50 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	1	0.5	1.5	-0.83	-1.1	-0.95	-1.02	-0.99	-1.01

Tablica 2.6: Primjer 3.1.6.

Inverzna metoda potencija s pomakom

Kao što samo ime kaže, ova metoda kombinira prethodne dvije. Možemo je koristiti kako bismo pronašli aproksimaciju za bilo koju svojstvenu vrijednost, uz pretpostavku da imamo približnu aproksimaciju te svojstvene vrijednosti. Drugim riječima, ako je skalar α dan, inverzna metoda potencija s pomakom će pronaći svojstvenu vrijednost λ matrice A koja je najbliža skalaru α.

Ako je λ svojstvena vrijednost od A i $\alpha \neq \lambda$, onda je matrica $A - \lambda I$ invertibilna ako α nije svojstvena vrijednost od A i $\frac{1}{\lambda-\alpha}$ je svojstvena vrijednost matrice $(A - \alpha I)^{-1}$. Ako je α jako blizu λ, onda će $\frac{1}{\lambda-\alpha}$ biti puno veća po apsolutnoj vrijednosti od sljedeće svojstvene vrijednosti te će stoga jako brzo konvergirati.

Primjer 2.1.9. *Aproksimirajmo svojstvenu vrijednost matrice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -4 & 12 & -12 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ *najbližu* 5 *koristeći inverznu metodu potencija s pomakom.*

Uz pomak, imamo

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -6 \\ -4 & 7 & -12 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sada primjenjujemo inverznu metodu potencija na matricu $A - 5I$ *uz početni vektor*

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz $(A - 5I)\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_0$ *dobivamo sustav*

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - 6x_1 = 1 \\ -4x_1 + 7x_2 - 12x_1 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

čija su rješenja $x_1 \approx -0.61, x_2 \approx -0.88, x_3 \approx -0.39$. *Slijedi* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.61 \\ -0.88 \\ -0.39 \end{bmatrix}, m_1 = -0.88$ *i* $\mathbf{y}_1 = \frac{1}{m_1}\mathbf{x} = -\frac{1}{0.88}\begin{bmatrix} -0.61 \\ -0.88 \\ -0.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 1 \\ 0.45 \end{bmatrix}$.

Nastavljamo s ovim računom kako bismo dobili vrijednosti u tablici 2.7 iz koje zaključujemo da je svojstvena vrijednost matrice A najbliža broju 5 *približno jednaka* $5+\frac{1}{m_7} \approx 5 + \frac{1}{(-1)} = 4$, *što je zapravo točna vrijednost.*

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.61\\-0.88\\-0.39\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.41\\-0.69\\-0.35\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.47\\-0.89\\-0.44\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.49\\-0.95\\-0.48\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.50\\-0.98\\-0.49\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.50\\-0.99\\-0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.50\\-1.00\\-0.50\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.69\\1.00\\0.45\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.59\\1.00\\0.51\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.53\\1.00\\0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.51\\1.00\\0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\0.50\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.50\\1\\0.50\end{bmatrix}$
m_k	1	-0.88	-0.69	-0.89	-0.95	-0.98	-0.99	-1.00

Tablica 2.7: Primjer 3.1.7.

2.2 Geršgorinov teorem

Dosad smo u ovom poglavlju proučavali nekoliko varijacija metode potencija kako bismo aproksimirali svojstvene vrijednosti matrice. Sve su varijacije iterativne, a brzina kojom konvergiraju svojstvenoj vrijednosti ovisila je o izboru početnog vektora. Kad bismo imali neke dodatne informacije o lokaciji svojstvene vrijednosti matrice, mogli bismo odabrati početni vektor kojim bismo ubrzali konvergenciju iterativnog procesa.

Nasreću, postoji način kako procijeniti lokaciju svojstvene vrijednosti bilo koje matrice. Teorem o Geršgorinovim krugovima kazuje da svojstvene vrijednosti (realne ili kompleksne) kvadratne matrice leže u uniji Geršgorinovih krugova u kompleksnoj ravnini.

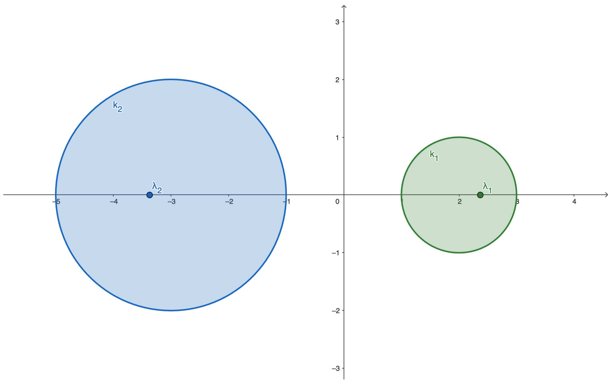
Definicija 2.2.1. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Neka r_i označava sumu apsolutnih vrijednosti elemenata i-tog reda matrice A koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali, to jest $r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Krug*

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

*naziva se i-ti **Geršgorinov krug** u kompleksnoj ravnini sa središtem a_{ii} i radijusom r_i.*

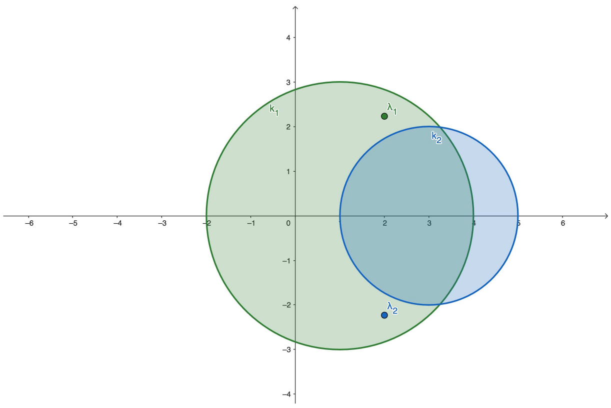
Primjer 2.2.2. *Skicirajmo Geršgorinove krugove i svojstvene vrijednosti sljedećih matrica: a) $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}$*

a) Dva Geršgorinova kruga redom imaju središta u $(2, 0)$ i $(-3, 0)$ i radijuse 1 i 2. Iz $k_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 8$ slijedi da su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 \approx 2.37$ i $\lambda_2 \approx -3.37$. Na slici 2.2 su prikazani Geršgorinovi krugovi i svojstvene vrijednosti matrice A.



Slika 2.2: Geršgorinovi krugovi za matricu A

b) Dva Geršgorinova kruga redom imaju središta u $(1, 0)$ *i* $(3, 0)$ *i radijuse* 3 *i* 2. *Iz* $k_B(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 9$ *slijedi da su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}i$ *i* $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}i$. *Na slici 2.3 su prikazani Geršgorinovi krugovi i svojstvene vrijednosti matrice B.*



Slika 2.3: Geršgorinovi krugovi za matricu B

Primijetimo kako u primjeru a) svaki krug sadrži po jednu svojstvenu vrijednost, dok u primjeru b) to nije slučaj.

Teorem 2.2.3 (Teorem o Geršgorinovim krugovima)**.** *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Svaka svojstvena vrijednost matrice* A *je sadržana u Geršgorinovom krugu sa središtem* a_{ii} *i radijusom* r_i.

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A s pripadnim svojstvenim vektorom $\mathbf{x}$. Neka je x_i nenul koordinata od $\mathbf{x}$ s najvećom apsolutnom vrijednosti. Tada iz $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, usporedbom njihovih i-tih koordinata slijedi

$$\sum_{j1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Preslagivanjem, imamo

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j \quad \text{odnosno} \quad \lambda - a_{ii} = \frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j}{x_i}$$

jer je $x_i \neq 0$. Odavde slijedi

$$|\lambda - a_{ii}| = \left|\frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j}{x_i}\right| = \frac{|\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j|}{|x_i|} \leq \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = r_i$$

jer je $|x_j| \leq |x_i|$ za $j \neq i$.

