

Mjerenje i upravljanje tržišnim rizikom

Domitran, Petar

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:304573>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-03**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Domitran

MJERENJE I UPRAVLJANJE
TRŽIŠNIM RIZIKOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, Studeni, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem obitelji na podršci i razumijevanju tijekom studiranja. Hvala mentorici doc. dr. sc. Vanji Wagner na pomoći pri pronalasku zanimljive literature na moju temu i angažmanu tijekom izrade ovog rada.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Mjera tržišnog rizika: VaR	2
1.1 Definicija VaR-a	2
1.2 Parametarska metoda za procjenu VaR-a	5
1.3 Primjer računanja VaR-a parametarskom metodom	9
1.4 Povijesna metoda za računanje VaR-a	14
1.5 Primjer računanja VaR-a povijesnom metodom	16
1.6 Monte Carlo metoda za računanje VaR-a	19
1.7 Primjer računanja VaR-a Monte Carlo metodom	19
1.8 Uvjetni VaR: Očekivani gubitak u repu	20
2 Bayesovska metoda procjene VaR-a	22
2.1 Bayesovski model povrata portfelja	22
2.2 Računanje VaR-a i CVaR-a	24
2.3 Hiperparametri osjetljivi na volatilnost	26
2.4 Testiranje VaR-a	29
2.5 Računanje VaR-a na simuliranim podacima	30
2.6 Računanje VaR-a na povijesnim podacima	35
3 Dodatak	40
3.1 Dodatak 1	40
3.2 Dodatak 2	42
3.3 Dodatak 3	46
3.4 Dodatak 4	47
3.5 Dodatak 5	49
Bibliografija	50

Uvod

Tržišni rizik je rizik koji proizlazi iz kretanja cijena dionica, kamatnih stopa, tečajeva i cijena roba. Tržišni rizik razlikuje se od kreditnog rizika, koji je rizik gubitka zbog neuspjeha druge strane da izvrši obećanu uplatu, kao i od niza drugih rizika s kojima se organizacije suočavaju, poput prekida u njihovim operativnim postupcima. U suštini, tržišni rizik je rizik koji proizlazi iz promjena na tržištima kojima je institucija izložena.

Upravljanje rizikom je proces identificiranja i mjerenja rizika te osiguravanja da su preuzeti rizici u skladu sa željenim rizicima. Proces upravljanja tržišnim rizikom uvelike se oslanja na upotrebu modela.

Financijska tržišta su neprekidna, a nove cijene se konstantno generiraju. Kao rezultat toga, postoji velika količina podataka o tržišnom riziku i puno kolektivnog iskustva u suočavanju s ovim rizikom, što čini tržišni rizik jednostavnijim za analizu. Ipak, tržišni rizik nije lako obuhvatiti. Iako se izloženosti portfelja mogu identificirati s određenom sigurnošću, potencijalni gubici koji bi mogli proizaći iz tih izloženosti su nepoznati. Podaci koji se koriste za procjenu potencijalnih gubitaka generiraju se iz povijesnih podataka, a ne iz onih koje dolaze. Modeli za upravljanje rizikom omogućuju upraviteljima rizika da kombiniraju te povijesne podatke s vlastitim predviđanjima te tako ograničavaju rizik kojemu su izloženi.

Više od desetljeća, regulative zahtijevaju od banaka da koriste VaR (*Value at Risk*) u svojim procjenama rizika. Sve institucije koje su podložne ovim regulativama moraju redovito provoditi testiranje svojih modela rizika. Na temelju rezultata testa, banci se nameću različiti kapitalni zahtjevi, a modeli koji podbace čak će biti zabranjeni.

Ovaj rad započinjemo definicijom VaR-a i uvođenjem tri osnovne metode za računanje VaR-a koje potkrepljujemo primjerima. U drugom poglavlju uvodimo Bayesovsku metodu procjene VaR-a te uvodimo nov i jednostavan algoritam za određivanje hiperparametara u konjugiranoj apriori distribuciji. Na kraju poglavlja uspoređujemo nekoliko metoda za računanje VaR-a na simuliranim i povijesnim podacima zasebno.

Poglavlje 1

Mjera tržišnog rizika: VaR

Mjera tržišnog rizika je mjera nesigurnosti u budućoj vrijednosti portfelja, tj. mjera nesigurnosti u prinosu portfelja. Njegova osnovna svrha je uvidjeti mogućnost odstupanja od ciljane ili očekivane vrijednosti. Slijedeći primjer regulatora i velikih međunarodnih banaka sredinom 1990-ih, gotovo sve financijske institucije danas koriste neki oblik VaR-a kao mjeru rizika. Cilj ovog poglavlja je upoznati čitatelje s mjerom rizika VaR te navesti tri tradicionalna načina računanja VaR-a, a poglavlje prati [2] i [8].

1.1 Definicija VaR-a

VaR (value at risk) je minimalni gubitak koji očekujemo u određenom postotku vremena tijekom određenog vremenskog horizonta, s obzirom na pretpostavljene tržišne uvjete. Dva osnovna parametra VaR-a su: razina značajnosti α i vremenski horizont h . Vremenski horizont je vremensko razdoblje tijekom kojeg je VaR mjereno, a tradicionalno se mjeri u danima u kojima se trguje, a ne u kalendarskim danima.

Razina značajnosti je najčešće dana od regulatora te tako npr. prema Basel II sporazumu, banke koje koriste interne VaR modele za procjenu svojih kapitalnih rezervi za tržišni rizik trebaju mjeriti VaR na razini značajnosti od 1%. U odsustvu regulatora, razinu značajnosti ulagači biraju sami pa će tako konzervativniji ulagač odabrati manju razinu značajnosti α .

Vremenski horizont je period tijekom kojeg mjerimo potencijalne gubitke. On bi se trebao odnositi na razdoblje tijekom kojeg očekujemo izloženost riziku pa za likvidniju imovinu vremenski horizont može biti kraći dok bi za manje likvidnu imovinu on trebao biti duži. Vrijeme potrebno za smanjenje rizika ovisi i o veličini imovine izložene riziku kao i o tržišnoj likvidnosti.

VaR pretpostavlja da će portfelj ostati statičan tijekom odabranog vremenskog horizonta rizika i da ćemo samo procijeniti nesigurnost u vezi s vrijednošću portfelja na kraju

vremenskog razdoblja rizika.

Da bi imala značenje danas, svaka vrijednost portfelja koja bi mogla biti realizirana za h trgovinskih dana u budućnosti zahtijeva diskontiranje. To znači da bi dobit¹ trebala biti izražena u terminima sadašnje vrijednosti, diskontirajući je korištenjem bezrizične kamatne stope, kao što su LIBOR ili EURIBOR.

Neka P_t označava vrijednost portfelja, a $B_{h,t}$ cijenu diskontirane obveznice koja dospijeva za h trgovinskih dana pri čemu su obje cijene u trenutku t kada se mjeri VaR.² Vrijednost portfelja u nekom budućem trenutku $t+h$, diskontirana na trenutak t , je $B_{h,t}P_{t+h}$, a diskontirana dobit jednaka je

$$\text{Diskontirana } h\text{-dnevna dobit} = B_{h,t}P_{t+h} - P_t. \quad (1.1)$$

Iako možemo promatrati vrijednost portfelja i vrijednost diskontirane obveznice u trenutku t , vrijednost portfelja u trenutku $t+h$ je nesigurna, stoga je diskontirana dobit (1.1) slučajna varijabla. Mjerenje distribucije ove slučajne varijable prvi je korak prema izračunavanju VaR-a.

Matematička definicija VaR-a

Dali smo općenitu definiciju VaR-a kao gubitka, u terminima sadašnje vrijednosti, zbog tržišnih kretanja, za koji smo do neke razine značajnosti sigurni da neće biti premašen ako portfelj ostane statičan tijekom određenog vremenskog horizonta. Kako bismo bolje razumjeli što znači VaR, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1.1.1. *Razmotrimo izjavu: 5%-tni VaR portfelja iznosi 2.2 milijuna eura tijekom jednog dana. Sljedeće tri točke su važne za razumijevanje koncepta VaR-a:*

- *Izjava o VaR-u se odnosi i na vremenski horizont: gubici koji bi se mogli očekivati tijekom određenog vremenskog razdoblja. U ovom primjeru, to razdoblje je jedan dan. (Ako se VaR mjeri na dnevnoj bazi, a tipičan mjesec ima 20-22 radna dana, tada 5% dana odgovara otprilike jednom danu mjesečno.)*
- *Gornja izjava može se zapisati i kao: Gubitak od najmanje 2.2 milijuna eura se očekuje otprilike jednom svaki mjesec.*
- *VaR je minimalni gubitak. VaR se često pogrešno smatra kao iznos koji se može izgubiti. Ako je pitanje, "Koliko se može izgubiti?" postoji samo jedan odgovor:*

¹U ovome je radu za apsolutnu promjenu vrijednosti portfelja korišten termin dobit koji može označavati i gubitak ako je dobit negativna.

²Diskontirana obveznica je obveznica koja je izdana po nižoj cijeni od njene stvarne vrijednosti pri čemu razlika u cijeni i eventualni nedospjeli kupon predstavljaju kamatu.

cijeli portfelj. U portfelju od npr. 400 milijuna eura najviše što se može izgubiti je 400 milijuna eura.

U matematičkim terminima, $100\alpha\%$ h -dnevni VaR je iznos gubitka (u terminima sadašnje vrijednosti) koji bi bio premašen samo s malom vjerojatnošću α kada se portfelj drži statičnim tijekom sljedećih h dana. Dakle, kako bismo procijenili VaR u trenutku t , moramo pronaći α kvantil $x_{h,t,\alpha}$ distribucije diskontirane h -dnevne dobiti. To znači da moramo pronaći $x_{h,t,\alpha}$ takav da

$$\mathbb{P}(B_{h,t}P_{t+h} - P_t < x_{h,t,\alpha}) = \alpha \quad (1.2)$$

i postaviti $\text{VaR}_{h,t,\alpha} = -x_{h,t,\alpha}$. Pišemo $\text{VaR}_{h,t,\alpha}$ kada želimo naglasiti trenutak t u kojem se procjenjuje VaR. Međutim, u nastavku obično eksplicitno navodimo samo ovisnost mjere rizika o dvama osnovnim parametrima, tj. o h (vremenskom horizontu rizika) i α (razini značajnosti), te izostavljamo ovisnost o t .

