Snopovi modula na shemama

Greganić, Lovro

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lovro Greganić

SNOPOVI MODULA NA SHEMAMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, srpanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Jedan od najvažnijih rezultata u klasičnoj algebarskoj geometriji je Hilbertov teorem o nulama (1893.) koji daje korespondenciju između radikalnih ideala i algebarskih skupova u prstenu polinoma nad algebarski zatvorenim poljem. Posebno, korolar tog teorema daje ekvivalenciju kategorija afinih mnogostrukosti i konačno generiranih reduciranih algebri nad tim poljem. To je jedno od polazišta za definiranje shema, koje Alexander Grothendieck uvodi u djelu Éléments de géométrie algébrique (EGA), 1960. Naime, afine sheme čine kategoriju koja je ekvivalentna kategoriji svih komutativnih prstena s jedinicom. Važna posljedica je generalizacija klasične algebarske geometrije. Na primjer, jednadžbe

$$x = 0, \quad x^2 = 0$$

određuju iste algebarske skupove, ali različite sheme. Sheme također omogućuju proširenje teorije; možemo promatrati prstene koji nisu nužno prsteni polinoma nad algebarski zatvorenim poljem i dati njihovu geometrijsku interpretaciju. Tako na primjer, promatranjem prstena cijelih brojeva dobivamo vezu s algebarskom teorijom brojeva.

Glavni alat u teoriji shema su snopovi. Naime, geometrijske objekte je prirodno promatrati sa skupovima funkcija na njima koje nazivamo snopovima (na primjer diferencijalne mnogostrukosti promatramo sa snopom glatkih funkcija). Snopove u algebarskoj geometriji prvi put uvodi Jean-Pierre Serre u radu Faisceaux Algébriques Cohérents (FAC), 1955. Ključan sastojak same definicije shema je strukturni snop, koji je analogon regularnih funkcija na afinim i projektivnim mnogostrukostima. Također možemo promatrati i snopove modula koji omogućavaju uporabu tehnika iz homološke algebre. Na shemama se promatraju kvazikoherentni snopovi koji lokalno korespondiraju modulima nad prstenom.

U ovom radu, dat ćemo osnovne definicije teorije shema i snopova modula nad njima, te dokazati spomenute ekvivalencije kategorija. U prvom poglavlju dajemo osnovne pojmove iz teorije kategorija i kratak osvrt na afine i projektivne mnogostrukosti. U drugom poglavlju definiramo pojam snopa, (afinih) shema i pokazujemo ekvivalenciju s kategorijom prstena. Također dajemo pregled o nekim svojstvima samih shema. U trećem poglavlju govorimo o snopovima modula, posebno, kvazikoherentnim snopovima i ekvivalenciji s kategorijom modula nad prstenom.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju dat ćemo pregled nekih učestalih pojmova iz teorije kategorija i osnovnih rezultata iz algebarske geometrije koje ćemo spominjati kroz rad.

1.1 Kratki pregled o teoriji kategorija

Definicija 1.1.1. ***Kategorija*** *C se sastoji od:*

- *kolekcije objekata (koje označavamo s Ob(C)),*
- *kolekcije Hom(a,b), za svaka dva objekta a,b (elemente iz Hom(a,b) nazivamo morfizmima i označavamo s* $f : a \to b$*, gdje a nazivamo domenom, a b kodomenom),*

takvi da:

- *za svaka dva morfizma* $f : a \to b$*,* $g : b \to c$*, gdje su a,b,c proizvoljni objekti, postoji morfizam* $g \circ f : a \to c$ *(takvo pridruživanje nazivamo kompozicijom morfizama),*
- *za svaki objekt a postoji morfizam* $1_a : a \to a$*,*

koji zadovoljavaju sljedeće aksiome:

- *za proizvoljan morfizam* $f : a \to b$ *vrijedi* $1_b \circ f = f$ *i* $f = f \circ 1_a$*.*
- *za svaka tri morfizma* f, g, h *(s kompatibilnim domenama i kodomenama) vrijedi* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$*.*

Najizravniji primjer kategorije je kategorija skupova. Objekti su skupovi, morfizimi su funkcije te postoji kompozicija i identiteta za svaki element. Aksiomi su očito ispunjeni. Isto tako možemo govoriti o kategorijama grupa, gdje su objekti grupe, a morfizmi homomorfizmi grupa. Jedina netrivijalnost je provjera da su kompozicija homomorfizama i identiteta (kao funkcije) homomorfizmi grupa. Aksiomi slijede jer su homorfizmi funkcije. Slični primjeri su kategorije prstenova, modula nad prstenom, topoloških prostora... (takve kategorije, kojima su objekti skupovi s dodatnom strukturom, a morfizmi funkcije koje čuvaju strukturu nazivamo konkretnim)

Napomena 1.1.2. *U definiciji govorimo o kolekcijama objekata i morfizama. Naravno, to ne moraju biti skupovi, dovoljno je pogledati kategoriju skupova i činjenice da postojanje skupa svih skupova vodi na kontradikciju. Kategorije u kojima te kolekcije jesu skupovi nazivamo malima. S druge strane, za kategorije koje smo naveli vrijedi da proizvoljan Hom(a,b) čini skup. Takve ćemo kategorije zvati lokalno malima.*

Kategorije ne moraju biti zadane objektima koji su skupovi i morfizama koji su funkcije s dodatnim svojstvima. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1.1.3. *Neka je X topološki prostor. Definiramo Open(X) na sljedeći način:*

- *objekti su otvoreni podskupovi od X,*
- *Hom(U,V) se sastoji od jednog morfizma ako i samo ako $U \subseteq V$.*

Odmah vidimo da je kompozicija $U \to V \to W$ određena s $U \subseteq W$, $U \subseteq U$ je identiteta te zadovoljavaju aksiome iz definicije. Znači Open(X) je kategorija (također je zovemo kategorijom otvorenih skupova u X). To je također primjer male kategorije jer podskupovi skupa čine skup.

Sljedeći primjer je važan za tehnička razmatranja.

Primjer 1.1.4. *Neka je C kategorija. Definiramo* ***suprotnu kategoriju od kategorije*** *C, koju označavamo sa C^{op}, na sljedeći način:*

- *objekti su objekti iz C,*
- *za svaki morfizam $f : a \to b$ iz C, postoji morfizam $f^{op} : b \to a$ iz C^{op}.*

Kompozicija u C^{op} je inducirana onom iz C, to jest, kompozicija $f^{op} \circ g^{op}$ odgovara morfizmu $g \circ f$ iz C. Sada izravnom provjerom vidimo da je 1_a^{op} identiteta te vrijede dva aksioma iz definicije.

Sljedeće definiramo funktore koji igraju ulogu funkcija među kategorijama.

Definicija 1.1.5. *Neka su C, D kategorije. Kažemo da je $F : C \to D$* ***funktor*** *ako vrijedi:*

- *za svaki objekt c iz C, postoji F(c) objekt iz D,*

- *za svaki morfizam $f : a \to b$ iz C, postoji $F(f) : F(a) \to F(b)$ morfizam iz D,*

koji zadovoljavaju:

- *za svaki objekt c iz C, vrijedi $F(1_c) = 1_{F(c)}$,*
- *za svaka dva morfizma $f : a \to b, g : b \to c$ iz C, vrijedi $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

Za ovako definiran funktor kažemo da je ***kovarijantan****. Kažemo da je $F : C \to D$* ***kontravarijantan*** *funktor ako je $F : C^{op} \to D$ funktor.*

Primjer funktora možemo zadati "zaboravljanjem strukture". Na primjer, imamo funktor U : Groups $\to$ Sets koji grupi pridružuje pripadan skup, a homomorfizmu pripadnu funkciju. Od poznatih primjera možemo izdvojiti funktor $\Pi : Top{*} \to Groups$ koji punktiranom topološkom prostoru (topološki prostor sa zadanom baznom točkom; morfizmi su neprekidna preslikavanja koja preslikava baznu točku u baznu točku), pridružuje fundamentalnu grupu.

Napomena 1.1.6. *Možemo definirati kategoriju (CAT) Cat svih (lokalno) malih kategorija s očitim objektima i funktorima za morfizme. Ta kategorija nije (lokalno) mala (Russellov paradoks).*

U svakoj kategoriji možemo definirati izomorfizam objekata a, b kao morfizam $f : a \to b$ za kojeg postoji morfizam $g : b \to a$ tako da vrijedi $f \circ g = 1_b$ i $g \circ f = 1_a$. Jasno, to će biti bijekcije, izomorfizmi, homeomorfizmi, difeomorfizmi u odgovarajućim kategorijama. Sada bismo htjeli definirati pojam ekvivalencije kategorija. Naime, ako se ograničimo na lokalno male kategorije možemo promatrati definiciju izomorfizma. Ispada da je taj uvjet previše restriktivan. Olabavit ćemo ga tako da promatramo kada kompozicija funktora je izomorfna identiteti što nas motivira za promatranje morfizama među samim funktorima.

Definicija 1.1.7. *Neka su C, D kategorije te neka su dani funktori $F, G : C \to D$. Kažemo da je $\alpha : F \to G$* ***prirodna transformacija*** *ako vrijedi:*

- *za svaki objekt c iz C, postoji $\alpha_c : F(c) \to G(c)$ morfizam u D,*
- *za svaki morfizam $f : c \to c'$ iz C, sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & G(c') \end{tikzcd}$$

Kažemo da je α ***prirodni izomorfizam*** *ako je α_c izomorfizam u D, za svaki objekt c iz C.*

Sada, funktor $F : C \to D$ je ekvivalencija kategorija ako postoji funktor $G : D \to C$ takav da vrijede prirodni izomorfizmi $F \circ G \cong 1_D$ i $G \circ F \cong 1_C$. U tom slučaju, reći ćemo da su C i D **ekvivalentne kategorije** što ćemo označavati s $C \cong D$. Navest ćemo još karakterizaciju prethodne definicije (bez dokaza).

Teorem 1.1.8. *Kategorije C i D su ekvivalentne ako i samo ako postoji funktor $F : C \to D$ koji je:*

- ***pun*** $:\iff$ *za svaka dva objekta a,b iz C, $Hom_C(a, b) \to Hom_D(F(a), F(b))$ je surjekcija;*
- ***vjeran*** $:\iff$ *za svaka dva objekta a,b iz C, $Hom_C(a, b) \to Hom_D(F(a), F(b))$ je injekcija;*
- ***esencijalno surjektivan*** $:\iff$ *za svaki objekt d iz D postoji objekt c iz C takav da vrijedi $d \cong F(c)$.*

Napomena 1.1.9. *Sada možemo i preciznije definirati konkretne kategorije. Kažemo da je C konkretna kategorija ako postoji vjeran funktor $U : C \to Sets$. Pod U najčešće smatramo spomenuti "zaboravni" funktor, koji skupu s dodatnom strukturom pridružuje sam skup. Vjernost je prirodna pretpostavka jer dvije funkcije koje čuvaju strukturu su različite ako su različite kao funkcije (odnosno postoje elementi čije se slike ne podudaraju).*

Limesi

Promotrimo kartezijev produkt skupova $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Prirodno možemo definirati funkcije $p_X : (x, y) \mapsto x$ i $p_Y : (x, y) \mapsto y$ koje nazivamo projekcijama na prvu i drugu koordinatu. Neka je sada Z skup zajedno s funkcijama $f_X : Z \to X$ i $f_Y : Z \to Y$. Primijetimo da postoji jedinstvena funkcija $\varphi : Z \to X \times Y$, $z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$ takva da vrijedi $f_X = p_X \circ \varphi$ i $f_Y = p_Y \circ \varphi$. To je univerzalno svojstvo produkta; svaki drugi objekt sa svojim "projekcijama" na X i Y se faktorizira preko $X \times Y$ tako da sve komutira. Produkt će biti primjer jedne takve univerzalne konstrukcije; isti takav produkt možemo definirati u kategorijama grupa, prstena, topoloških prostora i zadovoljavat će isto svojstvo.

Prije definicije limesa, definiramo dijagram u kategoriji C kao funktor $\mathcal{D} : I \to C$ gdje je I neka kategorija koju nazivamo indeksnom (dijagram možemo shvaćati kao generalizaciju indeksirane familije). Dijagram možemo skicirati kao točke sa strelicama koji reprezentiraju objekte i morfizme. U primjeru produkta I je kategorija s dva objekta bez morfizama odnosno $\{\bullet\ \bullet\}$; dijagram $\mathcal{D} : I \to$ Sets sada određuje skupove X, Y kao gore.

Definicija 1.1.10. *Neka je C kategorija, $\mathcal{D}$ dijagram u C, L objekt u C. Kažemo da je L* ***limes*** *nad $\mathcal{D}$ u C ako vrijedi:*

- *za svaki objekt i iz I postoji* $l_i : L \to \mathcal{D}(i)$ *morfizam u C,*
- *za svaki morfizam* $d_{ij} : D(i) \to D(j)$ *vrijedi* $d_{ij} \circ l_i = l_j$*,*
- *univerzalno svojstvo; za svaki objekt Z u C s morfizmima* $\{z_i\}_i$ *koji zadovoljavaju* $d_{ij} \circ z_i = z_j$*, postoji jedinstven morfizam* $\varphi : Z \to L$ *takav da vrijedi* $z_i = l_i \circ \varphi$ *za svaki i.*

  Kažemo da je L ***kolimes*** *nad* $\mathcal{D}$ *u C ako je limes nad* $\mathcal{D}$ *u* C^{op}*.*

Može se pokazati da su (ko)limesi jedinstveni do na izomorfizam. Promotrimo neke primjere:

Definicija 1.1.11. *(i) Produkti su primjer limesa.*

(ii) Definiramo koprodukt kao kolimes nad $\{\bullet \ \bullet\}$*. U skupovima, to je disjunktna unija skupova X,Y:*

$$\begin{tikzcd} & X \sqcup Y & \\ X \arrow[ur, "i_X"] & & Y \arrow[ul, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

gdje su i_X, i_Y *inkluzije. Jasno, za Z, objekt s dvije funkcije u redom X,Y, univerzalno svojstvo daje jedinstvenu funkciju* $X \sqcup Y \to Z$*. Primjer koprodukta u kategoriji abelovih grupa ili modula nad prstenom bila bi direktna suma, a algebri nad prstenom to bi bio tenzorski produkt.*

(iii) Ujednačitelj je limes nad dijagramom $\{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$*. Na primjer, jezgra homomorfizma (prstenova, modula, grupa...)* $f : R \to S$ *je ujednačitelj. Zaista,* $\forall x \in \operatorname{Ker} f, f(x) = 0 = 0(x)$ *daje komutativan dijagram:*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] & R \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & S \end{tikzcd}$$

gdje je i inkluzija (ne pišemo morfizam iz $\operatorname{Ker} f$ *u S, jer je jedinstveno određen komutativnim trokutima). Kolimes dijagrama* $\{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$ *nazivamo koujednačitelj. Kojezgru (dualan pojam jezgri) morfizma* $f : R \to S$ *općenito definiramo za module nad prstenom kao* $Coker f := S / \operatorname{Im} f$*. Primijetimo da definicija nema smisla za komutativne prstene s jedinicom jer* $\operatorname{Im} f$ *ne mora biti ideal u B. Naime, kojezgra homomorfizma (komutativnih prstenova s jedinicom) će biti nulprsten, jer homomorfizam iz S u* $Coker f$ *elemente slike šalje u 0, posebno* $f(1) = 1$ *šalje u 0, pa* $0 = 1$ *u* $Coker f$*.*

(iv) *Limes nad praznim dijagramom {} nazivamo terminalnim objektom. To je objekt T takav da za svaki objekt A postoji jedinstven morfizam $A \to T$. Kolimes nad praznim dijagramom nazivamo inicijalnim. To je objekt I takav da za svaki objekt A postoji jedinstven morfizam $I \to A$. Na primjer, u kategoriji skupova terminalni (ujedno i inicijalni) objekt je jednočlan skup. U kategoriji komutativnih prstenova s jedinicom terminalni objekt je $\{0\}$, dok je inicijalni $\mathbb{Z}$ (jedinstven homomorfizam iz $\mathbb{Z}$ u A dan je s $n \mapsto n1_A$).*

1.2 Algebarski skupovi i mnogostrukosti

Podsjetimo se osnovnih rezultata iz algebarske geometrije. U ovom poglavlju pod K podrazumijevamo algebarski zatvoreno polje.

Definiramo $\mathbb{A}^n$, afini n-**prostor nad** K, kao skup K^n, čije elemente nazivamo točkama. Prsten polinoma $K[T_1, ..., T_n]$ interpretiramo kao prostor funkcija na $\mathbb{A}^n$, pri čemu vrijednost polinoma u točki definiramo preko evaluacijskog homomorfizma. Za $S \subseteq K[T_1, ..., T_n]$ definiramo

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

te takav skup nazivamo **algebarskim skupom**.

Napomena 1.2.1. *Primijetimo da vrijedi:*

$$Z(S) = Z((S)) = Z(f_1, ..., f_k)$$

gdje je (S) ideal generiran s S, a $f_1, ..., f_k$ generiraju (S) ((S) je konačno generiran jer je $K[T_1, ..., T_n]$ Noetherin; posljedica Hilbertovog teorema o bazi). Također nije teško pokazati da vrijedi $Z(\mathfrak{a}) = Z(\sqrt{\mathfrak{a}})$, za proizvoljan ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[T_1, ..., T_n]$.

Algebarski skupovi zadovoljavaju aksiome zatvorene topologije na $\mathbb{A}^n$ te topologiju definiranu na taj način nazivamo **topologijom Zariskog**. Skupove oblika $D(f) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) \neq 0\}$ nazivamo **glavnim otvorenim** (očito su otvoreni u definiranoj topologiji, kao komplementi zatvorenih) te oni čine bazu topologije.

Svakom podskupu $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ možemo pridružiti radikalan ideal

$$I(Y) = \{f \in K[T_1, ..., T_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in Y\}.$$

Promatrajući preslikavanje $S \mapsto I(Y)$, dobivamo sljedeće korespondencije:

$$\{\text{Zatvoreni skupovi u } \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{\text{Radikalni ideali u } K[T_1, ..., T_n]\}$$
$$\{\text{Ireducibilni zatvoreni skupovi u } \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{\text{Prosti ideali u } K[T_1, ..., T_n]\}$$
$$\{\text{Točke u } \mathbb{A}^n\} \longrightarrow \{\text{Maksimalni ideali u } K[T_1, ..., T_n]\}$$

čiji je inverz $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$. Taj rezultat je posljedica Hilbertovog teorema o nulama.

Definicija 1.2.2. *Ireducibilne zatvorene skupove u $\mathbb{A}^n$ nazivamo* ***afinim mnogostrukostima****. Otvorene podskupove afinih mnogostrukosti nazivamo* ***kvaziafinim mnogostrukostima****.*

Primijetimo da je $\mathbb{A}^n$ afina mnogostrukost što slijedi iz činjenice da je (0) prost ideal u $K[T_1, ..., T_n]$. Nadalje, ako je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ definiramo koordinatni prsten od X kao

$$K[X] := K[T_1, ..., T_n]/I(X).$$

Očito, $K[X]$ ima strukturu K-algebre. Iz činjenice da je kvocijent prstena polinoma, $K[X]$ je konačno generiran, a kako je $I(X)$ radikalan ideal, slijedi da nema nilpotentnih elemenata. Znači, $K[X]$ je konačno generirana reducirana algebra. Iz bijekcije radikalnih ideala s algebarskim skupovima, dobivamo da je svaka konačno generirana reducirana algebra upravo oblika $K[X]$.

