

Konike u ravninskoj diferencijalnoj geometriji

Petrinić, Hrvoje

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:222727>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-13**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Hrvoje Petrinić

KONIKE U RAVNINSKOJ DIFERENCIJALNOJ

GEOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima koji su me podržavali tijekom cijelog mog školovanja i vjerovali u moj uspjeh.
Zahvaljujem se također i mojoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na strpljenu i korisnim savjetima za izradu ovog diplomskog rada.*

Sadržaj

KONIKE U RAVNINSKOJ DIFERENCIJALNOJ GEOMETRIJI	1
Uvod.....	1
1. Krivulje 2. reda.....	2
2. Konike u ravninskoj diferencijalnoj geometriji	9
Literatura	34
Sažetak.....	35
Summary.....	36
Životopis.....	37

Uvod

Konike, čunjosječnice ili krivulje drugog reda su krivulje nastale presijecanjem ravnine i stošca. U konike se ubrajaju elipsa, parabola i hiperbola. Apolonije iz Perge je 200-tih godina pr. Krista napisao opsežnu studiju o konikama. Promatrao ih je samo s geometrijskog stajališta. Tek 2000 godina kasnije su veliki matematičari opisivali te krivulje algebarski. Apolonijeve spoznaje su pomogle znanstvenicima kao što su Johannes Kepler i Isaac Newton da dođu do velikih otkrića o gibanjima nebeskih tijela. Johannes Kepler (1571.-1630), njemački astronom, matematičar i astrolog prvi je došao do spoznaje da se nebeska tijela kreću oko Sunca po eliptičnim putanjama. U svojoj knjizi *Astronomiae pars Optica* (1604.) peto poglavlje je posvetio konikama. Kepler je razlikovao pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, parabolu, hiperbolu i pravac. Poznata su njegova tri zakona o gibanju planeta na temelju kojih je elipsa dobila konačnu primjenu u stvarnom svijetu. Isaac Newton (1642.-1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom je jedan od najznačajnijih znanstvenika u povijesti koji dao veliki doprinos u proučavanju gibanja planeta, a što je objavio u svojoj najpoznatijoj knjizi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687.). U svojoj knjizi opisao je rješenje problema pronalaženja centripetalne sile koja djeluje na tijelo tako da se tijelo giba po elipsi, a ta je sila usmjerena prema jednom fokusu putanje. Rene Descartes (1596.-1650.) je problem određivanja tangente svodio na problem određivanja normale na oskulacijsku kružnicu. Tako je primjerice odredio tangentu na krivulju cikloidu.

U ovom radu ćemo najprije opisati sve tri konike, a zatim ćemo definirati osnovne pojmove vezane uz ravninsku diferencijalnu geometriju i osvrnuti se na Frenetove formule. Konstruirat ćemo hiperoskulacijske i oskulacijske kružnice svih konika i spomenuti njihove evolute i involute.

1. Krivulje 2. reda

1.1. Elipsa

Definicija 1.1.1.

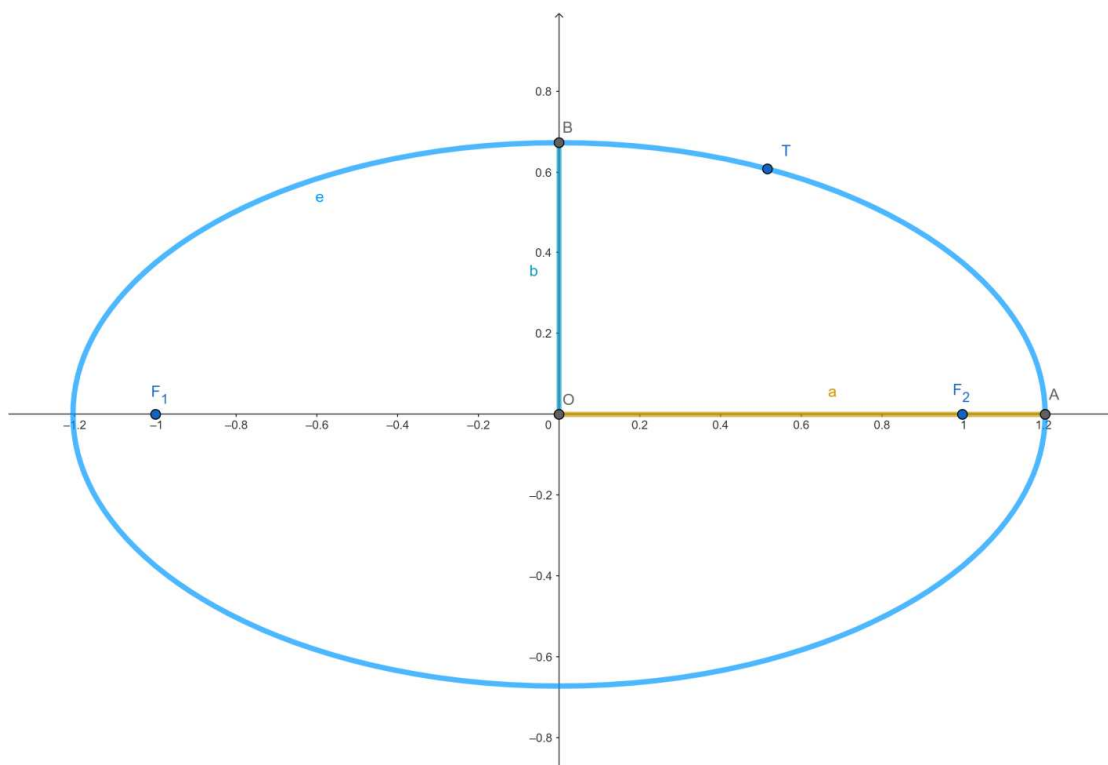
Elipsa je skup točaka ravnine za koje je **zbroj udaljenosti** do dviju fiksnih točaka konstantan.

Te dvije točke nazivaju se **žarišta** elipse. Elipsa je određena dvjema poluosima: **velikom osi** duljine a i **malom osi** duljine b .

Zbroj udaljenosti točaka elipse od žarišta jednak je dvostrukoj duljini velike poluosi tj. vrijedi:

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$$

pri čemu je točka T na elipsi, a F_1 i F_2 su žarišta elipse.



Slika 1.1.1: Elipsa s istaknutom velikom i malom poluosi

1.2. Parametri elipse

Uvodimo koordinatni sustav tako što ishodište koordinatnog sustava smještamo u polovište dužine koja je spojnica žarišta elipse F_1 i F_2 .

Definicija 1.2.1.

Udaljenost $|OF_1| = |OF_2|$ nazivamo **linearnim ekscentricitetom** elipse e .

Veličine a , b i e su povezane formulom:

$$b^2 = a^2 - e^2$$

Numerički ekscentricitet elipse određen je jednadžbom:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$$

1.3. Jednadžba elipse

U danom koordinatnom sustavu elipsa ima sljedeću jednadžbu:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Ovaj oblik jednadžbe naziva se **kanonski oblik** jednadžbe elipse.

Dijeljenjem jednadžbe $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ s a^2b^2 dobivamo segmentni oblik jednadžbe elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.4. Tangenta elipse

Tangenta elipse sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i koja prolazi točkom $T(x_0, y_0)$ određena je koeficijentom smjera tangente i točkom T .

Ako deriviramo jednadžbu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ po varijabli x dobivamo sljedeći identitet:

$$2b^2xdx + 2a^2ydy = 0$$

Iz toga slijedi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} = k$$

gdje je k koeficijent smjera tangente na elipsu.