Kada se VaR procjenjuje iz distribucije dobiti, izražava se u vrijednosnim (npr. dolarским) terminima. Međutim, često radije analiziramo distribuciju prinosa³ nego distribuciju dobiti. Dobit se mjeri u apsolutnim terminima pa na primjer gubitak od 10,000 dolara kada portfelj ima vrijednost od 1 milijun dolara ima sasvim drukčiji utjecaj nego gubitak od 10,000 dolara kada portfelj ima vrijednost od 10 milijuna dolara.

Međutim, ako se VaR procjenjuje iz distribucije povrata, izražava se kao postotak trenutne vrijednosti portfelja. Budući da je trenutna vrijednost portfelja poznata, možemo izraziti VaR kao postotak vrijednosti portfelja, a ako je potrebno, rezultat možemo pretvoriti u VaR izražen vrijednosnim terminom tako da ga pomnožimo s trenutnom vrijednošću portfelja.

Na kraju, ako definiramo diskontirani h -dnevni povrat portfelja kao slučajnu varijablu

$$X_{h,t} = \frac{B_{h,t}P_{t+h} - P_t}{P_t} \quad (1.3)$$

tada možemo pronaći α kvantil njegove distribucije ($x_{h,t,\alpha}$), to jest,

$$\mathbb{P}(X_{h,t} < x_{h,t,\alpha}) = \alpha \quad (1.4)$$

i naša procjena $100\alpha\%$ h -dnevnog VaR-a u trenutku t je:

$$\text{VaR}_{h,t,\alpha} = \begin{cases} -x_{h,t,\alpha}, & \text{kao postotak vrijednosti portfelja,} \\ -x_{h,t,\alpha}P_t, & \text{kada je izražen u vrijednosnim terminima.} \end{cases} \quad (1.5)$$

³U radu su korišteni termini prinos/povrat kada se govori o relativnoj promjeni vrijednosti portfelja.

1.2 Parametarska metoda za procjenu VaR-a

U parametarskoj se metodi VaR računa koristeći analitičke formule koje se temelje na pretpostavljenoj distribuciji povrata rizične imovine, kada je vrijednost portfelja linearna funkcija svojih temeljnih rizičnih faktora. Najčešća pretpostavka je da su povrati portfelja nezavisni i jednako distribuirani s normalnom razdiobom, međutim može se pretpostaviti i da prinosi imaju Studentovu t distribuciju, ili miješanu normalnu ili Studentovu t distribuciju. Ovdje će biti prezentiran samo slučaj kada su povrati normalno distribuirani, a više o parametarskoj metodi možete pročitati u [2].

Eksplicitna formula za računanje VaR-a

Pretpostavljamo da su diskontirani h -dnevni povrati portfelja nezavisni i jednako distribuirani te da imaju normalnu razdiobu. Radi jednostavnosti notacije, u ovom ćemo odjeljku pisati prinos kao X , izostavljajući ovisnost o vremenu i horizontu rizika. Dakle, pretpostavljamo

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (1.6)$$

uz dodatnu pretpostavku da su povrati međusobno nezavisni jednako distribuirani. Izvest ćemo formulu za x_α , α kvantil povrata, tj. povrat za koji vrijedi $\mathbb{P}(X < x_\alpha) = \alpha$. Tada je $100\alpha\%$ VaR, izražen kao postotak vrijednosti portfelja, negativna vrijednost tog α kvantila. Korištenjem transformacije standardne normalne varijable, imamo

$$\mathbb{P}(X < x_\alpha) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right), \quad (1.7)$$

gdje je $Z \sim N(0, 1)$. Dakle, ako $\mathbb{P}(X < x_\alpha) = \alpha$, tada

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha. \quad (1.8)$$

Ali po definiciji, $\mathbb{P}(Z < \Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$, pa je

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (1.9)$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne varijable. Ali $x_\alpha = -\text{VaR}_\alpha$ po definiciji, i $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ zbog simetrije standardne normalne distribucije. Zamjenjujući ovo u (1.9) dobivamo analitičku formulu za VaR za portfelj s nezavisnim jednako distribuiranim normalnim povratima, tj.

$$\text{VaR}_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma - \mu.$$

Ako želimo biti precizniji oko horizonta rizika naše procjene VaR-a, možemo napisati

$$\text{VaR}_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_h - \mu_h. \quad (1.10)$$

Ovo je jednostavna formula za 100 $\alpha\%$ h -dnevni VaR, kao postotak vrijednosti portfelja, kada su diskontirani prinosi portfelja nezavisni jednako distribuirani i normalni s očekivanjem μ_h i standardnom devijacijom σ_h .

Da bismo dobili VaR u vrijednosnim terminima, jednostavno množimo postotak VaR-a s trenutnom vrijednošću portfelja:

$$\text{VaR}_{h,t,\alpha} = (\Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_h - \mu_h)P_t, \quad (1.11)$$

gdje je P_t vrijednost portfelja u trenutku t kada se mjeri VaR.

Skaliranje VaR-a

Razmotrimo portfelj s (dugim ili kratkim) pozicijama n_1, n_2, \dots, n_k u k rizičnih imovina, tako da je n_i broj jedinica dugih ($n_i > 0$) ili kratkih ($n_i < 0$) pozicija u i -toj imovini, i označimo cijenu i -te imovine u trenutku t s $p_{i,t}$. Tada vrijednost pozicije u imovini i u trenutku t iznosi $n_i p_{i,t}$, a vrijednost portfelja u trenutku t je

$$P_t = \sum_{i=1}^k n_i p_{i,t}.$$

Možemo definirati udio portfelja u i -toj imovini u trenutku t kao

$$w_{i,t} = \frac{n_i p_{i,t}}{P_t}.$$

Čak i kada su pozicije konstantne, tj. portfelj nije rebalansiran, vrijednost pozicije u imovini i mijenja se kad god se cijena te imovine mijenja, a udio portfelja u svakoj imovini mijenja se kad god se cijena jedne od imovine mijenja. Dakle, kada pretpostavljamo da je portfelj statičan, znači li to da su pozicije u portfelju konstantne tijekom horizonta rizika ili da su udjeli portfelja konstantni tijekom horizonta rizika? Ne možemo pretpostaviti oboje. Umjesto toga, pretpostavljamo:

- nema rebalansiranja – pozicije u portfelju u svakoj imovini su konstantne, pa se svaki put kad se cijena imovine promijeni, mijenja vrijednost naše pozicije u toj imovini i stoga se mijenjaju svi udjeli portfelja; ili
- rebalansiranje na konstantne udjele – kako bi udjeli portfelja ostali konstantni, moramo rebalansirati sve pozicije svaki put kada se promijeni cijena samo jedne imovine.

Često se tržišni VaR mjeri tijekom kratkoročnog vremenskog horizonta, poput jednog dana, a zatim se skalira kako bi dobili VaR tijekom dužeg vremenskog horizonta.

Najpristupačniji način za skaliranje VaR-a temelji se na pretpostavci da su prinosi nezavisni i jednako distribuirani te normalni, te da se portfelj rebalansira dnevno kako bi udjeli portfelja ostali konstantni.

Pretpostavimo da mjerimo jednodnevni VaR i da je dnevni prinos nezavisan i jednako distribuiran te normalan. Po formuli (1.10) slijedi da je 1-dnevni VaR dan s

$$\text{VaR}_{1,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sigma_1 - \mu_1 \quad (1.12)$$

gdje su μ_1 i σ_1 očekivanje i standardna devijacija normalno distribuiranih dnevnih prinosa.

Koristimo logaritamsku aproksimaciju za dnevni diskontirani prinos, tj.

$$X_{i,t} = \frac{B_{i,t}P_{t+i} - B_{i-1,t}P_{t+i-1}}{B_{i-1,t}P_{t+i-1}} \approx \ln\left(\frac{B_{i,t}P_{t+i}}{B_{i-1,t}P_{t+i-1}}\right),$$

gdje P_t označava cijenu portfelja u trenutku t .⁴ Budući da smo pretpostavili da su povrati nezavisni, jednako distribuirani i normalni, to vrijedi i za logaritamsku aproksimaciju dnevnog diskontiranog prinosa. Nadalje, imamo

$$\ln\left(\frac{B_{1,t}P_{t+1}}{P_t}\right) + \ln\left(\frac{B_{2,t}P_{t+2}}{B_{1,t}P_{t+1}}\right) + \dots + \ln\left(\frac{B_{h,t}P_{t+h}}{B_{h-1,t}P_{t+h-1}}\right) = \ln\left(\frac{B_{h,t}P_{t+h}}{P_t}\right) \approx \frac{B_{h,t}P_{t+h} - P_t}{P_t}$$

Budući da je zbroj nezavisnih normalnih slučajnih varijabli ponovno normalna varijabla, h -dnevni diskontirani logaritamski prinosi su normalno distribuirani s očekivanjem $\mu_h = h\mu_1$ i standardnom devijacijom $\sigma_h = \sqrt{h}\sigma_1$ pa je i običan h -dnevni prinos (približno) normalno distribuiran. Tada je h -dnevni VaR dan aproksimacijom

$$\text{VaR}_{h,\alpha} \approx \Phi^{-1}(1 - \alpha)\sqrt{h}\sigma_1 - h\mu_1. \quad (1.13)$$

Ova aproksimacija je razumno dobra kada je h mali, ali kako h raste, aproksimacija h -dnevnog logaritamskog prinosa s običnim h -dnevnim prinosom postaje dosta netočna.

Međutim u većini vremenskih nizova povrata pretpostavka da su povrati nezavisni ne vrijedi. Izvedimo sada formulu za skaliranje VaR-a pod pretpostavkom da dnevni logaritamski povrati r_t nisu nezavisni i identično distribuirani, već slijede približno autoregresivni proces prvog reda gdje je ϕ autokorelacija, tj. $r_{ht} = \phi r_{h-1,t}$.