Napomena 1.2.3. *Može se pokazati da se relativna topologija na $X \subseteq \mathbb{A}^n$ podudara sa skupovima oblika $Z_X(\mathfrak{a}) = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}$ pri čemu $\mathfrak{a}$ je ideal iz $K[X]$.*

Definicija 1.2.4. *Neka je U otvoren i neprazan podskup afine mnogostrukosti $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Definiramo skup* ***regularnih funkcija****:*

$$K[U] = \left\{\varphi : U \to K \mid \forall x \in U, \exists V_x^{otv} \ni x,\ f, g \in K[X], \forall y \in V_x, g(y) \neq 0,\ \varphi(y) = \frac{f(y)}{g(y)}\right\}.$$

Napomena 1.2.5. *Definicija je dobra jer $f(y)/g(y)$ ne ovisi o izboru f, g (to je posljedica činjenice da je K[X] integralna domena). Pokazuje se da je $K[U]$ s operacijama zbrajanja i množenjem po točkama, prsten (također K-algebra). Nadalje, ako u prethodnoj definiciji, uzmemo da je $U = X$, vrijedi izomorfizam K-algebri između koordinatnog prstena od X i regularnih funkcija na X, što opravdava oznaku K[X].*

Definicija 1.2.6. *Neka su $X \subseteq \mathbb{A}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ afine mnogostrukosti. Definiramo morfizam afinih mnogostrukosti kao neprekidnu funkciju $\alpha : X \to Y$ takvu da za svaki otvoren $V \subseteq Y$, te svaku regularnu funkciju $\varphi : V \to K$, vrijedi da je $\varphi \circ \alpha : f^{-1}(V) \to K$ regularna funkcija.*

Lako sada vidimo da afine mnogostrukosti s prethodno definiranim morfizmima čine kategoriju, koju nazivamo kategorijom afinih mnogostrukosti. Nadalje, funktor koji afinoj mnogostrukosti pridružuje njen koordinatni prsten, a morfizmu pridružuje homomorfizam $K[Y] \to K[X]$ (u definiciji uzmemo $V = Y$), daje ekvivalenciju kategorija između afinih mnogostrukosti i konačno generiranih reduciranih K-algebri.

Projektivne mnogostrukosti

Definiramo $\mathbb{P}^n$, **projektivni** n**-prostor**, kao skup klasa ekvivalencija iz $(K^{n+1} - \{0\})/_\sim$ pri čemu je ekvivalencija dana s $(a_0, ..., a_n) \sim (\lambda a_0, ..., \lambda a_n), \forall \lambda \in K - \{0\}$, čije elemente nazivamo točkama i označavamo ih s $(a_0 : ... : a_n)$, gdje je $(a_0, ..., a_n)$ predstavnik klase. Za razliku od afinog slučaja, kao funkcije promatrat ćemo samo homogene elemente prstena $K[T_0, ..., T_n]$. Sada možemo definirati $f(a_0 : ... : a_n) = 0$ kao $f(a_0, ..., a_n) = 0$, pri čemu definicija ne ovisi o predstavniku. Sada ćemo definirati analogone pojmova iz afinog slučaja. Za S podskup polinoma u $K[T_0, ..., T_n]$ te $X \subseteq \mathbb{P}^n$, kao u afinom slučaju definiramo

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S, f \text{ homogen}\},$$

$$I(X) = \{f \in K[T_0, ..., T_n] \mid f \text{ homogen}, f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Analogno definiramo projektivnu topologiju Zariskog gdje su zatvoreni skupovi oblika $Z(S)$ te projektivni koordinatni prsten zatvorenog skupa. Regularne funkcije definiramo kao u definiciji 1.2.4, uz izmjenu da su f i g homogeni, istog stupnja homogenosti.

Sada definiramo kategoriju projektivnih mnogostrukosti. Objekti će biti ireducibilni zatvoreni skupovi u $\mathbb{P}^n$, a morfizmi isti kao u definiciji 1.2.4 (pri čemu naravno promatramo regularne funkcije u projektivnoj definiciji). Na isti način definiramo kategoriju kvaziprojektivnih mnogostrukosti.

Projektivne mnogostrukosti su lokalno afine mnogostrukosti. Naime, promotrimo preslikavanje $\varphi_i : D(T_i) \to \mathbb{A}^n$,

$$(a_0 : ... : a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, ..., \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, ..., \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Vrijedi da je to homeomorfizam, pa iz jednakosti

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n - \emptyset = \mathbb{P}^n - Z((T_0, ..., T_n)) = \mathbb{P}^n - \bigcap_{i=0}^{n} Z(T_i) = \bigcup_{i=0}^{n} D(T_i)$$

vidimo da $\{D(T_i)\}_{i \leq n}$ pokrivaju $\mathbb{P}^n$, to jest $\mathbb{P}^n$ je pokriven skupovima homeomorfnim afinim mnogostrukostima.

Ovime završavamo pregled nekih osnova algebarske geometrije koje ćemo spominjati u ovom radu. Ubuduće kroz rad, pod mnogostrukostima ćemo često podrazumijevati bilo koji od definiranih tipova.

Poglavlje 2

Sheme

U ovom poglavlju dajemo definiciju sheme koju je Groethendieck u svom djelu EGA uvodi kako bi dao bolju bazu za proučavanje algebarske geometrije. Cilj je uže povezati komutativnu algebru i algebarsku geometriju. U uvodnim poglavljima spomenuli smo da je kategorija afinih mnogostrukosti ekvivalentna kategoriji konačno generiranih reduciranih algebri dok će kategorija afinih shema odgovarati kategoriji komutativnih prstena s jedinicom.

Prije svega, dat ćemo definiciju snopova, jedan od najvažnijih sastojaka u definiciji shema i općenito u modernoj geometriji.

2.1 Snopovi

Definicija 2.1.1. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da je $\mathcal{F}$* ***predsnop skupova nad*** *X ako svakom otvorenom skupu $U \subseteq X$, pridružuje skup $\mathcal{F}(U)$ te za svaka dva otvorena skupa $U, V \subseteq X, U \subseteq V$, imamo preslikavanje*

$$res_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

koje zadovoljava da je $\mathcal{F}(\emptyset)$ jednočlan skup, $res_{U,U} = id_U$ za svaki otvoren $U \subseteq X$ i za otvorene skupove $U \subseteq V \subseteq W$ vrijedi $res_{W,U} = res_{V,U} \circ res_{W,V}$. Nadalje, kažemo da je $\mathcal{F}$ ***snop*** *ako je predsnop i zadovoljava snopovsko svojstvo:*

(i) Ako je otvoren skup $U \subseteq X$ i $\{U_{i\in I}\}$ njegov otvoren pokrivač, te ako su $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ takvi da za svaki $i \in I$ takvi da $res_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i) = res_{U_i,U_i\cap U_j}(f_j)$ za svaki $i, j \in I$, onda postoji jedinstveni $f \in \mathcal{F}(U)$ za koji vrijedi $res_{U,U_i} = f_i$ za svaki $i \in I$.

Morfizam (pred)snopova skupova $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ se sastoji od funkcija $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ za svaki otvoren $U \subseteq X$ takav da za svaki $U \subseteq V$ sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "res_{V,U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "res_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

Napomena 2.1.2. *Primijetimo da definirani predsnop nije ništa više nego funktor $\mathcal{F}$: $(OpenX)^{op} \to Sets$, a morfizam predsnopova je prirodna transformacija. Primijetimo da je snopovsko svojstvo zapravo definicija ujednačitelja. Zaista, pretpostavimo da skup L s morfizmom φ zadovoljava dijagram:*

$$L \xrightarrow{\varphi} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \underset{\prod res_{U_j, U_i \cap U_j}}{\overset{\prod res_{U_i, U_i \cap U_j}}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Sada se $x \in L$ slika u $\varphi(x) = (f_i)_i$, a za $(f_i)_i$ po snopovskom svojstvu postoji jedinstven $f \in \mathcal{F}(U)$ takav da $f_i = res_{U,U_i}(f)$. Jasno, preslikavanje $x \mapsto f$ je jedinstveno određeno, čime dobivamo da je $\mathcal{F}(U)$ ujednačitelj.

Ovo nam dopušta da promatramo $\mathcal{F}$: $(OpenX)^{op} \to C$, gdje je C proizvoljna kategorija. $\mathcal{F}$ nazivamo ***predsnop nad topološkim prostorom X s vrijednostima u*** *C. Ako je dodatno C kategorija sa svim produktima i ujednačiteljima kažemo da je $\mathcal{F}$ snop ako za svaki otvoren U i njegov pokrivač vrijedi da je $\mathcal{F}(U)$ ujednačitelj maloprije navedenog dijagrama. U ovom radu promatrat ćemo još (pred)snopove prstenova i abelovih grupa.*

Preslikavanja $res_{V,U}$ ćemo nazivati **restrikcijama**, a elemente od $\mathcal{F}(U)$ **prerezima**. Najčešći primjer snopova bit će snopovi funkcija gdje će $\mathcal{F}(U)$ biti skup funkcija na otvorenom skupu U, a $res_{V,U}$ standardna restrikcija funkcija.

Primjer 2.1.3. *(i) Neka je X topološki prostor. Definiramo*

$$C(U) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ neprekidna}\}$$

za otvoren $U \subseteq X$, $res_{V,U}$ je standardna restrikcija funkcija. C je očito predsnop prstenova, a iz svojstva praslike slijedi i snopovsko svojstvo tako da je C ustvari snop. Kada bi promotrili $C_b(U) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f$ neprekidna i ograničena$\}$ na isti način dobivamo da je predsnop, no nije snop. Zaista, neka je $U_i = (i-1, i+1)$, $f_i = id_{U_i}$. Dobivamo da je $f = id_{\mathbb{R}}$ tražena jedinstvena funkcija, ali nije ograničena.

(ii) Promotrimo regularne funkcije na mnogostrukostima (1.2). Neka je K algebarski zatvoreno polje te X afina mnogostrukost. Primijetimo da K[-] možemo shvatiti kao

predsnop koji Zariski otvorenom $U \subseteq X$ pridružuje prsten regularnih funkcija $K[U]$, a restrikcije su restrikcije funkcija. Lako možemo vidjeti da je to zapravo snop. Neka je $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, te neka su $\varphi_i \in K[U_i]$ koje se podudaraju na presjecima, to jest $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j\big|_{U_i \cap U_j}$ $\forall i, j$. Zbog lokalnosti definicije regularnih funkcija $\varphi := \varphi_i, \forall i \in I$ je očito regularna funkcija (podudaranje na presjecima osigurava dobru definiranost), a jedinstvenost slijedi iz činjenice da su bilo koje dvije regularne funkcije, koje se podudaraju na otvorenom podskupu afine mnogostrukosti, jednake. Na isti način pokazujemo da regularne funkcije projektivnih mnogostrukosti čine snop.

(iii) *Neka su X, Y topološki prostori, $f{:}X \to Y$ neprekidno preslikavanje te $\mathcal{F}$ snop na X. Definiramo $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ za svaki otvoren $V \subseteq Y$. Ako $(f_*\mathcal{F})res_{V,U}$ definiramo kao $(\mathcal{F})res_{f^{-1}(V),f^{-1}(U)}$ dobivamo da je $f_*\mathcal{F}$ snop na Y. Ovaj primjer će olakšati definiciju morfizma oprstenjenih prostora.*

Neka je X topološki prostor, $\mathcal{F}$ predsnop skupova na X te $x \in X$. Htjeli bismo promatrati ponašanje snopa oko točke x, a da ne ovisi o zadanoj okolini. U tu svrhu na skupu $\mathcal{S} = \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ definiramo relaciju

$$f \in \mathcal{F}(U),\ g \in \mathcal{F}(V), f \sim g \iff \exists W \subseteq U \cap V,\ x \in W,\ res_{U,W}(f) = res_{V,W}(g)$$

Lagano se provjeri da je to relacija ekvivalencije čije klase označujemo s

$$(U, f)_x = (U, f) := [f]_\sim = \{g \in \mathcal{S} : f \in \mathcal{F}(U),\ g \sim f\}$$

Za (U, f) kažemo da je **klica od** $f \in \mathcal{F}(U)$ u x, a skup svih klica u x nazivamo **vlat predsnopa** $\mathcal{F}$ **u točki** x i označavamo s $\mathcal{F}_x$. Sada promotrimo prirodno preslikavanje $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, $f \to (U,f)$. Za okoline točke x, $U \subseteq V$, sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_x & \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur] \arrow[rr, "res_{V,U}"] & & \mathcal{F}(U) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Također, nije teško za provjeriti univerzalno svojstvo vlati to jest ako postoji skup L koji zadovoljava gornji dijagram s preslikavanjima $\mathcal{F}(U) \to L$, $f \to l_f$, da je tada s $(U, f) \to l_f$ zadano jedinstveno preslikavanje tako da komutira

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_x & \\ \mathcal{F}(U) \arrow[ur] \arrow[rr] & & L \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Znači $\mathcal{F}_x$ je zapravo kolimes nad dijagramom svih okolina točke x. Jasno, ova konstrukcija prolazi i kod prstenova i abelovih grupa.

Definicija 2.1.4. *Neka je X topološki prostor, O_X snop prstena nad X. Uređeni par (X, O_X) nazivamo oprstenenjenim prostorom. Ako je vlat u svakoj točki snopa O_X lokalan prsten, tada (X, O_X) nazivamo lokalno oprstenjenim prostorom.*

Oprstenjeni prostori će biti ključni objekti koje ćemo promatrati u ovom radu, stoga bismo htjeli promatrati i preslikavanja među njima. Morfizam između oprstenjenih prostora (X, O_X), (Y, O_Y) se sastoji od neprekidnog preslikavanja $f : X \to Y$ te morfizma snopova $f^\# : O_Y \to f_* O_X$. Često ćemo reći da je $f : X \to Y$ morfizam oprstenjenih prostora prešutno uzimajući u obzir morfizme snopova.

Primijetimo da je to upravo definicija morfizama mnogostrukosti u klasičnoj algebarskoj geometriji. Zaista, ako su X i Y bilo koje mnogostrukosti nad K, regularna preslikavanja među njima smo definirali upravo kao neprekidno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ takvo da za svaki otvoren $V \subseteq Y$ imamo preslikavanje $K_Y[V] \to K_X[\varphi^{-1}(V)]$, $f \to f \circ \varphi$, gdje posljednje preslikavanje je ustvari $\varphi^\# : K_Y \to \varphi_* K_X$. Morfizam lokalno oprstenjenih prostora je morfizam oprstenjenih prostora takav da za svaku točku $x \in X$ pripadni inducirani homomorfizam lokalnih prstena $f^\#_x : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ je lokalni homomorfizam.

Homomorfizam $f^\#_x : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ dobivamo iz univerzalnog svojstva vlati. Za $V \subseteq Y$ otvorenu okolinu $f(x)$ vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x te iz preslikavanja

$$O_Y(V) \to O_X(f^{-1}(V)) \to O_{X,x}$$

i univerzalnog svojstva vlati $O_{Y,f(x)}$ postoji jedinstveno preslikavanje $O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$.

Napomena 2.1.5. *Kratka napomena o lokalnim prstenima. Prsten R je lokalan ako ima jedinstven maksimalan ideal. Lokalni homomorfizam prstenova $\varphi : R \to S$ je homomorfizam prstenova sa svojstvom da $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ gdje su $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ odgovarajući maksimalni ideali. Neka su R, S prstenovi te $\mathfrak{p}$ prost ideal u S. Tada je $S_\mathfrak{p}$ lokalan prsten s maksimalnim idealom*

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{p}S_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathfrak{p}, b \notin \mathfrak{p}\}.$$

Polje $k := S/\mathfrak{m}$ nazivamo poljem ostataka lokalnog prstena S. Također svaki homomorfizam $\varphi : R \to S$ inducira lokalni homomorfizam

$$\varphi_\mathfrak{p} : R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to S_\mathfrak{p}, \quad \frac{a}{b} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$$

preko univerzalnog svojstva lokalizacije. Zloupotrebom notacije, često ćemo $\varphi_\mathfrak{p}$ označavati s φ.

Spektar prstena i strukturni snop

Sada ćemo uvesti pojam spektra prstena i dati konstrukciju snopa na njemu koji će biti ključni za definiciju sheme. Neka je A komutativan prsten s jedinicom (ubuduće ćemo pod prsten smatrati samo takve). **Spektar prstena** A je skup

$$\mathrm{Spec}A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subseteq A \text{ prost ideal}\}.$$

Također, za $S \subseteq \mathrm{Spec}A$ definiramo skup

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{SpecA} \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Iz relacija $V(\sum S) = \bigcap V(S)$, $V((S_1)(S_2)) = V(S_1) \cup V(S_2)$, $V(0) = \mathrm{SpecA}$ i $V(1) = \emptyset$ vidimo da skupovi oblika $V(S)$ čine zatvorenu topologiju na Spec$A$. Time dobivamo da je Spec$A$ topološki prostor gdje su prosti ideali točke. Tu topologiju nazivamo još topologijom spektra i od sada nadalje podrazumijevamo da Spec$A$ dolazi s tom topologijom.

Možemo primijetiti da je topologija spektra generalizacija topologije Zariskog u slučaju mnogostrukosti. Naime, prsten je u ovom slučaju proizvoljan te točke promatramo kao proste ideale umjesto samo maksimalnih (Hilbertov teorem o nulama).

Analogno sada definiramo glavne otvorene skupove. Neka je $f \in A$ proizvoljan, definiramo

$$D(f) := \mathrm{SpecA} - V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{SpecA} \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Taj skup je otvoren kao komplement zatvorenog te nazivamo ga **glavni otvoren skup u** Spec$A$. Također, glavni otvoreni skupovi čine bazu topologije. Zaista, ako je $U =\subseteq \mathrm{SpecA}$ otvoren vrijedi da je $U\mathrm{SpecA} - V(\mathfrak{a}) = \mathrm{SpecA} - V((f_i \mid i \in I)) = \mathrm{SpecA} - \bigcap_{i \in I} V(f_i) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.

Napomena 2.1.6. *Primijetimo da u ovoj topologiji postoje točke koje ne čine zatvoren skup. Ako je A integralna domena (po definiciji nije nulprsten), tada je* (0) *prost ideal i vrijedi* $\overline{\{(0)\}} = V((0)) =$ *SpecA (ne samo da nije zatvorena nego je i gusta u SpecA). Zatvorene točke će činiti precizno maksimalni ideali prstena. Zaista, jednakost*

$$\overline{\{\mathfrak{m}\}} = V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}, \quad \mathfrak{m} \text{ prost ideal}$$

je ekvivalentna činjenici da ne postoji prost ideal koji ga sadrži što je ekvivalentno s maksimalnošću.

Sad prelazimo na konstrukciju strukturnog snopa za Spec$A$.