Iz jednadžbe pravca $y - y_0 = k(x - x_0)$ koji prolazi točkom $T(x_0, y_0)$ dobivamo jednadžbu tangente na elipsu koja prolazi točkom T :

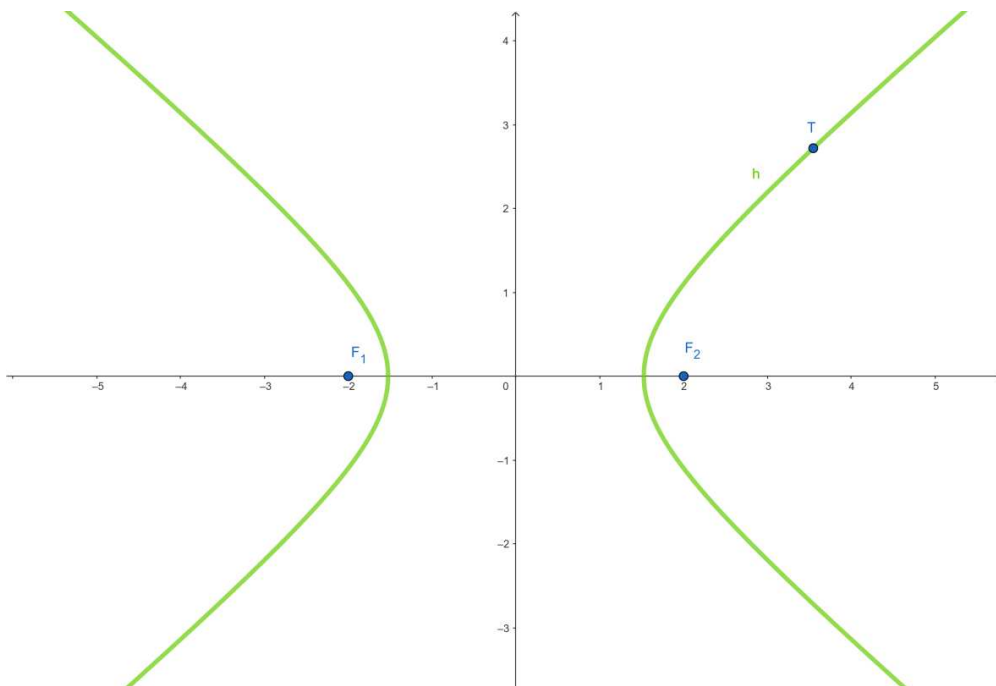
$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

1.5. Hiperbola

Definicija 1.5.1.

Hiperbola je čunjosječnica koja se definira kao skup točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti do dviju fiksnih točaka konstantna.

Neka su zadane dvije točke u ravnini F_1 i F_2 i duljina $2a$ koja simetrično leži na dužini $\overline{F_1F_2}$ uz uvjet $2a < |F_1F_2|$. Skup točaka u ravnini za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti do fokusa F_1 i F_2 jednaka $2a$ naziva se hiperbola.



Slika 1.5.1: Hiperbola s istaknutim fokusima

1.6. Jednadžba hiperbole

Koordinatni sustav uvodimo na isti način kao i kod elipse. Ishodište koordinatnog sustava smještamo u polovište dužine koja je spojnica žarišta hiperbole F_1 i F_2 . Postoji nekoliko oblika jednadžbi hiperbole. Realna os je duljine $2a$ i imaginarna os duljine $2b$ pa je hiperbola je određena jednadžbom:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dijeljenjem cijele jednadžbe s a^2b^2 dobivamo segmentni oblik jednadžbe hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.7. Tangenta hiperbole

Tangenta hiperbole koja ima središte u ishodištu koordinatnog sustava i koja prolazi točkom $T(x_0, y_0)$ na hiperboli, određena je koordinatama točke T i koeficijentom smjera tangente.

Deriviranjem jednadžbe hiperbole dobivamo:

$$2b^2x dx - 2a^2y dy = 0$$

Iz čega slijedi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

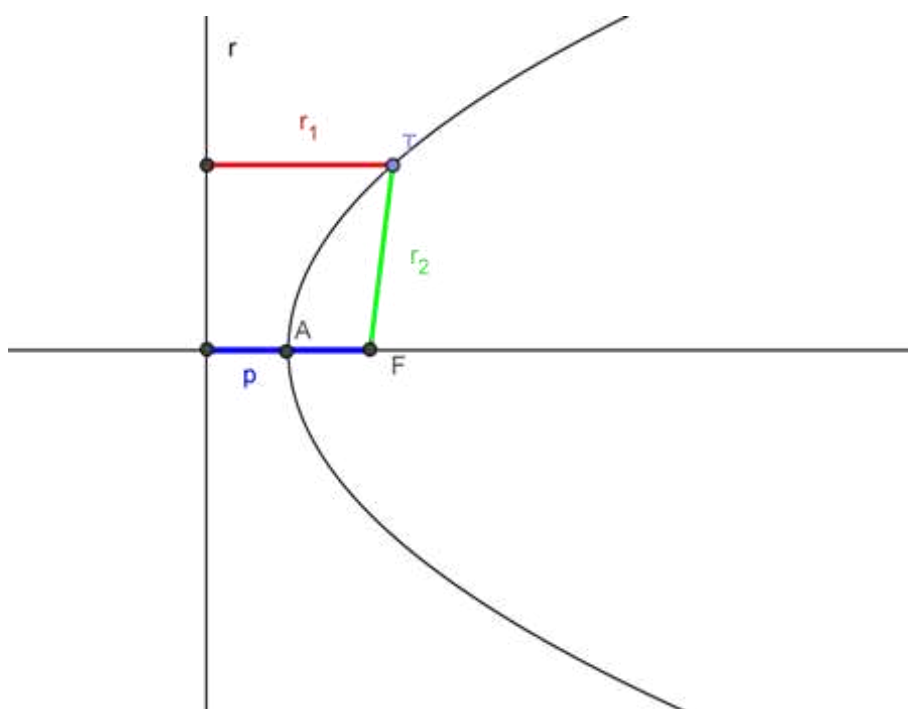
$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ je koeficijent smjera tangente hiperbole pa je jednadžba tangente na hiperbolu:

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0)$$

1.8. Parabola

Definicija 1.8.1.

Parabola je skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne **fiksne točke** i zadanog **pravca**. Ta fiksna točka se naziva **žarište parabole**, a zadani pravac se naziva **direktrisa** ili **ravnalica parabole**.



Slika 1.8.1: Parabola s istaknutim fokusom F i ravnalicom r

1.9. Jednadžba parabole

Neka zadana ravnalica ima jednadžbu $x = -\frac{p}{2}$ pri čemu je p udaljenost od žarišta parabole do ravnalice. Uvodimo koordinatni sustav tako da ishodište bude tjeme parabole. Tada žarište parabole ima koordinate $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ pa jednadžba oblika:

$$y^2 = 2px$$

predstavlja tjemenu jednadžbu parabole.

1.10. Tangenta parabole

Tangenta parabole kojoj je tjeme u ishodištu koordinatnog sustava i koja prolazi točkom $T(x_0, y_0)$ na paraboli, određena je koordinatama točke T i koeficijentom smjera tangente. Deriviranjem jednadžbe parabole $y^2 = 2px$ dobivamo:

$$2ydy = 2pdx$$

Transformacijom jednadžbe dobivamo da je:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

$\frac{p}{y}$ je koeficijent smjera tangente parabole pa je jednadžba tangente na parabolu:

$$y - y_0 = \frac{p}{y} \cdot (x - x_0)$$

2. Konike u ravninskoj diferencijalnoj geometriji

2.1. Osnovno o krivuljama

Krivulju možemo promatrati na dva načina: kao skup točaka u ravnini ili prostoru, odnosno, kao trag čestice u gibanju. U prvoj situaciji ju opisujemo implicitnom jednačinom, a u drugoj vremenu t pridružujemo položaj čestice te krivulju opisujemo parametarski. U diferencijalnoj geometriji obično koristimo parametarske jednačine.

Iako krivulju zadajemo parametrizacijom, cilj nam je proučiti "geometrijska svojstva krivulja", tj. ona svojstva koja ne ovise o parametrizaciji, nego o svojstvima definiranog skupa točaka.

Definicija 2.1.1.

Parametrizirana krivulja c u \mathbb{R}^n je glatko preslikavanje s otvorenog intervala $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ u \mathbb{R}^n

$$c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Za krivulje u \mathbb{R}^2 pisat ćemo:

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

te za njene derivacije:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

Parametrizacija konika dana je u sljedećoj tablici.

Konika	Implicitna jednačba	Parametarska jednačba
Elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c(t) = (a \cos t, b \sin t)$
Hiperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c(t) = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$
Parabola	$y^2 = 2px$	$c(t) = (t^2, \sqrt{2pt})$

Tablica 2.1.1. Implicitne i parametarske jednačbe konika

2.2. Duljina luka krivulje

Opseg l kruga c radijusa $r > 0$ računamo po formuli $l = 2r\pi$

Kružnicu koja omeđuje krug c možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$c(t) = r(\cos t, \sin t)$$

pri čemu je $t \in J = [0, 2\pi]$

Definicija 2.2.1.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna krivulja. Tada vektor $\dot{c}(t)$ nazivamo **tangencijalnim vektorom** ili vektorom brzine krivulje c u točki $c(t)$. Funkciju $\|\dot{c}(t)\|$ nazivamo **brzinom krivulje** c u točki $c(t)$. Za krivulju c kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je:

$$\|\dot{c}(t)\| = 1, t \in I.$$

Pravac koji prolazi točkom $c(t)$ i kojemu je $\dot{c}(t)$ vektor smjera nazivamo **tangentom krivulje** c u točki $c(t)$.