⁴Ova aproksimacija vrijedi zbog poznate činjenice da je $\ln(1 + x) \approx x$ za male x -eve pri čemu stavimo

$$x = \frac{B_{i,t}P_{t+i} - B_{i-1,t}P_{t+i-1}}{B_{i-1,t}P_{t+i-1}}$$

Napišimo h -dnevni logaritamski prinos kao zbroj h uzastopnih jednodnevnih logaritamskih prinosa:

$$r_{ht} = \sum_{i=0}^{h-1} r_{t+i}.$$

Pretpostavljamo da su logaritamski prinosi jednako distribuirani, iako nisu nezavisni, pa možemo zapisati $\mu = \mathbb{E}(r_{t+i})$ i $\sigma^2 = V(r_{t+i})$ za sve i . Autokorelacija ne utječe na skaliranje očekivanog h -dnevnog logaritamskog prinosa, budući da je $\mathbb{E}(r_{ht}) = \sum_{i=0}^{h-1} \mathbb{E}(r_{t+i}) = h\mu$. Dakle, očekivani h -dnevni logaritamski prinos isti je kao i kada su prinosi nezavisni jednako distribuirani.

Međutim, autokorelacija utječe na skaliranje standardne devijacije. Varijanca h -periodnog logaritamskog prinosa je

$$V(r_{ht}) = \sum_{i=0}^{h-1} V(r_{t+i}) + 2 \sum_{i \neq j} \text{Cov}(r_{t+i}, r_{t+j}) = \sigma^2 \left[h + 2 \sum_{i=1}^{h-1} (h-i)\phi^i \right]$$

gdje druga jednakost slijedi iz

$$\text{Cov}(r_{t+i}, r_{t+j}) = \text{Cov}(r_{t+i}, r_{t+i+a}) = \text{Cov}(r_{t+i}, \phi^a r_{t+i}) = \phi^a \text{Cov}(r_{t+i}, r_{t+i}) = \phi^a \sigma^2.$$

Sada koristimo identitet

$$\sum_{i=1}^n (n-i+1)x^i = \frac{x}{(1-x)^2} [n(1-x) - x(1-x^n)], \quad |x| < 1.^5 \quad (1.14)$$

Postavljanjem $x = \phi$ i $n = h-1$ u (1.14) dobivamo

$$V(r_{ht}) = \sigma^2 \left(h + 2 \frac{\phi}{(1-\phi)^2} [(h-1)(1-\phi) - \phi(1-\phi^{h-1})] \right). \quad (1.15)$$

To pokazuje da kada su povrati autokorelirani s koeficijentom autokorelacije prvog reda ϕ , tada faktor skaliranja za standardnu devijaciju nije \sqrt{h} već $\sqrt{\tilde{h}}$, gdje je

$$\tilde{h} = h + 2 \frac{\phi}{(1-\phi)^2} [(h-1)(1-\phi) - \phi(1-\phi^{h-1})]. \quad (1.16)$$

Dakle, trebali bismo skalirati normalni linearni VaR kao

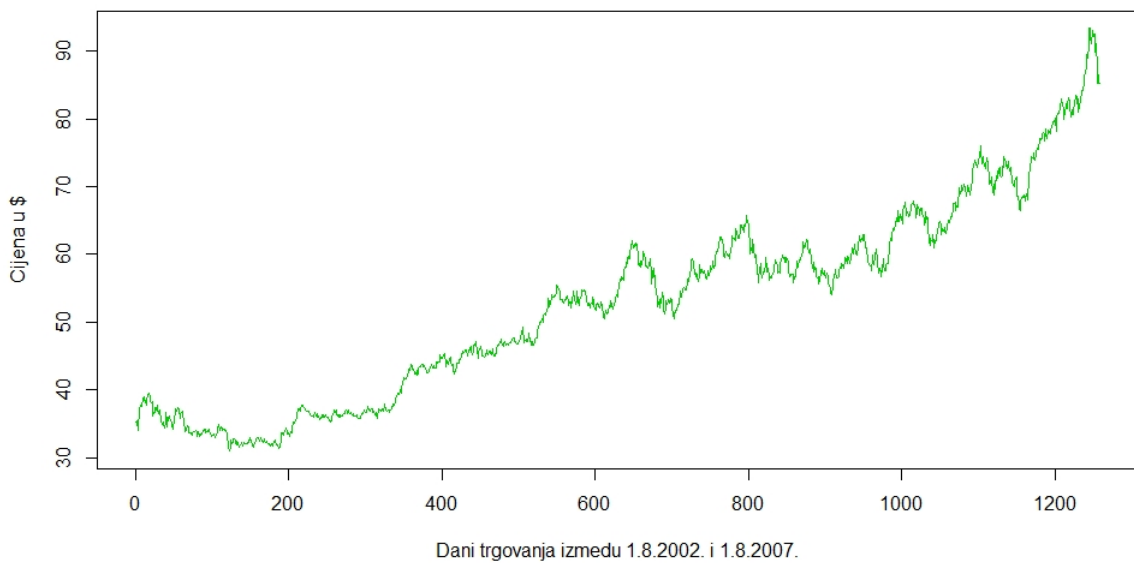
$$\text{VaR}_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\tilde{h}}\sigma_1 - h\mu_1. \quad (1.17)$$

⁵Dokaz ovog identiteta nalazi se u Dodatku 1

1.3 Primjer računanja VaR-a parametarskom metodom

Pogledajmo sada dionice tvrtke Chevron Corporation, američke multinacionalne kompanije koja je specijalizirana za proizvodnju i prodaju nafte i plina. Dionica Chevron Corporation-a je uvrštena u indeks S&P500 pod oznakom CVX, a mi ćemo gledati podatke od 1.8.2002. do 1.8.2007. i to samo u danima u kojima se trgovalo.⁶

Na Slici 1.1 prikazano je kretanje cijena dionice u tom razdoblju.

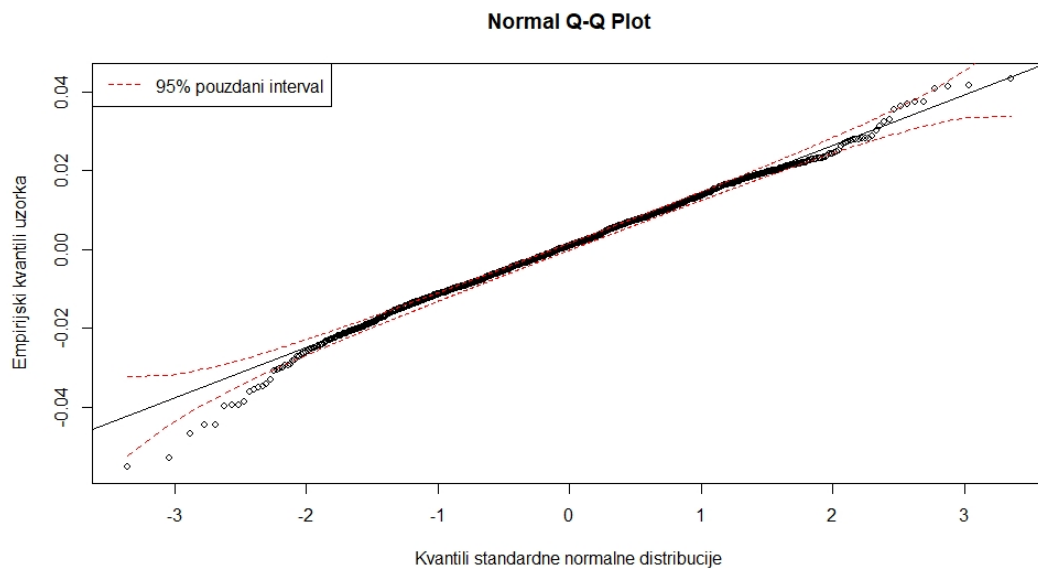


Slika 1.1: Cijena dionice Chevron Corporationa između 1.8.2002. i 1.8.2007.

Računamo jednodnevne povrate po formuli $X_{1,t} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$ ⁷ gdje za cijene P_t uzimamo *Close* cijenu dionice svakog dana. Na Slici 1.2 prikazan je normalni vjerojatnosni graf izračunatih povrata, a kada testiramo normalnost povrata Lillieforsovim i Anderson-Darlingovim testom normalnosti dobijemo p -vrijednost 0.1243, odnosno 0.02673. Iako su p -vrijednosti relativno male, na temelju normalnog vjerojatnosnog grafa nećemo odbaciti pretpostavku da dnevni povrati dolaze iz normalne distribucije.

⁶Iako je ovaj rad pisan 2024. godine, ovi podaci uzeti su iz razloga jer su normalno distribuirani u petogodišnjem periodu.

⁷Primjetite kako ovdje, u odnosu na formulu (1.3), nismo diskontirali buduću cijenu jer gledamo samo jedan dan unaprijed pa to nije potrebno.

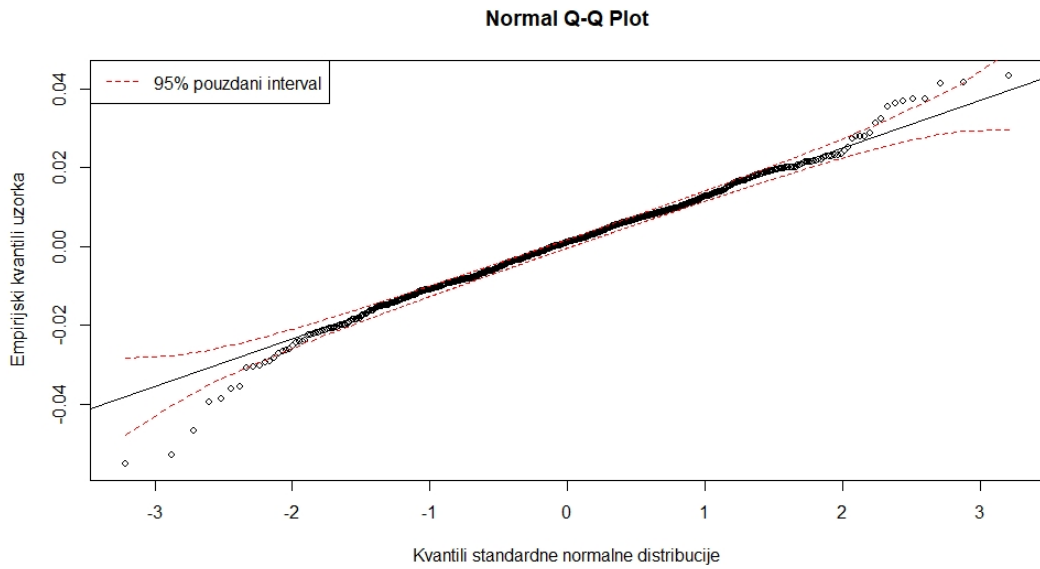


Slika 1.2: Normalni vjerojatnosni graf povrata između 1.8.2002. i 1.8.2007.