Primjer 2.1.7. *Neka je A prsten i SpecA topološki prostor. Za $U \subseteq SpecA$, otvoren skup, definiramo*

$$O(U) = \{s = (s_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_\mathfrak{p} \mid \forall \mathfrak{p} \in U, \exists V_\mathfrak{p}^{otv.} \ni \mathfrak{p},\ a, f \in A, \forall \mathfrak{q} \in V_\mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{q}, s_\mathfrak{q} = \frac{a}{f} \in A_\mathfrak{q}\}$$

Uvjet u definiciji često kratimo kao $s = \frac{a}{f}$ na V oko $\mathfrak{p}$ ili $s = \frac{a}{f}$ oko $\mathfrak{p}$ ili slično imajući u vidu da je $\frac{a}{f}$ u različitim lokalizacijama ovisno o točki.

Pokažimo da je O ***snop prstenova na*** *SpecA. Neka su $s_1, s_2 \in O(U)$ te $\mathfrak{p} \in U$. Tada po gornjoj definiciji postoje V_1, V_2 otvorene okoline od $\mathfrak{p}$ i $a_1, a_2, f_1, f_2 \in A$, $f_1, f_2 \notin \mathfrak{q}$ na V_1 odnosno V_2 tako da je $s_1 = \frac{a_1}{f_1}$ na V_1 te $s_2 = \frac{a_2}{f_2}$ na V_2. Uzmemo li $V \subseteq V_1 \cap V_2$ otvoren vrijedit će da su $s_1 = \frac{a_1}{f_1}$, $s_2 = \frac{a_2}{f_2}$ na V. Sada na V vrijedi:*

$$\frac{a_1}{f_1} + \frac{a_2}{f_2} = \frac{a_1 f_2 + a_2 f_1}{f_1 f_2}, \qquad \frac{a_1}{f_1}\frac{a_2}{f_2} = \frac{a_1 a_2}{f_1 f_2}, \qquad f_1 f_2 \notin \mathfrak{q}$$

Uz činjenicu da je $s_1 + s_2 = s_2 + s_1$ i $s = 1$ na U jedinica, $O(U)$ je komutativan prsten s jedinicom. $O(\emptyset)$ definiramo kao nulprsten. Za otvorene $U \subseteq V$ zadajemo preslikavanje $res_{V,U}$ kao restrikciju domene funkcije (sličnim argumentom kao gore, to je homomorfizam prstena) iz čega jasno slijede svojstva $res_{U,U} = id_U$, $res_{W,U} = res_{V,U} \circ res_{W,V}$. Znači, O je predsnop. Ako imamo $U = \bigcup U_i$, $s_i \in O(U_i)$ koji se podudaraju na presjeku, tada je $s := s_i$ na U_i dobro definirano preslikavanje. Za $\mathfrak{p} \in U$ postoji $U_i \subseteq U$ koji sadrži $\mathfrak{p}$ pa zbog $s_i \in O(U_i)$ vrijedi svojstvo iz definicije $O(U)$ to jest vrijedi i snopovsko svojstvo.

Odredimo vlati tog snopa*. Pokazat ćemo da vrijedi izomorfizam prstena $O_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$ definiran preslikavanjem $\varphi : (U, s) \mapsto s_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$. Lako se vidi da je to homomorfizam.*
Bez smanjenja općenitosti uzmimo $\varphi((U, s)) = \varphi((U, t))$ (primijetimo da vrijedi $(U, s) = (W, s|_W)$, $(V, t) = (W, t|_W)$) to jest $s_\mathfrak{p} = t_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$. Iz definicije znamo da na okolini od $\mathfrak{p}$ vrijedi da je $s = \frac{a}{f}$, $t = \frac{b}{g}$ za $a, b, f, g \in A, f, g \notin \mathfrak{p}$ pa slijedi $\frac{a}{f} = s_\mathfrak{p} = t_\mathfrak{p} = \frac{b}{g} \in A_\mathfrak{p}$. Po definiciji lokalizacije $\exists h \notin \mathfrak{p}$ takav da vrijedi $h(ag - bf) = 0$ u A. Primijetimo da iz $f, g, h \notin \mathfrak{p}$ ova jednakost vrijedi na $D(fgh)$ otvorenoj okolini točke $\mathfrak{p}$. Ovo pokazuje da su s, t jednaki na $V := D(fgh)$ odnosno $(U, s) = (V, s|_V) = (V, t|_V) = (U, t)$. Dakle, φ je injekcija.
Pokažimo surjektivnost. Za $\frac{a}{f} \in A_\mathfrak{p}$ vrijedi da je $\frac{a}{f} \in A_\mathfrak{q}$ za svaki $\mathfrak{q} \in D(f)$. Sada za $s = \left(\frac{a}{f}\right)_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_\mathfrak{p}$ vrijedi $\varphi((D(f), s)) = \frac{a}{f}$ iz čega slijedi da je φ traženi izomorfizam. Ovo posebno pokazuje da je $O_\mathfrak{p}$ lokalan prsten.

Pokažimo još ***kako izgleda snop na baznim okolinama****. Vrijedi $A_f \cong O(D(f))$. Definiramo $\psi : A_f \to O(D(f))$ koji $\frac{a}{f^n}$ slika u $s = \left(\frac{a}{f^n}\right)_\mathfrak{p}$. Neka je sada $\psi(\frac{a}{f^n}) = \psi(\frac{b}{f^m})$ to jest*

$$\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m} \text{ u } A_\mathfrak{p}, \quad \forall \mathfrak{p} \in D(f)$$

To znači da za $\mathfrak{p} \in D(f)$, $\exists h \notin \mathfrak{p}$ *takav da* $h(af^m - bf^n) = 0$ *u* A. *Neka je*

$$\mathfrak{a} = \{c \in A \mid c(af^m - bf^n) = 0\} \quad \textit{anihilator od } af^m - bf^n.$$

Jasno, $h \in \mathfrak{a}$, $h \notin \mathfrak{p}$ *pa slijedi da* $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$. *Kako to vrijedi za svaki* $\mathfrak{p} \in D(f)$ *imamo* $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$. *To znači da svi prosti ideali koji sadrže* $\mathfrak{a}$ *sadrže i f. Znamo iz algebre da vrijedi* $\bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. *Zaključujemo da je* $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ *to jest* $f^l \in \mathfrak{a}$ *za neki l. Po definiciji anihilatora vrijedi* $f^l(af^m - bf^n) = 0$ *u* A *što znači da je* $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ *u* A_f *pa injektivnost vrijedi.*
Da bismo pokazali da je ψ *surjekcija, uzmimo proizvoljni* $s \in O(D(f))$. *Po definiciji s, D(f) je pokriven s* $\{D(h_i)\}_{i \in I}$ *(jer glavni otvoreni skupovi čine bazu topologije) tako da* $s = \frac{a_i}{g_i}$ *na* $D(h_i)$. *Zadnje upravo povlači da* $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ *(jer* $g_i \notin \mathfrak{q}, \forall \mathfrak{q} \in D(h_i)$*) pa kao maloprije (*$V(g_i) \cap D(h_i) = \emptyset$*) vrijedi* $h_i^n \in (g_i)$ *to jest* $h_i^n = cg_i$. *Sada*

$$\frac{a_i}{g_i} = \frac{ca_i}{cg_i} = \frac{ca_i}{h_i^n} \quad \textit{na } D(h_i)$$

te uz činjenicu da je $D(h_i^n) = D(h_i)$, $ca_i \in A$ *bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je* $s = \frac{a_i}{h_i}$ *na* $D(h_i)$. *Nadalje, primijetimo da je D(f) pokriven s konačno mnogo* $D(h_i)$. *Kako je* $D(f) \subseteq \bigcup_i D(h_i) = D((h_i)_i)$ *ponavljanim argumentom vrijedi* $f^l \in (h_i)_i$ *to jest* $f^l = \sum_{i=1}^r b_i h_i$ *za neke* $l, r \in \mathbb{N}$. *Posebno,* $D(f) \subseteq D(h_1) \cup ... \cup D(h_r)$. *Primijetimo da vrijedi*

$$D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j) \quad \textit{za } 1 \leq i < j \leq r.$$

Fiksirajmo dva takva i, j. Sada vrijedi[1]*:*

$$s = \frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j} \quad \textit{na } A_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p} \in D(h_i h_j).$$

Iz injektivnosti od ψ *slijedi* $\frac{a_i}{h_i} = \frac{a_j}{h_j}$ *na* $A_{h_i h_j}$ *odnosno*

$$\exists n_{i,j} \in \mathbb{N}_0, \quad (h_i h_j)^{n_{i,j}}(h_j a_i - h_i a_j) = 0. \tag{2.1}$$

Kako imamo konačno kombinacija i,j možemo izabrati dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}_0$ *tako da 2.1 vrijedi za svaki i,j,* $1 \leq i < j \leq r$. *Time dobivamo*

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0 \quad \textit{za } 1 \leq i < j \leq r.$$

Uočimo da sada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je za $s = \frac{a_i}{h_i}$ *na* $D(h_i)$ *sa svojstvom* $h_i a_j = h_j a_i$. *Zaista, vrijedi* $\frac{a_i}{h_i} = \frac{h_i^n a_i}{h_i^{n+1}}$ *pa je* $s = \frac{h_i^n a_i}{h_i^{n+1}}$ *na* $D(h_i) = D(h_i^{n+1})$ *sa*

[1] Napomenimo da tvrdnje vrijede i u slučaju $D(h_i h_j) = \emptyset$. Prva jednakost je trivijalno ispunjena zbog ne postojanja $\mathfrak{p} \in D(h_i h_j)$, a ostale jer $D(h_i h_j) = \emptyset$ povlači da je $h_i h_j = 0$. U tom slučaju za $n_{i,j}$ možemo uzeti 0.

svojstvom $h_j^{n+1}(h_i^n a_i) = h_i^{n+1}(h_j^n a_j)$. *Ako* $n \neq 0$ *samo "zamijenimo" svaki* $h_i^{n+1}, h_i^n a_i$ *za* h_i, a_i *respektivno. Neka je sada* $f^l = \sum_{i=1}^r b_i h_i$ *kao gore i neka je* $a = \sum_{i=1}^r b_i a_i$. *Za proizvoljni* $j \in \{1, ..., r\}$ *vrijedi*

$$h_j a = \sum_{i=1}^r b_i a_i h_j = \sum_{i=1}^r b_i h_i a_j = f^l a_j.$$

Znači, $\frac{a}{f^l} = \frac{h_j}{a_j}$ *na* $D(h_j)$ $\forall j$ *pa vrijedi* $\psi(\frac{a}{f^l}) = s$.

Za snop u prethodnom primjeru kažemo da je **strukturni snop od** Spec$A$, a za oprstenjen prostor (SpecA, O) također kažemo da je spektar prstena A. Strukturni snop ćemo označavati i sa O_{SpecA}, O_A ili O_X gdje je $X = \text{SpecA}$. Prethodna razmatranja možemo sažeti u sljedeći rezultat.

Propozicija 2.1.8. *Neka je A prsten te (SpecA,O) njegov spektar. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) (SpecA,O) je lokalno oprstenjen prostor.

b) Za svaki $\mathfrak{p} \in$ *SpecA,* $O_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$.

c) Za svaki $f \in A$, $O(D(f)) \cong A_f$.

Vidljiva je sličnost između snopa regularnih funkcija afinih mnogostrukosti i strukturnog snopa spektra prstena. Po toj analogiji, ulogu koordinatnog prstena od Spec$A$ obavlja upravo prsten A. U slučaju mnogostrukosti, znamo da homomorfizmi koordinatnih prstena upravo odgovaraju morfizmima mnogostrukosti. Pokazat ćemo da isto vrijedi u slučaju spektra.

Neka je $\varphi : A \to B$ homomorfizam prstenova. Definirajmo $f : \text{Spec}B \to \text{Spec}A$ sa $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Iz relacije

$$f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$$

vidimo da je f neprekidno preslikavanje. Neka je sada $V \subseteq \text{Spec}A$, $s \in O_A(V)$ te neka je $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$. Promotrimo sljedeću kompoziciju

$$\mathfrak{p} \in f^{-1}(V) \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V \mapsto s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) = \frac{a}{b} \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \in B_\mathfrak{p}$$

Znamo po definiciji $O_A(V)$ da je $s = \frac{a}{b}$ na okolini točke $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, recimo W. Zbog neprekidnosti od f postoji $U \subseteq$ SpecB okolina točke $\mathfrak{p}$ takva da $f(U) \subseteq W$. Sada je

$$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} \in B_\mathfrak{q}, \forall \mathfrak{q} \in U$$

(jer ako bi postojao $\mathfrak{q} \in U$ t.d. $\varphi(b) \in \mathfrak{q}$ zbog $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{q}) \in W$ imali bi kontradikciju s $\frac{a}{b} \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})}$). Dakle dobili smo element iz $\mathcal{O}_B(f^{-1}(V))$, odnosno preslikavanje $s \in \mathcal{O}_A(V) \mapsto \varphi \circ s \circ f \in \mathcal{O}_B(f^{-1}(V))$ koje definira morfizam snopova $f^\# : \mathcal{O}_A \to f_*\mathcal{O}_B$ (komutativan dijagram iz definicije se svodi na jednakost $(\varphi \circ s|_W \circ f)|_{f^{-1}(W)} = \varphi \circ s|_V \circ f$ za $W \subseteq V$ što nije teško za pokazati iz prethodne diskusije).

Znači, za zadani homomorfizam prstena možemo konstruirati morfizam spektra. No vrijedi i više, svaki morfizam spektara je induciran homomorfizmom odgovarajućih prstena na prethodno opisan način. Neka je $f : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ morfizam spektara. Primijetimo da po propoziciji vrijedi

$$\mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}A) = \mathcal{O}(D_A(1)) = A, \quad \mathcal{O}_B(f^{-1}(\mathrm{Spec}A)) = \mathcal{O}_B(\mathrm{Spec}B) = \mathcal{O}(D_B(1)) = B.$$

Upravo $\varphi := f^\#_{\mathrm{Spec}B} : \mathcal{O}_A(\mathrm{Spec}A) \to \mathcal{O}_B(f^{-1}(\mathrm{Spec}A))$ je traženi homomorfizam $A \to B$ to jest, $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$ za proizvoljan $\mathfrak{p}$ prost ideal u B. Zaista, za jedan takav $\mathfrak{p}$ imamo lokalne homomorfizme

$$f^\#_{\mathfrak{p}} : A_{f(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}, \quad \varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}.$$

Slijedi jednakost maksimalnih ideala $\{\frac{a}{b} \mid a \in f(\mathfrak{p}), b \notin f(\mathfrak{p})\} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}), b \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\}$ kao praslika maksimalnog ideala iz $B_{\mathfrak{p}}$. Iz ovoga jednostavno dobivamo jednakost $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$. Dokazali sljedeći rezultat.

Propozicija 2.1.9. *Homomorfizmi prstenova su u bijekciji s morfizmima njihovih spektara.*

Napomena 2.1.10. *Ista konstrukcija morfizma ne prolazi ako za točke uzimamo skup maksimalnih ideala. To proizlazi iz činjenice da praslika maksimalnog ideala homomorfizma prstena nije nužno maksimalan ideal. Promotrimo li ulaganje*

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

vidimo da je (0) *maksimalan ideal u* $\mathbb{Q}$*, ali nije i u* $\mathbb{Z}$*.*

Navedimo sad napomenu u kojoj ćemo opisati kako prereze strukturnog snopa doživjeti kao funkcije na spektru.

Napomena 2.1.11. *Neka je A prsten, te neka $U \subseteq \mathrm{Spec}A$ otvoren, $\mathfrak{p} \in U$ te $\mathcal{O}$ strukturni snop od A. Definiramo $k(\mathfrak{p})$* ***polje ostataka u točki*** *$\mathfrak{p}$ kao polje ostataka lokalnog prstena $A_{\mathfrak{p}}$. Promotrimo kompoziciju kanonskih preslikavanja*

$$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} \to k(\mathfrak{p})$$

$$s \mapsto s_{\mathfrak{p}} \mapsto s_{\mathfrak{p}} + A_{\mathfrak{p}}.$$

Prethodno preslikavanje daje način da $s \in O(U)$ shvaćamo kao funkciju s vrijednostima u $\coprod_{\mathfrak{p}\in U} k(\mathfrak{p})$ te definiramo $s(\mathfrak{p})$ kao sliku pri gornjem preslikavanju. Napomenimo da vrijedi izomorfizam

$$k(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cong Frac(A/\mathfrak{p})$$

$$\frac{a}{b} + \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \mapsto \frac{a\ (mod\mathfrak{p})}{b\ (mod\mathfrak{p})}$$

gdje zadnje označava polje razlomaka integralne domene $A/\mathfrak{p}$. Sjetimo se da je $s_\mathfrak{q} = \frac{a}{b} \in A_\mathfrak{q}$ za svaki $\mathfrak{q}$ na nekoj okolini $\mathfrak{p}$ za neke $a, b \in A$ pa gornja evaluacija i spomenuti izomorfizam daju $s(\mathfrak{p}) = \frac{a\ (mod\mathfrak{p})}{b\ (mod\mathfrak{p})}$. Promotrimo poseban slučaj, $U = SpecA$. Tada je $O(SpecA) = O(D(1)) \cong A$ pa za $s \in O(SpecA)$ vrijedi da je globalno $s = f \in A$ (pogledaj izomorfizam). Iz ovoga proizvoljni element prstena možemo shvatiti kao funkciju pri čemu $f(\mathfrak{p}) := f\ (mod\mathfrak{p})$. Kako $f(\mathfrak{p}) = 0$ znači $f \in \mathfrak{p}$, topološke termine možemo zapisati u klasičnom obliku kao

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in SpecA \mid f(\mathfrak{p}) = 0 \ na\ S\}$$

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in SpecA \mid f(\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

Primjer 2.1.12. *Za $A = K[T_1, ..., T_n]$, $K = \bar{K}$ polje, $n \in \mathbb{N}$, $f \in A$, $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$, $\alpha \in K$ vrijedi da su*

$$A_{(x-\alpha)} \cong k((x - \alpha)) \cong K$$

gdje je zadnji izomorfizam djeluje kao $f\ (mod(x - \alpha)) \mapsto f(\alpha)$. Sada je jasno da je $A \to k(\mathfrak{p})$ upravo evaluacija polinoma f u α. Također za $\varphi \in O(U)$, U otvoren, iz prethodne napomene dobivamo

$$\varphi(\alpha) := \varphi((x-\alpha)) = \frac{f\ (mod(x - \alpha))}{g\ (mod(x - \alpha))} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}, \quad f, g \in K[T_1, ..., T_n], g \neq 0 \ na\ okolini\ točke\ \mathfrak{p}.$$

Ako usporedimo definicije regularnih funkcija (1.2) te strukturnog snopa (2.1.7) na otvorenom skupu vidimo da su potpuno analogne do na činjenicu da U u kasnijoj topologiji sadrži nemaksimalne ideale.