Definicija 2.2.2.

Funkcija duljine luka krivulje c od točke $c(t_0)$ je funkcija l :

$$l(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(u)\| du, \quad t_0 \in I.$$

Duljina luka krivulje $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je realan broj:

$$l = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du \quad (1)$$

Prema tome, opseg kruga dobiva se kao:

$$l(c, J) = \int_0^{2\pi} r dt = 2r\pi.$$

Definicija 2.2.3.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka l . Funkciju

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\kappa(l) = \|\ddot{c}(l)\|$$

zovemo **zakrivljenošću** ili **fleksijom** krivulje c u točki $c(l)$.

2.3. Duljina luka elipse

Zanima nas duljina luka elipse čija je velika poluos duljine a , mala poluos duljine b .

Koristimo trigonometrijsku parametrizaciju elipse:

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

pri čemu je $t \in J = [0, 2\pi]$.

Koristeći općenitu formulu za duljinu luka krivulje (1) opseg l elipse jednak je:

$$l = 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \quad (2)$$

gdje je

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

numerički ekscentricitet elipse. Za ε vrijedi $0 < \varepsilon < 1$. U zadnjem koraku koristimo supstituciju $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$.

Integral (2) se naziva eliptički integral druge vrste koji ćemo obrađivati u sljedećem poglavlju. Nije moguće dati formulu za opseg elipse u terminima elementarnih funkcija.

2.4. Eliptički integral

Problem računanja duljine luka elipse doveo je pojave eliptičkog integrala kojeg su prvi proučavali Giulio Fagnano i Leonhard Euler.

Eliptički integral možemo definirati kao bilo koju funkciju f koja se može izraziti u obliku:

$$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt$$

pri čemu je R racionalna funkcija koja ima dva argumenta, polinom P je polinom stupnja 3 ili 4 s nultočkama kratnosti 1. Broj c je konstanta.

Krajem 18. stoljeća matematičari su utvrdili da se ovakav integral ne može izraziti u obliku elementarnih funkcija.

Primjer eliptičkog integrala je integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

Gruba aproksimacija opsega elipse s velikom poluosi duljine a i malom poluosi duljine b iznosi:

$$l \approx \pi(a + b)^1$$

što je na neki način formula analogna opsegu kruga.

Puno bolja aproksimacija opsega elipse je:

$$l \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Još bolja aproksimacija je:

$$l \approx \pi \left(3(a + b) - \sqrt{(3a + b)(a + 3b)} \right)$$

Ili

$$l \approx \pi (a + b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4 - 3h}} \right)$$

s $h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$. Ovu formulu pripisujemo indijskom matematičaru Srinivasi Ramanujanu.

Koristeći numerički ekscentricitet elipse ε možemo doći do još formule:

$$l = 2b\pi \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!^2}{(2k \cdot k!)^4} \cdot \frac{\varepsilon^{2i}}{2i-1} \right).$$

Još jedna dosta precizna formula za opseg elipse glasi:

$$l = \pi(a + b) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} h^k$$

gdje je

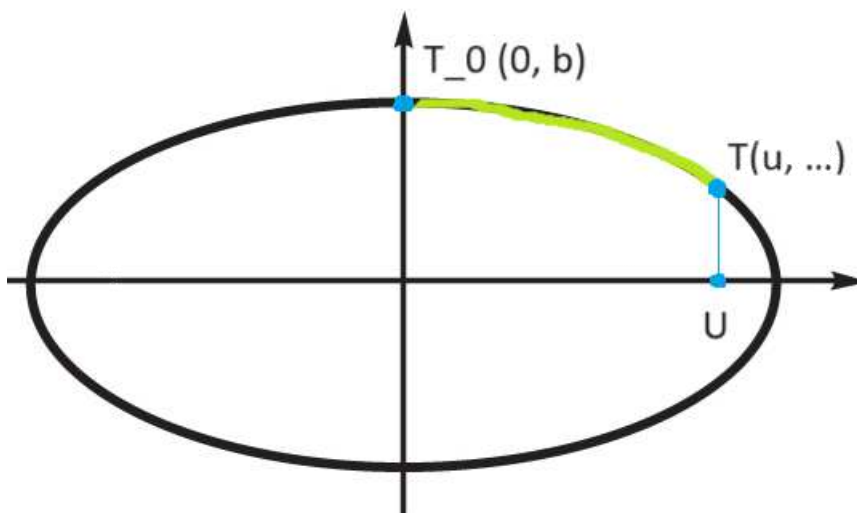
$$h = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Raspišimo sumu:

$$\pi(a + b) = \left(1 + \frac{1}{4} h + \frac{1}{64} h^2 + \frac{1}{256} h^3 + \dots \right).$$

¹ Po knjizi [3] G. Glasser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of Conics*, 2016

Problem: Zadana je elipsa kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava. Odredimo duljinu luka elipse $\widehat{TT_0}$ pri čemu je točka T proizvoljna točka na elipsi, a točka T_0 je tjemena točka s koordinatama $T(0, b)$.



Slika 2.4.1: Luk elipse od točke T do tjemene točke T_0

Za određivanje duljine luka elipse, pretpostavimo da je $a > b$

Jednadžba gornje poluelipse je $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Vrijedi:

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Neka je $l(u)$ duljina luka elipse od točke $T_0(0, b)$ do točke $T(u, \dots)$.

Kako je $l(u) = \int_0^u \sqrt{1 + y'^2} dx$ i supstitucijama $t = ax, k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ dobijemo

$$l(u) = a \int_0^{\frac{u}{a}} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt \quad (3)$$

Opseg elipse je:

$$O = 4a \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt$$

Uvodimo supstituciju $t = \sin \phi$. Dobijemo $l(u) = a \int_0^{\arcsin \frac{u}{a}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$,

$$O = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi.$$

Drugi korijen se može rastaviti u red potencija i integrirati član po član. Tako imamo MacLaurinov rezultat:

$$O = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \dots \right)$$

Integral (3) se može napisati kao $a \int \frac{1-k^2 t^2}{(1-t^2)(1-k^2 t^2)} dt$, odnosno kao,

$$a \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} - ak^2 \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

Prvi od ovih integrala obično se zove eliptički integral prve vrste, a drugi eliptički integral treće vrste (ako su u tim integralima granice od 0 do 1 kaže se da su potpuni).

Svedimo integral $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$ na oblik $\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$, $\deg f = 3$.

Koristimo supstitucije $z = \frac{1}{1-t}$, $t = 1 - \frac{1}{z}$, $dt = \frac{1}{z^2} dz$.

Dobijemo:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1+t}{1-t} \frac{1-kt}{1-t} \frac{1+kt}{1-t}}} = \int \frac{dz}{(2z-1)((1-k)z+k)((k+1)z-k)}$$

Tu je situacija slična onoj s formulama za rješenje algebarskih jednadžba u radikalima:

- Ako je $n = 1$ ili $n = 2$, jednadžbe $ax + b = 0$ i $ax^2 + bx + c = 0$ se lako mogu riješiti. Formule se poznate od davnina.
- Polovicom 16. stoljeća pronađena je formula za $n = 3$.
- $n = 4$ se reducira na kubni polinom. Pokazalo se da je za uporabu formule (u slučaju realnih rješenja) presudno uvođenje kompleksnih brojeva.
- Za $n \geq 5$ nema općenite formule i za zapis rješenja treba uvesti nove funkcije

Za integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ gdje je $n = \deg f$ vrijedi:

- ◆ Za $n = 1$ i $n = 2$ integral se racionalizira tj. prikladnom zamjenom varijabla svodi na integrale racionalnih funkcija, pa se izražava elementarnim funkcijama.

- ◆ Za $n = 3$ integral se racionalizira eliptičkim funkcijama. Slučaj $n = 4$ se svodi na $n = 3$.
- ◆ Za $n \geq 5$ za uniformizaciju su potrebne druge vrste funkcija.

Dakle, točna formula za duljinu luka elipse ne postoji. Problem se uvijek svodi na eliptički integral kojeg ne možemo izračunati.

2.5. Zakrivljenost ravninske krivulje

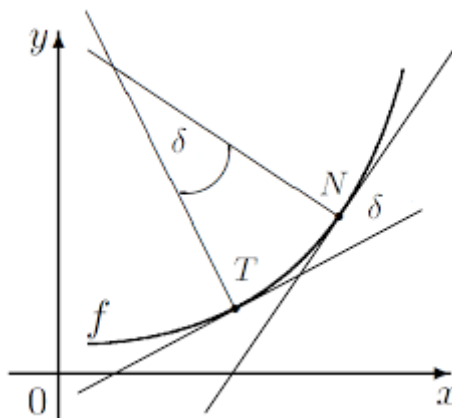
U diferencijalnoj geometriji tangencijalni vektor $\dot{c}(t)$ krivulje c tretiramo kao vektor smješten u točki $c(t)$ krivulje. Stoga uvodimo pojam vektora u točki.