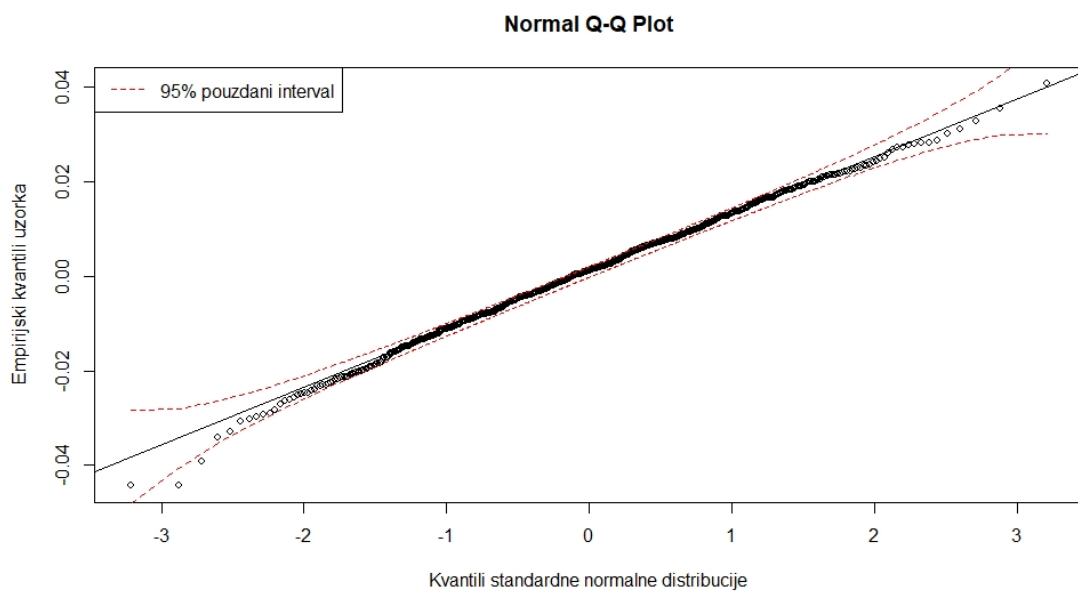
Na identičan način se uviđa da su dnevni povrati u periodima 1.8.2002.-1.8.2005. te 1.8.2003-1.8.2006. također normalno distribuirani pri čemu su p -vrijednosti Lillieforsovog i Anderson-Darlingovog testa normalnosti 0.09516 i 0.01034 za period 1.8.2002.-1.8.2005., te 0.4025 i 0.3827 za period 1.8.2003.-1.8.2006. Normalni vjerojatnosni grafovi za ova dva perioda nalaze se na Slikama 1.3 i 1.4.

Također, Slika 1.5 sugerira da nema autokorelacije nikojeg reda pa možemo pretpostaviti da su podaci nezavisni.⁸ Dakle, naši povrati su nezavisni i normalno distribuirani pa možemo koristiti eksplicitnu metodu za računanje VaR-a danu formulom (1.10).

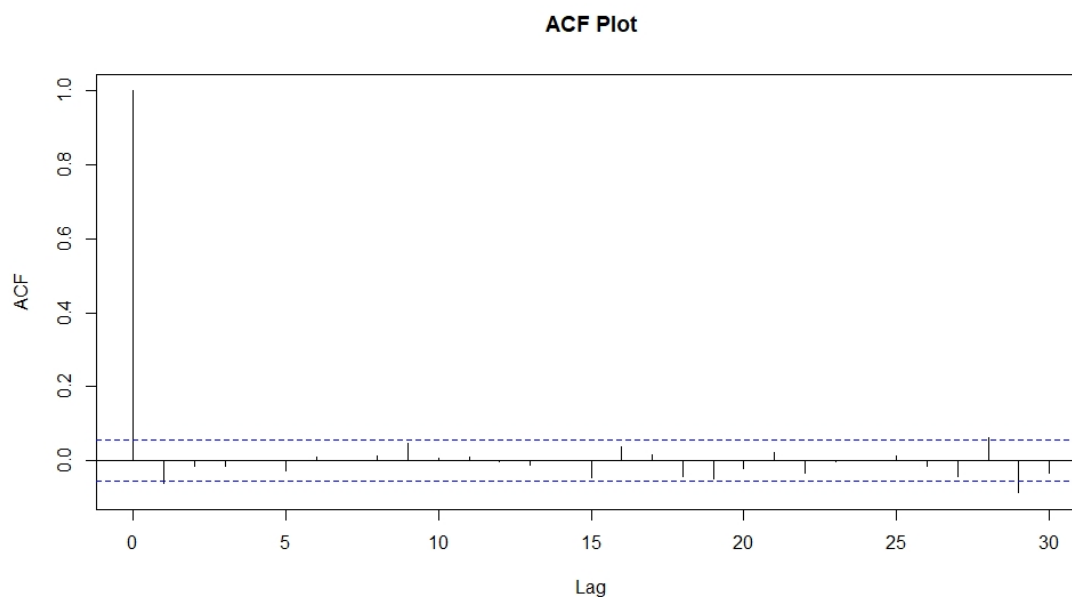
⁸Iz normalnog vjerojatnosnog grafa smo pretpostavili da su dnevni povrati normalno distribuirani pa nekoreliranost povlači nezavisnost.



Slika 1.3: Normalni vjerojatnosni graf povrata između 1.8.2002. i 1.8.2005.



Slika 1.4: Normalni vjerojatnosni graf povrata između 1.8.2003. i 1.8.2006.

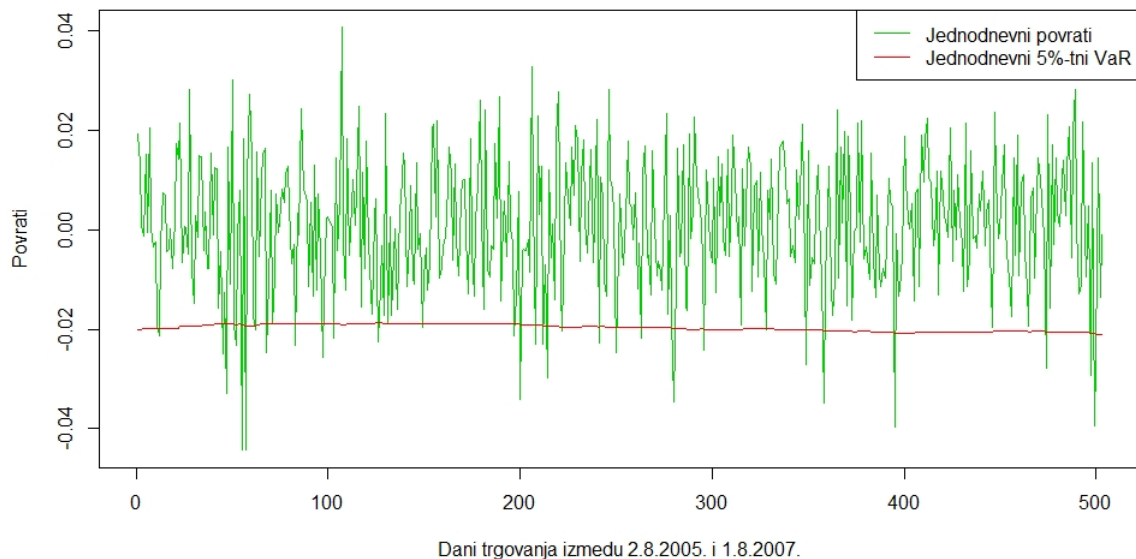


Slika 1.5: ACF graf povrata između 1.8.2002. i 1.8.2007.

Izračunajmo sada jednodnevne 5%-tne VaR-ove za period 2.8.2005.-1.8.2007. i usporedimo ih sa stvarnim podacima. VaR računamo za svaki dan između 1.8.2005. i 31.7.2007. po formuli (1.10) pri čemu μ_1 i σ_1 procjenjujemo iz podataka u protekle tri godine za svaki datum posebno.⁹ To radimo uz pretpostavku da je za svaki datum između 1.8.2005. i 31.7.2007. povrat u prethodne tri godine normalno distribuiran, a koju temeljimo na činjenici da smo pokazali normalnu distribuiranost povrata u periodima 1.8.2002.-1.8.2005. i 1.8.2003.-1.8.2006. pa pretpostavljamo da su za svaki datum između 1.8.2005. i 31.7.2007. povrati u posljednje tri godine normalno distribuirani. Rezultati su dani Slikom 1.6.

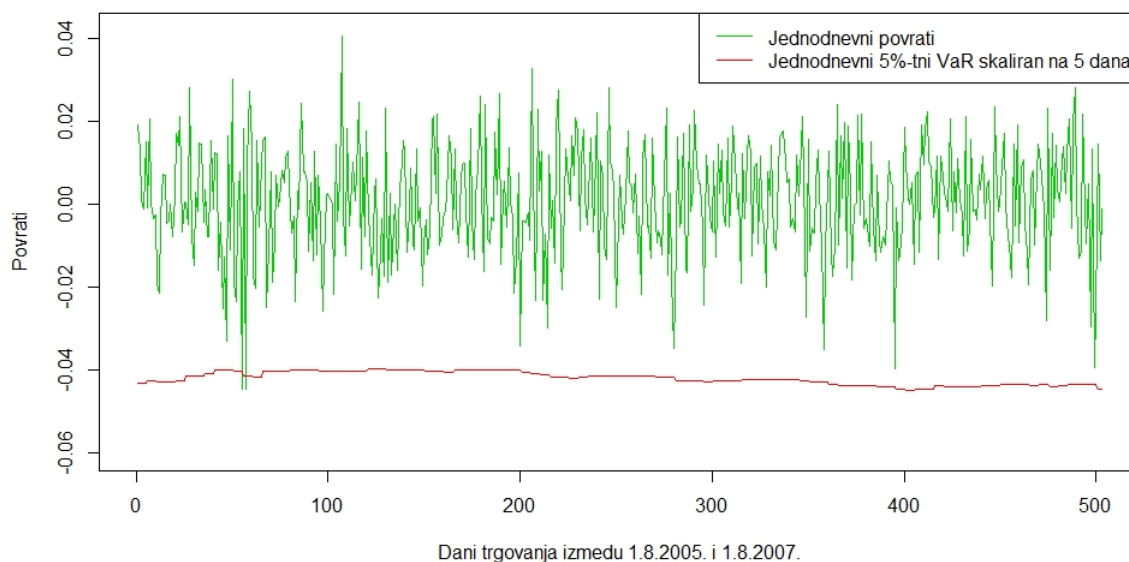
U teoriji VaR ne bi trebali premašiti više od 5% puta, tj. budući da ima 503 dana u kojima se trgovalo, VaR bi trebali premašiti najviše 25 puta. Eksplicitno računajući koliko je puta povrat bio manji od jednodnevnog VaR-a dobivamo da smo VaR premašili 33 puta. VaR smo premašili više puta od očekivanog, a razlog bi mogla biti činjenica da smo na temelju relativno malih p -vrijednosti zaključivali da su podaci normalno distribuirani i koristili eksplicitnu formulu za računanje VaR-a koja vrijedi za tu pretpostavku.