2.2 Definicija i primjeri shema

Definicija 2.2.1. *Neka je (X,O) lokalno oprstenjen prostor. Kažemo da je (X,O)* ***afina shema*** *ako postoji prsten A takav da je (X,O) izomorfan (SpecA,O_{SpecA}). Nadalje, kažemo da je (X,O)* ***shema*** *ako za svaku točku $x \in X$ postoji njena otvorena okolina $V_x \subseteq X$ takva da je $(V_x, O|_{V_x})$ afina shema. U tom slučaju O također nazivamo strukturnim snopom sheme X.*

Napomena 2.2.2. *Neka je $\mathcal{F}$ snop na topološkom prostoru X. Za otvoren $U \subseteq X$ definiramo restrikciju snopa $\mathcal{F}$ na U sa $\mathcal{F}|_U$ na način da $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$, a restrikcije se nasljeđuju. Definicija je dobra jer su otvoreni skupovi u U otvoreni u X. Jednostavna provjera svojstava pokazuje da je $\mathcal{F}|_U$ snop. Također vrijedi očit izomorfizam vlati $(\mathcal{F}|_U)_x \cong \mathcal{F}_x$, $\forall x \in U$, što posebno povlači da je svaki podskup lokalno oprstenjenog prostora lokalno oprstenjen prostor.*

Nije teško provjeriti da sheme čine kategoriju koju označujemo sa *Sch*. Posebno afine sheme će činiti potkategoriju shema (afina shema je očito shema). Znamo da svaka afina shema odgovara jedinstvenom prstenu te da propozicija 2.1.9 govori da su homomorfizmi prstenova u bijekciji s morfizmima afinih shema (gdje su morfizmi u suprotnom poretku). Kada bismo Spec shvatili kao funktor

$$\mathrm{Spec} : \mathit{Ring}^{op} \to \mathit{AffSch},$$

bijekcija među morfizmima bi značila da je Spec pun i vjeran. S druge strane, po konstrukciji spektra funktor je esencijalno surjektivan (svaki objekt iz AffSch je oblika Spec$A$). Upravo to znači da imamo ekvivalenciju kategorija afinih shemi te komutativnih prstenova s jedinicom tj.

$$\mathit{AffSch} \cong \mathit{Ring}^{op}.$$

Napomena 2.2.3. *Sjetimo se da ekvivalenciju kategorija također možemo zadati preko dva funktora koja su međusobno inverzna (to jest kompozicijom su izomorfni identiteti). U našem primjeru, funktor $\Gamma : \mathit{AffSch} \to \mathit{Ring}^{op}$ koji pridružuje afinoj shemi prsten globalnih prerez (to jest $O_X(X)$) bi bio traženi inverz.*

Znači, baviti se shemama lokalno znači baviti se prstenima. Analogon iz klasične algebarske geometrije glasi da baviti se kvaziprojektivnim mnogostrukostima je lokalno baviti se konačno generiranim reduciranim algebrama. Veza između dva objekta je u poimanju točaka kao maksimalnih odnosno prostih ideala što smo već spominjali. Naime, postoji funktor koji kategoriju kvaziprojektivnih mnogostrukosti "ulaže" u kategoriju shema.

Definicija 2.2.4. *Neka je S shema. Za shemu X, zajedno s morfizmom $X \to S$, kažemo da je shema nad S (ili S-shema). Ako su X, Y sheme nad S, morfizam između njih je morfizam shemi $f : X \to Y$ takav da komutira dijagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}.$$

Kategoriju shema nad S označavamo s Sch(S). Ako je $S = \mathrm{Spec}A$ za neki prsten A, shemu nad S standardnom zloupotrebom notacije nazivamo shemom nad A.

Primijetimo da sheme nad S induciraju morfizam prstenova $O_S(S) \to O_X(X)$ te komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} O_Y(Y) \arrow[rr] & & O_X(X) \\ & O_S(S) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Ovo je prirodan zahtjev. Promotrimo li slučaj $S = \mathrm{Spec}K, X = \mathrm{Spec}(K[T_1, ..., T_n]), Y = \mathrm{Spec}(K[R_1, ..., R_m)]$, K algebarski zatvoreno polje, $n, m \in \mathbb{N}$, dobivamo da prethodni dijagram opisuje morfizam K-algebri. Označimo s *Var(K)* kategoriju kvaziprojektivnih mnogostrukosti nad K zajedno s regularnim preslikavanjima. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza.

Teorem 2.2.5. *Neka je K algebarski zatvoreno polje. Postoji funktor $t : Var(K) \to$ Sch(K) koji kvaziprojektivnoj mnogostrukosti X nad K pridružuje shemu t(X) nad K tako da je X homeomorfan skupu zatvorenih točaka sheme t(X), a skup svih regularnih preslikavanja je u bijekciji s morfizmima odgovarajućih shema.*

Ukratko, ideja je da $t(X)$ definiramo kao skup svih ireducibilnih zatvorenih skupova u X, a snop od $t(X)$ upravo kao snop regularnih funkcija. Na primjer, za afinu mnogostrukost X čiji je koordinatni prsten $K[T_1, ..., T_n]$, vrijedilo bi $t(X) = \mathrm{Spec}K[T_1, ..., T_n]$.

Primjeri shema

Sada ćemo malo govoriti o primjerima shema. Najprije, primijetimo da morfizam snopova je dovoljno zadati djelovanjem na bazi. Preciznije, neka su $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ snopovi na topološkom prostoru X, $\{B_i\}_{i\in I}$ baza od X te neka su dani morfizmi $\varphi_i : \mathcal{F}(B_i) \to \mathcal{G}(B_i)$ koji komutiraju s restrikcijama. Sada za proizvoljan $U \subseteq X$, element $f \in \mathcal{F}(U)$ možemo restrikcijama rastaviti u $(f_i)_i \in \prod \mathcal{F}(B_i)$, gdje se f_i podudaraju na presjecima jer je $\mathcal{F}$ snop. Dobivamo $(\varphi_i(f_i))_i \in \prod \mathcal{G}(B_i)$, gdje se $\varphi_i(f_i)$ također podudaraju na presjecima (morfizmi φ_i komutiraju s restrikcijama). Sada snopovsko svojstvo od $\mathcal{G}$ daje jedinstven element $\varphi(f)$. Time smo dobili traženo preslikavanje $\varphi : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Primjer 2.2.6. *Neka je A prsten, $f \in A$. Tada vrijedi da je $(SpecA_f, O_{A_f}) \cong (D_A(f), O_A|_{D_A(f)})$. Znamo da kanonsko preslikavanje $A \to A_f$ inducira φ : $SpecA_f \to SpecA$ čija je slika $D_A(f)$ te iz relacije*

$$\varphi\left(D_{A_f}\left(\frac{g}{1}\right)\right) = D_A(fg), \quad g \in A$$

lako slijedi da je i homeomorfizam (primijetimo da $D_{A_f}(\frac{g}{1}) = D_{A_f}(\frac{g}{f^k})$ za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ te da $D(f)$ promatramo s relativnom topologijom iz SpecA pa je $D_A(fg) = D_A(f) \cap D_A(g)$

bazni element u $D_A(f)$). Također vrijedi

$$\mathcal{O}_A\big|_{D_A(f)}(D_A(fg)) = \mathcal{O}_A(D_A(fg)) \cong A_{fg}, \quad \mathcal{O}_{A_f}(D_{A_f}(\frac{g}{1})) \cong (A_f)_g \cong A_{fg}$$

iz čega slijedi da imamo izomorfizam pripadnih snopova prema diskusiji prije primjera.

Definicija 2.2.7. *Neka je X shema. Kažemo da je $(Y, \mathcal{O}_Y)$* ***otvorena podshema od sheme*** *X ako je izomorfna shemi $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ za neki otvoren skup $U \subseteq X$.*

Definicija je dobra jer svaki lokalno oprstenjen prostor $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ je shema. Neka je $x \in U$, tada je $x \in X$ pa postoji okolina u X izomorfna Spec$A$ po definiciji sheme X. Sada je Spec$A \cap U$ otvorena okolina točke x u Spec$A$ pa postoji bazni element $D(f)$, za $f \in A$, takav da $x \in D(f) \subseteq$ SpecA $\cap\, U \subseteq U$. Iz primjera znamo da je $D(f)$ izomorfan afinoj shemi SpecA_f pa je upravo to tražena afina okolina točke $x \in U$.

Sada navodimo primjere.

Primjer 2.2.8. *(i) Proučimo spektar prstena $\mathbb{Z}$. Prosti ideali u $\mathbb{Z}$ su oblika (p) gdje je $p \in \mathbb{Z}$ prost broj, te ideal (0) (jer je $\mathbb{Z}$ integralna domena). Glavni otvoreni skupovi su*

$$D(n) = \{\mathfrak{p} \text{ prost ideal} \mid n \notin \mathfrak{p}\} = \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ prost broj}, p \nmid n\} \cup \{(0)\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ako je sada $n = p_1^{k_1}...p_l^{k_l}$ dobivamo da je

$$D(n) = \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ prost broj}, p \nmid p_i, i \in 1, ..., l\} \cup \{(0)\} = Spec\mathbb{Z} - \{(p_1), ..., (p_l)\}$$

to jest Spec$\mathbb{Z}$ bez konačno mnogo točaka. Proizvoljni otvoreni su unije takvih. Opišimo snop na glavnim otvorenim skupovima (snop na proizvoljnim dobivamo iz snopovskog svojstva). Za $n \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\mathcal{O}(D(n)) \cong \mathbb{Z}_n = \{\frac{m}{n^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Posebno $\mathcal{O}(D(1)) \cong \mathbb{Z}$. Nadalje, primijetimo da polja ostataka su različita za svaku točku iz Spec$\mathbb{Z}$. Svaki $(p) \in Spec\mathbb{Z} - \{(0)\}$ je maksimalan pa vrijedi izomorfizam

$$k(\mathfrak{p}) = Frac(\mathbb{Z}/(p)) \cong \mathbb{Z}/(p) = F_p$$

gdje je F_p konačno polje reda p, dok za (0) vrijedi $k((0)) = Frac(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

Odredimo još vlati. Znamo da za (p), gdje $p \in \mathbb{Z}$ prost broj, vrijedi

$$\mathcal{O}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, p \nmid n\},$$

a za (0) vrijedi $\mathcal{O}_{(0)} \cong \mathbb{Z}_{(0)} = \mathbb{Q}$. *Sada smo u potpunosti opisali afinu shemu Spec*$\mathbb{Z}$. *Spomenimo još jedno važno svojstvo od Spec*$\mathbb{Z}$. *Naime,* $\mathbb{Z}$ *je inicijalni objekt u kategoriji komutativnih prstenova, to jest za svaki prsten R postoji jedinstven homomorfizam* $\mathbb{Z} \to R$, $n \mapsto n1_R$. *Zbog ekvivalencije s kategorijom afinih shema vrijedi da je Spec*$\mathbb{Z}$ *je terminalni objekt u AffSch, to jest iz svake afine sheme postoji jedinstven morfizam u Spec*$\mathbb{Z}$.

(ii) *Definirajmo afine prostore u novoj teoriji. Neka je R prsten te* $n \in \mathbb{N}$, *definiramo* $\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}(R[T_1, ..., T_n])$ *te ga nazivamo* ***afinim*** n-***prostorom nad*** R. *Također za* $n = 0$ *možemo dodefinirati* $\mathbb{A}^0_R := \mathrm{Spec}R$. *Standardno za* $n = 0, 1, 2$, $\mathbb{A}^n_R$ *još nazivamo afinom točkom, afinim pravcem te afinom ravninom nad R respektivno.*

Ako je $R = K[T_1, ..., T_n]$, *gdje je K algebarski zatvoreno polje, vidimo da je to upravo shema pridružena afinoj mnogostrukosti (diskusija nakon teorema 2.2.5). U primjeru 2.1.12 smo opisali da djelovanje prereza snopa na maksimalnim idealima odgovara upravo evaluaciji polinoma, no evaluacija u nemaksimalnim idealima također ima smisla. Zaista, promotrimo prosti ideal* $\mathfrak{p} = (T_1, ..., T_k)$, $1 < k < n$. *Tada vrijedi*

$$K[T_1, ..., T_n] \to K[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{p} \cong K[T_{k+1}, ..., T_n] \to K(T_{k+1}, ..., T_n)$$

to jest polje ostataka u $\mathfrak{p}$ *odgovara polju razlomaka prstena polinoma u* $n-k$ *varijabli, a gornje preslikavanje je upravo evaluacija*

$$f(T_1, ..., T_n) \mapsto f(0, ..., 0, T_{k+1}, ..., T_n).$$

Neka je sada $R = \mathbb{Z}$. *Promotrimo afini pravac Spec*$\mathbb{Z}[T]$. *Točke dobivamo tako da promatramo kanonsko ulaganje* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[T]$. *Tada vrijedi ako* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[T]$ *onda* $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \in \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. *Znači imamo slučajeve:*

- $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (0) \implies \mathfrak{p} = (0)$ *ili* $\mathfrak{p} = (f)$, *gdje je f ireducibilan polinom u* $\mathbb{Z}[T]$;
- $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p) \implies \mathfrak{p} = (p)$ *ili* $\mathfrak{p} = (p, f)$, *gdje je f ireducibilan polinom u* $F_p[T]$.

(iii) *Neka je* $\mathbb{A}^2_K$ *kao pod (ii). Promotrimo* $X := \mathbb{A}^n_K - \{(T_1, T_2)\}$. *To je shema prema diskusiji iza definicije 2.2.7, jer je* $\mathbb{A}^n_K - \{(T_1, T_2)\} = D(T_1) \cup D(T_2)$ *otvoren u* $\mathbb{A}^n_K$. *Pokažimo da to nije afina shema.*

Promotrimo O(X). Zbog snopovskog svojstva elemente iz $\mathcal{O}(X)$ *na jedinstven način možemo zadati elementima iz* $\mathcal{O}(D(T_1)), \mathcal{O}(D(T_2))$ *koji se podudaraju na presjeku* $\mathcal{O}(D(T_1T_2))$. *Primijetimo da je homomorfizam* $\mathcal{O}(D(T_i)) \to \mathcal{O}(D(T_1T_2))$ *izomorfan kanonskoj inkluziji*

$$K[T_1, T_2]_{T_i} \hookrightarrow (K[T_1, T_2]_{T_i})_{T_j} \cong K[T_1, T_2]_{T_1T_2}, \quad i, j = \{1, 2\}, i \neq j \tag{2.2}$$

što slijedi iz činjenice da je $D(T_1T_2)$ otvorena podshema od $D(T_i)$ izomorfna $D_{D(T_i)}(T_j)$. Sada, ako je $f \in O(X)$, koristeći propoziciju 2.1.8 za glavne otvorene skupove, vrijedi $f|_{D(T_1)} = \frac{f_1}{T_1^k}$ i $f|_{D(T_2)} = \frac{f_2}{T_2^l}$, gdje su razlomci potpuno skraćeni te $k, l \in \mathbb{N}_0$. Oba elementa imaju istu sliku pri restrikciji na $D(T_1T_2)$ (2.2) odnosno

$$\frac{f_1}{T_1^k} = \frac{f_2}{T_2^l} \in K[T_1, T_2]_{T_1T_2}$$

što je moguće jedino za $k = l = 0$. Dobivamo da je $f \in K[T_1, T_2]$. S druge strane svaki element iz $K[T_1, T_2]$ uložen u $K[T_1, T_2]_{T_i}, i = 1, 2$ ima istu sliku u $K[T_1, T_2]_{T_1T_2}$. Znači, $O(X) \cong K[T_1, T_2]$. Primijetimo da ulaganje $X \hookrightarrow \mathbb{A}^2_K$ prema prethodnom inducira izomorfizam na globalnim presjecima $O(X) \cong K[T_1, T_2] \cong O(\mathbb{A}^2_K)$. Kada bi X bila afina shema, tada bi zbog izomorfizma na globalnim presjecima, polazno preslikavanje moralo biti izomorfizam shema, no ono nije niti surjekcija. Ovo posebno pokazuje da otvorena podshema afine sheme ne mora biti afina.

Napomena 2.2.9. *Evaluaciju iz napomene 2.1.11 možemo proširiti na slučaj shema. Jasno, ako je X shema, za svaku točku $x \in X$ možemo promatrati vlat pripadnog snopa u x, $O_{X,x}$, te njeno polje ostataka $k(x)$. Sada za $f \in O_X(U)$ činjenicu da je klica $(U, f)_x = 0 \in k(x)$, kraće možemo označavati kao $f(x) = 0$.*

Projektivni prostori

Prelazimo na jednu od najvažnijih shema u algebarskoj geometriji koja će biti analogon projektivnog prostora definiranom u 1.2. Najprije malo terminologije.
Za prsten S kažemo da je $\mathbb{N}_0$-gradiran prsten ako je prikaziv kao direktna suma abelovih grupa $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, sa svojstvom $S_dS_e \subseteq S_{d+e}$. Element $f \in S_d$ nazivamo homogenim elementom stupnja $deg(f) := d$. Sa S_+ označujemo ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$. Također kažemo da je ideal $\mathfrak{a}$ homogen ako je generiran homogenim elementima. Definiramo

$$\mathrm{Proj} S := \{\mathfrak{p} \text{ homogen prost} \mid S_+ \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

$$V_+(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj} S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}, \quad \mathfrak{a} \text{ homogen ideal.}$$

Slično kao u slučaju sa spektrom prstena (imajući u vidu svojstva homogenih ideala), skupovi $V_+(\mathfrak{a})$ čine zatvorenu topologiju na Proj$S$. Napomenimo da je Proj$S \subseteq$ Spec$S$ pa na njemu možemo promatrati naslijeđenu topologiju iz Spec$S$ te vrijedi da se ona podudara s upravo definiranom.

Sada ćemo definirati snop na Proj$S$ čija konstrukcija će imitirati onu za spektar prstena. Najprije, neka je $\mathfrak{p} \in$ Proj$S$ i T multiplikativni sustav homogenih elemenata iz S koji nisu u $\mathfrak{p}$. Sada definiramo $(S_{\mathfrak{p}})_0$ kao potprsten lokalizacije $T^{-1}S$ koji se sastoji od elemenata stupnja 0 to jest

$$(S_{\mathfrak{p}})_0 = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \text{ homogeni}, \ g \notin \mathfrak{p}, \ deg(f) = deg(g) \right\}.$$

Također za homogen $f \in S_+$ definiramo glavni otvoren skup u Proj$S$

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}S \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

gdje ti skupovi čine bazu topologije kao u slučaju spektra prstena. Sada definiramo snop na otvorenom skupu $U \subseteq$ Proj$S$

$$O(U) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} (S_{\mathfrak{p}})_0 \mid \forall \mathfrak{p} \in U, \exists V_{\mathfrak{p}} \ni \mathfrak{p}, \exists d \geq 0, \ a, f \in S_d, \ \forall \mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}, f \notin \mathfrak{q}, s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{f} \right\}.$$

Vrijedi da je za $\mathfrak{p} \in$ Proj$S$, $O_{\mathfrak{p}} \cong (S_{\mathfrak{p}})_0$ što je lokalan prsten. Ponovno preskačemo dokaz jer se tvrdnje dokazuju analogno (do na svojstva homogenih elemenata) kao u slučaju spektra prstena. Ovime smo pokazali da je (Proj$S$,O) lokalno oprstenjen prostor. Prije nego pokažemo da je (Proj$S$,O) shema trebat će nam sljedeća lema.