Definicija 2.5.1.

Zakrivljenost κ krivulje u nekoj njenoj točki se definira sljedećom formulom:

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$$

gdje je $\Delta \alpha$ kut koji zatvaraju tangente krivulje u njezinim dovoljno bliskim točkama, a Δs duljina luka između dirališta tih tangenata.



Slika 2.5.1. Kut δ između tangenti u točkama T i N krivulje

Primjerice, zakrivljenost pravca jednaka je 0. Krivulja konstantne zakrivljenosti je kružnica stoga ćemo nju koristiti za mjerenje zakrivljenosti ostalih krivulja kod kojih je ta vrijednost promjenjiva. Takve kružnice nazivaju se **oskulacijske kružnice**. Polumjer zakrivljenosti krivulje u nekoj točki je polumjer ρ oskulacijske kružnice koja dodiruje krivulju u toj točki.

Propozicija 2.5.2.

Ako je tangencijalni vektor krivulje $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstantan vektor različit od nul-vektora, tada je $c(I)$ pravac.

Dokaz:

Neka je $\dot{c}(t) = a = \text{const.} \neq 0, t \in I$. Tada je:

$$c(t) = \int \dot{c}(u) du = at + b,$$

gdje je vektor $b \in \mathbb{R}^n$ konstantan vektor. Krivulja c je pravac s vektorom smjera a kroz točku b .

Prema propoziciji 2.5.2. zakrivljenost krivulje možemo definirati kao realnu funkciju koja opisuje promjenu jediničnog tangencijalnog vektora krivulje. Ako u prethodnom primjeru za pravac odredimo jedinični tangencijalni vektor $\check{c} = \frac{a}{\|a\|}$, tada je vektor \check{c} jednak nul-vektoru, te vrijedi:

$$\|\check{c}\| = 0.$$

Funkcija $\|\check{c}\|$ je dobar kandidat za funkciju zakrivljenosti. U definiciji se ograničavamo na krivulje parametrizirane duljinom luka l . Definiramo zakrivljenost krivulje parametrizirane općim parametrom tako da vrijedi:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(l)$$

u točki $c(t) = \tilde{c}(l)$ krivulje c i njezine reparametrizacije duljinom luka \tilde{c} .

Krivulja ne smije ovisiti o položaju krivulje u prostoru, tj. da krivulja i njezina izometrična slika moraju imati jednake zakrivljenosti. ■

2.6. Frenetove formule

Zakrivljenost krivulje c parametrizirane duljinom luka definirali smo kao brzinu promjene vektora $c'(s)$ dakle, kao brzinu promjene jediničnog tangencijalnog polja $T(s)$.

Potrebno je još definirati tzv. ortonormirani trobrid tj. desnu ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}_{c(s)}^3$ u svakoj točki krivulje.

Neka je $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje $T(s) = c'(s)$ je **jedinično tangencijalno polje** od c .

Polje vektora glavnih normala definiramo kao

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, c''(s) \neq 0,$$

a polje binormala

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Tada je $(T(s), N(s), B(s))$ desna ortonormirana baza od $\mathbb{R}_{c(s)}^3$. Nazivamo ju **Frenet-ovim trobridom** krivulje c .

Definicija 2.6.1.

Krivulje kod kojih je polje N definirano samo za $c''(s) \neq 0$ nazivaju se **dopustivim** krivuljama.

Definirajmo sada torziju krivulje c parametrizirane duljinom luka.

Definicija 2.6.2.

Funkcija $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzijom krivulje c parametrizirane duljinom luka u točki $c(s)$.

Teorem 2.6.3. (Frenet-ove formule)

Neka je c dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka s . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}T' &= \kappa N \\N' &= -\kappa T + \tau B \\B' &= -\tau N.\end{aligned}$$

Dokaz:

Možemo pisati $T' = a_1 T + a_2 N + a_3 B$, gdje su $a_1, a_2, a_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ glatke funkcija. Budući da je $T' = c'' = \kappa N$ zbog jedinstvenosti rastava slijedi $a_1 = a_3 = 0, a_2 = \kappa$. Neka je sada

$$N' = b_1 T + b_2 N + b_3 B. \quad (4)$$

Kako je N jedinično polje vrijedi da je $N^2 = 1$. Deriviranjem se dobije:

$$N \cdot N' = 0.$$

Pomnožimo li relaciju (4) skalarno s N , dobivamo $N' \cdot N = b_2$. Slijedi da je $b_2 = 0$.

Nadalje, primijetimo da je $T \cdot N = 0$ povlači $T' \cdot N + T \cdot N' = 0$, odakle slijedi $a_2 + b_1 = 0$. Dakle, $b_1 = -\kappa$.

$N \cdot B = 0$, pa je $b_3 + c_2 = 0$, gdje je $B' = c_1 T + c_2 N + c_3 B$. Kako je $\tau = -N \cdot B'$, vrijedi $-c_2 = b_3 = \tau$. ■

2.7. Zakrivljenost konika, oskulacijske i hiperoskulacijske kružnice

Definicija 2.7.1.

Oskulacijska kružnica u nekoj točki ravninske krivulje je kružnica koja prolazi kroz tu točku i u toj točki ima istu tangentu i zakrivljenost kao krivulja. To je posljedica definicije 2.5.1.

Možemo reći da je to kružnica koja se u okolici neke točke najtješnje od svih kružnica priljubljuje uz krivulju. Ona je jedinstvena za svaku točku krivulje.

Polumjer oskulacijske kružnice r u nekoj točki jednak je recipročnoj vrijednosti zakrivljenosti krivulje κ u toj točki tj. vrijedi formula:

$$r = \frac{1}{\kappa}$$

Iz ove jednadžbe je vidljivo što je krivulja zakrivljenija da je polumjer oskulacijske kružnice manji.

Kružnica i konika (elipsa i hiperbola) mogu imati najviše 4 zajedničke točke.

U slučaju oskulacije tri točke kružnice su se preslikale u jednu točku T na konici, a četvrto sjecište i točka T dijele oskulacijsku kružnicu na dva kružna luka od kojih jedan pripada unutrašnjosti, a drugi vanjštini konike. U svakoj okolini točke T jedan dio luka oskulacijske kružnice leži u unutrašnjosti, a drugi u vanjštini konike.

Hiperoskulacijske kružnice konika su njezine kružnice zakrivljenosti u tjemnim točkama. Kod hiperoskulacije sve četiri dodirne točke kružnice zakrivljenosti i konike padaju u istu točku - u tjeme. Budući da konika i njezina hiperoskulacijska kružnica sve četiri zajedničke točke imaju u svom diralištu, ne mogu izvan dirališta imati više ni jednu zajedničku točku, pa sve ostale točke hiperoskulacijske kružnice leže ili u unutrašnjosti ili u vanjštini konike.

Teorem 2.7.2.

Neka je c regularna krivulja u \mathbb{R}^3 parametrizirana općim parametrom t . Tada je njena zakrivljenost:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3} \quad (5)$$

Dokaz:

Zakrivljenost krivulje c parametrizirane općim parametrom t definira se kao zakrivljenost njezine reparametrizacije \tilde{c} duljinom luka, $c(t) = \tilde{c}(s)$.

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s)$$

Za derivacije vrijedi:

$$\tilde{c}' = \dot{c} \frac{dt}{ds}$$

$$\tilde{c}'' = \ddot{c} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{c} \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Također vrijedi:

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}\| \text{ pa je } \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot{c}\|}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{\|\dot{c}\|^4}$$

Sada je:

$$\ddot{c}'' = \ddot{c} \frac{1}{\|\dot{c}\|^2} + \dot{c} \left(-\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{\|\dot{c}\|^4} \right) = \frac{1}{\|\dot{c}\|^4} (\ddot{c}(\dot{c} \cdot \dot{c}) - \dot{c}(\dot{c} \cdot \ddot{c})).$$

Iskoristimo formulu $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$. Uz $a = c = \dot{c}$ i $b = \ddot{c}$ i znamo da su vektori \dot{c} i $\dot{c} \times \ddot{c}$ su okomiti, pa je $\|\dot{c} \times (\dot{c} \times \ddot{c})\| = \|\dot{c}\| \|\dot{c} \times \ddot{c}\|$ pa dobivamo:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) = \|\ddot{c}''(s)\| = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^4} \|\dot{c}(t) \times (\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t))\| = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3},$$

što je tvrdnja teorema. (■)

Koristeći jednadžbu parametrizacije elipse $e = \{(a \cos \tau, b \sin \tau) \mid 0 \leq \tau < 2\pi\}$, $a > b$ i formulu za zakrivljenost krivulje (5) dobivamo sljedeću formulu:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}$$

U slučaju $a = b = r$ dobivamo $\kappa(t) = \frac{1}{r}$ tj. zakrivljenost kružnice je konstantna.