Ovim smo utvrdili da je svojstvena vrijednost λ sadržana u Geršgorinovom krugu sa središtem u a_{ii} i radijusom r_i. □

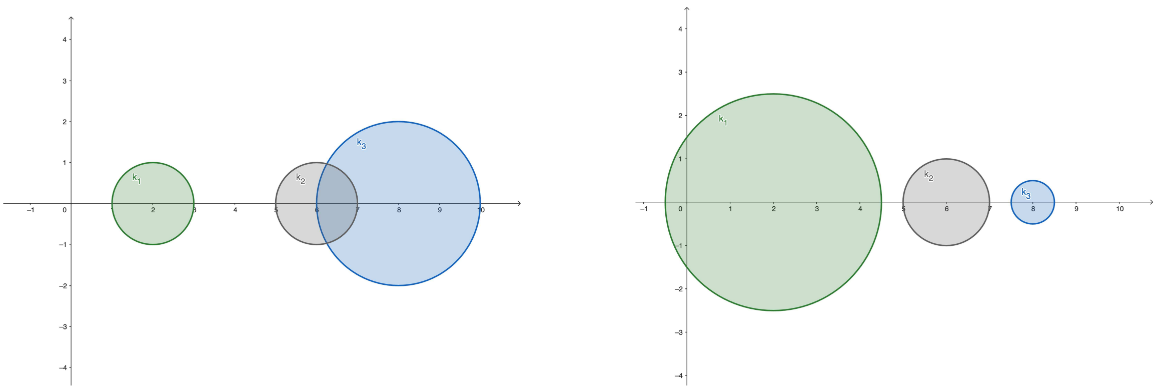
Napomena 2.2.4.
• *Kako je $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, postoji odgovarajuća verzija prethodnog teorema za Geršgorinove krugove čiji su radijusi zbroj elemenata koji se ne nalaze na dijagonali u i-tim **stupcima** matrice A.*
• *Može se pokazati da ukoliko je k Geršgorinovih krugova disjunktno u odnosu na ostale krugove, tada se točno k svojstvenih vrijednosti nalazi u uniji tih k krugova. Specijalno, ako je jedan krug disjunktan u odnosu na ostale krugove, tada on mora sadržavati točno jednu svojstvenu vrijednost matrice, kao što je bio slučaj u primjeru 2.2.2 a).*
• *Primijetimo da se u primjeru 2.2.2 a) broj* 0 *ne nalazi ni u jednom Geršgorinovom krugu, to jest,* 0 *nije svojstvena vrijednost matrice A. Stoga, bez ikakvog daljnjeg računanja, možemo zaključiti da je A invertibilna matrica. Ova opservacija je posebno korisna kada ju primijenimo na velike matrice jer Geršgorinove krugove možemo odrediti direktno iz matrice.*

Primjer 2.2.5. *Razmotrimo matricu* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. *Geršgorinov teorem nam govori kako se svojstvene vrijednosti matrice A nalaze unutar tri kruga: krug sa središtem u* $(2, 0)$ *radijusa* 1, *krug sa središtem u* $(6, 0)$ *radijusa* 6 *i krug sa središtem u* $(8, 0)$ *radijusa* 2. *Pogledajmo sliku 2.4a. Budući da je prvi krug disjunktan s preostala dva, znamo da sadrži točno jednu svojstvenu vrijednost prema drugoj točki prethodne napomene. Kako karakteristični polinom matrice A ima realne koeficijente, ukoliko ima kompleksne nultočke, one* *moraju doći u kompleksno konjugiranim parovima. Stoga postoji jedna realna svojstvena vrijednost između* 1 *i* 3*, a unija druga dva kruga sadrži dvije (realne ili kompleksne) svojstvene vrijednosti čiji se realni dijelovi nalaze između* 5 *i* 10*.*

S druge strane, prva točka u prethodnoj napomeni nam govori kako su te tri svojstvene vrijednosti sadržane u krugovima koji imaju središta redom u $(2, 0), (6, 0)$ *i* $(8, 0)$ *te radijuse* $\frac{5}{2}, 1$ *i* $\frac{1}{2}$*. Pogledajmo sliku 2.4b. Svi su krugovi međusobno disjunktni tako da svaki od njih sadrži točno jednu te stoga realnu svojstvenu vrijednost.*

Iz ova dva zaključka slijedi da matrica A ima tri realne svojstvene vrijednosti, po jednu u svakom od tri intervala: $[1, 3], [5, 7], [7.5, 8.5]$.

Sada ćemo izračunati svojstvene vrijednosti kako bismo potvrdili navedeno. Iz $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - \frac{151}{2}\lambda + 93$ *slijedi da su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 5 - \frac{38}{2} \approx 1.92$ *i* $\lambda_3 = 5 + \frac{38}{2} \approx 8.08$.



(a) Geršgorinovi krugovi za matricu A

(b) Geršgorinovi krugovi za matricu A^T

Poglavlje 3

Primjene

U ovom poglavlju istražit ćemo nekoliko primjena svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora.

3.1 Markovljevi lanci

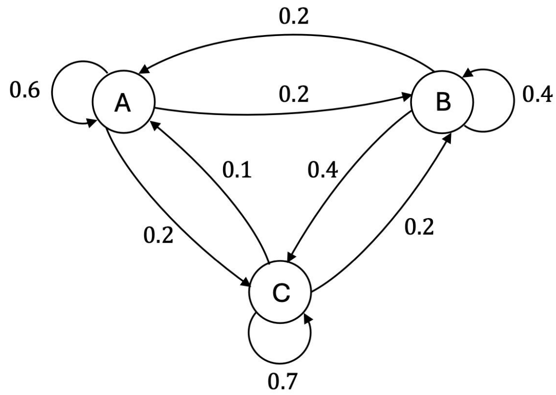
Za početak, definirajmo stupčano stohastičke matrice. To je poseban tip matrice koji se često pojavljuje u primjenama, pa ćemo za njih dokazati neka svojstva.

Definicija 3.1.1. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ako su svi elementi matrice A nenegativni, a zbroj elemenata u svakom stupcu iznosi 1, matricu nazivamo* ***stupčano stohastičkom****.*

Započet ćemo s primjenom na Markovljevim lancima. Trgovački lanac odlučio je oglasiti reklamni pano za parfem koji će pustiti u prodaju sljedeće godine. Stoga provode istraživanje kako bi odlučili koji je parfem najpopularniji kako bi ga što bolje reklamirali te postigli što veću zaradu. Testne uzorke tri vrste parfema određenih marki će podijeliti grupi od 1000 ljudi, a svakog pojedinca pitaju da ih isproba u periodu od nekoliko mjeseci. Na osnovi ovog istraživanja, tim je sastavio statistiku o preferencijama parfema marke Armani, Boss i Chanel.

Od onih koji se odluče za Armani u bilo kojem mjesecu, 60% ga nastavlja koristiti sljedeći mjesec, dok se 20% odluči za Boss i 20% za Chanel. Od onih koji koriste Boss u bilo kojem mjesecu, 40% ga nastavlja koristiti u sljedećem mjesecu, 20% se odluči za Armani i 40% za Chanel. Od onih koji koriste Chanel, 70% ga nastavlja koristiti, dok se 10% odluči koristiti Armani i 20% Boss. Ako postotke zapišemo kao decimalne brojeve i na njih gledamo kao na vjerojatnosti, možemo ih prikazati dijagramom.

Na slici 3.1 shematski prikazujemo ove podatke. Ovo je primjer konačnog **Markovljevog lanca**. Općenito, imamo proces koji se sastoji od konačnog broja *stanja*. U svakom koraku ili trenutku u vremenu, proces može biti u bilo kojem stanju; u sljedećem koraku,



Slika 3.1: Primjer Markovljevog lanca

proces može ostati u trenutnom stanju ili prijeći u jedno od sljedećih stanja. Stanje u koje se proces razvija u sljedećem koraku i vjerojatnost da se razvije ovise *samo* o trenutnom stanju, a ne o prethodnim. Ove vjerojatnosti nazivaju se **prijelazne vjerojatnosti** i pretpostavljamo da su konstantne, odnosno vjerojatnost prelaska iz stanja i u stanje j je u svakom koraku jednaka.

Primjer 3.1.2. *U opisu istraživanja parfema iznad, postoje samo tri stanja, korištenje parfema marke Armani, korištenje marke Boss i Chanel te su prijelazne vjerojatnosti prikazane na slici 3.1. Pretpostavimo da, u trenutku kad je započelo istraživanje,* 400 *ljudi koristi Armani,* 300 *Boss i* 300 *Chanel. Koliko ljudi će koristiti svaki parfem nakon jednog, a koliko nakon dva mjeseca?*

Broj korisnika Armanija nakon jednog mjeseca bit će jednak 60% *korisnika koji su ga koristili na početku kombinirano s* 20% *onih koji su koristili Boss te* 10% *onih koji su koristili Chanel, odnosno*

$$0.6 \cdot 400 + 0.2 \cdot 300 + 0.1 \cdot 300 = 330.$$

Sličnim računom, za broj korisnika marke Boss dobijemo

$$0.2 \cdot 400 + 0.4 \cdot 300 + 0.2 \cdot 300 = 260,$$

te za broj korisnika marke Chanel

$$0.2 \cdot 400 + 0.4 \cdot 300 + 0.7 \cdot 300 = 410.$$

Ove jednakosti možemo zapisati matrično kao

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 260 \\ 410 \end{bmatrix}.$$

Označimo li matricu koja se pojavljuje slijeva s P te vektore $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 330 \\ 260 \\ 410 \end{bmatrix}$, *prethodna jednakost daje* $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0$ *te možemo uočiti da su koordinate ovih vektora jednake broju korisnika pojedine marke parfema u mjesecu označenom indeksom.*

Poopćavanjem notacije, neka je $\mathbf{x}_k$ *vektor čije koordinate prikazuju distribuciju korisnika marke parfema nakon k mjeseci. Tada je*

$$\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 291 \\ 252 \\ 457 \end{bmatrix},$$

iz čega vidimo da nakon dva mjeseca imamo 291 *korisnika marke Armani,* 252 *korisnika marke Boss i* 457 *marke Chanel.*

Vektor $\mathbf{x}_k$ u prethodnom primjeru nazivamo **vektorom stanja** Markovljevog lanca, a matricu P **prijelaznom matricom**. Vrijedi

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

iz čega vidimo da iz $\mathbf{x}_0$ i P *iterativno* možemo izračunati proizvoljni vektor stanja. Dakle, Markovljev lanac je potpuno određen svojim početnim stanjem i vjerojatnostima prijelaza.