Lema 2.2.10. *Neka je S gradiran prsten indeksiran po $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$-gradiran prsten) koji sadrži invertibilan element pozitivnog stupnja. Tada je skup homogenih prostih ideala u S (s topologijom naslijeđenom iz SpecS) homeomorfan skupu Spec(S_0).*

Teorem 2.2.11. *(ProjS,O) je shema.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je za homogen $f \in S_+$, skup $D_+(f)$ izomorfan afinoj shemi, pa činjenica da takvi skupovi tvore bazu za ProjS dokazat će tvrdnju. Fiksirajmo $f \in S_+$. Vrijedi da je S_f je $\mathbb{Z}$-gradiran prsten gdje je deg(s/f^k):=deg(s)-k$\cdot$deg(f). Znamo da su $D(f)$ i SpecS_f homeomorfni preko preslikavanja $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f$. Neka je sada $\mathfrak{p}$ homogen to jest

$$a \in \mathfrak{p} \implies a_i \in \mathfrak{p}, \quad a_i \text{ homogene komponente.}$$

Neka je $\frac{a}{f^k} \in \mathfrak{p}S_f$, te neka su bez smanjenja općenitosti $\frac{a_i}{f^k} \in S_f$ njegove komponente homogenosti (pomnožimo odgovarajuće nazivnike s f odgovarajuće mnogo puta). Sada

$$\frac{a}{f^k} = \sum_i \frac{a_i}{f^k} = \frac{\sum_i a_i}{f^k} \implies a = \sum_i a_i \implies a_i \in \mathfrak{p} \implies \frac{a_i}{f^k} \text{ homogen.}$$

Znači homemorfizam između $D(f)$ i SpecS_f možemo restringirati do homeomorfizma između $D_+(f)$ i skupa homogenih prostih ideala u S_f. Kako je f invertibilan pozitivnog stupnja u S_f, lema 2.2.10 daje homeomorfizam između $D_+(f)$ i Spec$(S_f)_0$, dan preslikavanjem $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_f \cap (S_f)_0$. Neka je $\mathfrak{p} \in D_+(f)$. Primijetimo sljedeće:

$$((S_f)_0)_{\varphi(\mathfrak{p})} = \left\{ \frac{a}{f^n} \in S_f \mid deg(a) = n \cdot deg(f) \right\}_{\varphi(\mathfrak{p})} =$$

$$= \left\{ \frac{a}{f^n} / \frac{b}{f^m} \mid b \notin \mathfrak{p},\ deg(a) = n \cdot deg(f),\ deg(b) = m \cdot deg(f) \right\} \cong$$

$$\cong \left\{ \frac{a}{bf^{n-m}} \mid bf^{n-m} \notin \mathfrak{p},\ deg(a) = (n-m) \cdot deg(f) + deg(b) \right\} = (S_{\mathfrak{p}})_0,$$

to jest imamo prirodni izomorfizam $(S_{\mathfrak{p}})_0 \cong ((S_f)_0)_{\varphi(\mathfrak{p})}$, koji inducira izomorfizam snopova $\varphi^\# : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(S_f)_0} \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}S}\big|_{D_+(f)})$ (na otvorenom U, koristimo izomorfizam $(S_{\mathfrak{p}})_0 \cong ((S_f)_0)_{\varphi(\mathfrak{p})}$ za svaki $\mathfrak{p} \in U$). Po konstrukciji inducirani izomorfizmi na vlatima su lokalni homomorfizmi, pa je $(\varphi, \varphi^\#)$ izomorfizam lokalno oprstenjenih prostora. Posebno, Proj$S$ je lokalno izomorfan afinoj shemi pa je shema.

□

Pogledajmo slučaj $S = K[T_0, ..., T_n]$, K algebarski zatvoreno polje, $n \in \mathbb{N}$. Očito je S gradirani prsten pri čemu elementi iz K su stupnja 0 (odnosno iz S_0), a T_i stupnja jedan, $i \in \{0, ..., n\}$. Sada definiramo projektivni n-prostor nad K, $\mathbb{P}^n_K$ kao Proj$S$. Također, možemo primijetiti da ireducibilni zatvoreni skupovi u klasičnom projektivnom prostoru odgovaraju točkama u Proj$S$. Projektivni prostor $\mathbb{P}^n_K$ zaista je analogon klasičnog projektivnog prostora kao u slučaju s afinim prostorom. Može se pokazati rezultat da ako promatramo projektivnu mnogostrukost X određenu prstenom $K[T_0, ..., T_n]/\mathfrak{p}$, gdje je $\mathfrak{p}$ homogen prost ideal, da vrijedi $t(X) \cong$ Proj$(K[T_0, ..., T_n]/\mathfrak{p})$ (t je funktor iz teorema 2.2.5).

Naravno ova konstrukcija nam pruža da generaliziramo projektivni prostor nad općenitim prstenima.

Definicija 2.2.12. *Neka je A prsten, definiramo* ***projektivan*** n-***prostor nad prstenom*** *A kao* $\mathbb{P}^n_A := Proj(A[T_0, ..., T_n])$.

Napomena 2.2.13. *Proučimo* $Spec(S_f)_0$ *iz dokaza teorema 2.2.11 u slučaju projektivnog prostora. Vrijedi*

$$D_+(T_0) \cong Spec(A[T_0, ..., T_n]_{T_0})_0 \cong Spec(A[T_1/T_0, ..., T_n/T_0]) = \mathbb{A}^n_A$$

to jest, uz činjenicu da $\{D_+(T_i)\}_{i \in 0,...,n}$ *pokriva* $\mathbb{P}^n_A$, *vidimo da je* $\mathbb{P}^n_A$ *pokriven afinim skupovima izomorfnim* $\mathbb{A}^n_A$.

Pokažimo da su globalni presjeci projektivnog prostora jednaki baznom prstenu S_0, odnosno

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(\mathbb{P}^n_A) \cong A. \tag{2.3}$$

Znamo, $\mathbb{P}^n_A = \bigcup_{i=0}^n D_+(T_i)$ pa ako je $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}$ restrikcijom na $D_+(T_i)$ dobivamo

$$s\big|_{D_+(T_i)} = \frac{f_i}{T_i^{\deg f_i}}, \forall i.$$

Sada kao u primjeru 2.2.8(iv) dobivamo

$$\frac{f_i}{T_i^{\deg f_i}} = \frac{f_j}{T_j^{\deg f_j}} \in K[T_0/T_iT_j, ..., T_n/T_iT_j], \forall i, j.$$

Istim argumentom dobivamo $\deg f_i = \deg f_j = 0$ i $f_i = f_j = a, \forall i, j$. Znači, $s = a \in A$. Kako je očito $A \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}$, dobili smo traženu jednakost.

2.3 Svojstva shema

U ovoj sekciji, navest ćemo kratki pregled osnovnih svojstava shemi. Opisat ćemo pojam lokalnih svojstava koji će se pokazat koristan u dokazivanju te u vezi lokalizacije u algebarskom smislu i geometrijskog poimanja. Također dat ćemo definiciju produkta u kategoriji shema (odnosno kategoriji shema nad fiksnom shemom).

Osnovna svojstva

Znamo da su sheme uređen par topološkog prostora i snopa prstenova. Tako ćemo na primjer reći da shema ima topološko svojstvo ako ga ima pridruženi topološki prostor pa možemo govoriti o povezanim, ireducibilnim, kvazikompaktnim shemama.

Primjer 2.3.1. *Nije svaka afina shema povezana. Naime, vrijedi X=Spec$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{(2), (3)\}$, te $V(2) = \{(2)\}, V(3) = \{(3)\}$ što je očito zatvorena separacija od X. Posljedično, nije svaka afina shema ireducibilna. No, vrijedi da je SpecA ireducibilna ako i samo ako je $A/\mathfrak{N}$ integralna domena ($\mathfrak{N}$ je ideal svih nilpotentnih elemenata). Dokaz se bazira na činjenici*

$$f, g \notin \mathfrak{N} \iff D(f) \cap D(g) = D(fg) \neq \emptyset.$$

S druge strane nepovezanost SpecA karakteriziramo s prikazivošču A u produkt dva ne-nul prstena.

Propozicija 2.3.2. *Afine sheme su kvazikompaktne.*

Dokaz. Neka je Spec$A$ afina shema, te $\{U_i\}_{i\in I}$ njen otvoren pokrivač. Kako glavni otvoreni skupovi čine bazu za Spec$A$, možemo pretpostaviti da su $U_i = D(f_i)$ za neki $f_i \in A$. Sada poznata topološka svojstva daju:

$$\mathrm{Spec}A = \bigcup_i D(f_i) \implies V((f_i)_{i\in I}) = \bigcap_i V(f_i) = \emptyset \implies (f_i)_{i\in I} = A.$$

Ovo posebno znači da je $1 = \sum_{i=1}^n f_i g_i$, za neke $g_i \in A$. Slijedi da je $A = (f_1, ..., f_n)$, odnosno Spec$A = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, što smo htjeli i dokazati. □

Naravno nisu sve sheme kvazikompaktne, najlakši primjer bi bila disjunktna unija beskonačno mnogo afinih shema. To je također primjer sheme koja nije povezana (pa zato ni ireducibilna).

Slično ćemo svojstva prstenova povezivati sa svojstvima pridruženog snopa.

Definicija 2.3.3. *Neka je (X,O) shema. Kažemo da je X* ***reducirana*** *ako za svaki otvoren skup U, prsten O(U) je reduciran. Slično, kažemo da je shema* ***integralna*** *ako je O(U) integralna domena.*

Primijetimo da je lako naći primjere za nereducirane i neintegralne sheme, dovoljno je naći prsten takvog svojstva i promotriti njegov spektar. Problem nastaje u provjeri je li neka shema reducirana ili integralna. U sljedećoj sekciji pokazat ćemo bolje načine za provjeru danih svojstava.

Sada definiramo svojstva koja govore o nekoj vrsti konačne generiranosti. Često ih nazivamo "uvjetima konačnosti".

Definicija 2.3.4. *Kažemo da je shema X* ***lokalno Noetherina*** *ako postoji $\{SpecA_i\}_{i\in I}$ pokrivač za X, pri čemu su A_i Noetherini prstenovi. Nadalje, za X kažemo da je* ***Noetherina*** *ako je taj pokrivač konačan ili ekvivalentno da je X dodatno kvazikompaktna.*

Primijetimo da ne možemo zaključiti da je pripadni prsten Noetherine afine sheme Noetherin. To će slijediti iz činjenice da je Noetherinost lokalno svojstvo.

Definicija 2.3.5. *Morfizam shema $f : X \to Y$ je* ***konačan morfizam*** *ako postoji afini pokrivač $\{SpecB_i\}_{i\in I}$ od Y, pri čemu je $f^{-1}(SpecB_i) = SpecA_i$, gdje A_i je B_i-algebra koja je konačno generirani B_i-modul.*

Klasičan primjer je $\mathbb{A}^n_K \to$ Spec$K$, gdje je K algebarski zatvoreno polje. Jasno, Spec$K$ je jedna točka te je njegova praslika cijeli $\mathbb{A}^n_K = \mathrm{Spec}K[T_1, ..., T_n]$, a $K[T_1, ..., T_n]$ je K-algebra i n-dimenzionalni K-vektorski prostor.

Definicija 2.3.6. *Morfizam shema $f : X \to Y$ je* ***lokalno konačnog tipa*** *ako postoji afini pokrivač $\{SpecB_i\}_{i\in I}$ od Y, pri čemu je $f^{-1}(SpecB_i) = \bigcup_j SpecA_{ij}$, gdje A_{ij} je konačno generirana B_i-algebra.*

Klasični primjer u ovom slučaju je $\mathbb{P}^n_K \to \mathrm{Spec}K$, gdje je K algebarski zatvoreno polje. Praslika jedine točke je cijeli prostor koji je pokriven unijom afinih izomorfnih $\mathbb{A}^n_K$ (napomena 2.2.13) čiji pripadni prsten je očito konačno generirana K-algebra.

Lokalna svojstva

Kao što smo vidjeli u definiciji 2.3.3, svojstva shema možemo zadati tako da određeno svojstvo vrijedi na svakom otvorenom skupu. To može postati naporno u praktičnom, ali i u teoretskom smislu. Naime, kada bi svojstvo sheme vrijedilo provjerom na bilo kojem otvorenom pokrivaču to bi uvelike olakšalo problem. Na primjer, mogli bismo provjeriti svojstvo na afinom pokrivaču pa bismo problem sveli na razinu problema komutativnih prstena. S druge strane, ako znamo da svojstvo vrijedi na nekom afinom pokrivaču kao u definiciji 2.3.4 što možemo reći o tom svojstvu na drugim otvorenim skupovima. Dat ćemo propoziciju koja će upravo govoriti o poistovjećivanju dvije definicije. Prvo ponovimo pojam lokalnosti prstena.

Da objekt A ima svojstvo P označavat ćemo sa $P(A)$. Svojstvo P prstena A je lokalno ako vrijedi: $P(A) \iff P(A_\mathfrak{p}), \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$. To je ekvivalentno sljedećem:

(i) $P(A) \implies P(A_f)$ za svaki $f \in A$;

(ii) ako vrijedi $A = (f_1, ..., f_n)$, za $f_i \in A, n \in \mathbb{N}$, tada za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $P(A_{f_i}) \implies P(A)$.

Ovu definiciju možemo interpretirati na geometrijski način.

Definicija 2.3.7. *Kažemo da je P **lokalno svojstvo afine sheme** $X = SpecA$ ako vrijedi:*

(i) $P(SpecA) \implies P(SpecA_f)$ za svaki $f \in A$;

(ii) ako vrijedi $A = \bigcup_{i=1}^n SpecA_{f_i}$, za $f_i \in A, n \in \mathbb{N}$, tada za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $P(SpecA_{f_i}) \implies P(A)$.

Lokalno svojstvo afine sheme ćemo također zvati afinim lokalnim svojstvom. Trebat će nam sljedeća lema.

Lema 2.3.8. *Neka su SpecA i SpecB otvorene afine podsheme sheme X. Tada je SpecA $\cap$ SpecB je unija otvorenih skupova koji su istovremeno glavni otvoreni u SpecA i u SpecB.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in \mathrm{Spec}A \cap \mathrm{Spec}B$. Neka je $\mathrm{Spec}A_f$ glavni otvoren podskup od $\mathrm{Spec}A$ takav da $x \in \mathrm{Spec}A_f \subseteq \mathrm{Spec}A \cap \mathrm{Spec}B$. S druge strane neka je $\mathrm{Spec}B_g$ glavni otvoren podskup od Spec$B$ takav da $x \in \mathrm{Spec}B_g \subseteq \mathrm{Spec}A_f \cap \mathrm{Spec}B$. Neka je $g|_{\mathrm{Spec}A_f} = g' = \frac{g''}{f^n}$. Imamo sljedeće:

$$\mathrm{Spec}B_g = \{\mathfrak{p} \text{ prost u B} \mid g \notin \mathfrak{p}\} = \left\{\mathfrak{p} \text{ prost u } A_f \mid g' \notin \mathfrak{p}\right\} =$$

$$= \left\{\mathfrak{p} \text{ prost u } A_f \mid g'' \notin \mathfrak{p}\right\} = \mathrm{Spec}(A_f)''_g = \mathrm{Spec}A_{fg''},$$

čime je tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 2.3.9. *Neka je X shema i P afino lokalno svojstvo. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) za svaki otvoren afini skup SpecA $\subseteq$ X vrijedi P(SpecA).

(2) postoji otvoren afini pokrivač $\{\mathrm{Spec}A_i\}_{i\in I}$ takav da vrijedi $P(\mathrm{Spec}A_i)$ za svaki $i \in I$.

Dokaz. Očito (2) povlači (1). Neka je Spec$A$ afini otvoren skup u X te neka vrijede pretpostavke kao u (2). Sada vrijedi

$$\mathrm{Spec}A = \bigcup_{i\in I}(\mathrm{Spec}A \cap \mathrm{Spec}A_i)$$

pa za svaki i, presjek $\mathrm{Spec}A \cap \mathrm{Spec}A_i$ možemo pokriti otvorenim skupovima koji su glavni otvoreni i u Spec$A$ i u SpecA_i. Sada je Spec$A$ pokriven skupovima oblika $D(f_j)$. Kako je P lokalno svojstvo, $P(\mathrm{Spec}A_i)$ povlači $P(\mathrm{Spec}A_{f_j})$ za svaki j. Kvazikompaknost afinih shema povlači da indeksa j ima konačno mnogo pa možemo pretpostaviti $A = (f_1, ..., f_n)$. Ponovno, lokalnost svojstva P povlači da vrijedi $P(\mathrm{Spec}A)$. Dakle (1) povlači (2). □

Vrijedi da su reduciranost i svojstva iz definicija 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 lokalna (to nisu očite činjenice čiji dokaz preskačemo). Posebno afina shema Spec$A$ jer reducirana ili Noetherina ako je prsten A takav. S druge strane integralnost nije lokalno svojstvo. Zaista, prsten $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nije integralna domena, dok njegove lokalizacije u 2 i 3, odnosno $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, jesu. Također, isti primjer pokazuje da ireducibilnost i povezanost nisu lokalna svojstva. Ipak, vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 2.3.10. *Neka je X shema. X je integralna ako i samo ako je ireducibilna i reducirana.*

Dokaz. Integralnost jasno povlači reduciranost, a reducibilnost povlači da postoje dva otvorena neprazna disjunktna skupa $U_1, U_2 \subseteq X$. Sada $\mathcal{O}_X(U_1 \sqcup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ nije integralna domena što je kontradikcija.

Neka je X ireducibilna i reducirana, te neka su $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, U otvoren, takvi da $fg = 0$. Definiramo $V_f = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, te V_g analogno. Vrijedi da su to zatvoreni skupovi. Jasno, ako je U afin, $V_f = V(f)$. Ako nije, U pokrijemo afinim U_i. Sada $U_i - V_f$ je prema prethodnom glavni otvoren u U_i (pa je otvoren u U) iz čega slijedi da je $U - V_f$ otvoren kao unija otvorenih. Analogno za V_g. Također vrijedi $U = V_f \cup V_g$ pa zbog ireducibilnosti od U (potprostor ireducibilnog prostora je ireducibilan) $U = V_f$ ili $U = V_g$. Neka vrijedi $U = V_f$. Sada za :

$$f(x) = 0, \forall x \in U \implies f(x) = 0, \forall x \in \mathrm{Spec}A \subseteq U \iff f\Big|_{\mathrm{Spec}A} \in \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A.$$

Zadnje je ekvivalentno tome da je $f|_{\mathrm{Spec}A}$ nilpotentan u A, pa mora vrijediti da je 0 zbog reduciranosti. Kako afini otvoreni pokrivaju U snopovsko svojstvo daje $f = 0 \in O_X(U)$.

□

Vidimo da iako integralnost nije lokalno svojstvo, ponaša se lokalno na ireducibilnom prostoru. Prošli teorem i primjer 2.3.1 pokazuju da Spec$A$ je integralna ako i samo ako je A integralna domena. Znači, afini prostori nad integralnom domenom su integralne sheme. Iz dosadašnje diskusije može se pokazati, pomoću napomene 2.2.13, da je $\mathrm{Proj}(A[T_0, ..., T_n])$ integralna shema, kad je A integralna domena.