Također, središte zakrivljenosti s pozicijom vektora $c^* = c + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$ je ujedno središte kruga o s jednakom zakrivljenošću kao krivulja c u $P = c(t)$. Kružnica o je oskulacijska kružnica krivulje c u točki P .

Formula za središte oskulacijskih kružnica je $c^* = c + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$.

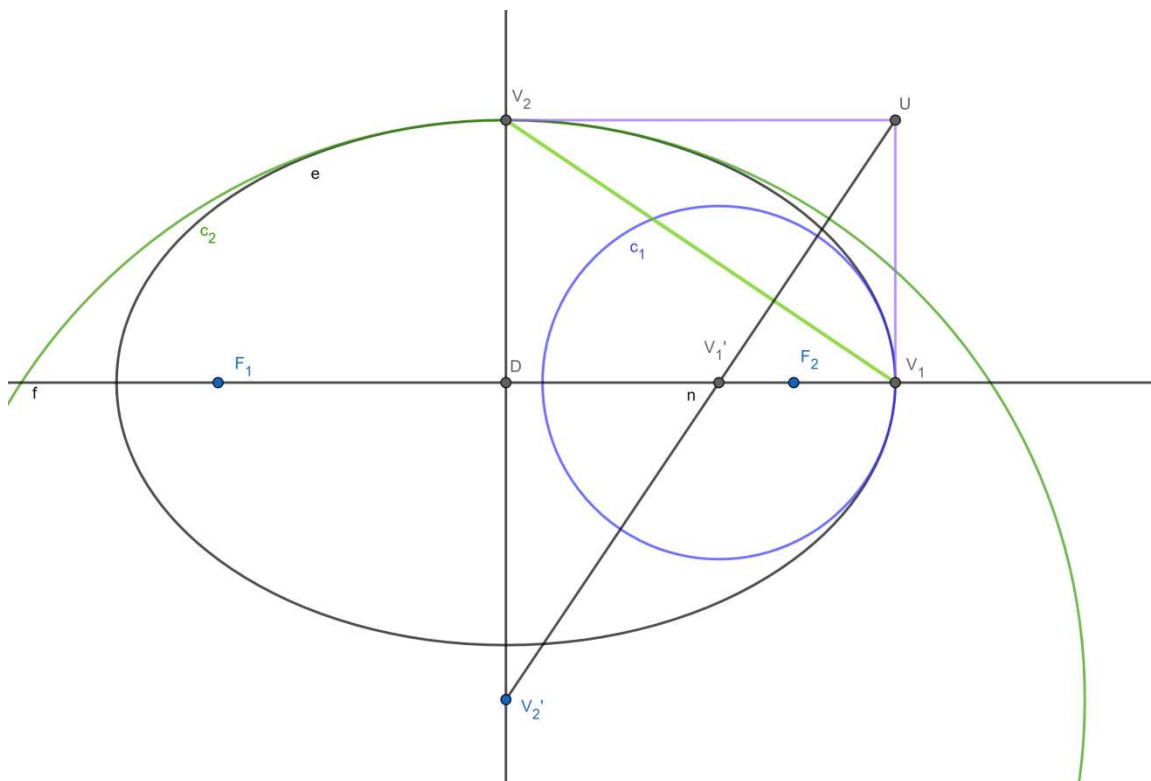
U sljedećem primjeru ćemo vidjeti kako se konstruiraju oskulacijske kružnice konika.

2.8. Konstrukcija oskulacijskih kružnica

2.8.1. Konstrukcija hiperoskulacijske kružnice elipse

Korolar 2.8.1.

Zadana je elipsa i na njoj su istaknute dvije točke: V_1 na velikoj poluosi i V_2 na maloj poluosi. Točka U je sjecište tangenti kroz te dvije točke. Središte oskulacijske kružnice V_1' leži na sjecištu velike poluosi elipse i pravca kroz U koji je okomit na dužinu $\overline{V_1V_2}$. Središte oskulacijske kružnice V_2' leži na sjecištu male poluosi elipse i pravca kroz U koji je okomit na dužinu $\overline{V_1V_2}$.



Slika 2.8.1: Hiperoskulacijske kružnice elipse u točkama V_1 i V_2 .

Dokaz:

Neka je O središte elipse. Uočimo da je

$$a:b = \overline{OV_1} : \overline{OV_2} = b:r_1,$$

gdje je r_1 polumjer oskulacijske kružnice u točki V_1 elipse. Vrijedi i:

$$a:b = a:r_2$$

gdje je r_2 polumjer oskulacijske kružnice u točki V_2 elipse.

Pravokutni trokuti OV_1V_2 i V_1UV_1' su slični.

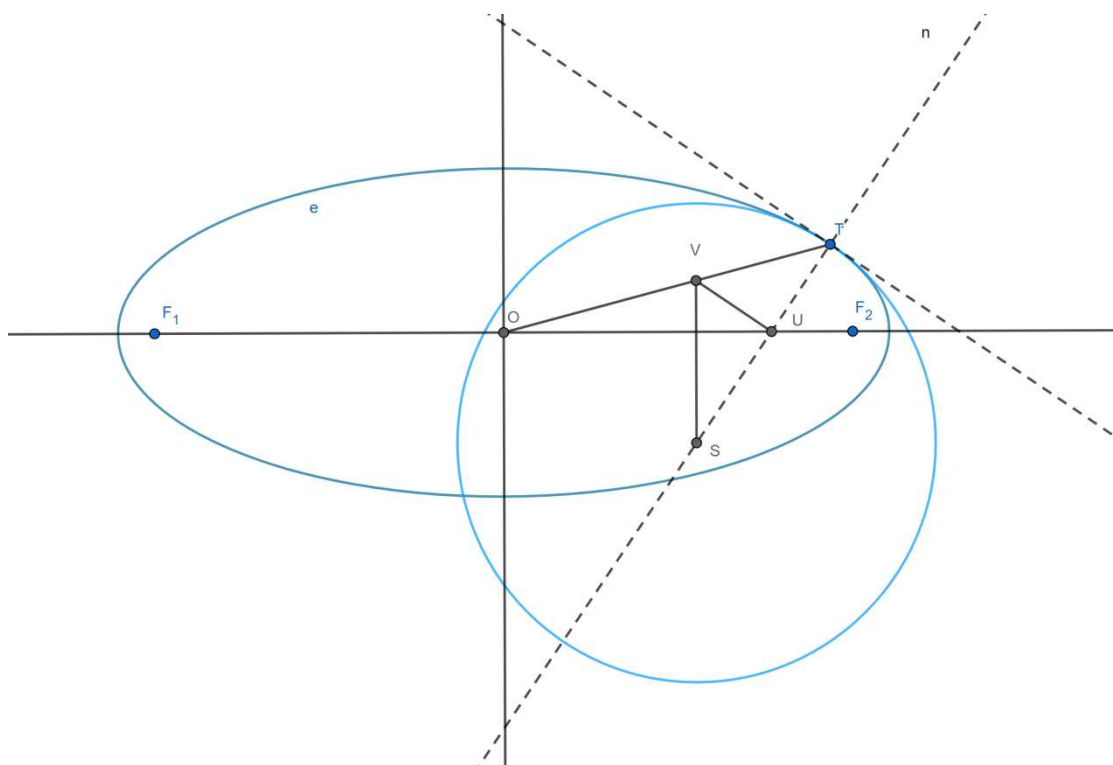
Također vrijedi: $\Delta OV_1V_2 \sim \Delta V_2UV_2'$.

2.8.2. Konstrukcija oskulacijske kružnice elipse

Konstrukcija 1.

Lema 2.8.2.

Zadana je elipsa e i točka T na njoj. Povučemo tangentu t na elipsu u T , a zatim povučemo normalu n kroz tu točku. Neka je U sjecište normale n i glavne osi elipse. Spojimo središte elipse O i točku T . Povučemo paralelu kroz točku U s tangentom t . Sjecište spojnice \overline{OT} i te paralele je točka V . Kroz točku V povučemo paralelu s malom osi elipse. Sjecište te paralele s normalom n označimo s S . Točka S je središte oskulacijske kružnice elipse u točki T .