Napomena 3.1.3.

- *Ukoliko želimo promatrati udio korisnika marke parfema, rezultate možemo podijeliti ukupnim brojem ispitanika. Umjesto iščitavanja broja korisnika svake marke u k-tom mjesecu, vektor će prikazivati udio korisnika svakog parfema. Dakle, računat ćemo s vektorom*

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

Tada je $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.26 \\ 0.41 \end{bmatrix}$ *udio pojedinog parfema. Vektore s nenegativnim koordinatama, koje u zbroju daju* 1 *nazivamo* ***vjerojatnosnim vektorima****.*

- *Primijetimo kako su prijelazne vjerojatnosti složene u prijelaznu matricu P. Također, uočimo da je svaki vjerojatnosni vektor stupčano stohastička matrica. Kako su stupci matrice P vjerojatnosni vektori, slijedi da je i P stupčano stohastička matrica.*

Primijetimo da iz $\mathbf{x}_k = P\mathbf{x}_{k-1}$ slijedi

$$\mathbf{x}_k = P^k\mathbf{x}_0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pogledajmo sada potencije prijelazne matrice. U prethodnom primjeru imali smo

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.42 & 0.24 & 0.17 \\ 0.24 & 0.28 & 0.24 \\ 0.34 & 0.48 & 0.59 \end{bmatrix}.$$

Prva stvar koju uočavamo jest da je P^2 također stupčano stohastička matrica. Dokažimo da će potencija P^k stupčano stohastičke matrice P također biti stupčano stohastička matrica. U nastavku ćemo koristiti vektor $\mathbf{j} \in M_{1n}$ takav da je $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Propozicija 3.1.4. *Neka je $P \in M_n$ stupčano stohastička matrica. Tada je potencija matrice P stupčano stohastička matrica.*

Dokaz. Iz definicije stupčano stohastičke matrice P znamo da joj je zbroj svakog stupca jednak 1, što možemo zapisati u obliku $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$. Neka je P^k potencija matrice P. Vrijedi

$$\mathbf{j}P^k = \mathbf{j} \cdot P \cdot P \cdot \ldots \cdot P = \mathbf{j}. \qquad \square$$

Pogledajmo elemente matrice P^2, na primjer $(P^2)_{13} = 0.17$. Iz stanja C u stanje A možemo prijeći na tri načina. Prvi, korisnik je odlučio koristiti Armani nakon prvog mjeseca, a zatim je nastavio i nakon drugog, što računamo kao $0.1 \cdot 0.6$. Drugi, korisnik koristi Boss nakon prvog mjeseca, a zatim koristi Armani što računamo kao $0.2 \cdot 0.2$ te treći gdje korisnik nakon prvog koristi Chanel te se odlučuje za Armani što računamo kao $0.7 \cdot 0.1$. Kako su svi navedeni slučajevi disjunktni, zbrajanjem pojedinih vjerojatnosti dobivamo vjerojatnost 0.17. Analogno provjerimo za sve ostale vrijednosti. Isti argument možemo poopćiti da pokažemo da je $(P^k)_{ij}$ vjerojatnost prelaska iz stanja j u stanje i u k prijelaza.

Što će se dugoročno dogoditi s distribucijom korisnika parfema? Računat ćemo s vjerojatnosnim vektorima kao s vektorima stanja. Nastavljajući s računom te pritom zaokružujući na tri decimalna mjesta, dobivamo da je

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.300 \\ 0.300 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.330 \\ 0.260 \\ 0.410 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.291 \\ 0.252 \\ 0.457 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.271 \\ 0.250 \\ 0.479 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.260 \\ 0.250 \\ 0.490 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.255 \\ 0.250 \\ 0.495 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.253 \\ 0.250 \\ 0.497 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.251 \\ 0.250 \\ 0.499 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.251 \\ 0.250 \\ 0.499 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_9 = \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.250 \\ 0.500 \end{bmatrix}, \ldots$$

Uočavamo da vektori stanja konvergiraju prema vektoru $\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, implicirajući da će naposlijetku 25% korisnika istraživanja koristiti Armani, 25% Boss i 50% Chanel. Zaista, lako provjerimo da jednom kad dostignemo ovu distribuciju, ona se više neće mijenjati jer je

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ sa svojstvom da je $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ naziva se **stacionarni vektor stanja**. Očito je stacionarni vektor stanja svojstveni vektor od P pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Odredimo stacionarni vektor stanja u ovom primjeru.

Iz $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ slijedi $(I - P)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Zapisivanjem u sustav dobivamo

$$\begin{cases} 0.4x_1 - 0.2x_2 - 0.1x_3 = 0 \\ -0.2x_1 - 0.6x_2 - 0.2x_3 = 0 \\ -0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.3x_3 = 0 \end{cases}$$

čija su rješenja oblika $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(0.5, 0.5, 1)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$. Ako zahtijevamo da je $\mathbf{x}$ vjerojatnosni vektor, moramo imati

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0.5\alpha + 0.5\alpha + \alpha = 2\alpha.$$

Stoga $x_1 = x_2 = 0.25$ i $x_3 = 0.5$ pa je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ kao i u gornjem računu. Ukoliko želimo da je $\mathbf{x}$ distribucija korisnika, svaku koordinatu množimo s 1000 (ukupnim brojem korisnika) te dobivamo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 250 \\ 250 \\ 500 \end{bmatrix}$.

Dokažimo da za svaku prijelaznu matricu postoji stacionarni vektor stanja. Tvrdnju ćemo iskazati u terminima stupčano stohastičke matrice i svojstvenih vrijednosti.

Teorem 3.1.5. *Neka je $P \in M_n$ stupčano stohastička matrica. Tada je* 1 *svojstvena vrijednost matrice P.*

Dokaz. Kako je matrica P stupčano stohastička, znamo da vrijedi $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$. Transponirajući, imamo

$$P^T \mathbf{j}^T = (\mathbf{j}P)^T = \mathbf{j}^T$$

što implicira da je $\mathbf{j}^T$ svojstveni vektor od P pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Iz činjenice da P i P^T imaju isti spektar, slijedi da je 1 svojstvena vrijednost od P. □

Definicija 3.1.6. *Kažemo da je matrica $A \in M_n$* ***pozitivna*** *ako su joj svi elementi pozitivni.*

Teorem 3.1.7. *Neka je $P \in M_n(\mathbb{R})$ pozitivna stupčano stohastička matrica sa svojstvenom vrijednosti λ. Vrijedi*

a) $|\lambda| \leq 1$,

b) ako je neka potencija od P pozitivna matrica i $\lambda \neq 1$, onda $|\lambda| < 1$.