Zatvorene podsheme

Već smo definirali što je otvorena podshema i kako se prirodno pojavljuju. Sad ćemo dati definiciju zatvorene podsheme.

Definicija 2.3.11. *Neka su X,Y sheme. Za morfizam shema $\pi : X \to Y$ kažemo da je* ***zatvoreno ulaganje*** *ako je praslika svakog afinog otvorenog skupa u Y, afin otvoren skup u X, te za svaki afin otvoren SpecB $\subseteq$ Y takav da π^{-1}(SpecB) = SpecA vrijedi da je $B \to A$ epimorfizam. U tom slučaju X nazivamo* ***zatvorenom podshemom sheme*** *Y.*

Promotrimo afini slučaj, odnosno neka je $\pi : \mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}B$ zatvoreno ulaganje. Kako je induciran homomorfizam $\varphi : B \to A$ epimorfizam, dobivamo da je $\mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}B$ injekcija. Naime, neka su $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ dva ideala u A. Vrijedi:

$$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \implies \exists a \in A,\ a \in \mathfrak{p} \ \text{i} \ a \notin \mathfrak{q}.$$

Kako je φ surjekcija, postoji $b \in B$ takav da $\varphi(b) = a$. Sada je:

$$b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \ \text{i} \ b \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \implies \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \neq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

odnosno $\mathrm{Spec}A \to \mathrm{Spec}B$ je injekcija. S druge strane, prvi teorem o izomorfizmima daje izomorfizam $B/\ker\varphi \to A$ koji nadalje inducira homeomorfizam $\mathrm{Spec}A \to V_B(\ker\varphi) \subseteq \mathrm{Spec}B$. Ovime smo dobili da je zatvoreno ulaganje afinih shema injekcija, čija je slika zatvoren skup. Iz ovoga se može pokazati da je općenito zatvoreno ulaganje takvo.

Primjer 2.3.12. *Neka je Spec$A$ afina shema. Svaki ideal $\mathfrak{a}$ u A određuje zatvorenu podshemu. To je očito iz prethodne diskusije ako gledamo kanonski epimorfizam $A \to A/\mathfrak{a}$. Također, dvije zatvorene podsheme mogu biti homeomorfne, ali ne izomorfne. To slijedi iz jednakosti $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$, pri čemu $\mathfrak{a} \neq \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Može se pokazati (netrivijalno) da su sve zatvorene podsheme afine sheme takvog oblika, to jest ako je $\pi : X \to \mathrm{Spec}A$ zatvoreno ulaganje, vrijedi da je X afina shema iz prethodan primjer garantira da je oblika $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ gdje je $\mathfrak{a}$ ideal u A.

Sjetimo se da u slučaju afinih mnogostrukosti imali smo korespondenciju zatvorenih podskupova (algebarskih skupova) i radikalnih ideala. Pojam zatvorene podsheme pokazuje kako i proizvoljne ideale možemo shvatiti kao geometrijske objekte.

Produkt shema

U ovoj sekciji dajemo definiciju produkta shema. Naime, od interesa će biti gledati produkte u kategoriji shema nad fiksnom shemom S. U tom slučaju produkt u kategoriji shema će biti produkt shema nad $\mathbb{Z}$, što slijedi iz činjenice da je Spec$\mathbb{Z}$ terminalan objekt u kategoriji shema.

Sjetimo se, produkt u kategoriji C između objekata X i Y je objekt $X \times Y$, zajedno s morfizmima $X \times Y \to X$ i $X \times Y \to X$ za koji vrijedi univerzalno svojstvo: ako je Z objekt s morfizmima $Z \to X$ i $Z \to Y$, tada postoji jedinstven morfizam $Z \to X \times Y$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, bend right=0] \arrow[dr] \arrow[d, dotted, "\exists!"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

U kategoriji shema nad S, objekti dolaze s morfizmom u S pa će produkt biti kompatibilan s tim morfizmom odnosno komutira dijagram:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Definicija 2.3.13. ***Produkt shema** X i Y **nad** S je produkt shema u kategoriji shema nad S i označavamo ga s $X \times_S Y$.*

Promotrimo slučaj $X = \mathrm{Spec}A$, $Y = \mathrm{Spec}B$, $S = \mathrm{Spec}R$. Je li $X \times_S Y$ afina shema? Sjetimo se da morfizmi $X \to S$, $Y \to S$ induciraju homomorfizme prstenova $R \to A$, $R \to B$, odnosno A i B možemo promatrati kao R-algebre. Vrijedi da je koprodukt u kategoriji R-algebri tenzorski produkt nad R, što u našem slučaju daje komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R B & B \arrow[l] \\ A \arrow[u] & R. \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Jasno, $A \otimes_R B$ je R-algebra pa inducira shemu $\mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ nad R. Zbog univerzalnog svojstva koprodukta i ekvivalencije kategorija afinih shema i komutativnih prstenova dobivamo da je produkt shema $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$.

Napomena 2.3.14. *Promotrimo produkt afinih prostora. Za K polje, vrijedi izomorfizam K-algebri:*

$$K[T_1, ..., T_n] \otimes_K K[R_1, ..., R_m] \cong K[T_1, ..., T_n, R_1, ..., R_m], \quad f \otimes g \mapsto f \cdot g$$

pa vidimo da vrijedi $\mathbb{A}^n_K \times_K \mathbb{A}^m_K = \mathbb{A}^{n+m}_K$ *kao očekivano. Primijetimo da pripadni skup produkta shema ne mora biti produkt skupova, na primjer afina ravnina* $\mathbb{A}^2_K$ *sadrži točku koja odgovara ireducibilnoj krivulji koja nije element kartezijevog produkta skupova dvaju afinih pravaca* $\mathbb{A}^1_K$.

Također, da smo gledali produkt shema $\mathbb{A}^n_K \times \mathbb{A}^m_K = \mathbb{A}^n_K \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}^m_K$ *ne bismo dobili isti rezultat. Općenitije vrijedi izomorfizam* $\mathbb{Z}$*-algebri (odnosno prstenova):*

$$K[T_1, ..., T_n] \otimes_{\mathbb{Z}} K[R_1, ..., R_m] \cong (K \otimes_{\mathbb{Z}} K)[T_1, ..., T_n, R_1, ..., R_m],$$
$$f \otimes g = \sum_\alpha a_\alpha T^\alpha \otimes \sum_\beta b_\beta R^\beta \mapsto \sum (a_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} b_\beta) T^\alpha R^\beta$$

pri čemu $K \otimes_{\mathbb{Z}} K$ *nije nužno izomorfan K (na primjer za* $K = \mathbb{C}$, $i \otimes 1 - 1 \otimes i \neq 0$ *je djelitelj nule).*

Egzistenciju općenitog produkta shema X, Y nad S dobivamo tako da X, Y, S rastavljamo zasebno na afine pokrivače te koristimo svojstva lijepljenja i činjenicu da znamo kako izgleda produkt afinih shema nad afinom shemom. Dokaz izostavljamo.

Teorem 2.3.15. *Za svake dvije sheme X i Y nad S postoji produkt* $X \times_S Y$.

Poglavlje 3

Snopovi modula

Prelazimo na glavnu temu ovog rada. Zasad smo definirali sheme kao geometrijski objekt kojeg lokalno shvaćamo kao prsten, promatrali morfizme među njima te naveli neka glavna svojstva. Time smo generalizarali te proširili dosadašnje poimanje algebarske geometrije. Općenito, na geometrijskom objektu osim funkcija (kod shema to je strukturni snop) možemo promatrati i druge konstrukcije za daljnji razvoj teorije. Mi ćemo uvesti snop modula na shemi, posebno kvazikoherentne snopove koji će nad afinom shemom biti poistovjećeni modulima nad prstenom. Za kraj, posebno ćemo promotriti kvazikoherentne snopove na projektivnim prostorima.

3.1 $\mathcal{O}_X$-moduli

Još malo o snopovima

Sada ćemo navesti još neka svojstva snopova koja će biti bitna za nastavak teorije. U ovoj sekciji pod snop ćemo podrazumijevati da je nad topološkim prostorom X te da ima vrijednosti u kategoriji abelovih grupa.

Najprije, kažemo da je snop $\mathcal{F}'$ **podsnop** snopa $\mathcal{F}$, ako za svaki otvoren U vrijedi da je $\mathcal{F}'(U)$ podgrupa $\mathcal{F}(U)$, pri čemu $res_{U,V}(\mathcal{F}'(U)) \subseteq \mathcal{F}'(V)$ te restrikcije iz $\mathcal{F}'$ su inducirane onima iz $\mathcal{F}$.

Neka je $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfizam snopova abelovih grupa nad topološkim prostorom X. Definiramo $\ker \varphi$, **jezgru morfizma** φ kao predsnop

$$\ker \varphi(U) := \ker \varphi_U, \quad U \text{ otvoren},$$

gdje je $\ker \varphi_U$ jezgra homomorfizma $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Vrijedi da je $\ker \varphi$ snop. Zaista, neka je $\{U_i\}_i$ otvoren pokrivač otvorenog skupa $U \subseteq X$, te neka su dani $a_i \in \ker \varphi(U_i) \leq$

$\mathcal{F}(U_i)$ koji se podudaraju na presjecima. Snopovsko svojstvo od $\mathcal{F}$ daje egzistenciju jedinstvenog $a \in \mathcal{F}(U)$ čije restrikcije odgovaraju elementima a_i. Iz komutativnog dijagrama u definiciji morfizma (pred)snopova, dobivamo

$$\varphi_U(a)\big|_{U_i} = \varphi_{U_i}(a_i) = 0 \in \mathcal{G}(U_i),$$

pa iz snopovskog svojstva od $\mathcal{G}$ slijedi da je $\varphi_U(a) = 0$, odnosno $a \in \ker \varphi(U)$.
Ako bismo istu konstrukciju ponovili za sliku morfizma φ, ne bismo dobili snop. Naime, za familiju morfizama $b_i = \varphi_{U_i}(a_i) \in \operatorname{Im} \varphi(U_i)$ postoji jedinstven $b \in \mathcal{G}(U)$, no b ne mora biti iz slike homomorfizma φ_U! Stoga navodimo sljedeću napomenu.

Napomena 3.1.1. *Neka je $\mathcal{F}$ predsnop. Tada postoji snop $\mathcal{F}^\#$ i morfizam $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\#$ s univerzalnim svojstvom: za svaki snop $\mathcal{G}$ i morfizam $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, postoji jedinstven morfizam $\psi : \mathcal{F}^\# \to \mathcal{G}$ tako da $\varphi = \psi \circ \theta$. $\mathcal{F}^\#$ nazivamo snop pridružen $\mathcal{F}$. Par $(\mathcal{F}^\#, \theta)$ je jedinstven do na morfizam. Ako je $\mathcal{F}$ snop, tada je θ izomorfizam.*

Dakle, sliku morfizma snopova $\operatorname{Im} \varphi$ definiramo kao snop pridružen predsnopu definiranom s $\operatorname{Im} \varphi(U) := \operatorname{Im} \varphi_U$. Na isti način definiramo ostale univerzalne objekte ((ko)limese) koje nalazimo u kategoriji abelovih grupa, na primjer kvocijent snopa po podsnopu, produkt snopova, kojezgra morfizma, koslika morfizma...

Napomena 3.1.2. *Kategorija abelovih grupa (općenitije modula nad prstenom) je prototip* ***abelove kategorije****, to jest kategorije C koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

- *Za svaka dva objekta a, b, Hom(a, b) ima strukturu abelove grupe, pri čemu je kompozicija distributivna s obzirom na operaciju te abelove grupe;*
- *Postoji objekt 0 koji je ujedno terminalni i inicijalni objekt u C;*
- *Konačni produkti objekata su objekti u C;*
- *Svaki morfizam ima jezgru i kojezgru;*
- *Svaki monomorfizam je jezgra svoje kojezgre;*
- *Svaki epimorfizam je kojezgra svoje jezgre.*

Kategoriju koja zadovoljava prva tri uvjeta također nazivamo aditivnom. Abelove kategorije su prirodno okruženje u kojem promatramo homološku algebru. Može se pokazati da je kategorija snopova s vrijednostima u abelovoj kategoriji također abelova kategorija s jezgrom i kojezgrom definiranim kao prije napomene.

Primijetimo također da prsteni ne čine abelovu kategoriju (niti aditivnu) jer 0 nije inicijalni objekt (već $\mathbb{Z}$).

Nama će biti bitno promatrati egzaktne nizove pa se podsjetimo definicije. Neka je dana familija A-modula $\{M_i\}_{i\in I}$. Kažemo da je niz

$$... \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to ...$$

egzaktan, ako vrijedi $\mathrm{Im}\, f_i = \ker f_{i+1} \forall i$.

Sljedeća napomena daje karakterizaciju snopovskog svojstva u abelovim kategorijama.

Primjer 3.1.3. *Naime znamo da snopovsko svojstvo snopa $\mathcal{F}$ možemo zapisati kao (napomena 2.1.2):*

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{c} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

s odgovarajućim morfizmima. Ako je $\mathcal{F}$ element abelove kategorije, vrijedi:

$$a = b \implies a - b = 0 \implies (a - b) \circ c = 0 \implies Im(c) = Ker(a - b).$$

Također univerzalno svojstvo ujednačitelja pokazuje $Ker(c) = 0$ (inače $Ker(c)$ s ulaganjem $Ker(c) \hookrightarrow c$ krši univerzalno svojstvo). Ovime smo dobili egzaktan niz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{c} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{a-b} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Snopovi O_X-modula

Htjeli bismo uvesti snopove modula na shemama (odnosno pridruženom topološkom prostoru) koji će biti kompatibilni sa strukturom strukturnog snopa. U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.4. *Neka je (X, O_X) oprstenjen prostor, te neka je $\mathcal{F}$ snop abelovih grupa na topološkom prostoru X. Kažemo da je $\mathcal{F}$* ***snop O_X-modula*** *ako postoji morfizam snopova skupova $O_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ takav da za svaki otvoren $U \subseteq X$,*

$$O_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

definira strukturu $O_X(U)$ modula na $\mathcal{F}(U)$. Snop O_X-modula ćemo također zvati O_X-modul.

Morfizam O_X-modula $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ je morfizam snopova $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ koji zadovoljava sljedeći komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd} O_X \times \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "id\times\varphi"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\varphi"] \\ O_X \times \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G} \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Napomena 3.1.5. *(i) Neka je zadan $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$. Definiramo restrikciju $\mathcal{F}|_U$ kao restrikciju snopa abelovih grupa sa strukturom $\mathcal{O}_X|_U$-modula.*

(ii) Sve konstrukcije koje smo naveli u prošloj sekciji su $\mathcal{O}_X$-moduli. Na primjer, $\mathcal{F}'$, podsnop $\mathcal{O}_X$-modula $\mathcal{F}$ je $\mathcal{O}_X$-modul jer su podgrupe $\mathcal{O}_X(U)$-modula također $\mathcal{O}_X(U)$-moduli, za svaki otvoren $U \subseteq X$. Slični argumenti vrijede za ostale objekte. Posebno, vrijedi da je kategorija $\mathcal{O}_X$-modula abelova.

(iii) Neka su dani $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Definiramo ***tenzorski produkt $\mathcal{O}_X$-modula*** *$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ kao snop pridružen predsnopu zadanom s*

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Treba pripaziti, definicija ne govori da vrijedi $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ (općenito to ne vrijedi).

(iv) Neka je $p \in X$. Vlat u točki p $\mathcal{O}_X-$modula $\mathcal{F}$ je $\mathcal{O}_{X,p}-$modul. Imamo da je $\mathcal{F}_p$ abelova grupa, a preslikavanje

$$\mathcal{O}_{X,p} \times \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p, \quad ((U,a),(V,f)) \mapsto (U \cap V, a\big|_{U\cap V} f\big|_{U\cap V})$$

definira traženu strukturu modula.

Snop pridružen modulu

Sada ćemo za proizvoljan A-modul M, gdje je A prsten, konstruirati snop. Prije toga ponovimo nekoliko činjenica o lokalizaciji modula.

Promotrimo A-modul M. Znamo da za S multiplikativni podskup od A možemo promatrati

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S \right\}.$$

Analogno sada činimo za modul M. Na $M \times S$ definiramo identičnu relaciju ekvivalencije te skup $S^{-1}M$ učinimo $S^{-1}A$-modulom preko

$$S^{-1}A \times S^{-1}M \to S^{-1}M, \quad \left(\frac{a}{s}, \frac{m}{t}\right) \mapsto \frac{am}{st}.$$

Za $f \in A$, $\mathfrak{p}$ prost ideal u A, module M_f, $M_\mathfrak{p}$ sada definiramo analogno kao u lokalizaciji prstena.
Definiramo

$$\widetilde{M}(U) := \left\{ (s_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} M_\mathfrak{p} \mid \forall \mathfrak{p} \in U, \exists V_\mathfrak{p}^{otv.} \ni \mathfrak{p},\ a \in M, f \in A, \forall \mathfrak{q} \in V_\mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{q}, s_\mathfrak{q} = \frac{a}{f} \right\}. \tag{3.2}$$

Uzimajući u obzir primjer 2.1.7, na identičan način dobivamo da je $\widetilde{M}$ snop abelovih grupa. Neka su $t \in O(U)$, $s \in \widetilde{M}(U)$, gdje je O strukturni snop prstena A. Tada lokalno vrijedi

$$ts = \{a \in A, m \in M, f, g \notin \mathfrak{q}\} = \frac{a}{f}\frac{m}{g} = \frac{am}{fg} \in M_{\mathfrak{q}}, \quad \mathfrak{q} \in V$$

gdje smo koristili činjenicu da $M_{\mathfrak{q}}$ ima strukturu $A_{\mathfrak{q}}-$modula. Kako sva svojstva modula vrijede u $M_{\mathfrak{q}}$ što je upravo lokalan prikaz iz $\widetilde{M}(U)$ ista svojstva vrijede u $\widetilde{M}(U)$. Znači $\widetilde{M}$ je O-modul i nazivamo ga **snop pridružen modulu** M **na** Spec$A$.

Propozicija 3.1.6. *Neka je A prsten, M neka je A-modul te* $\widetilde{M}$ *njegov pridružen snop na SpecA. Tada vrijedi:*

a) $\widetilde{M}$ *je O-modul;*

b) Za svaki $\mathfrak{p} \in$ *SpecA,* $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$.

c) Za svaki $f \in A$, $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$.

Dokaz. a) smo već dokazali. Primijetimo da prema napomeni 3.1.5 (iv), $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$ ima strukturu $O_{\mathfrak{p}}$-modula. Sada kako su pojmovi u lokalizaciji modula analogni onim u prstenovima, preslikavanje $(U, s) \mapsto M(\mathfrak{p})$ daje traženi izomorfizam s identičnim dokazom kao u primjeru. Također za $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ prolazi isti dokaz.