Slika 2.8.2: Oskulacijska kružnice elipse u točki T

Dokaz:

Elipsu e parametrizirajmo trigonometrijski: $P = (x, y) = (a \cos t, b \sin t)$. Tangenta t i normala n elipse e u točki T su dane Kartezijevim jednadžbama

$$t: \frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1 \quad i \quad n: -\frac{x \sin t}{b} + \frac{y \cos t}{a} = \frac{b^2 - a^2}{ab} \cos t \cdot \sin t$$

Normala n i glavna os čija je jednadžba $y = 0$ određuju koordinate točke U:

$$U\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos t, 0\right),$$

Pravac l paralelan s tangentom t koji prolazi točkom U ima jednadžbu:

$$l: \frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t.$$

Polumjer elipse \overline{OT} ima jednadžbu: $xb \sin t - ya \cos t = 0$.

Točke V i središte oskulacijske kružnice S imaju jednaku x - koordinatu.

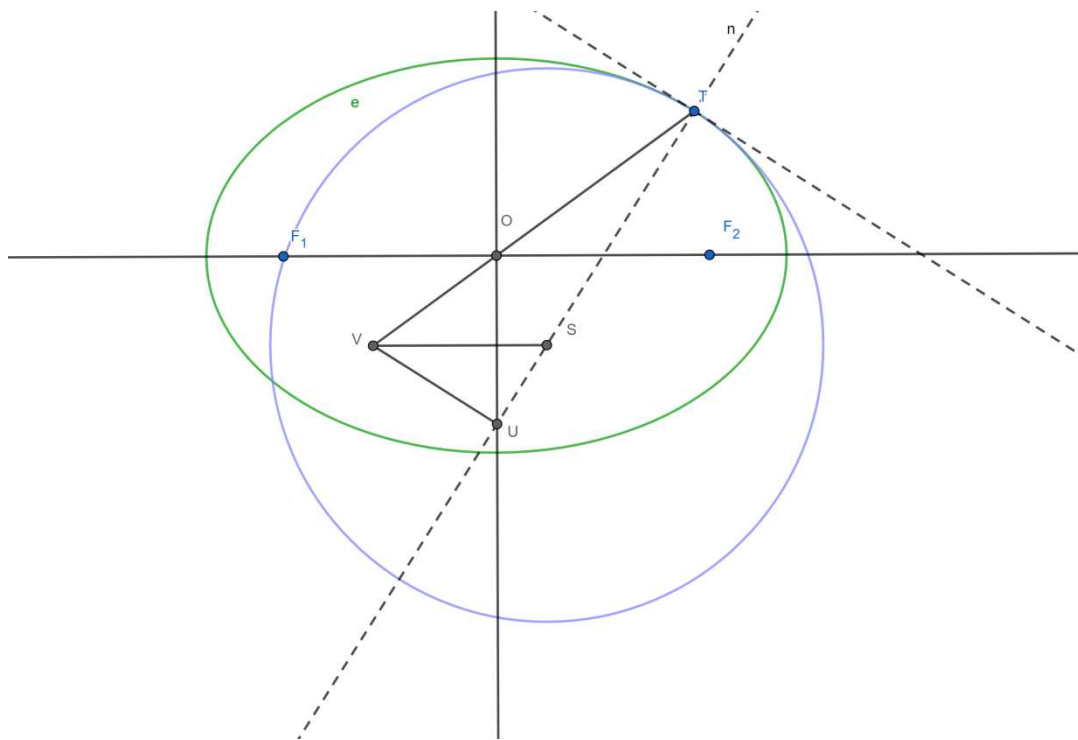
$$x_s = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$$

koju ako uvrstimo u jednadžbu normale dobivamo y - koordinatu te točke što se poklapa s jednadžbom evolute elipse koja glasi:

$$c^*(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab} (b \cos^3 t, -a \sin^3 t)$$

Konstrukcija 2.

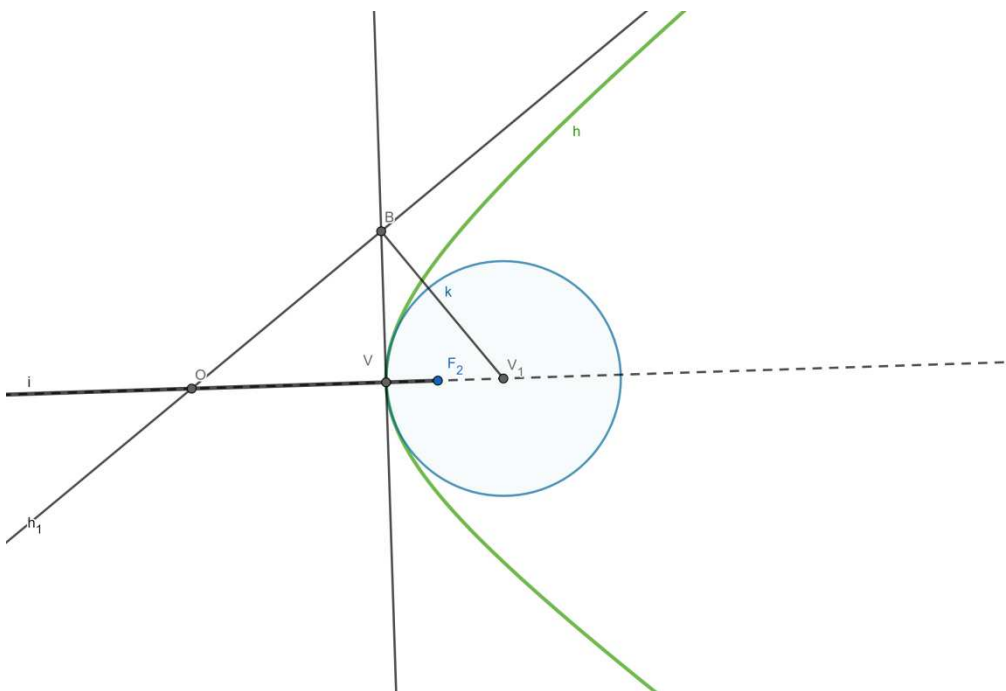
Konstrukcija je analogna kao i konstrukcija 1. Točka U dobije se kao presjek normale n i male (sporedne) osi elipse. Točku V dobijemo na isti način kao u prethodnoj konstrukciji. Točku S dobijemo kao presjek paralele kroz V s velikom osi elipse i normale n .



Slika 2.8.3: Oskulacijska kružnice elipse u točki T

2.8.3. Konstrukcija hiperoskulacijske kružnice hiperbole

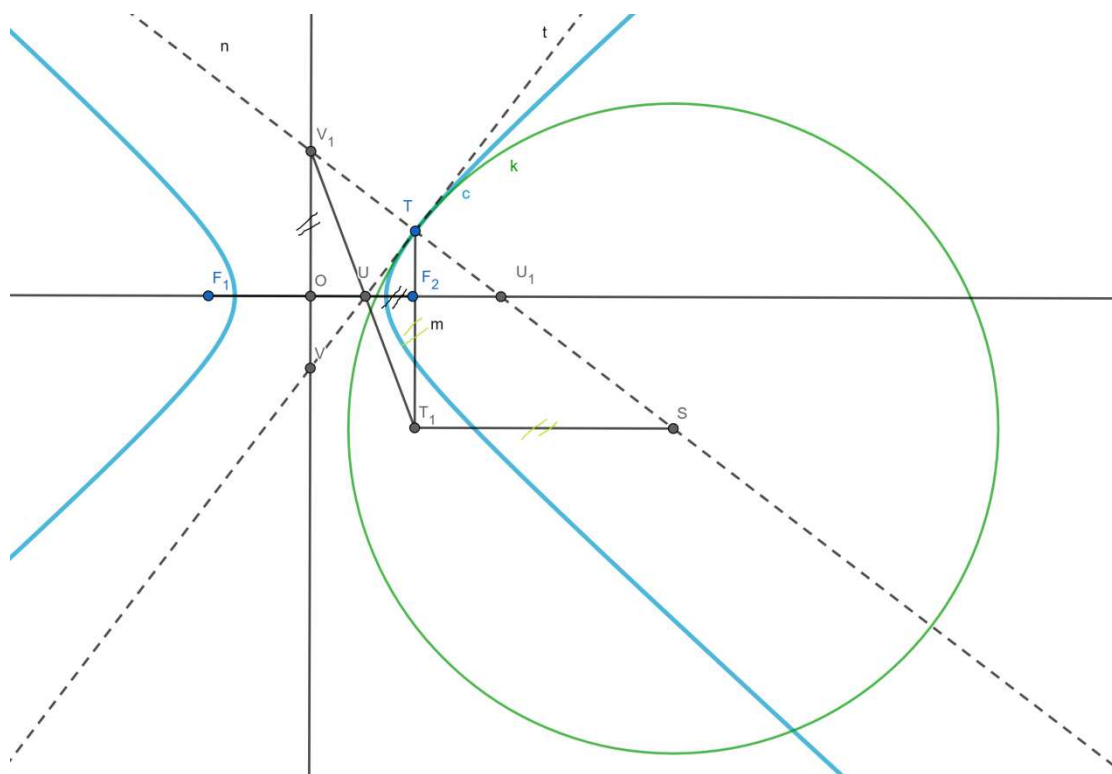
Neka je točka O središte hiperbole, točka V je tjemena točka hiperbole. Povučemo tangentu t kroz točku V . Konstruiramo asimptotu hiperbole tako što konstruiramo kružnicu $k_1(O, |OF_2|)$. Sjecište kružnice k_1 i tangente t je točka B na asimptoti hiperbole. Spojimo O i tu točku. Dobivamo asimptotu. U točki B povučemo okomicu na asimptotu i tamo gdje ona siječe glavnu os hiperbole dobivamo središte V_1 oskulacijske kružnice k hiperbole.