⁹Očekivanje procjenjujemo aritmetičkom sredinom, a standardnu devijaciju uzoračkom standardnom devijacijom.



Slika 1.6: Povrati i jednodnevni 5%-tni VaR u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

Skalirajmo sada jednodnevni 5%-tni VaR na petodnevni 5%-tni VaR, a budući da su podaci nezavisni, skaliranje možemo provesti na jednostavan način koristeći formulu (1.13). Slika 1.7 prikazuje dobivene rezultate. Vidimo da je 5%-tni petodnevni skalirani VaR dosta konzervativniji nego što bi trebao biti, te naši povrati premašuju VaR samo u 2 slučaja, umjesto u 25 slučajeva. Razlog vjerojatno leži u činjenici da je skaliranje samo aproksimacija koja je dobra kad je h relativno mali kao i u činjenici relativno slabe pretpostavke o normalnosti povrata.



Slika 1.7: Povrati i jednodnevni 5%-tni VaR skaliran na petodnevni u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

1.4 Povijesna metoda za računanje VaR-a

Povijesna metoda za procjenu VaR-a uvedena je u nizu radova 1998. i 1999. godine. Nedavna anketa sugerira da oko tri četvrtine banaka preferira povijesnu metodu umjesto parametarskih ili Monte Carlo VaR metoda. Glavna prednost je da povijesna metoda ne treba pretpostavke na oblik distribucije povrata na imovinu.

Definicija

$100\alpha\%$ h -dnevni povijesni VaR, izražen u vrijednosnim terminima, je α kvantil empirijske h -dnevne diskontirane distribucije dobiti. Ili, kada je VaR izražen kao postotak vrijednosti portfelja, $100\alpha\%$ h -dnevni povijesni VaR je α kvantil empirijske h -dnevne diskontirane distribucije povrata.

Ako procjene VaR-a trebaju odražavati samo trenutne tržišne uvjete, a ne prosjek tijekom dugog povijesnog razdoblja, čini se prirodnim koristiti samo najnovije podatke. Na primjer, ako su se tržišta ponašala neobično tijekom protekle godine, možemo razmotriti

korištenje samo podataka iz posljednjih 12 mjeseci. Budući da su procjene VaR-a na razinama pouzdanosti od 99% i višim učestale, važno je koristiti veliki broj povijesnih povrata. Za procjenu VaR-a na razini od 1%, trebalo bi koristiti najmanje 2000 povrata, kako bi u 1%-tnom repu bilo barem 20 podataka. Odabir veličine uzorka povezan je s odabirom frekvencije podataka. Na primjer, za uzorak od 500 povrata, trebamo uzorak od 20 godina ako koristimo 10-dnevne povrate, uzorak od 10 godina ako koristimo tjedne povrate, ili uzorak od 2 godine ako koristimo dnevne povrate. Budući da će korištenje dugog povijesnog razdoblja teško odražavati trenutne okolnosti, nije prikladno temeljiti povijesni VaR model na tjednim ili mjesečnim podacima. Stoga, gotovo uvijek temeljimo procjenu povijesnog VaR-a na distribuciji dnevnih prinosa portfelja i zatim skaliramo procjenu jednodnevnog VaR-a na horizont od h dana.

Skaliranje povijesnog VaR-a

Prvo uvodimo pojam stabilne i ξ -stabilne distribucije.

Slučajna varijabla X ima stabilnu distribuciju ako je suma N nezavisnih slučajnih varijabli X s istom distribucijom ponovno slučajna varijabla s istom vrstom distribucije. Na primjer, normalna distribucija je stabilna jer je zbroj N nezavisnih jednakodistribuiranih normalnih varijabli ponovno normalna varijabla.

Slučajna varijabla X s očekivanjem nula¹⁰ ima ξ -stabilnu distribuciju ako

$$\sum_{i=1}^h X_i \stackrel{d}{=} h^{1/\xi} X \quad \text{za } \xi \in (0, 2], \quad (1.18)$$

gdje su X_1, \dots, X_h nezavisne slučajne varijable s istom distribucijom kao i X . [1] Može se pokazati da je normalna distribucija stabilna s parametrom $\xi = 2$.

Kada je distribucija ξ -stabilna, cijela distribucija, uključujući i kvantile, skalira se s $h^{1/\xi}$.

Neka $k_{h,\alpha}$ označava α kvantil h -dnevnih diskontiranih log povrata.¹¹ Tražimo ξ takav da

$$k_{h,\alpha} = h^{1/\xi} k_{1,\alpha}. \quad (1.19)$$

Drugim riječima, uzimajući logaritme gore navedene jednadžbe,

$$\xi = \frac{\ln(h)}{\ln(k_{h,\alpha}) - \ln(k_{1,\alpha})}. \quad (1.20)$$

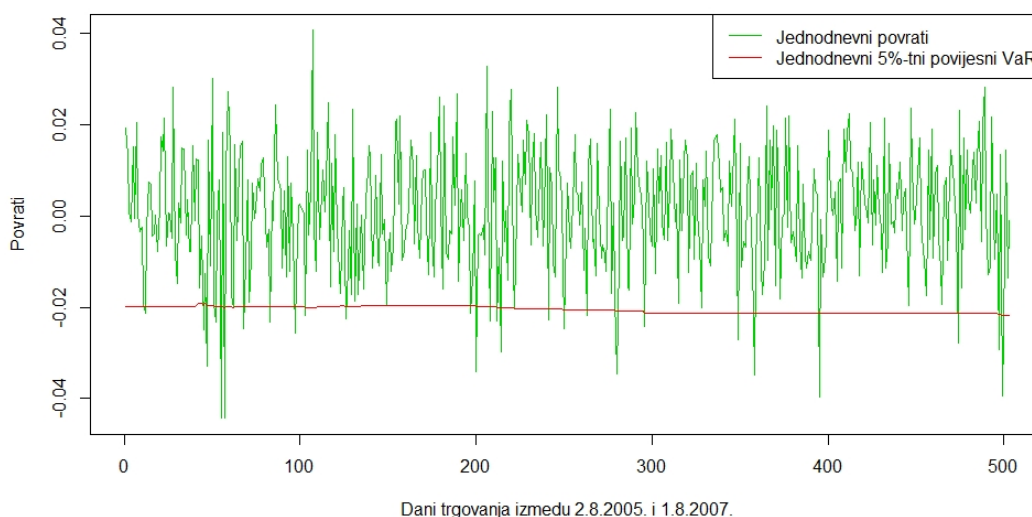
¹⁰Pretpostavka da varijabla X ima očekivanje nula nije ograničenje definicije, jer ju možemo centrirati, tj. možemo oduzeti očekivanje μ od X .

¹¹Uzimamo log povrate jer je zbroj 1-dnevnih log povrata upravo h -dnevni log povrat, što ne vrijedi za obične povrate.

Dakle, ξ se može procijeniti kao nagib grafa s $\ln(k_{h,\alpha}) - \ln(k_{1,\alpha})$ na horizontalnoj osi i $\ln(h)$ na vertikalnoj osi. Ako je distribucija stabilna, graf će biti pravocrtan i ξ neće ovisiti o izboru α . Također, ne bi trebao značajno varirati kada se koriste različiti uzorci, pod uvjetom da uzorak sadrži dovoljno podataka za točno procjenjivanje kvantila.

1.5 Primjer računanja VaR-a povijesnom metodom

Izračunajmo jednodnevne 5%-tne VaR-ove povijesnom metodom za dionicu Chevron Corporation-a za period 2.8.2005.-1.8.2007. i usporedimo ih sa stvarnim podacima. VaR računamo za svaki dan između 1.8.2005. i 31.7.2007. tako da tražimo 5%-tni kvantil povrata u zadnje tri godine.¹² Rezultat je dan Slikom 1.8. Budući da postoje 503 povrata u

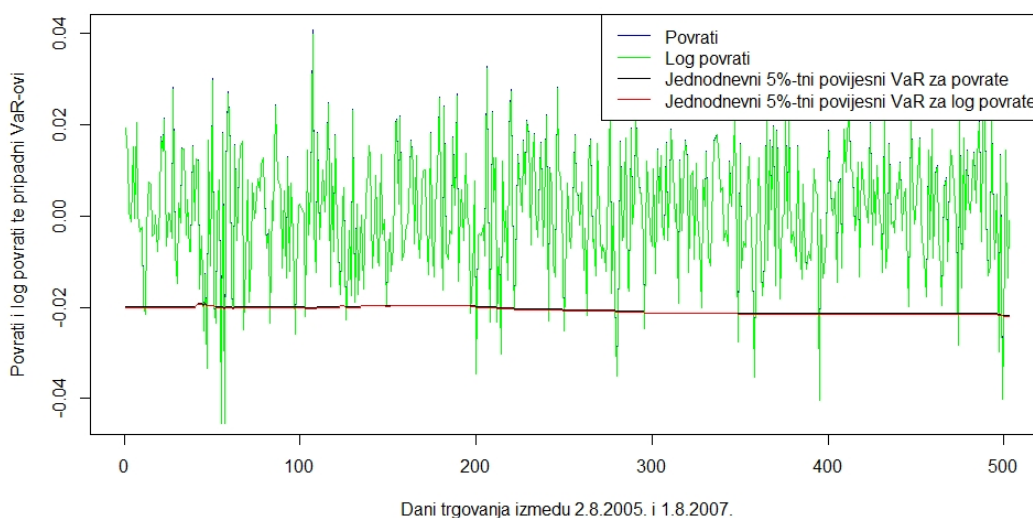


Slika 1.8: Povrati i jednodnevni 5%-tni VaR u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

tom periodu, VaR bi trebali premašiti oko 25 puta, a ovom ga metodom premašujemo 29 puta što je u skladu s teorijom.