□

3.2 Kvazikoherentni snopovi

Definicija 3.2.1. *Neka je* (X, O_X) *shema. Kažemo da je snop* O_X*-modula* $\mathcal{F}$ *kvazikoherentan ako postoji afini pokrivač* $\{U_i = \text{Spec}A_i\}_{i\in I}$ *te* A_i*-moduli* M_i *takvi da* $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$ *za svaki* $i \in I$. *Ako je dodatno A Noetherin te* M_i *su konačno generirani moduli, kažemo da je* $\mathcal{F}$ *koherentan.*

Napomena 3.2.2. *Općenito, kažemo da je A-modul M koherentan ako je konačno generiran te svako preslikavanje* $A^n \to M$ *ima konačno generiranu jezgru. Koherentnost je ekvivalentna konačnoj generiranosti ako je A Noetherin prsten. Sada na očit način definiramo koherantan snop u slučaju kad prsten A nije Noetherin.*

Primijetimo da je $\widetilde{M}$ kvazikoherentan snop na Spec$A$ za neki A-modul M. Jasno, glavni otvoreni skupovi $D(f_i)$ pokrivaju Spec$A$, a po propoziciji 3.1.6 vrijedi $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$. Sada je lako za vidjeti da ako imamo morfizam modula $f : M \to N$, možemo konstruirati morfizam snopova $\widetilde{M} \to \widetilde{N}$ sa

$$\widetilde{M}(U) \to \widetilde{N}(U), \quad s \mapsto t,$$

gdje je $s = \frac{m}{a}$ na okolini $V \subseteq U$, a $t = \frac{f(m)}{f(a)}$ na istoj okolini V. S druge strane, $\widetilde{M} \to \widetilde{N}$ na globalnim presjecima definira homomorfizam $M \to N$. Kao u slučaju afinih shema ove dvije operacije su međusobno inverzne. Također, preslikavanje $M \mapsto \widetilde{M}$ koje A-modulu pridružuje kvazikoherentan snop je funktorijalno (lako za provjeriti) te, prema prethodnoj diskusiji, inducira bijekciju na morfizmima. Pitanje je, inducira li $M \mapsto \widetilde{M}$ ekvivalenciju kategorija, odnosno, je li svaki kvazikoherentan snop $\mathcal{F}$ nad afinom shemom oblika $\widetilde{M}$ za neki A-modul M? Pokazat ćemo da je to afino lokalno svojstvo (vidi 2.3) što će dati pozitivan odgovor na prethodno pitanje.

Za sam dokaz, trebat će nam nekoliko činjenica iz algebre i teorije snopova.

Napomena 3.2.3. *Neka je A prsten te neka su zadani A-moduli M_i:*

- *Niz A-modula $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} M_n$ je egzaktan ako i samo ako je niz $(M_0)_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_1} (M_1)_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} (M_n)_\mathfrak{m}$ egzaktan za svaki maksimalni ideal $\mathfrak{m}$ u A.*
- *Za A-modul M vrijedi, $S_1^{-1}(S_2^{-1}M) \cong (S_1S_2)^{-1}M \cong S_2^{-1}(S_1^{-1}M)$, gdje su S_1, S_2 multiplikativni skupovi u A.*
- *Za A-module M_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, vrijedi, $S^{-1}(\prod_{i=1}^n M_i) \cong \prod_{i=1}^n S^{-1}M_i$, gdje je S multiplikativni skup u A (ista tvrdnja ne vrijedi za beskonačne produkte).*

Lema 3.2.4. *Neka je A prsten takav da vrijedi $A = (f_1, \ldots, f_n)$, te neka je M A-modul. Tada je sljedeći niz egzaktan*

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} \prod_{i=1}^{n} M_{f_i} \xrightarrow{\beta} \prod_{i \neq j} M_{f_i f_j} \tag{3.3}$$

$$\alpha(m) = \left(\frac{m}{1}, \ldots, \frac{m}{1}\right), \quad \beta\left(\frac{m_1}{f^{k_1}}, \ldots, \frac{m_n}{f^{k_n}}\right) = \left(\frac{m_i}{f^{k_i}} - \frac{m_j}{f^{k_j}}\right)_{(i,j)}$$

Dokaz. Neka je $\mathfrak{m}$ proizvoljan maksimalan ideal u A. Kako su produkti konačni, prema gornjoj napomeni dovoljno je pokazati da je niz

$$0 \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\alpha'} \prod_{i=1}^{n} (M_{f_i})_\mathfrak{m} \xrightarrow{\beta'} \prod_{i \neq j} (M_{f_i f_j})_\mathfrak{m}$$

to jest

$$0 \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\alpha'} \prod_{i=1}^{n} (M_\mathfrak{m})_{f_i} \xrightarrow{\beta'} \prod_{i \neq j} (M_\mathfrak{m})_{f_i f_j} \tag{3.4}$$

egzaktan, gdje su α', β' preslikavanja inducirana lokalizacijom u $\mathfrak{m}$. Kako je $A = (f_1, \ldots, f_n)$, barem jedan f_i nije sadržan u $\mathfrak{m}$. Pretpostavimo $f_1 \notin \mathfrak{m}$. Primijetimo da to znači da je f_1

invertibilan u $A_{\mathfrak{m}}$ što povlači $(M_{\mathfrak{m}})_{f_1} = M_{\mathfrak{m}}$ i $(M_{\mathfrak{m}})_{f_1 f_i} = (M_{\mathfrak{m}})_{f_i}$. Sada prelazimo na dokaz egzaktnosti niza 3.4, to jest pokazujemo: Ker$\alpha' = 0$ i Imα' = Kerβ'. Označimo $M' := M_{\mathfrak{m}}$. Kako je $M' = M'_{f_1}$, očito slijedi injektivnost od α'. Također iz definicije preslikavanja α' odmah slijedi Im$\alpha' \subseteq$ Kerβ'. Neka je $(m_i)_i \in Ker\beta'$. Vrijedi:

$$\beta'((m_i)_i) = (0)_{(i,j)} \implies (m_i - m_j)_{(i,j)} = (0)_{(i,j)} \implies m_i = m_j \text{ u } M'_{f_i f_j}, \forall i, j.$$

Ponovno zbog $M' = M'_{f_1}, M'_{f_1 f_i} = M'_{f_i}$ dobivamo $m_1 = m_i$ u M'_{f_i}, $\forall i$, odnosno $\alpha'(m_1) = (m_i)_i$. Dakle, vrijedi Imα' = Kerβ'. □

Lema 3.2.5 (Lema o lijepljenju snopova)**.** *Neka je X topološki prostor te $\{U_i\}_{i\in I}$ njegov otvoren pokrivač. Pretpostavimo da za svaki $i \in I$ imamo snop $\mathcal{F}_i$ na U_i sa sljedećim svojstvima:*

- *za svaki $i, j \in I$, dan je izomorfizam $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_j\big|_{U_i \cap U_j}$*
- *za svaki $i, j, k \in I$ vrijedi komutativan dijagram:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[rr, "\phi_{ik}"] \arrow[dr, "\phi_{ij}"'] & & \mathcal{F}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\
& \mathcal{F}_j\big|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \arrow[ur, "\phi_{jk}"'] &
\end{tikzcd} . \tag{3.5}$$

Tada postoji snop $\mathcal{F}$ na X, jedinstven do na izomorfizam, zajedno s izomorfizmima

$$\phi_i : \mathcal{F}\big|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$$

takav da komutira dijagram:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}|_{U_i \cap U_j} \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\
\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \arrow[rr, "\phi_{ij}"] & & \mathcal{F}_j\big|_{U_i \cap U_j}
\end{tikzcd} .$$

Dokaz. Dat ćemo skicu dokaza. Neka je $W \subseteq X$ otvoren, definiramo:

$$\mathcal{F}(W) = \left\{ (s_i)_{i\in I} \mid s_i \in \mathcal{F}_i(W \cap U_i),\ \phi_{ij}\left(s_i\big|_{W \cap U_i \cap U_j} \right) = s_j\big|_{W \cap U_i \cap U_j} \right\}. \tag{3.6}$$

Za $W' \subseteq W$, definiramo restrikcije $(s_i)_{i\in I}|_{W'} := (s_i|_{W'})_{i\in I}$. Time smo definirali predsnop, a snopovsko svojstvo slijedi iz snopovskih svojstava svakog $\mathcal{F}_i$.

Nadalje, za $W \subseteq U_k$ otvoren, definiramo preslikavanje $\mathcal{F}_k(W) \to \mathcal{F}|_{U_k}(W)$, $s \mapsto \left(\phi_{ki}\left(s|_{W\cap U_i}\right)\right)_{i\in I}$. Preslikavanje je dobro definirano, to jest slika od s je element iz $\mathcal{F}(W)$. Naime svojstvo iz 3.6 zapisujemo kao

$$\phi_{ij}\left(\left(\phi_{ki}\left(s\Big|_{W\cap U_i\cap U_j}\right)\right)\right) = \phi_{kj}\left(s\Big|_{W\cap U_i\cap U_j}\right)$$

što je upravo svojstvo komutativnog dijagrama 3.5. Iz definicije preslikavanja i činjenice da je ϕ_{ii} identiteta jasno je da smo dobili izomorfizam.
Lako se vidi da ako je $\mathcal{G}$ snop s istim svojstvima, dobivamo izomorfizme:

$$\varphi_i : \mathcal{F}\Big|_{U_i} \to \mathcal{G}\Big|_{U_i}$$

koje možemo proširiti do izomorfizma $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ (na sličan način opisan prije primjera 2.2.6).
□

Napomena 3.2.6. *Prošli teorem možemo modificirati tako da promatramo O_X-module. Tada, dobiveni snop $\mathcal{F}$ je O_X-modul, a izomorfizmi ϕ_i su izomorfizmi O_X-modula to jest zadovoljavaju dijagram 3.1 (jer ga zadovoljavaju $\phi_i j$). Također jedinstvenost je do na izomorfizam O_X-modula, što možemo vidjeti promatranjem morfizama $O_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ i $O_X \times \mathcal{F} \to O_X \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ koji su jednaki na pokrivaču U_i pa zadnjim argumentom iz teorema dobivamo jednakost dijagrama 3.1.*

Teorem 3.2.7. *Neka je $X = \mathrm{Spec}A$ afina shema i neka je zadan O_X-modul $\mathcal{F}$. Svojstvo $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ za neki A-modul M je afino lokalno svojstvo (u smislu definicije 2.3.7).*

Dokaz. Pokazat ćemo dva svojstva:

(1) ako $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ za neki A-modul M tada vrijedi $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}A_f} \cong \widetilde{M_f}$ za svaki $f \in A$;

(2) ako Spec$A$ ima konačan afin pokrivač $\{\mathrm{Spec}A_{f_j}\}$, takav da za svaki j, $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}A_{f_j}} \cong \widetilde{M_j}$, za A_{f_j}-modul M_j, tada postoji A-modul M takav da $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$.

Slično kao u primjeru 2.2.6 vrijedi:

$$\mathcal{F}\Big|_{\mathrm{Spec}A_f}(D_{A_f}(g)) = \widetilde{M}\Big|_{\mathrm{Spec}A_f}(D_{A_f}(g)) = \widetilde{M}(D_A(fg)) \cong M_{fg} \cong \widetilde{M_f}(D_{A_f}(g)), \quad g \in A,$$

što znači da imamo izomorfizam snopova abelovih grupa. Kompatibilnost izomorfizma sa strukturom $O_{\mathrm{Spec}A_f}$-modula lako slijedi pogledamo li definiciju 3.2. Znači, vrijedi (1).

Sada pretpostavimo slučaj u (2). Tada je $A = (f_1, ..., f_n)$ i neka su $\widetilde{\phi_j} : \mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}A_{f_j}} \to \widetilde{M_j}$ dani izomorfizmi. Prema (1), svaki $\widetilde{\phi_i}$ inducira izomorfizam $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}A_{f_i f_j}} \to \widetilde{(M_i)}_{f_j}$ za svaki j. Dobivamo sljedeće izomorfizme:

$$\widetilde{\phi_{ij}} : \widetilde{(M_i)}_{f_j} \cong \widetilde{(M_j)}_{f_i}, \text{ za svaki } i, j \in \{1, ..., n\} \tag{3.7}$$

Primijetimo da vrijedi $\widetilde{\phi_{ij}} = \widetilde{\phi_j} \circ \widetilde{\phi_i}^{-1}$ na $\mathrm{Spec}A_{f_i f_j}$. Daljnjom restrikcijom na $\mathrm{Spec}A_{f_i f_j f_k}$ računamo $\widetilde{\phi_{ij}} \circ \widetilde{\phi_{ki}} = \widetilde{\phi_j} \circ \widetilde{\phi_i}^{-1} \circ \widetilde{\phi_i} \circ \widetilde{\phi_k}^{-1} = \widetilde{\phi_j} \circ \widetilde{\phi_k}^{-1} = \widetilde{\phi_{kj}}$ pa lako dobivamo identitete:

$$\widetilde{\phi_{ij}} \circ \widetilde{\phi_{ki}} = \widetilde{\phi_{kj}}, \text{ na } \mathrm{Spec}A_{f_i f_j f_k}, \forall i, j, k, \tag{3.8}$$

$$\widetilde{\phi_{ij}} \circ \widetilde{\phi_{ji}} = id_{\mathrm{Spec}A_{f_i f_j}}, \forall i, j. \tag{3.9}$$

Naravno $\widetilde{\phi_{ij}}$ na $\mathrm{Spec}A_{f_i f_j f_k}$ je izomorfizam $\widetilde{\phi_{ij}}\Big|_{\mathrm{Spec}A_{f_i f_j f_k}}$ koji postoji zbog (1). Nadalje, očito vrijedi da $\widetilde{\phi_i}, \widetilde{\phi_{ij}}$ također induciraju odgovarajuće izomorfizme modula koje ćemo označavati s ϕ_i, ϕ_{ij}. U tom slučaju $\widetilde{\phi_{ij}}\Big|_{\mathrm{Spec}A_{f_i f_j f_k}}$ odgovara induciranom izomorfizmu lokalizacija modula $(\phi_{ij})_{f_k}$.

Primijetimo da relacije 3.7, 3.8, 3.9 i lema o lijepljenju (3.2.5) povlače da je snop $\mathcal{F}$ jedinstven do na izomorfizam. Znači, ako bismo našli A-modul M takav da vrijedi $\widetilde{M}\Big|_{\mathrm{Spec}A_{f_j}} \cong \widetilde{M_j}$ to jest $\widetilde{M_{f_j}} \cong \widetilde{M_j}$ za svaki j pri čemu dijagram

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M_{f_i f_j}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \widetilde{(M_i)}_{f_j} \arrow[rr] & & \widetilde{(M_i)}_{f_j} \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

komutira za svaki i, j, po lemi o lijepljenju vrijedilo bi $\widetilde{M} \cong \mathcal{F}$ što dokazuje (2).

Lema 3.2.4 nas motivira da M definiramo kao jezgru morfizma $\gamma : \prod_{i=1}^{n} M_i \to \prod_{i \neq j} (M_i)_{f_j}$, $(m_i)_i \mapsto (m_i/1 - \phi_{ji}(m_j/1))_{(i,j)}$. Tada je niz

$$0 \to M \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{\gamma} \prod_{i \neq j} (M_i)_{f_j} \tag{3.11}$$

egzaktan. Pokazujemo $\widetilde{M_1} \cong \widetilde{M_{f_1}}$. Kako je niz 3.11 egzaktan, a lokalizacija čuva egzaktnost vrijedi

$$0 \to M_{f_1} \to \prod_{i=1}^{n} (M_i)_{f_1} \xrightarrow{\gamma_{f_1}} \prod_{i \neq j} (M_i)_{f_1 f_j}.$$

S druge strane vrijedi da je $A_{f_1} = (f_1, ..., f_n)$ te M_1 je A_{f_1}-modul. Zbog leme 3.2.4, niz

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha_1} \prod_{i=1}^{n} (M_1)_{f_i} \xrightarrow{\beta_1} \prod_{i \neq j} (M_1)_{f_i f_j},$$

$$\alpha_1 : m \mapsto (m/1)_i, \quad \beta_1 : (m_i)_i \mapsto (m_i/1 - m_j/1)_{(i,j)},$$

je egzaktan. Zbog 3.7, vrijedi $\phi_{1i} : (M_1)_{f_i} \cong (M_i)_{f_1}$, odnosno $(\phi_{1i})_{f_j} : (M_1)_{f_i f_j} \cong (M_i)_{f_1 f_j}$. To nadalje daje očite izomorfizme na produktima $(\phi_{1i})_i$ i $((\phi_{1i})_{f_j})_{ij}$ (označimo ih s Φ_1 i Ψ_1) pa prema napomeni 3.2.3 dobivamo egzaktan niz:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha_1'} \prod_{i=1}^{n} (M_i)_{f_1} \xrightarrow{\beta_1'} \prod_{i \neq j} (M_i)_{f_1 f_j},$$

$$\alpha_1' = \Phi_1 \circ \alpha_1, \quad \beta_1' = \Psi_1 \circ \beta_1 \circ \Phi_1^{-1}.$$

Raspišimo djelovanje preslikavanja β'. Neka je $(m_i)_i \in \prod_{i=1}^{n} (M_i)_{f_1}$, tada

$$\beta_1'(m_1, ..., m_n) = (\Psi_1 \circ \beta_1)\,(\phi_{11}(m_1), ..., \phi_{n1}(m_n)) = \Psi_1 \left(\left(\frac{\phi_{i1}(m_i)}{1} - \frac{\phi_{j1}(m_j)}{1} \right)_{(i,j)} \right) =$$

$$= \Psi_1 \left(\left((\phi_{i1})_{f_j} \left(\frac{m_i}{1} \right) - (\phi_{j1})_{f_i} \left(\frac{m_j}{1} \right) \right)_{(i,j)} \right) = \left(\left((\phi_{1i})_{f_j} \circ (\phi_{i1})_{f_j} \right) \left(\frac{m_i}{1} \right) - \left((\phi_{1i})_{f_j} \circ (\phi_{j1})_{f_i} \right) \left(\frac{m_j}{1} \right)_{(i,j)} \right) =$$

$$= \left(\left(\frac{m_i}{1} \right) - (\phi_{ji})_{f_1} \left(\frac{m_j}{1} \right) \right)_{(i,j)} = \gamma_{f_1}(m_1, ..., m_n)$$

gdje smo koristili 3.8 i 3.9. Dakle, $\alpha_1 : M_1 \cong \mathrm{Ker}\gamma_{f_1} = M_{f_1}$. Analogno, $\alpha_1 : M_i \cong M_{f_i}$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Ponovno, sličnim raspisivanjem dobivamo da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & M_{f_i f_j} \arrow[dl, "(\alpha')_i^{-1}"'] \arrow[dr, "(\alpha')_j^{-1}"] & \\ (M_i)_{f_j} \arrow[rr, "\phi_{ij}"] & & (M_j)_{f_i} \end{tikzcd}$$

što je ekvivalentno komutativnošću dijagrama 3.10. Napomena 3.2.6 završava dokaz.