Dokaz. a) Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor od P^T pridružen svojstvenoj vrijednosti λ i neka je x_k koordinata vektora $\mathbf{x}$ s najvećom apsolutnom vrijednosti $m > 0$. Tada $|x_i| \leq |x_k| = m$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Uspoređujući k-te koordinate jednadžbe $P^T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, imamo

$$p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \ldots + p_{nk}x_n = \lambda x_k.$$

Djelujući s apsolutnom vrijednosti, dobivamo

$$\begin{aligned} |\lambda|m = |\lambda||x_k| = |\lambda x_k| &= |p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \ldots + p_{nk}x_n| \\ &\leq |p_{1k}x_1| + |p_{2k}x_2| + \ldots + |p_{nk}x_n| \\ &= p_{1k}|x_1| + p_{2k}|x_2| + \ldots + p_{nk}|x_n| \\ &\leq p_{1k}m + p_{2k}m + \ldots + p_{nk}m \\ &= (p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{nk})m = m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

iz čega imamo $|\lambda m| \leq m$. Dijeljenjem s m slijedi $|\lambda| \leq 1$.
b) Dokazat ćemo ekvivalentnu implikaciju: ako je $|\lambda| = 1$, onda je $\lambda = 1$. Prvo, pokažimo da tvrdnja vrijedi kad je P pozitivna. Ako je $|\lambda| = 1$, tada su sve nejednakosti u jednadžbi (3.1) jednakosti. Specijalno, vrijedi

$$p_{1k}|x_1| + p_{2k}|x_2| + \ldots + p_{nk}|x_n| = p_{1k}m + p_{2k}m + \ldots + p_{nk}m,$$

odnosno

$$p_{1k}(m - |x_1|) + p_{2k}(m - |x_2|) + \ldots + p_{nk}(m - |x_n|) = 0. \tag{3.2}$$

Kako je P pozitivna matrica, $p_{ik} > 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Također, $m - |x_i| \geq 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Stoga svaki sumand u jednadžbi (3.2) mora biti jednak nuli, a to vrijedi samo ako $|x_i| = m$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Nadalje, u nejednakosti trokuta u $\mathbb{R}$ vrijedi jednakost ako i samo ako su svi sumandi pozitivni ili su svi negativni. To jest, svi $p_{ik}x_i, i = 1, 2, \ldots n$ imaju isti predznak. Iz ovoga slijedi da

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} = m\mathbf{j}^T \quad \text{ili} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -m \\ -m \\ \vdots \\ -m \end{bmatrix} = -m\mathbf{j}^T. \tag{3.3}$$

U oba slučaja svojstveni potprostor od P^T pridružen λ je $E_\lambda = [\{\mathbf{j}^T\}]$.

Koristeći dokaz teorema 3.1.5 slijedi $\mathbf{j}^T = P^T\mathbf{j}^T = \lambda\mathbf{j}^T$ odakle je $\lambda = 1$. S ovime smo dokazali tvrdnju ukoliko je P pozitivna.

Pretpostavimo sada da je neka potencija P^k od P pozitivna. Slijedi da je P^{k+1} također pozitivna. Po teoremu 1.3.13, λ^k i λ^{k+1} su redom svojstvene vrijednosti od P^k i P^{k+1}. Upravo smo dokazali da je $\lambda^k = \lambda^{k+1} = 1$. Stoga $\lambda^k(\lambda - 1) = 0$, iz čega slijedi da je $\lambda = 1$, budući da zbog $|\lambda| = 1$ vrijedi $\lambda \neq 0$. □

Iz dokaza prethodnog teorema direktno dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.1.8. *Za pozitivnu stupčano stohastičku matricu i svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$, svojstveni vektori imaju ili sve pozitivne ili sve negativne koordinate. Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda = 1$ iznosi 1.*

Prisjetimo se, vektor stanja $\mathbf{x}_k$ je zadovoljavao jednadžbu $\mathbf{x}_k = P^k\mathbf{x}_0$. Pogledajmo što će se dogoditi s potencijama P^k kako se k povećava.

Primjer 3.1.9. *Stupčano stohastička matrica $P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ ima karakteristični polinom $k_P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.2)$ pa su njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5$ i $\lambda_3 = 0.2$. Primijetimo da smo prema prethodnom teoremu unaprijed znali da će jedna svojstvena vrijednost biti 1, a druge manje od 1 po apsolutnoj vrijednosti. Svojstveni potprostori su*

$$E_1 = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad E_{0.5} = \left[\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \quad E_{0.2} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

Uzimajući $Q = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, znamo da $Q^{-1}PQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} = D$. Analogno kao u primjeru 1.4.22, imamo

$$P^k = QD^kQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 0.5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0.2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Kako $(0.5)^k, (0.2)^k \to 0$ kada $k \to \infty$, vrijedi

$$D^k \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad P^k \to \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da su stupci matrice kojoj P^k konvergira upravo stacionarni vektori stanja. Nadalje, neka je $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ proizvoljan početni vjerojatnosni vektor, to jest vrijedi $a + b + c = 1$. Tada

$$\mathbf{x}_k = P^k \mathbf{x}_0 \to \begin{bmatrix} 0.5a + 0.5b + 0.5c \\ 0.5a + 0.5b + 0.5c \\ a + b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, vektori stanja $\mathbf{x}_k$ konvergiraju prema stacionarnom vektoru stanja $\mathbf{x}$.

Sljedećim teoremom dokazat ćemo da će vektori stanja uvijek konvergirati prema stacionarnom vektoru stanja ukoliko imamo stupčano stohastičku matricu kojoj neka potencija ima sve pozitivne elemente. Prije teorema ćemo dokazati pomoćnu lemu.

Lema 3.1.10. *Neka je $P \in M_n$ stupčano stohastička matrica kojoj je neka potencija pozitivna. Ako je P dijagonalizabilna matrica, onda algebarska kratnost dominantne svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ iznosi 1.*

Dokaz. Karakteristični polinomi matrica P i P^T su jednaki, pa imaju isti spektar te svojstvene vrijednosti imaju iste algebarske kratnosti. Iz dokaza teorema 3.1.7 b), znamo $\lambda_1 = 1$ ima geometrijsku kratnost 1 kao svojstvena vrijednost matrice P^T. Kako je P dijagonalizabilna, onda je i P^T dijagonalizabilna te je i algebarska kratnost svojstvene vrijednosti 1 matrice P^T jednaka 1 po teoremu 1.4.19. Stoga svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 1$ matrice P ima algebarsku kratnost 1. □

Teorem 3.1.11. *Neka je $P \in M_n$ stupčano stohastička matrica kojoj je neka potencija pozitivna. Matrica P^k, kada $k \to \infty$, konvergira prema matrici $L \in M_n$ čiji su svi stupci jednaki te svaki odgovara istom vektoru $\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je stacionarni vektor stanja matrice P.*

Dokaz. Da bismo pojednostavnili dokaz, tvrdnju ćemo dokazati za slučaj kad je P dijagonalizabilna. Teorem vrijedi i za općenitiji slučaj.

Dijagonaliziramo P kao $Q^{-1}PQ = D$ ili ekvivalentno $P = QDQ^{-1}$, pri čemu je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Iz teorema 3.1.5 i 3.1.7, znamo da je svaka svojstvena vrijednost λ_i ili 1 ili zadovoljava $|\lambda_i| < 1$. Stoga, kako $k \to \infty$, λ_i^k konvergira prema 1 ili 0 za $i = 1, \ldots, n$. Slijedi da D^k

konvergira prema dijagonalnoj matrici, označimo je s D^*, kojoj je svaki element 0 ili 1. Stoga $P^k = QD^kQ^{-1}$ konvergira prema $L = QD^*Q^{-1}$. Vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} P^k = L.$$

Primijetimo da

$$PL = P\lim_{k\to\infty} P^k = \lim_{k\to\infty} P^{k+1} = L.$$

Stoga je svaki stupac matrice L svojstveni vektor matrice P pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$. Da bismo se uvjerili da je svaki stupac matrice L vjerojatnosni vektor, odnosno da je L stupčano stohastička, trebamo provjeriti da vrijedi

$$\mathbf{j}L = \mathbf{j}\lim_{k\to\infty} P^k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{j}P^k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{j} = \mathbf{j},$$

što je istina budući da je P^k stupčano stohastička matrica prema propoziciji 3.1.4.

Preostalo je još pokazati da su stupci matrice L jednaki, stoga pogledajmo i-ti stupac koji je jednak $\mathbf{e}_i$, pri čemu je $\mathbf{e}_i$ i-ti vektor kanonske baze. Neka su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ svojstveni vektori matrice P koji čine bazu za M_{n1} te je $\mathbf{v}_1$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$. Zapišimo $\mathbf{e}_i$ kao linearnu kombinaciju u toj bazi. Dobivamo

$$\mathbf{e}_i = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Po teoremu 1.3.15

$$P^k\mathbf{e}_i = c_1 1^k\mathbf{v}_1 + c_2{\lambda_2}^k\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n{\lambda_2}^n\mathbf{v}_n.$$

Prema lemi 3.1.10, $\lambda_j \neq 1$ za $j \neq 1$. Stoga po teoremu 3.1.7 b) $|\lambda_j| < 1$ za $j \neq 1$. Dakle, ${\lambda_j}^k \to 0$ kako $k \to \infty$ za $j \neq 1$. Slijedi da

$$L\mathbf{e}_i = \lim_{k\to\infty} P^k\mathbf{e}_i = c_1\mathbf{v}_1.$$

Drugim riječima, stupac i matrice L je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$. No pokazali smo da su stupci od L vjerojatnosni vektori, stoga za $L\mathbf{e}_i$ vrijedi da je oblika $\mu\mathbf{v}_1, \mu \neq 0$, pri čemu je μ jedinstven te je suma koordinata od $\mathbf{v}_1$ jednaka 1. Kako ovo vrijedi za bilo koji stupac od L, slijedi da su svi stupci od L jednaki vektoru $\mathbf{x}$. □

Još ćemo dokazati da je stacionarni vektor stanja $\mathbf{x}$ neovisan o početnom stanju.