Budući da nam za skaliranje VaR-a povijesnom metodom trebaju log povrati, izračunat je i VaR za log povrate, a na Slici 1.9 možemo vidjeti usporedbu normalnih i log povrata, te pripadnih 5%-tnih VaR-ova. Možemo vidjeti kako su povrati skoro identični log povratima te pripadni VaR-ovi također što i odgovara našoj pretpostavci budući da je $\ln(1+x) \approx x$ za male x -eve.

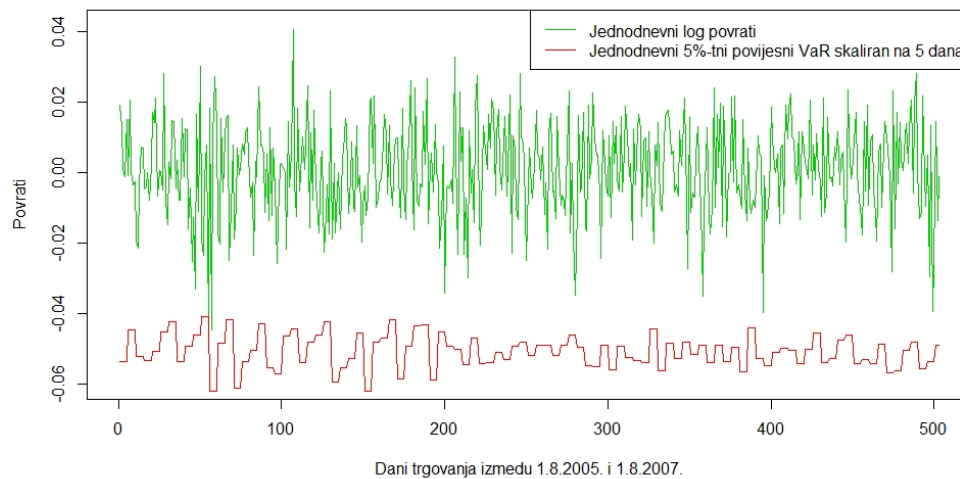
¹²Na primjer, 1.8.2006. gledamo podatke od 1.8.2003. do 1.8.2006. i procjenjujemo VaR za dan 2.8.2006.



Slika 1.9: Usporedba povrata i log povrata te pripadnih VaR-ova u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

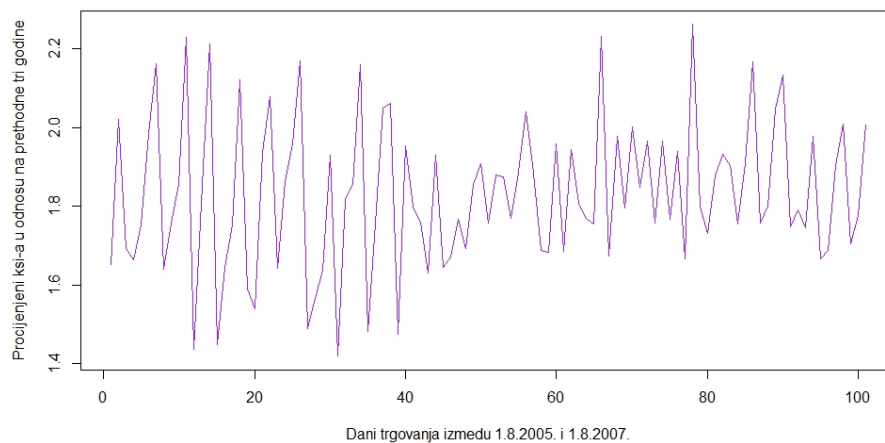
Kako bi mogli skalirati jednodnevni VaR pretpostavljamo da je distribucija log povrata ξ -stabilna¹³ te računamo h -dnevne log povrate i ξ . Budući da se radi o log povratima h dnevni log povrat dobijemo jednostavno zbrajanjem h jednodnevnih log povrata, a ξ je procijenjen tako da se za $h = 2 : 20$ računa $\log(k_h/k_1)$ (koji se stavlja na x -os) i $\log(h)$ (koji se stavlja na y -os) te se onda linearnom regresijom procjenjuje nagib pravca koji prolazi kroz te točke. Također ξ računamo svaki dan u periodu 1.8.2005.-1.8.2007. na temelju prethodnih 3 godine podataka o log povratima, a jednodnevni 5%-tni VaR se skalira na petodnevni po formuli (1.19). Rezultati su prikazani Slikom 1.10.

¹³Pretpostavka ξ -stabilnosti log povrata je opravdana činjenicom da smo pri računanju VaR-a parametarskom metodom pretpostavili normalnu distribuciju povrata (pa tako i log povrata budući da su skoro identični), a normalna distribucija je 2-stabilna.



Slika 1.10: Log povrati i jednodnevni 5%-tni VaR skaliran na petodnevni u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

Dobili smo dosta lošu procjenu 5%-tnog petodavnog VaR-a gdje nam stvarni log povrati prelaze VaR samo jedanput u 503 dana što je daleko od 5%. Jedan od razloga bi mogao biti što u nekim danima procjena za parametar stabilnosti ξ prelazi 2, Slika 1.11, a ξ -stabilna distribucija je definirana samo za $\xi \in (0, 2]$, pa naša distribucija možda nije ξ -stabilna.



Slika 1.11: ξ u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

1.6 Monte Carlo metoda za računanje VaR-a

Monte Carlo simulacija je metoda procjenjivanja VaR-a u kojoj korisnik razvija svoje pretpostavke o statističkim karakteristikama distribucije povrata i koristi te karakteristike za generiranje nasumičnih ishoda koji predstavljaju hipotetske povrate portfelja sa specificiranim karakteristikama.

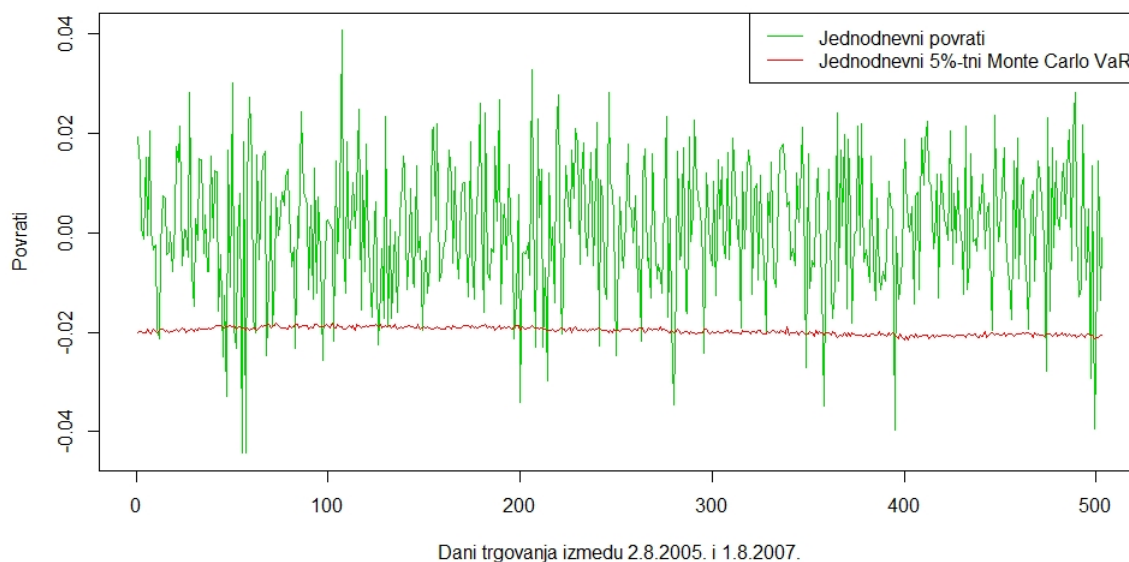
Proces je potpuno analogan procjeni VaR-a pomoću povijesne simulacije, samo što sada koristimo Monte Carlo simulacije umjesto povijesnih simulacija. To jest, simuliramo pretpostavljenu distribuciju za h -dnevne povrate portfelja, ili za njegovu h -dnevnu dobit, i 100% h -dnevna VaR procjena se empirijski procjenjuje kao -1 puta α kvantil te distribucije.

Jasno je da su normalni parametarski VaR i normalni Monte Carlo VaR modeli vrlo slični jer imaju identične pretpostavke o distribuciji povrata. Jedina razlika između ta dva modela je u tome što se povrati u Monte Carlo VaR modelu simuliraju, dok se u normalnom parametarskom VaR modelu dobivaju analitički. Tako je normalni parametarski VaR precizan, premda temeljen na pretpostavci koja je malo vjerojatna, dok je normalna Monte Carlo VaR procjena podložna pogrešci pri simulaciji. Dakle, normalna Monte Carlo VaR procjena trebala bi biti slična normalnoj parametarskoj VaR procjeni. Ako je različita, to može biti samo zato što je korišten nedovoljan broj simulacija. Ipak, postoji dobar razlog za primjenu Monte Carlo VaR-a na linearni portfelj, a to je da se Monte Carlo VaR može temeljiti na gotovo bilo kojoj distribuciji povrata, dok egzaktna rješenja za parametarski linearni VaR postoje samo kod nekoliko odabranih distribucija.