□

Napomena 3.2.8. *Vrijedi da je konačna generiranost lokalno svojstvo modula (to jest zadovoljava svojstva (1), (2) iz prošlog teorema prilagođeno za module na očit način). Sada se prošli teorem lako prilagođava na slučaj da sve module u teoremu promatramo kao konačno generirane.*

Već smo najavili sljedeći teorem, koji je fundamentalan u teoriji (kvazi)koherentnih snopova. Označimo s Mod_A kategoriju A-modula, a s $QCoh_X$ kategoriju kvazikoherentnih O_X-modula (kategoriju koherentnih O_X-modula označavamo s Coh_X).

Teorem 3.2.9. *Neka je A prsten. Funktor $M \mapsto \widetilde{M}$ daje ekvivalenciju između kategorija Mod_A i $QCoh_A$. Nadalje, ako je A Noetherin prsten, vrijedi da $M \mapsto \widetilde{M}$ daje ekvivalenciju između kategorije konačno generiranih A-modula i Coh_A.*

Dokaz. Već smo pokazali da imamo bijekciju između morfizama. Neka je $\mathcal{F}$ kvazikoherentan O_A-modul. Zbog teorema 3.2.7 i leme 2.3.9 za svaki afin otvoren $U \subseteq \mathrm{Spec}A$, dobivamo da je $\mathcal{F}|_U$ izomorfan nekom A-modulu. Posebno, $\mathcal{F} \cong M$, gdje je M neki A-modul. Lako se vidi da vrijedi i druga tvrdnja teorema ako uzmemo u obzir napomenu 3.2.8. □

Napomena 3.2.10. *Vrijedi da je koherentnost modula (napomena 3.2.2) također lokalno svojstvo pa imamo ekvivalenciju kategorija između koherentnih A-modula i koherentnih O_A-modula i u slučaju kad A nije Noetherin.*

Iz teorema 3.2.9 vidimo da je jezgra morfizma kvazikoherentnih snopova nad afinim shemama također kvazikoherentan snop, jednostavno koristimo činjenicu da kategorija modula na prstenom sadrži jezgre. Isto vrijedi i za kvazikoherentne snopove nad općenitim shemama. Zaista, za morfizam kvazikoherentnih snopova $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ nad shemom X vrijedi:

$$\ker(\mathcal{F} \to \mathcal{G})\big|_{\mathrm{Spec}A} = \ker\Big(\mathcal{F}\big|_{\mathrm{Spec}A} \to \mathcal{G}\big|_{\mathrm{Spec}A}\Big).$$

Slijedi da je jezgra na otvorenoj afinoj okolini jednaka jezgri morfizma kvazikoherentnih snopova nad afinom shemom iz čega slijedi tvrdnja.

Napomena 3.2.11. *Kako je Mod_A abelova kategorija, na sličan način kao gore teorem 3.2.9 povlači da je takva i kategorija $QCoh_A$. Analogno vrijedi u slučaju konačno generiranih A-modula i Coh_A.*

Dajmo neke primjere kvazikoherentnih snopova.

Primjer 3.2.12. *(i) Neka je X shema. Primijetimo da je O_X sam po sebi kvazikoherentni snop. To jednostavno slijedi iz činjenice da je prsten modul nad samim sobom.*

(ii) Neka su $X = SpecA$ i $Y = SpecB$ afine sheme, takve da je X zatvorena podshema od Y te $i : X \to Y$ ulaganje. Definiramo $\mathcal{I}_{X/Y}$ ***snop ideala na*** *X kao jezgru morfizma $i^\# : O_Y \to i_* O_X$. Primijetimo sljedeće:*

$$\mathcal{I}_{X/Y}(U) = (\ker i^\#)(U) = \ker(i^\#(U)),$$

iz čega vidimo da je $\mathcal{I}_{X/Y}(U)$ ideal u $O_Y(U)$ što opravdava naziv od $\mathcal{I}_{X/Y}$. Sjetimo se (2.3) da je $B = A/\mathfrak{a}$ za neki ideal $\mathfrak{a}$ iz A. Sada lako vidimo da su $i_* O_X$ i $\mathcal{I}_{X/Y}$ kvazikoherentni O_A – moduli čiji su pridruženi A-moduli redom $A/\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}$.

Globalni presjeci i lokalizacija

Primijetimo sljedeće. Neka je $X = \mathrm{Spec}A$ afina shema, $D(f)$ podskup od X, te neka je zadan O_X-modul $\mathcal{F}$. Označimo sa $\phi : \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A) \to \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A_f))$ restrikcijski homomorfizam. To je homomorfizam iz A-modula u A_f-modul pa možemo iskoristiti univerzalno svojstvo lokalizacije (po elementu f):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A_f) \\ & \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A)_f \arrow[ur, "\exists!\alpha_f"'] & \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

gdje je φ kanonsko preslikavanje lokalizacije. Dokaz teorema 3.2.7 sada govori da ako je $\mathcal{F}$ kvazikoherentan, onda je α izomorfizam (svojstvo (1)). S druge strane ako je α_f izomorfizam za svaki $f \in A$, svojstvo (2) iz dokaza istog teorema pokazuje da je $\mathcal{F}$ kvazikoherentan. Time smo dokazali sljedeću karakterizaciju.

Propozicija 3.2.13. *Neka je $X = \mathrm{Spec}A$ afina shema. O_X-modul $\mathcal{F}$ je kvazikoherentan ako i samo ako je α_f, iz dijagrama 3.12, izomorfizam za svaki $f \in A$.*

Ono što bismo se mogli pitati, vrijedi li ista tvrdnja ako promatramo proizvoljnu shemu X. Prisjetimo se, neka je $f \in O_X(X)$, za $x \in X$ definirali smo $f(x)$ kao sliku od f pri kanonskom morfizmu $O_X(X) \to O_{X,x}$, pri čemu $f(x) \neq 0$ ako i samo ako ta slika nije sadržana u maksimalnom idealu lokalnog prstena $O_{X,x}$. Sada možemo definirati $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ otvoren skup (vidi dokaz 2.3.10). Univerzalno svojstvo lokalizacije daje komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}(X_f) \\ & \mathcal{F}(X)_f \arrow[ur, "\exists!\alpha_f"'] & \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

Vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 3.2.14. *Neka je X kvazikompaktna shema, pri čemu presjeci afinih podskupova su kvazikompaktni, te neka $\mathcal{F}$ kvazikoherentan O_X-modul. Tada je α_f, iz dijagrama 3.13, izomorfizam za svaki $f \in O_X(X)$.*

Dokaz. Naime, promatramo egzaktan niz snopovskog svojstva:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Zbog kvazikompaktnosti možemo pretpostaviti da su U_i afini. Općenito $U_i \cap U_j =: U_{ij}$ ne moraju biti afini, no pretpostavka je da postoji konačno mnogo afinih $\{U_{ijk}\}_k$ koji pokrivaju U_{ij}. Sada dobivamo egzaktan niz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j,k} \mathcal{F}(U_{ijk}).$$

Produkti su konačni pa lokalizacija po $f \in X$ daje egzaktan niz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X)_f \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i)_f \longrightarrow \prod_{i,j,k} \mathcal{F}(U_{ijk})_f$$

s odgovarajućim restrikcijama na f. Pokazuje se da $\mathcal{F}(X_f)$ zadovoljava isti dijagram. To slijedi iz činjenice da je X_f otvorena podshema o X i jednakosti $U_i \cap X_f = D_X(f)$ (naravno, drugi f promatramo kao sliku restrikcije), dok kvazikoherentnost snopa $\mathcal{F}$ daje izomorfizam

$$\mathcal{F}(\mathrm{Spec}A)_f \cong \mathcal{F}(\mathrm{Spec}A_f) \cong \mathcal{F}(D(f)) \cong \mathcal{F}\big|_{X_f}(\mathrm{Spec}A \cap X_f).$$

Sada se egzaktnost tog niza svodi na egzaktnost niza snopovskog svojstva od $\mathcal{F}|_{X_f}$. Konačno, kao u dokazu 3.2.7, dobivamo $\mathcal{F}(X_f) \cong \mathcal{F}(X)_f$. Detalje izostavljamo.

□

Napomena 3.2.15. *Shemu kojoj su presjeci afinih podskupova kvazikompaktni nazivamo kvaziseparironom.*

Kvazikoherentni snopovi na projektvnim prostorima

Sada ćemo definirati kvazikoherentan snop na $\mathrm{Proj}S$, gdje je S gradiran prsten. Konstrukcija će sličiti konstrukciji snopa prstena na $\mathrm{Proj}S$. Definiramo $\mathbb{Z}$-gradiran S-modul M kao $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$, gdje M_d su S-abelove grupe, te vrijedi $S_d M_e \subseteq M_{d+e}$. Za $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}S$, $f \in S$, definiramo pojmove: $(S_\mathfrak{p})_0$-modul $(M_\mathfrak{p})_0$, $(S_f)_0$-modul $(M_f)_0$ analogno onima u sekciji 2.2. Sada na otvorenom $U \subseteq \mathrm{Proj}S$ standardno definiramo $\widetilde{M}(U)$ kao skup svih $(s_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U}(M_\mathfrak{p})_0$ koji su lokalno kvocijent elemenata iz M istog stupnja homogenosti pri čemu nazivnik nije nula na toj okolini. $\widetilde{M}$ je snop abelovih grupa, a preslikavanje $\mathcal{O} \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ dano množenjem sekcija daje strukturu $\mathcal{O}$-modula.

Nadalje, ponavljanjem dokaza teorema 2.2.11 (zamjenom S sa M na odgovarajućim mjestima), dobivamo analogon za $\widetilde{M}$ (kojeg zovemo snop asociran M na $\mathrm{Proj}S$).

Teorem 3.2.16. *$\widetilde{M}$ je kvazikoherentan snop.*

Sjetimo se, ako je $\mathrm{Spec}A$ afina shema, tada je globalni presjek upravo jednak (izomorfan) prstenu A, odnosno $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A) \cong A$ (propozicija 2.1.8). Isto ne vrijedi općenito za $\mathrm{Proj}S$, gdje je S gradiran prsten. Sada ćemo dati konstrukciju kako pomoću kvazikoherentnih snopova ipak možemo doći do prstena S, u slučaju projektivnih prostora.

Za gradirani prsten S, definiramo gradirani S-modul

$$S(n) := \bigoplus_{d\geq 0} S_{d+n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(pri čemu $S_{-n} := 0$ za $n \in \mathbb{N}$). Primijetimo da $S(n)_d = S_{d+n}$, odnosno homogeni elementi od $S(n)$ stupnja d su upravo elementi stupnja $d+n$ u S (na primjer $1 \in S(-3)$ je stupnja 3).

Definicija 3.2.17. *Neka je S gradirani prsten, te neka je $X = \operatorname{Proj} S$. Za $n \in \mathbb{Z}$ definiramo snop $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$. Ako je $\mathcal{F}$ proizvoljan $\mathcal{O}_X$-modul, definiramo $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.*

Napomena 3.2.18. *Primijetimo da definicija $\mathcal{F}(n)$ ima smisla i ako promatramo $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Naime, ako je dan A-modul M općenito vrijedi $A \otimes_A M \cong M$. To povlači da za svaki otvoren U vrijedi*

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(n)(U) \cong \mathcal{O}_X(n)(U),$$

iz čega, promatranjem pridruženih snopova, dobivamo traženi izomorfizam $\mathcal{F}(n) \cong \mathcal{O}_X(n)$.

Trebat će nam sljedeća propozicija čiji dokaz preskačemo.

Propozicija 3.2.19. *Neka su dani gradirani S-moduli M, N, gdje je S gradiran prsten, koji je generiran sa S_1 kao S_0-algebra. Tada vrijedi izomorfizam*

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \cong \widetilde{M \otimes_S N}.$$

Neka je S gradiran prsten, koji je generiran sa S_1 kao S_0-algebra, $X = \operatorname{Proj} S$ te neka je zadan $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{F}$. Definiramo abelovu grupu

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(n)(X).$$

Sada ćemo definirati strukturu S-modula na sljedeći način. Neka je $s \in S_d$. Primijetimo da s možemo shvatiti kao globalni prerez na $\mathcal{O}_X(d)$ (vrijedi $s \in (S(d)_{\mathfrak{p}})_0$ za svaki $\mathfrak{p} \in X$, pa element iz globalnog prereza definiramo da je s u svakoj točki $\mathfrak{p}$). Nadalje, primijetimo da vrijedi

$$\mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{F}(n) \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n+d) = \mathcal{F}(n+d), \tag{3.14}$$

gdje je iskoristili propoziciju 3.2.19 i činjenicu da vrijedi $S(d) \otimes S(n) \cong S(d+n)$. Sada za $s \in S_d$ (kojeg shvaćamo kao globalni prerez na $\mathcal{O}_X(d)$ na opisan način) i $t \in \mathcal{F}(n)(X)$ definiramo $s \cdot t$ kao sliku elementa $s \otimes t$ pri gornjem izomorfizmu. Dobili smo da je $\Gamma_*(\mathcal{F})$ zapravo $\mathbb{Z}$-gradirani S-modul, pri čemu je gradacija jasna iz 3.14, te ga nazivamo **gradirani S-modul asociran $\mathcal{F}$**.

Za kraj dajemo spominjani rezultat.

Teorem 3.2.20. *Neka je A prsten,* $S = A[T_0, ..., T_r]$ *te neka je* $X = \mathbb{P}^r_A$, $r \geq 1$. *Tada vrijedi* $\Gamma_*(O_X) \cong S$.

Dokaz. Kako je $\{D_+(T_i)\}_{i\in I}$ baza topologije na X, snopovsko svojstvo nalaže da svaki element $t \in O_X(n)(X)$ je jedinstveno određen restrikcijama $t_i \in O_X(n)(D_+(T_i))$ koje se podudaraju na presjecima $D_+(T_iT_j)$. Koristeći izomorfizam iz dokaza teorema 2.2.11 i definiciju $\widetilde{S(n)}$ dobivamo:

$$O_X(n)(D_+(T_i)) \cong (S(n)_{T_i})_0 \cong (S_{T_i})_0,$$

odnosno, t_i su homogeni elementi stupnja n u lokalizaciji S_{T_i}, čija restrikcija u $S_{T_iT_j}$ je slika tog elementa pri preslikavanju između tih lokalizacija. Uzimanjem sume po svim $n \in \mathbb{Z}$ dobivamo:

$$\Gamma_*(O_X) \cong \{(t_0, ..., t_r) \mid t_i \in S_{T_i},\ t_i = t_j \text{ u } S_{T_iT_j}\}. \tag{3.15}$$

Kako elementi T_i nisu djelitelji nule u S, vrijedi da su kanonska preslikavanja lokalizacija $S \to S_{T_i}$ i $S_{T_i} \to S_{T_0...T_r}$ injekcije. Sada S_{T_i} možemo shvatiti kao podskup $S_{T_0...T_r} =: S'$. Primijetimo da sada vrijedi:

$$\Gamma_*(O_X) \cong \bigcap_{i=0}^{r} S_{T_i}.$$

Zaista, uzimajući u obzir 3.15, preslikavanja

$$(t_0, ..., t_r) \mapsto \varphi_0(t_0),$$

$$s \in \bigcap_{i=0}^{r} S_{T_i} \mapsto (\varphi_0^{-1}(s), ..., \varphi_r^{-1}(s)) \in \Gamma_*(O_X),$$

gdje su φ_i izomorfizmi S_{T_i} sa svojom slikom u S'. Nadalje, svaki homogen element iz S' se na jedinstven način može zapisati kao produkt

$$\frac{f}{T_0^{i_0}...T_r^{i_r}}, \quad i_j \in \mathbb{Z}, \quad f \in S \text{ homogen}, T_i \nmid f\ \forall i \in \{0, ..., r\}$$

Taj element će biti u S_{T_i} ako i samo ako $i_j \leq 0$ za $i \neq j$. To upravo povlači da je $\bigcap_{i=0}^{r} S_{T_i} = S$, odnosno $\Gamma_*(O_X) \cong S$.

□

Bibliografija

[1] Aise J. de Jong, *Stacks Project*, dostuopno na `https://stacks.math.columbia.edu/` (lipanj 2024.).

[2] Robin C. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[3] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[4] I. G. Macdonald M. F. Atiyah, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969.

[5] Ravi Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, 2022.

Sažetak

U ovom radu govorimo o shemama, koje Alexander Grothendieck 1960. uvodi u djelu EGA. One lokalno odgovaraju komutativnim prstenima s jedinicom i generaliziraju pojmove kvaziprojektivnih mnogostrukosti. Također govorimo o kvazikoherentnim snopovima koji lokalno odgovaraju modulima nad prstenom.

U prvom poglavlju dajemo osnove iz teorije kategorija, naime pojmove ekvivalencije kategorija i limesa. Također dajemo kratak osvrt na osnovne pojmove iz klasične algebarske geometrije; pojmove (kvazi)projektivnih, (kvazi)afinih mnogostrukosti i regularnih funkcija.

U drugom poglavlju, opisujemo definiciju snopa te dajemo osnovna svojstva. Potom definiramo spektar prstena, strukturni snop i (afine) sheme te pokazujemo ekvivalenciju kategorija komutativnih prstena s jedinicom i afinih shema. Također pokazujemo kako afine mnogostrukosti shvaćamo kao sheme te dajemo primjere shema (posebno projektivnih prostora). Nadalje, dajemo kratak pregled svojstva shema i definiramo pojam afinih lokalnih svojstava te neke rezultate.

U trećem poglavlju, najprije definiramo još neka potrebna svojstva iz teorija snopova. Definiramo O_X-module, (kvazi)koherentne snopove te dokazujemo ekvivalenciju kategorija kvazikoherentnih snopova nad afinom shemom i modula nad prstenom. Nadalje, pokazujemo još neke primjere i svojstva kvazikoherentnim snopovima te završavamo rad s nekim rezultatima o njima na projektivnim prostorima.

Summary

In this paper, we talk about schemes, which Alexander Grothendieck 1960. introduces in work EGA. Schemes locally correspond to commutative rings with identity and they generalize quasiprojective varieties. Also, we talk about quasicoherent sheaves which locally correspond to modules over a ring.

In the first chapter, we give preliminaries in category theory, namely concepts of equivalence of categories and limits. Also, we give a short discussion about concepts in classical algebraic geometry such as definitions of (quasi)projective, (quasi)affine varieties and regular functions.

In the second chapter, we define sheaves and some basic properties. Then, we define the spectrum of a ring, structure sheaf, (affine) schemes and give equivalence of categories of commutative rings and affine schemes. Also, we show how affine varieties can be understood as schemes and give examples of schemes (in particular, projective spaces). Furthermore, we give a short presentation of the properties of schemes and define the concept of affine local property and some results.

In the third chapter, firstly we introduce more properties of sheaves. We define O_X-modules, (quasi)coherent sheaves and we prove the equivalence of categories of quasicoherent sheaves and modules over a ring. Furthermore, we give examples and properties of quasicoherent sheaves and we conclude the paper with some results on quasicoherent sheaves on projective spaces.

Životopis

Rođen sam 25.3.2000. u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Vrbani, a srednjoškolsko obrazovanje stekao u IX. gimnaziji. Maturirao sam 2018. godine te iste godine upisao preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer. Sljedeće godine prebacujem se na istraživački smjer istog studija. 2022. godine upisujem diplomski studij Teorijska matematika.