Slika 2.8.4: Hiperoskulacijska kružnica hiperbole u točki V .

2.8.4. Konstrukcija oskulacijske kružnice hiperbole

Neka tangenta t i normala n u točki T hiperbole sijeku glavnu os u točkama U i U_1 , a sporednu u V i V_1 . Točka T_1 je sjecište okomice iz T na glavnu os hiperbole i pravca UV_1 . Središte oskulacijske kružnice S hiperbole u točki T je sjecište normale n i paralele kroz T_1 s glavnom osi hiperbole.



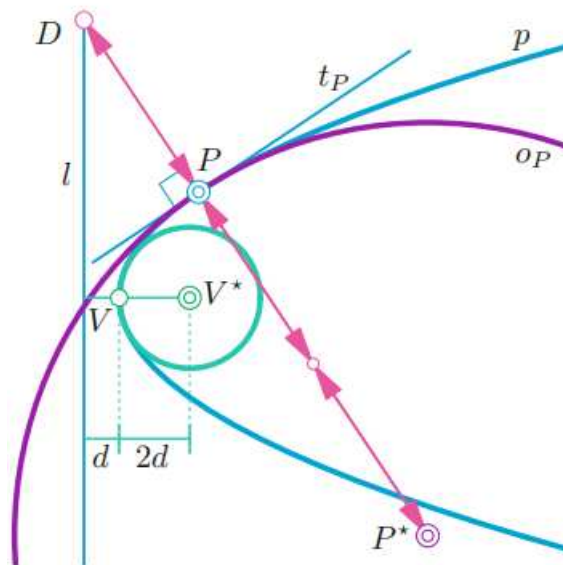
Slika 2.8.5: Oskulacijska kružnica hiperbole u točki T .

2.8.5. Konstrukcija oskulacijske kružnice parabole

Teorem 2.8.5.

Zadana je parabola i točka P na njoj. Normala u svakoj točki P siječe ravnalicu (direktrisu) parabole u točki D . Neka je P^* središte oskulacijske kružnice te parabole. Tada vrijedi sljedeći omjer:

$$|DP| : |DP^*| = 1 : 3$$



Slika 2.8.6: Oskulacijska kružnica u točki P parabole

2.9. Evoluta i involuta krivulja

Definicija 2.9.1.

Evoluta zadane krivulje je krivulja koja sadrži (središta oskulacijskih kružnica) svih točaka zadane krivulje.

Definicija 2.9.2.

Involuta zadane krivulje c je krivulja c' za koju je krivulja c njezina evoluta.

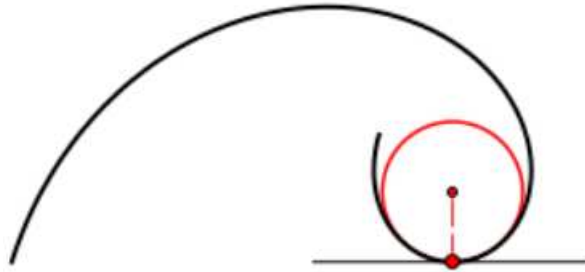
2.9.1. Evoluta i involuta kružnice

Evoluta kružnice jest **točka** jer je jedna točka središte zakrivljenosti cijele kružnice.

Involuta kružnice je **spirala** koju opisujemo jednadžbama:

$$x = r(\cos t + t \sin t), y = r(\sin t + t \cos t).$$

Spirala je ravninska krivulja koja beskonačno mnogo puta obilazi oko neke čvrste točke, tzv. **asimptotske** točke te spirale, neograničeno joj se približavajući, odnosno neograničeno se od nje udaljujući.

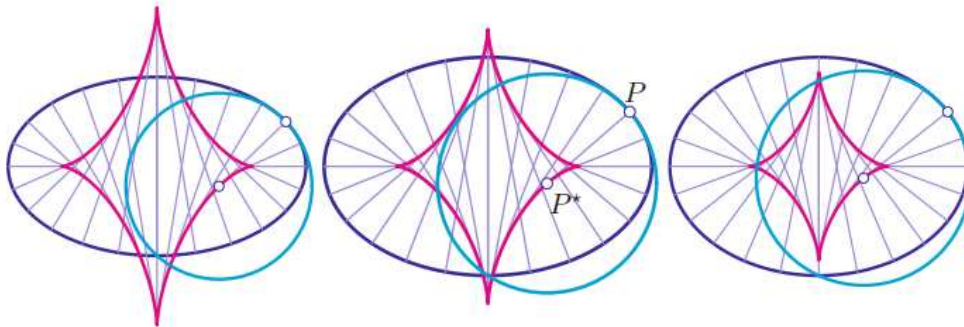


Slika 2.9.1: Kružnica i njezina involuta (spirala)

Odmatanjem kružnice dobivamo njenu involutu. Središta svih oskulacijskih kružnica krivulje sa slike čine kružnicu.

2.9.2. Evoluta elipse

Evoluta elipse je krivulja koja se zove **astroida**.



Slika 2.9.2: Evoluta elipse - astroida

Izvod formule:

Znamo da je formula za zakrivljenost krivulje:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}$$

Formula njene evolute je:

$$c^* = c + \frac{1}{\kappa} \vec{n}$$

Budući da se radi o elipsi čija je parametrizacija $(a \cos t, b \sin t)$ i poznat je vektor normale $\frac{(-b \cos t, -a \sin t)}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$ slijedi da je formula njene evolute:

$$\begin{aligned} c^*(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{\sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3}}{ab} \frac{(-b \cos t, -a \sin t)}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} ((-b \cos t, -a \sin t)) \\ &= \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos^3 t}{a}, \frac{(b^2 - a^2) \sin^3 t}{b} \right) \end{aligned}$$

Stoga parametrizacija astroide glasi:

$$c^*(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab} (b \cos^3 t, -a \sin^3 t), \quad t \in J$$

Tu jednadžbu možemo transformirati u:

$$\left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad (6)$$

gdje je $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}$, a $\beta = \frac{a^2 - b^2}{b}$.

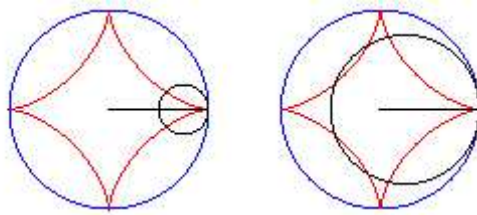
To je ekvivalentno polinomijalnoj jednadžbi:

$$((a^2 - b^2)^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2))^3 - 27 a^2 b^2 x^2 y^2 (a^2 - b^2)^2 = 0$$

Zamjenom $(x, y) \rightarrow (x', y') = \left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \right)$ jednadžbu (6) transformiramo u novu jednadžbu:

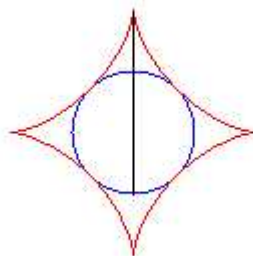
$$x'^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Astroida je **hipocikloida** s četiri vrha. Hipocikloide su krivulje opisane točkom kružnice koja se kotrlja bez klizanja po osnovnoj kružnici i unutar nje pri čemu je kotrljajuća kružnica manja od fiksne. Unutarnja (manja) kružnica je polumjera $\frac{a}{4}$ ili $\frac{3a}{4}$, a vanjska (veća) je polumjera a . Unutar nje se kotrlja manja kružnica.