1.7 Primjer računanja VaR-a Monte Carlo metodom

Izračunajmo jednodnevne 5%-tne VaR-ove za dionicu Chevron Corporation-a u periodu 2.8.2005.-1.8.2007. i usporedimo ih sa stvarnim podacima. Budući da smo u prethodnim poglavljima radili s pretpostavkom da su dani povrati normalni, tu pretpostavku koristimo i dalje. Dakle u ovom primjeru je Monte Carlo VaR kombinacija parametarskog i povijesnog VaR-a budući da prvo pretpostavljamo da nam povrati dolaze iz normalne distribucije, simuliramo te povrate, te nakon toga tražimo 5%-tni kvantil simuliranih povrata. Kao i pri računanju parametarskog VaR-a, μ_1 i σ_1 (parametre normalne distribucije iz koje procjenjujemo da nam dolaze povrati) procjenjujemo iz podataka u protekle tri godine za svaki datum posebno.¹⁴ Rezultati su dani Slikom 1.12. 5%-tni VaR bi trebali premašiti 5% puta, tj. budući da ima 503 dana u kojima se trgovalo, povrati bi trebali biti oko 25 puta ispod VaR-a. Eksplicitno računajući koliko je puta povrat bio manji od jednodnevnog VaR-a dobivamo da smo VaR premašili 33 puta. VaR smo premašili više puta od očekivanog, a razlog bi, kao i u parametarskom modelu, mogla biti činjenica da smo na temelju relativno

¹⁴Kao i prije, očekivanje procjenjujemo aritmetičkom sredinom, a standardnu devijaciju uzoračkom standardnom devijacijom.



Slika 1.12: Povrati i jednodnevni 5%-tni MC VaR u periodu 2.8.2005.-1.8.2007.

malih p -vrijednosti zaključivali da su podaci normalno distribuirani, a pretpostavljali smo da nam povrati dolaze iz normalne distribucije.

1.8 Uvjetni VaR: Očekivani gubitak u repu

VaR definira razinu gubitka za koju smo relativno sigurni da neće biti premašena. No, VaR nam ne govori ništa o veličini gubitaka koji bi mogli pretrpjeti u slučaju da VaR bude premašen. Međutim, iz uvjetnog VaR-a dobivamo informacije o prosječnoj razini gubitka, pod uvjetom da je VaR premašen.

100 α % h -dnevni očekivani gubitak u repu (*Expected Tail Loss*) definira se kao:

$$ETL_{h,\alpha} = -\mathbb{E}(X_h | X_h < -VaR_{h,\alpha}) \cdot P \quad (1.21)$$

gdje X_h označava diskontirani h -dnevni povrat na portfelj, $VaR_{h,\alpha}$ je 100 α % h -dnevni VaR izražen kao postotak vrijednosti portfelja, a P je trenutna vrijednost portfelja.

Razlika između VaR-a i ETL-a (očekivanog gubitka u repu) može se ilustrirati razmatranjem 1000 povrata na portfelj:

- 1% VaR je 10. najveći apsolutni gubitak;

- 1% ETL je prosjek 10 najvećih apsolutnih gubitaka.

Primjer 1.8.1. Izračunajmo 1%-tni dnevni VaR i ETL za dionicu Chevron Corporation-a na dan 1.8.2007. povijesnom metodom. Koristit ćemo podatke od 1.8.2002. do 1.8.2007., a u tom vremenu imamo podatke o 1258 povrata. 1%-tni kvantil tih povrata je od -3.457%, a 1%-tni dnevni VaR je minus taj povrat pomnožen s trenutnom vrijednošću portfelja. Budući da se radi o periodu od jednog dana, kao i u prethodnima primjerima povrat ne diskontiramo. Uz pretpostavku da imamo uloženo milijun dolara u dionicu Chevron Corporationa naš 1%-tni jednodnevni VaR je

$$\text{VaR}_{1,0.01} = 3.457\% \times \$1,000,000 = \$34,570.$$

To nam govori da smo 99% sigurni da nećemo izgubiti više od \$34,570 između 1. i 2. kolovoza 2007.

ETL je prosjek 1% najvećih negativnih povrata ponovno pomnožen s -1 i trenutnom vrijednošću portfelja (ignorirajući diskontiranje kao i prije). Budući da je prosjek 1% najvećih negativnih povrata -4.164%, imamo

$$\text{ETL}_{1,0.01} = 0.04164 \times \$1,000,000 = \$41,640.$$

To nam govori da, ako premašimo VaR, što očekujemo s vjerojatnošću od 1%, u prosjeku bismo izgubili \$41,640.

Poglavlje 2

Bayesovska metoda procjene VaR-a

U ovom poglavlju uvodimo Bayesovski pristup računanju VaR-a. Jedna od glavnih prednosti Bayesovskog pristupa jest to što Bayesovska metodologija omogućuje korištenje korisnih prethodnih informacija te zato vjerujemo kako će nam ovaj pristup omogućiti preciznije izračune VaR-a. Ovo poglavlje prati [7] i [6].

2.1 Bayesovski model povrata portfelja

Neka je x_t k -dimenzionalni vektor povrata u trenutku t i neka $x_{(t-1)} = (x_{t-n}, \dots, x_{t-1})$ označava matricu povrata x_{t-n}, \dots, x_{t-1} zabilježenih između trenutaka $t - n$ i $t - 1$ čija distribucija ovisi o vektorskom parametru θ . Vektor težina portfelja označavamo s w i on određuje koliko investitor posjeduje svake imovine te pretpostavljamo da vrijedi $1_k^T w = 1$ pri čemu 1_k označava k -dimenzionalni vektor jedinica. Povrat portfelja s težinama w u trenutku t tada je dan s

$$X_{P,t} = w^T x_t. \quad (2.1)$$

Iz Bayesovske perspektive, aposteriori prediktivna distribucija od $X_{P,t}$, tj. uvjetna distribucija od $X_{P,t}$ uz dano $x_{(t-1)}$, računa se kao (vidi str. 244 u [5])

$$f(x_{P,t} | x_{(t-1)}) = \int_{\theta \in \Theta} f(x_{P,t} | \theta) \pi(\theta | x_{(t-1)}) d\theta \quad (2.2)$$

gdje Θ označava parametarski prostor, $f(\cdot | \theta)$ je uvjetna gustoća od $X_{P,t}$ uz dano θ , a $\pi(\theta | x_{(t-1)})$ predstavlja aposteriori distribuciju θ s obzirom na $x_{(t-1)}$. Aposteriori prediktivna distribucija (2.2) određuje distribuciju budućeg povrata portfelja u trenutku t , s obzirom na informacije o povratima imovine dostupne do trenutka $t - 1$.

Pretpostavimo da su povrati x_i , $i \in \{t-n, \dots, t\}$, višedimenzionalno normalno distribuirani i nezavisni uvjetno na vektor očekivanja μ i kovarijacijsku matricu Σ . Konjugirana apriori distribucija tada je dana s ¹:

$$\mu \mid \Sigma \sim N_k\left(m_0, \frac{1}{r_0}\Sigma\right) \quad \text{i} \quad \Sigma \sim IW_k(d_0, S_0), \quad (2.3)$$

gdje su m_0 , r_0 , S_0 i d_0 hiperparametri, $N_k\left(m_0, \frac{1}{r_0}\Sigma\right)$ označava višedimenzionalnu normalnu razdiobu s vektorom očekivanja m_0 i kovarijacijskom matricom $\frac{1}{r_0}\Sigma$, a $IW_k(d_0, S_0)$ označava inverznu Wishartovu distribuciju s d_0 stupnjeva slobode i parametarskom matricom S_0 . ² Hiperparametri m_0 i S_0 odražavaju investitorovu pretpostavku o vektoru očekivanja i kovarijacijskoj matrici, dok r_0 i d_0 označavaju preciznost tih pretpostavki.

Neka $t(q, a, b^2)$ označava generaliziranu t -distribuciju s q stupnjeva slobode, lokacijskim parametrom a i parametrom skaliranja b .³ Tada dobivamo sljedeći rezultat.

Propozicija 2.1.1. *Neka su povrati X_1, X_2, \dots uvjetno nezavisni i jednako distribuirani te vrijedi $X_i \mid \mu, \Sigma \sim N_k(\mu, \Sigma)$. Tada koristeći konjugiranu apriori distribuciju (2.3) za $d_{k,n} = n + d_0 - 2k > 0$, aposteriori prediktivna distribucija (2.2) ima $t(d_{k,n}, w^\top \bar{x}_{t-1}, r_{k,n} w^\top S_{t-1} w)$ razdiobu pri čemu je*

$$r_{k,n} = \frac{n + r_0 + 1}{(n + r_0)(n + d_0 - 2k)}, \quad \bar{x}_{t-1} = \frac{n\bar{x} + r_0 m_0}{n + r_0}$$

$$i \quad S_{t-1} = \sum_{i=t-n}^{t-1} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top + S_0 + nr_0 \frac{(m_0 - \bar{x}_{t-1})(m_0 - \bar{x}_{t-1})^\top}{n + r_0}$$

gdje je $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t-1} x_i$ aritmetička sredina uzorka povrata.

Skica dokaza nalazi se u Dodatku 4.

Neka $\hat{X}_{P,t}$ označava slučajnu varijablu koja slijedi aposteriori distribuciju (2.2), tj. čija distribucija odgovara uvjetnoj distribuciji prinosa portfelja $X_{P,t}$ s obzirom na informacije dostupne do vremena $t-1$. Primjenom Propozicije 2.1.1. dobivamo:

¹U Dodatku 2 je pokazano da je Normalna-Inverzna-Wishartova distribucija konjugirana apriori distribucija za podatke iz višedimenzionalne normalne razdiobe.