Teorem 3.1.12. *Neka je $P \in M_n$ stupčano stohastička matrica kojoj je neka potencija pozitivna te neka je $\mathbf{x}$ stacionarni vektor stanja matrice P. Za proizvoljan početni vjerojatnosni vektor $\mathbf{x}_0$, niz iteracija $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, pri čemu vrijedi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Kako je $\mathbf{x}_k = P^k\mathbf{x}_0$, moramo pokazati da $\lim_{k\to\infty} P^k\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$. Prema prethodnom teoremu, $L = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x} \end{bmatrix}$ i $\lim_{k\to\infty} P^k = L$. Stoga

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P^k\mathbf{x}_0 &= (\lim_{k\to\infty} P^k)\mathbf{x}_0 = L\mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x} + \ldots + \alpha_n\mathbf{x} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\mathbf{x} = \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

□

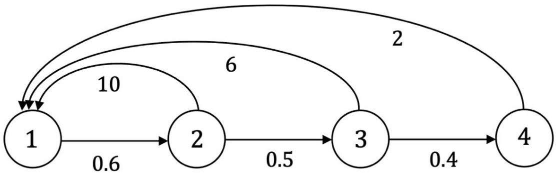
3.2 Populacijski rast

Lesliejev matrični model jedan je od najpoznatijih modela populacijskog rasta koji opisuje rast populacije nekog staništa uz pretpostavku da ne dolazi do migracije te da su uvjeti poput prostora i hrane neograničeni. U razmatranje uzima samo jedan spol, najčešće ženski. Odabrani spol dijeli se u dobne skupine od kojih svaka ima jednak broj godina. Koristeći podatke o prosječnim stopama nataliteta i vjerojatnosti preživljavanja svake vrste, model može odrediti rast populacije u vremenu. U sljedećem primjeru uvest ćemo **Lesliejevu matricu**, kao i **vektor populacije** čije će koordinate predstavljati broj jedinki po dobnim skupinama.

Primjer 3.2.1. *Dabrovi (lat. Castor) su drugi po veličini glodavci koji teže do* 50 *kilograma. Zanimljivi su po svom utjecaju na ekosustav. Pomoću granja, obližnje vegetacije, kamenja i mulja grade brane i nastambe. Brane stvaraju močvarna područja važna za brojne druge vrste. Žive najviše* 12 *godina. Spolno sazrijevaju s tri godine. Oplođena ženka godišnje okoti do četiri mladunca.*

Za potrebe modela, proučavat ćemo ženke i podijelit ćemo ih u četiri skupine odnosno četiri intervala: mladunci $\langle 0, 3]$ *godine,* $\langle 3, 6]$ *mladi,* $\langle 6, 9]$ *zreli i* $\langle 9, 12]$ *stari. Period od tri godine ćemo zvati* ***faza****. Mladunci nisu spolno zreli, mladi u jednoj fazi okote u prosjeku deset novih jedinki, zreli šest jedinki, a stari dvije.*

Stopa preživljavanja za mladunce je 60%*, to jest vjerojatnost da će mladunci doživjeti mladenačku dob je* 0.6*. Stopa preživljavanja mladih je* 50% *te zrelih* 40%*. Pretpostavimo da je početna populacija* 80 *dabrova, i to* 30 *mladunaca,* 20 *mladih,* 20 *zrelih i* 10 *starih.*



Slika 3.2: Model populacije dabrova

Odredimo predviđanje populacije dabrova za sljedeće četiri faze, to jest dok ne nastane smjena jednog naraštaja.

Nakon prve faze, odnosno nakon tri godine od početka promatranja, broj mladunaca će biti jednak broju koji se okotio u te tri godine, što je

$$20 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 2 = 340.$$

Broj mladih će biti jednak broju mladunaca koji je preživio što je

$$30 \cdot 0.6 = 18.$$

Slično, broj zrelih će biti jednak broju mladih koji je preživio, to jest

$$20 \cdot 0.5 = 10,$$

a broj starih broju zrelih koji je preživio, odnosno

$$20 \cdot 0.4 = 8.$$

Ove rezultate možemo zapisati matrično kao

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 6 & 2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 18 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ili $L\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$, *gdje je* L *matrica koja se pojavljuje slijeva,* $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ *vektor distribucije početne populacije, a* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 340 \\ 18 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$ *distribucija nakon jedne godine. Iako ih interpreti-*

ramo na različite načine, vidimo da je struktura jednadžbe jednaka kao i kod Markovljevog lanca: $\mathbf{x}_{k+1} = L\mathbf{x}_k$ *za* $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Iterativnim računanjem možemo odrediti daljnje vektore distribucije populacije.*

Računamo

$$\mathbf{x}_2 = L\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 316 \\ 272 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = L\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 256 \\ 204 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_4 = L\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2102 \\ 154 \\ 102 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Stoga model predviđa da će nakon četiri faze, odnosno 12 *godina, biti približno* 2102 *mladunca ženskih dabrova,* 154 *mlada,* 102 *zrela i* 57 *starih. Budući da se radi o broju jedinki, rezultate smo zaokružili na cijeli broj.*

Matrica L u prethodnom primjeru naziva se Lesliejeva matrica. Općenito, ako imamo populaciju s n dobnih skupina jednakog trajanja, L će biti kvadratna matrica reda n oblika

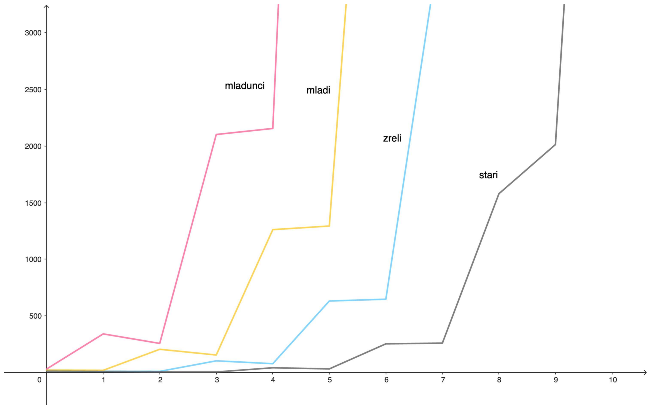
$$L = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovdje su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ parametri rođenja (r_i je prosječan broj ženki dobiven od svake ženke u skupini i) i $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ su vjerojatnosti preživljavanja (p_i je vjerojatnost da ženka u dobnoj skupini i preživi do dobne skupine $i + 1$).

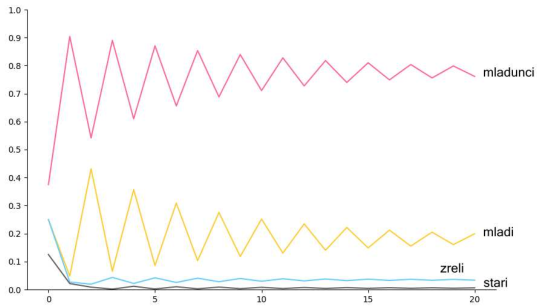
Na slici 3.3, prikazan je rast populacije po dobnim skupinama. Ono što možemo primijetiti jest da populacija neprestano raste uz manje oscilacije unutar dobnih skupina. Pitamo se kako možemo primijeniti stacionarni vektor stanja ako populacija neprestano raste. (U primjeru s distribucijom korisnika parfema, vidjeli smo da već nakon nekoliko iteracija dolazi do stagnacije, to jest daljnje iteracije se počinju ponavljati.)

Ako bismo umjesto populacije grafički prikazali *relativnu populaciju* po dobnim skupinama, dobili bismo drukčiji uzorak. Na grafu 3.4 vidimo da omjeri dobnih skupina s vremenom postižu stacionarnu distribuciju, odnosno uočavamo da se vrijednosti približavaju stacionarnom vektoru stanja.

Da bismo prikazali relativnu populaciju, trebamo izračunati udio populacije svake dobne skupine u svakoj godini, to jest trebamo podijeliti svaki vektor populacije sumom njegovih



Slika 3.3: Rast populacije dabrova



Slika 3.4: Udio populacije dabrova

koordinata. Na primjer, nakon jedne faze, imali bismo

$$\frac{1}{376}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.05 \\ 0.03 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

što nam govori da 90% populacije sačinjavaju mladunci, 5% mladi, 3%zreli i 2% stari. Zaokruživanjem koordinata na dva decimalna mjesta, dobijemo da je stacionarni vektor stanja u ovom primjeru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 145.48 \\ 33.65 \\ 6.49 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Skaliranjem podataka dobijemo da će dugoročno gledano 78% populacije sačinjavati mladunčad, 18% mladi, 3% zreli i 1% stari, odnosno distribucija populacije po dobnim skupinama je u omjeru 78 : 18 : 3 : 1.