Slika 2.9.3: Kotrljajuće kružnice polumjera $\frac{a}{4}$ i $\frac{3a}{4}$

To je ovojnica tetive \overline{PQ} kružnice sa središtem O i polumjerom $\frac{a}{2}$ (kružnica upisana u astroid), P i Q putuju ovom kružnicom u suprotnim smjerovima



Slika 2.9.4: Kružnica polumjera $\frac{a}{2}$ upisana u astroidu

Astroidu još možemo definirati kao ovojnicu odsječka \overline{AB} duljine a čiji se krajevi gibaju na dva okomita pravca.

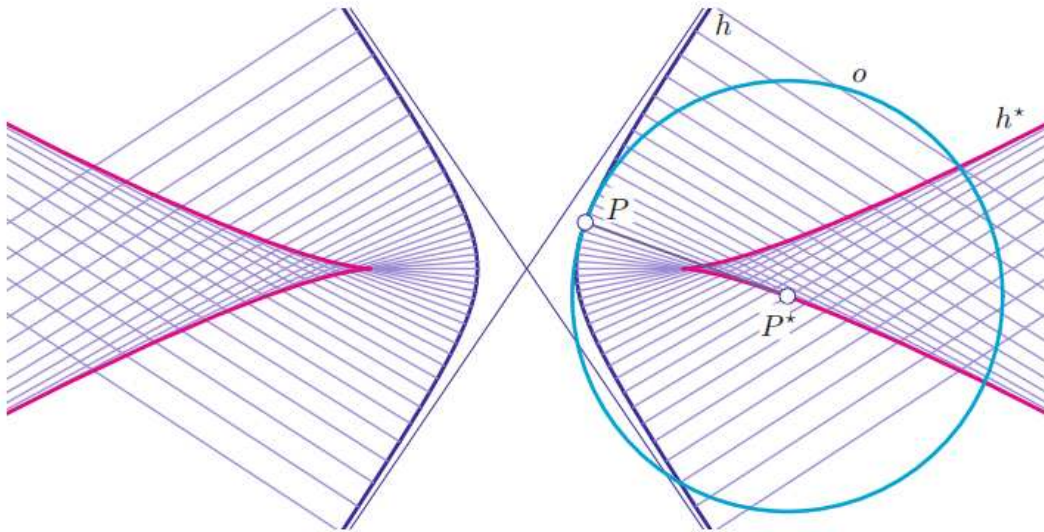
2.9.3. Evoluta hiperbole

Evolutu hiperbole možemo parametrizirati jednadžbom $(\pm a \cosh t, b \sinh t)$, $t \in \mathbb{R}$,

odnosno, $\frac{a^2+b^2}{ab} (\pm b \cosh^3 t, \mp a \sinh^3 t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Implicitna jednadžba evolute hiperbole glasi:

$$\left(\frac{ax}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ ili } \left(1 - \frac{a^2x^2 - b^2y^2}{(a^2+b^2)^2}\right)^3 = 27 \frac{(abxy)^2}{(a^2+b^2)^4}.$$



Slika 2.9.5: Hiperbola i njena evoluta

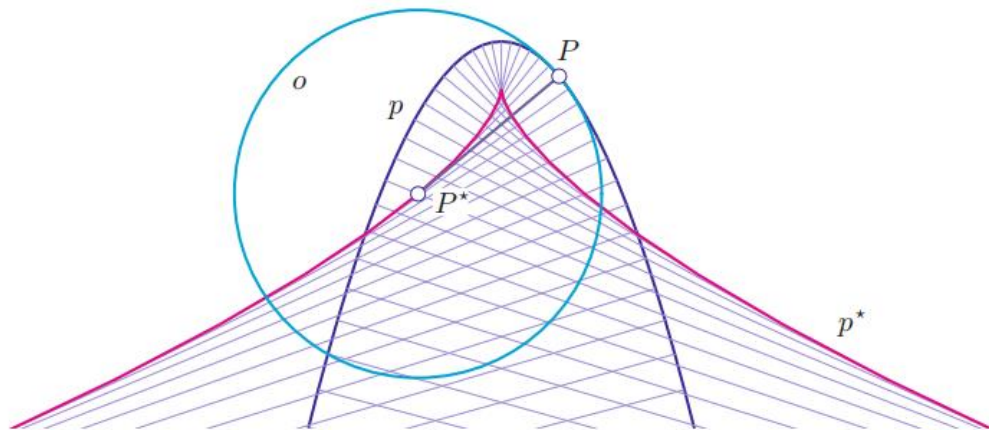
2.9.4. Evoluta parabole

Zadana je parabola $p : x^2 = 2qx$ pri čemu je $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Njena parametrizacija je :

$$p(t) = (2qt, 2qt^2), t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Kada uvrstimo jednadžbu (7) u $c^* = c + \frac{1}{\kappa} e_2$ dobivamo parametrizaciju njene evolute:

$$p^*(t) = q(-8t^3, 6t^2 + 1)$$



Slika 2.9.6: Parabola i njena evoluta

Ova krivulja se još naziva i **polukubna parabola**.

Njena implicitna jednadžba je:

$$8(y - q)^3 - 27qx^2 = 0.$$

Literatura

- [1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
<https://shop.skolskaknjiga.hr/elementarna-matematika-1.html>
- [2] F.B. Bruckler, *Povijest matematike*, Prirodoslovno - matematički fakultet, Zagreb, 2022.
<https://www.pmf.unizg.hr/download/repository/skripta2024.pdf>
- [3] G. Glasser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of Conics*, 2016.
[The Universe of Conics -knjiga.pdf](#)
- [4] I. Kamenarović, *Diferencijalna geometrija*, Rijeka, 1990.
- [5] I. Mirošević, N. Koceić - Bilan, J. Jurko, Različiti nastavno - metodički pristupi čunjosječnicama, *Hrvatski matematički elektronički časopis*, Math.27 (2023), str. 3. - 23.
- [6] Leksikografski zavod Miroslav Krleža, *Hrvatska enciklopedija*, Zagreb, 2023.
<https://enciklopedija.hr/clanak/evoluta>
- [7] S. Gorjanc, E. Jurkin, I. Kodrnja, H. Koncul, *Deskriptivna geometrija*, Građevinski fakultet, Zagreb, 2018.
<https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/1/1-2-4.html>
- [8] Wikipedia, *Elliptic Integral*, https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral, (lipanj 2024.)
- [9] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Prirodoslovno - matematički fakultet, Zagreb
<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/userfiles/downloads/UDG-skripta-2.4.pdf>

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada bio je opisati sve tri konike u diferencijalnoj geometriji koristeći definicije i teoreme obrađene na kolegiju Uvod u diferencijalnu geometriju. U prvom poglavlju rada detaljno su obrađena osnovna svojstva konika koja se obrađuju u srednjoj školi. U drugom poglavlju susrećemo se s fakultetskim pojmovima kao što je zakrivljenost krivulje koju opisujemo raznim formulama iz diferencijalne geometrije. Konstrukcije su obrađene u matematičkom programu GeoGebra. Od konstrukcija najvažnije su bile konstrukcije oskulacijskih kružnica konika i njihovih evoluta. Koristeći se parametrizacijom krivulje, izveli smo i parametrizaciju njihovih evoluta.

Konike imaju široku primjenu u građevini i arhitekturi, ali i u svakodnevnim aktivnostima stoga ih je poželjno proučavati.

Summary

The aim of this thesis was to describe all three conics in differential geometry using the definitions and theorems processed in the course Introduction to Differential Geometry. In the first chapter, the basic properties of conics, which are studied in high school, are covered in detail. In the second chapter we meet terms from college such as the curvature of a curve, which we describe with various formulas from differential geometry. The constructions were processed in the mathematical program GeoGebra. Of the constructions, the most important were the constructions of the osculation circles of conics and their evolutes. Using the parametrization of the curve, we also derived the parametrization of their evolutes.

Conics are widely used in construction and architecture, but also in everyday activities, so it is desirable to study them.

Životopis

Rođen sam 15. travnja 1996. u Zagrebu. Prva četiri razreda osnovne škole pohađao sam u Osnovnoj školi Augusta Šenoje u Zagrebu. Od petog razreda školovanje sam nastavio u Dugom Selu, u Osnovnoj školi Josipa Zorića. Nakon završetka osnovne škole upisao sam XV. Gimnaziju u Zagrebu. Maturirao sam 2015. godine nakon čega sam upisao Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. 2020. godine sam stekao akademski naziv univ. bacc. educ. math. te sam upisao diplomski studij, smjer nastavnički.