Dobne skupine ove populacije se ustabile jednom kad dođu do stanja prikazanog vektorom $\mathbf{x}$. Za sljedeću godinu, omjeri su dani kao

$$L\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 377.40 \\ 87.29 \\ 16.82 \\ 2.60 \end{bmatrix} \approx 2.6\mathbf{x}$$

te se lako možemo uvjeriti da su koordinate i dalje u istom omjeru. Broj 2.6 možemo interpretirati kao *brzinu rasta* populacije jednom kad populacija dosegne svoje stacionarno stanje.

Dakle, uočavamo da je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor matrice L pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2.6$. Stoga brzina rasta stacionarnog stanja je *pozitivna* svojstvena vrijednost od L, a vektor pridružen toj svojstvenoj vrijednosti predstavlja *udjele* veličina dobnih skupina jednom kad je dosegnuto stacionarno stanje. Njih možemo izračunati direktno, bez računanja iteracija i njihovog limesa.

Primjer 3.2.2. *Odredimo brzinu rasta stacionarnog stanja i odgovarajuće omjere dobnih skupina za Lesliejevu matricu L iz prethodnog primjera.*

Računamo svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore matrice L. Karakteristični polinom matrice L je $k_L(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda - 1.8\lambda + 2.4$. *Realna rješenja karakteristične jednadžbe su* $\lambda_1 \approx -2.29$ *i* $\lambda_2 \approx 2.59$ *pa je pozitivna svojstvena vrijednost* λ_2.

Odredimo svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2. *Rješavamo sustav* $(L - \lambda_2 I)\mathbf{x} = 0$ *koji se svodi na relacije* $x_1 = 144.48x_4, x_2 = 33.65x_4$ *i* $x_3 = 6.49x_3$. *Svojstveni potprostor je*

$$E_{\lambda_2} = \left[\left\{\begin{bmatrix} 145.48 \\ 33.65 \\ 6.49 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

Dakle, brzina rasta stacionarnog stanja je približno jednaka 2.6 *i jednom kada se to stanje dosegne, kao što smo već vidjeli, broj pripadnih jedinki svake dobne skupine će neprestano rasti, ali će omjeri među dobnim skupinama ostati stalni.*

U prethodnom primjeru rješavanjem karakteristične jednadžbe dobili smo samo jednu pozitivnu realnu svojstvenu vrijednost, stoga je to bio jedini kandidat za brzinu rasta stacionarnog stanja. Njoj pridružen svojstveni vektor imao je pozitivne koordinate što nam je omogućilo da ih usporedimo s veličinom populacije. Što kada to ne bi bio slučaj? Što ako bismo imali više pozitivnih svojstvenih vrijednosti ili ne bismo mogli pronaći vektor čije su sve koordinate pozitivne? Sljedećim teoremom dokazat ćemo da *svaka* Lesliejeva matrica ima točno jednu pozitivnu svojstvenu vrijednost te da joj je pridružen svojstveni vektor s pozitivnim koordinatama.

Prisjetimo se da je općeniti oblik Lesliejeve matrice

$$L = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Kako elementi p_j predstavljaju vjerojatnost preživljavanja, pretpostavit ćemo da su svi različiti od nule jer bi inače populacija brzo izumrla. Zbog istog razloga ćemo pretpostaviti i da je barem jedan od parametara rođenja $r_i \neq 0$. Uz ove pretpostavke, dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 3.2.3. *Svaka Lesliejeva matrica ima jedinstvenu pozitivnu svojstvenu vrijednost i pridružen svojstveni vektor s pozitivnim koordinatama.*

Dokaz. Neka je L matrica u jednadžbi (3.4). Karakteristični polinom od L je

$$\begin{aligned} k_L(\lambda) &= \det(L - \lambda I) \\ &= (-1)^n(\lambda^n - r_1\lambda^{n-1} - r_2p_1\lambda^{n-2} - r_3p_1p_2\lambda^{n-3} - \ldots - r_np_1p_2\cdots p_{n-1}) \\ &= (-1)^n f(\lambda). \end{aligned}$$

Svojstvene vrijednosti od L su nultočke polinoma f. Kako je bar jedan od parametara rođenja r_i pozitivan i sve vjerojatnosti preživljavanja p_i su pozitivne, koeficijenti od f alterniraju predznake točno jednom. Stoga po Descartesovom pravilu predznaka f ima točno jednu pozitivnu nultočku. Nazovimo je λ_1.

Direktnim računanjem, možemo provjeriti da je svojstveni vektor pridružen λ_1 jednak

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{p_1}{\lambda_1} \\ \frac{p_1p_2}{\lambda_1{}^2} \\ \frac{p_1p_2p_3}{\lambda_1{}^3} \\ \vdots \\ \frac{p_1p_2p_3\cdots p_{n-1}}{\lambda_1{}^{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Sve koordinate su očito pozitivne jer su p_i i λ_1 pozitivni. $\square$

Može se dokazati i puno više. Uz uvjet da su dva susjedna parametra rođenja r_i i r_{i+1} pozitivni, dobije se da je jedinstvena pozitivna svojstvena vrijednost ujedno i dominantna svojstvena vrijednost.

3.3 Rangiranje sportskih timova i pretraživanje interneta

Rangiranje sportskih timova

Svakodnevno imamo priliku čitati o sportskim uspjesima sportaša ili sportskih timova. Često znamo napamet informacije o njihovim pozicijama na raznoraznim ljestvicama te uspoređujemo koji je igrač ili tim bolji. Ljestvice su intuitivne i rijetko ćemo dovesti u pitanje zašto je neki tim na nekoj poziciji u odnosu na neki drugi. No zašto ih rangiramo na baš taj način te koji je to način? Gledamo li koji tim ima najviše pobjeda? Ako tako pokušamo rangirati, uzimamo li u obzir protiv koga su te pobjede ostvarene? Možda je najbolji tim ostvario velik broj pobjeda natječući se protiv slabijih, dok je neki drugi tim ostvario manji broj, ali protiv snažnijih protivnika. Kako usporediti dva tima koja nikad nisu igrala jedan protiv drugog? Trebaju li se bodovi uzeti u obzir? No opet, bodovi protiv koga?

Možemo primijetiti da se nameću brojna pitanja. Postoje različite sheme kojima možemo rangirati sportaše i često su komplicirane, ali ćemo u nastavku steći uvid u proces koristeći metode koje smo dosad vidjeli u ovom poglavlju na pojednostavljenom modelu.

Prvo ćemo definirati neke pojmove iz diskretne matematike koje ćemo koristiti.

Graf se sastoji od konačnog broja vrhova i bridova koji spajaju dva (ne nužno različita) vrha. Brid koji spaja isti vrh sam sa sobom nazivamo **petljom**. Za graf kažemo da je **usmjeren** ili **digraf** ako ima usmjerene bridove. **Put** je niz bridova kojim se možemo neprekidno kretati od jednog vrha do drugog. **Duljina puta** je broj bridova koje put sadrži, a putove koji se sastoje od k bridova ćemo zvati k**-putovi**. Ukoliko put započinje i završava istim vrhom, zvat ćemo ga **ciklus**. Graf kojem svaka dva vrha spaja jedan brid nazivamo **potpunim**, a potpuni graf koji nema petlji nazivat ćemo **jednostavnim**.

Neke informacije o grafu možemo zapisati matrično kako bismo olakšali računanje. Ovo je posebno važno za velike grafove. Sljedeća definicija pokazat će odnos digrafa i matrica.

Definicija 3.3.1. *Neka je G digraf s n vrhova. Kažemo da je matrica A ili $A[G] \in M_n$ definirana s*

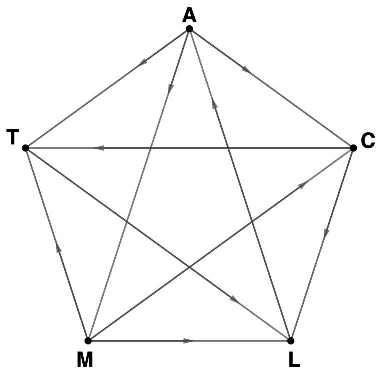
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako postoji brid iz vrha } i \textit{ do vrha } j \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

matrica susjedstva *digrafa G.*

Ovakva definicija postoji i za grafove koji nisu digrafi. Tada je matrica susjedstva nužno simetrična jer ukoliko postoji brid koji od vrha i do vrha j povezuje vrhove i i j, tada taj isti brid povezuje od vrha j do vrha i vrhove j i i. Također, elementi na dijagonali a_{ii} će biti nula osim ako postoji petlja u vrhu i. Ponekad iste vrhove spaja više bridova pa možemo izmijeniti definiciju tako da a_{ij} predstavlja broj bridova između dva vrha.

Ako je A matrica susjedstva grafa G, tada element na poziciji (i, j) matrice A^k predstavlja broj k-putova između vrhova i i j.

Primjer 3.3.2. *Pet nogometnih klubova (Arsenal, Chelsea, Liverpool, Manchester United, Tottenham Hotspur) natječu se u kružnom turniru u kojem svaki klub igra točno jednom protiv svakog. Slika 3.5 prikazuje rezultate turnira. Usmjereni brid iz vrha i u vrh j znači da je klub i pobijedio klub j. (Ovo je specijalni slučaj digrafa. Digraf koji je jednostavan naziva se* ***turnir****.)*



Slika 3.5: Turnir

Matrica susjedstva digrafa na slici 3.5 je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je poredak vrhova određen abecednim redom. Dakle, u retcima su zapisani rezultati utakmica svakog tima abecednim redom, dok su u stupcima zapisani rezultati utakmica protivničkih timova u odnosu na tim čiji je pripadni stupac. Na primjer, Arsenalove rezultate protiv ostalih timova čitamo iz prvog retka dok u prvom stupcu vidimo kako su drugi *timovi odigrali protiv Arsenala. Iz prvog retka vidimo da je Arsenal pobijedio Chelsea, Manchester United i Tottenham. Iz prvog stupca možemo uočiti da je Arsenal izgubio jedino od Liverpoola jer njemu odgovara treći redak na čijem je presjeku s prvim stupcem jedini element s koordinatom* 1. *Primijetimo da na dijagonali svi elementi moraju biti jednaki nuli budući da tim ne može igrati sam protiv sebe.*

Pretpostavimo da želimo rangirati klubove po ostvarenim pobjedama na utakmicama. Jedan od načina je da prebrojimo njihove pobjede. Primijetimo da je broj pobjeda pojedinog kluba suma elemenata u pripadnom retku što računamo kao umnožak $A\mathbf{j}$.

Imamo

$$A\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iz čega dobivamo sljedeći poredak: prvo mjesto dijele Arsenal i Manchester, na drugom mjestu se nalazi Chelsea, dok treće mjesto dijele Liverpool i Tottenham.

Problem nastaje u činjenici da neki klubovi dijele mjesta što ne jamči da su jednako dobri. Na primjer, Arsenal može argumentirati da kako je pobijedio Manchester, zaslužuje prvo mjesto. Tottenham može imati isti argument za Liverpool. No Liverpool može imati argument da ima tri "indirektne" pobjede budući da je pobijedio Arsenal koji je pobijedio tri druga tima, a Tottenham ima samo jednu "indirektnu" pobjedu.

Kako u grupi u kojoj imamo izjednačenje ne postoji klub koji je pobijedio sve ostale, argument indirektne pobjede ima više smisla. Štoviše, indirektna pobjeda odgovara dvokoračnom putu u digrafu, tako da možemo koristiti kvadrat matrice susjedstva. Da bismo izračunali i pobjede i indirektne pobjede za svaki klub, trebamo izračunati sumu retka matrice $A + A^2$, *što dobivamo iz*

$$(A + A^2)\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Stoga bismo rangirali klubove: Arsenal, Manchester, Chelsea, Liverpool, Tottenham. Nažalost, ovaj pristup ne garantira da neće preostati neka izjednačenja. Kao što možemo vidjeti, u matrici iznad smo dobili dvije iste koordinate. Da nismo uspjeli već prije odijeliti Chelsea od Liverpoola na temelju broja pobjeda, morali bismo potražiti drukčiji pristup.

Neka i *i* j *predstavljaju indeks ranga kluba. Ono što bismo htjeli je da možemo napraviti ljestvicu s poretkom klubova takvu da za rang* r_i *kluba* i *vrijedi* $r_i > r_j$, *odnosno da je klub* i *rangiran više od kluba* j. *U ovu svrhu, pretpostavimo da* $0 \leq r_i \leq 1$ *označavaju* *vjerojatnosti za svaki i te da vrijedi*

$$r_A + r_C + r_L + r_M + r_T = 1. \tag{3.5}$$

Zapišimo rangove klubova u vektor ranga

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_A \\ r_C \\ r_L \\ r_M \\ r_T \end{bmatrix}.$$

Nadalje, želimo da rang kluba i bude proporcionalan sumi rangova klubova koje je pobijedio, stoga uvodimo realni parametar $\alpha \in (0, 1]$. *Na primjer, neka je Arsenal pobijedio Chelsea, Manchester i Tottenham. Želimo*

$$r_A = \alpha(r_C + r_M + r_T).$$

Ispišemo li analogno jednadžbe za sve ostale klubove, dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} r_A = \alpha(r_C + r_M + r_T) \\ r_C = \alpha(r_L + r_T) \\ r_L = \alpha r_A \\ r_M = \alpha(r_C + r_L + r_T) \\ r_T = \alpha r_L \end{cases}.$$

Primijetimo da prethodni sustav možemo zapisati matrično kao

$$\mathbf{r} = \alpha A\mathbf{r} \quad \textit{odnosno} \quad \begin{bmatrix} r_A \\ r_C \\ r_L \\ r_M \\ r_T \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_A \\ r_C \\ r_L \\ r_M \\ r_T \end{bmatrix}.$$

Prethodnu jednadžbu možemo zapisati ekvivalentno u obliku $A\mathbf{r} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{r}$ *iz čega vidimo da je* $\mathbf{r}$ *svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti* $\frac{1}{\alpha}$.

Rješavanjem karakteristične jednadžbe matrice A, dobivamo da je $\lambda \approx 1.719$ *jedina realna svojstvena vrijednost te joj je pridružen svojstveni vektor* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2.958 \\ 1.582 \\ 1.719 \\ 2.501 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Uzimajući* *u obzir jednadžbu* (3.5)*, skaliramo vrijednosti matrice te zaokružujući na dva decimalna mjesta, za vektor ranga dobijemo*

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.16 \\ 0.18 \\ 0.26 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

pa bismo klubove poredali na ljestvici u poretku Arsenal, Manchester, Liverpool, Chelsea, Tottenham što odgovara načinu na koji smo ih rangirali prethodno.

Modificirajući matricu A, možemo uzeti u obzir mnoge složenije uvjete koje smo spomenuli u uvodnom paragrafu. Ovaj primjer služi za prikaz korisnog pristupa problemu rangiranja igrača ili timova.

Google matrica

Sada ćemo prikazati kako, na sličan način kao kod rangiranja sportskih timova, funkcionira pretraživanje interneta. Stvarni algoritmi koje Google koristi su puno kompliciraniji i imaju puno više uvjeta na model, no mi ćemo na jednostavnom primjeru prikazati glavnu ideju.

U prošlosti, internetski pretraživači sortirali bi rezultate prema najvećem broju pojavljivanja pretraženog pojma. Često bi se korisne stranice zatrpale među onima koje su manje relevantne te je trebalo puno listanja kako bismo došli do onog što zaista tražimo. No iako se neki pojam puno puta pojavio na stranici, to ne mora značiti da ona sadrži korisne informacije o traženom pojmu.

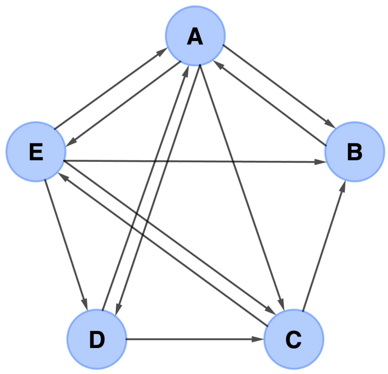
Zamislimo internet kao mrežu koja se sastoji od stranica koje mogu, ali ne moraju biti međusobno povezane. Uzmimo za primjer stranicu P te zamislimo da je ona povezana sa stranicom R koja je već povezana s 50 drugih stranica. Kako je P povezana samo s jednom stranicom, a R s 50, možemo reći da je R važnija. Nailazimo na problem u tome što možemo stvoriti nove stranice koje ćemo povezati sa stranicom P kako bi imala više poveznica od R te tako imala veću važnost.

Google koristi algoritam koji se zove ***PageRank*** algoritam, prema kojem na važnost stranice ne utječe samo broj stranica s kojima je povezana, nego i njihova važnost.

Svakoj stranici se pridruži realan pozitivan broj, rang stranice (kao što smo imali rang sportskih timova), uz pravilo da, ako je stranica P povezana na k stranica, tada svaka od tih stranica nasljeđuje $\frac{1}{k}$ ranga stranice P. U slučaju da stranica nema poveznica, podrazumijevat ćemo da sve stranice interneta nasljeđuju jednaki dio ranga te stranice. To jest, ako internet ima n stranica, a stranica P ne sadrži nijednu poveznicu, tada sve stranice nasljeđuju $\frac{1}{n}$ ranga stranice P.

Primjer 3.3.3. *Uzmimo internet koji se sastoji od pet stranica. Nazovimo ih A, B, C, D, E te povežimo kao na slici 3.6 pri čemu strelice predstavljaju poveznice.*

Strelica od A do B označava da je stranica A povezana na stranicu B. Iz toga slijedi da B prima $\frac{1}{4}$ ranga stranice A, budući da je A povezana na 4 stranice.



Slika 3.6: Pojednostavljeni model interneta

Neka su r_A, r_B, r_C, r_D, r_E redom rangovi stranica A, B, C, D, E. Tada imamo

$$\begin{cases} r_A = r_B + \frac{1}{2}r_D + \frac{1}{4}r_E \\ r_B = \frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_C + \frac{1}{4}r_E \\ r_C = \frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_D + \frac{1}{4}r_E \\ r_D = \frac{1}{4}r_A + \frac{1}{4}r_E \\ r_E = \frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_C. \end{cases}$$

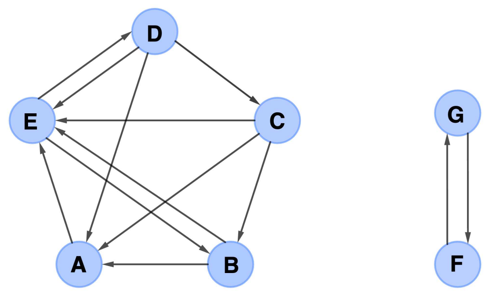
Kao i kod sportskih timova, skaliramo rangove te podrazumijevamo da vrijedi

$$r_A + r_B + r_C + r_D + r_E = 1.$$

No može se dogoditi da imamo internet koji se sastoji od više (zbog jednostavnosti uzmimo dva) digrafa koji nisu međusobno spojeni. Neka je pet stranica spojeno na sličan način kao na slici ispod, a dvije stranice čine zaseban digraf (slika 3.7).

Kako se naš internet sastoji od dva digrafa koja nisu međusobno povezana, problem nastaje u tome što, ukoliko korisnik odabere jednu od stranica iz prvog digrafa, ne može slijedeći poveznice doći do neke od stranica drugog digrafa. Na primjer, odabere li stranicu B, ne postoji način da dospije do stranice G.

Stoga ćemo morati uvesti izmjene u postojeći model te razmatrati da korisnik povremeno iznova pretražuje, to jest na slučajan način bira novu početnu stranicu interneta uz



Slika 3.7: Internet sa sedam stranica

pretpostavku da je vjerojatnost da će korisnik resetirati početnu stranicu manja od vjerojatnosti da će slijediti poveznicu s već odabrane stranice.

Dakle, uvodimo broj α koji predstavlja vjerojatnost da će korisnik slijediti poveznicu s već odabrane stranice. Tada je $1 - \alpha$ vjerojatnost da će slučajnim izborom odabrati novu stranicu među postojećim. Obično uzimamo $\alpha \in [0.85, 1]$.

Sada se vratimo na početni model sa slike 3.6. Uz uvedene preinake modela, imamo

$$r_A = \alpha\left(r_B + \frac{1}{2}r_D + \frac{1}{4}r_E\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E),$$

budući da se naš model sastoji od pet stranica.

Napravimo isto za rangove ostalih stranica te dobijemo sustav

$$\begin{cases} r_A = \alpha\left(r_B + \frac{1}{2}r_D + \frac{1}{4}r_E\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E) \\ r_B = \alpha\left(\frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_C + \frac{1}{4}r_E\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E) \\ r_C = \alpha\left(\frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_D + \frac{1}{4}r_E\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E) \\ r_D = \alpha\left(\frac{1}{4}r_A + \frac{1}{4}r_E\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E) \\ r_E = \alpha\left(\frac{1}{4}r_A + \frac{1}{2}r_C\right) + (1-\alpha)\frac{1}{5}(r_A + r_B + r_C + r_D + r_E). \end{cases}$$

Uz vektor ranga $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \\ r_D \\ r_E \end{bmatrix}$ *i*

$$G = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gornji sustav možemo zapisati kao

$$G\mathbf{r} = \mathbf{r}.$$

Matrica G je pozitivna stupčano stohastička matrica, a $\mathbf{r}$ *svojstveni vektor matrice G pridružen svojstvenoj vrijednosti* 1*. Prema korolaru 3.1.8 znamo da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti* 1 *jednaka* 1 *te da postoji svojstveni vektor čije su sve koordinate pozitivne. Ako još dodamo zahtjev da je zbroj koordinata svojstvenog vektora jednak* 1*, takav svojstveni vektor je jedinstven i njegove koordinate su prema predstavljenom modelu rangovi internetskih stranica. Uzmemo li $\alpha = 0.9$, dobijemo da je vektor ranga*

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \\ r_D \\ r_E \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.21 \\ 0.18 \\ 0.13 \\ 0.17 \end{bmatrix}.$$

Prema postavljenom modelu, redoslijed važnosti stranica glasi: A, B, C, E, D.

Matrica G konstruirana na ovaj način naziva se **Google matrica**. Ako se internet sastoji od n stranica, G je matrica reda n. Rangove internetskih stranica dobivamo iz svojstvenog vektora stupčano stohastičke matrice G pridruženog svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$.

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra*, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2022., https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/LA-udzbenik.pdf, (pristupljeno 8. svibnja 2024.)

[4] D. Poole, *Linear Algebra, A Modern Introduction, Third Edition*, Brooks/Cole, 2011.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*, skripta s predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2012.

[6] Beaver, https://en.wikipedia.org/wiki/Beaver, (pristupljeno 12. lipnja 2024.)

[7] Leslie Matrix Models - Biology LibreTexts, https://bio.libretexts.org/Courses/Gettysburg_College/02%3A_Principles_of_Ecology_-_Gettysburg_College_ES_211/07%3A_A_Quantitative_Approach_to_Population_Ecology/7.03%3A_Leslie_Matrix_Models#:~:text=Leslie%20Matrix%20Model%20Notation,-In%20applied%20mathematics&text=In%20a%20Leslie%20model%2C%20the,individuals%20currently%20in%20that%20class., (pristupljeno 12. lipnja 2024.)

[8] PageRank, https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank, (pristupljeno 3. lipnja 2024.)

Sažetak

Ovaj diplomski rad istražuje spektar matrica, počevši od temeljnih pojmova za linearne operatore na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima i analognih tvrdnji za matrice. Zatim se istražuju metode računanja svojstvenih vrijednosti, uključujući razne oblike metode potencija i teorem o Geršgorinovim krugovima koji određuje položaj svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravnini. Konačno, prikazuju se praktične primjene svojstvenih vrijednosti na pojednostavljenim modelima Markovljevih lanaca, matričnog modela rasta populacije, sustava rangiranja sportskih timova te Googleovog *PageRank* algoritma za sortiranje rezultata pretraživanja.

Summary

This thesis delves into the spectrum of matrices, starting with fundamental concepts for linear operators on finitedimensional vector spaces and analogous statements for matrices. It then investigates methods for calculating eigenvalues including various forms of the power method and Gerschgorin's Disk Theorem that locates the eigenvalues in the complex plane. The thesis concludes by presenting the practical applications of eigenvalues in simplified models of Markov chains, matrix population growth model, sports team ranking systems, and Google's PageRank algorithm for organizing search results.

Životopis

Rođen sam 12. svibnja 1998. u Metkoviću u Republici Hrvatskoj. Osnovnoškolsko obrazovanje završio sam 2013. godine u Metkoviću u Osnovnoj školi Stjepana Radića. Zatim upisujem opći smjer u Gimnaziji Metković. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 2022. godine stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.

Tijekom studija sudjelujem u volonterskim instrukcijama iz Matematike u župi Marije Pomoćnice - Knežija, projektu Financijska pismenost u suvremenom matematičkom obrazovanju zajedno s profesorima Željkom Milin Šipuš te Matijom Bašićem, projektu Studenti za buduće studente - Pripreme za državnu maturu te Erasmus+ projektu "Makers Gonna Make" u Njemačkoj. Uz to, radim u Photomathu (studeni 2021. - lipanj 2024.)