²Slučajna matrica Σ ($k \times k$) ima inverznu Wishartovu distribuciju s d_0 stupnjeva slobode i parametarskom matricom S_0 ($k \times k$), tj. $\Sigma \sim IW_k(d_0, S_0)$, ako joj je funkcija gustoće dana s

$$p(\Sigma) = \frac{\det(S_0)^{-d_0/2}}{2^{d_0 k/2} \pi^{(k^2)/2} \prod_{j=1}^k \Gamma[(d_0 + 1 - j)/2]} \det(\Sigma)^{-(d_0+k+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S_0 \Sigma^{-1})\right),$$

pri čemu $\text{tr}(\cdot)$ označava funkciju traga matrice. (Poglavlje 7.3 u [10])

³Nešto više o nestandardnoj/generaliziranoj t -distribuciji u Dodatku 3

$$\hat{X}_{P,t} \stackrel{d}{=} w^\top \bar{x}_{t-1} + \tau \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w} \quad (2.4)$$

pri čemu je $\tau \sim t(d_{k,n})$ gdje $t(d_{k,n})$ označava standardnu t -distribuciju s $d_{k,n}$ stupnjeva slobode, tj. t -distribuciju s lokacijskim parametrom 0 i parametrom skaliranja jedan. Propozicija 2.1.1. zajedno s Dodatkom 3 implicira

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{X}_{P,t}] &= \mathbb{E}[X_{P,t} | x_{(t-1)}] = w^\top \bar{x}_{t-1}, \\ \text{Var}[\hat{X}_{P,t}] &= \text{Var}[X_{P,t} | x_{(t-1)}] = \frac{d_{k,n} r_{k,n}}{d_{k,n} - 2} w^\top S_{t-1} w \end{aligned}$$

za $d_{k,n} > 1$ i $d_{k,n} > 2$ redom.

2.2 Računanje VaR-a i CVaR-a

Sa $\hat{X}_{P,t}$ smo označili slučajnu varijablu čija distribucija odgovara aposteriori prediktivnoj distribuciji prinosa portfelja $X_{P,t}$ uz dato $x_{(t-1)}$. Koristimo činjenicu da je aposteriori prediktivna distribucija zapravo t -distribucija pa je kao takva apsolutno neprekidna, a VaR i CVaR na razini $\alpha \in (0.5, 1)$ definirani su kao

$$\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) := F_{Y,t-1}^{-1}(\alpha)$$

i

$$\text{CVaR}_{\alpha,t-1} = \mathbb{E}[Y | Y \geq \text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t})],$$

gdje je $Y := -\hat{X}_{P,t}$ gubitak portfelja s funkcijom distribucije $F_{Y,t-1}(\cdot)$.⁴ Budući da u ovom poglavlju računamo samo VaR za sljedeći dan ($h = 1$) oznaku iz prošlog poglavlja $\text{VaR}_{h,t-1,\alpha}$ zamjenjujemo s $\text{VaR}_{\alpha,t-1}$

Po definiciji $\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t})$ zadovoljava

$$\mathbb{P}(\hat{X}_{P,t} \leq -\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t})) = 1 - \alpha. \quad (2.5)$$

Raspisivanjem lijeve strane jednadžbe (2.5) dobivamo

$$\mathbb{P}\left(w^\top \bar{x}_{t-1} + \tau \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w} \leq -\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t})\right) = \mathbb{P}\left(\tau \leq \frac{-\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) - w^\top \bar{x}_{t-1}}{\sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w}}\right),$$

⁴Primijetimo kako se ova definicija VaR-a iskazom razlikuje od definicije dane u prethodnom poglavlju, no one su zapravo iste. Također, vidimo da je CVaR zapravo ETL izražen kao postotak. No pripazimo da je ovdje α -tni VaR zapravo $(1 - \alpha)$ -tni VaR iz prethodnog poglavlja, no budući da najčešće gledamo VaR na razini značajnosti do 10% ne bi trebalo dolaziti do zabune.

gdje τ označava slučajnu varijablu iz standardne t -distribucije s $d_{k,n}$ stupnjeva slobode. Dakle

$$\frac{-\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) - w^\top \bar{x}_{t-1}}{\sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w}} = d_{1-\alpha}$$

gdje je $d_{1-\alpha}$ $(1-\alpha)$ -kvantil t -distribucije s $d_{k,n}$ stupnjeva slobode. Budući da je t -distribucija simetrična vrijedi $d_\alpha = -d_{1-\alpha}$ pa pišemo

$$\text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) = -w^\top \bar{x}_{t-1} + d_\alpha \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w}. \quad (2.6)$$

Slično, po definiciji CVaR-a slijedi

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) &= \mathbb{E} \left[-\hat{X}_{P,t} \mid -\hat{X}_{P,t} \geq \text{VaR}_{\alpha,t-1}(\hat{X}_{P,t}) \right] \\ &= \left[\hat{X}_{P,t} \stackrel{d}{=} w^\top \bar{x}_{t-1} + \tau \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w} \quad \text{i} \quad (2.6) \right] \\ &= -w^\top \bar{x}_{t-1} + k_\alpha \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \mathbb{E}[-\tau \mid -\tau \geq d_\alpha] = \mathbb{E}[\tau \mid \tau \geq d_\alpha] \\ &= \left[\mathbb{E}[X \mid X \geq n] = \int_n^\infty x f_{X|X>n}(x) dx = \int_n^\infty x \frac{f_X(x)}{\mathbb{P}(X > n)} dx = \frac{\int_n^\infty x f_X(x) dx}{\mathbb{P}(X > n)} \right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{d_\alpha}^\infty t f_{d_{k,n}}(t) dt^5 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}}{2}\right)} \frac{d_{k,n}}{\sqrt{\pi d_{k,n}}} \frac{1}{d_{k,n}-1} \left(1 + \frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}-1}{2}} \end{aligned}$$

gdje $f_{d_{k,n}}$ označava gustoću studentove t -distribucije s $d_{k,n}$ stupnjeva slobode, a koristimo i činjenicu da su $-\tau$ i τ jednako distribuirani zbog simetrije t -distribucije.

Izrazi za VaR i CVaR dati u jednadžbama (2.6) i (2.7) mogu se prikazati u sljedećem zajedničkom obliku:

$$Q_{t-1}(w) = -w^\top \bar{x}_{t-1} + q_\alpha \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w} \quad (2.8)$$

gdje $Q_{t-1}(w)$ označava VaR, odnosno CVaR, a q_α je d_α , odnosno k_α .

⁵Integral se izračuna supstitucijom $u = 1 + \frac{t^2}{d_{k,n}}$, a račun je u Dodatku 5.

2.3 Hiperparametri osjetljivi na volatilitnost

Konjugirana apriori distribucija definirana u (2.3) je informativna apriori distribucija koja se često koristi u Bayesovoj financijskoj literaturi, a predloženi su različiti načini za specifikaciju njena četiri hiperparametra. Neke metode koriste samo povijesne podatke o prinosima imovine, međutim korištenje samo povijesnih podataka, gdje su svi vektori prinosa na imovinu jednake važnosti, dobro funkcionira kada su tržišni uvjeti stabilni. Međutim, dobro je poznato da se tržišta ponašaju neregularno te se često u financijskim podacima opaža *volatility clustering*.⁶

Predložimo način određivanja hiperparametara koji rješava gore naveden problem *volatility clustering-a*. Kako bi se obuhvatila promjena volatilitnosti, važno je specificirati hiperparametre d_0 i S_0 , jer oni određuju apriori distribuciju za Σ . Ideja predloženog pristupa je da se određivanje ovih parametara temelji na usporedbi dugoročnog i kratkoročnog ponašanja varijance portfelja. Neka n predstavlja razdoblje koje odgovara dugoročnom, a neka $n_r \leq n$ odgovara najnovijem razdoblju. Novi način specifikacije d_0 i S_0 definiran je u Algoritmu 1 u Tablici 2.1.

Određivanje S_0 prema Algoritmu 1 iz Tablice 2.1 znači da je naše apriori uvjerenje o Σ da će varijance biti slične onome što je nedavno opaženo, dok su apriori korelacije bazirane na dugoročnom ponašanju povrata na imovinu. Štoviše, naš stupanj uvjerenja, koji je dan s d_0 , ovisi o tome koliko se varijanca portfelja razlikuje između dugoročnih i kratkoročnih razdoblja. Stoga, izraženija odstupanja od povijesnih podataka mogu motivirati veće ili manje uvjerenje u nedavna opažanja, ovisno o l i h .

Kako bismo bolje razumjeli algoritam, primijetimo da se drugi član procjene VaR-a i CVaR-a danih u (2.8) može preformulirati kao

$$\begin{aligned} q_\alpha \sqrt{r_{k,n}} \sqrt{w^\top S_{t-1} w} &= q_\alpha \sqrt{r_{k,n}(n-1)} \sqrt{\frac{1}{n-1} w^\top S_{t-1} w} \\ &= q_\alpha \sqrt{\frac{(n+r_0+1)(n-1)}{(n+r_0)(n+d_0-2k)}} \sqrt{\frac{1}{n-1} w^\top S_{t-1} w}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Za velike vrijednosti n i ako je $V_{r,w} > V_w$, imamo da je $d_0 = n(V_{r,w}/V_w)^h$ i

$$\sqrt{\frac{(n+r_0+1)(n-1)}{(n+r_0)(n+d_0-2k)}} \approx \sqrt{\frac{1}{1+(V_{r,w}/V_w)^h}}.$$

⁶Vremenski nizovi povrata financijske imovine često pokazuju ponašanje poznato kao *volatility clustering*: volatilitnost se mijenja tijekom vremena te postoje razdoblja niske volatilitnosti i razdoblja visoke volatilitnosti.

Tablica 2.1: Algoritam 1

Algoritam 1: Konjugirani hiperparametri osjetljivi na volatilitnost

1. Izračunajte procjenu standardnih devijacija povrata $\hat{\sigma}$ koristeći zadnjih n vektora povrata.
2. Izračunajte procjenu standardnih devijacija povrata $\hat{\sigma}_r$ koristeći zadnjih n_r vektora povrata, no za očekivanje koristite aritmetičku sredinu cijelog uzorka, tj. zadnjih n povrata.
3. Definirajte D kao dijagonalnu matricu s dijagonalnim elementima $\hat{\sigma}_r/\hat{\sigma}$, gdje se dijeljenje vrši element po element.
4. Izračunajte kovarijacijsku matricu $\hat{\Sigma}$ koristeći zadnjih n vektora povrata.
5. Definirajte $\hat{\Sigma}_r = D\hat{\Sigma}D$ kao kovarijacijsku matricu s varijancama temeljenima na nedavnom razdoblju.
6. Definirajte $V_{r,w} = w^\top \hat{\Sigma}_r w$ i $V_w = w^\top \hat{\Sigma} w$ kao procijenjene varijance portfelja temeljene na kratkoročnim i dugoročnim razdobljima.
7. Postavite $d_0 = \max\left(k + 2, n \left(\max\left(1, \frac{V_{r,w}}{V_w}\right)\right)^h \left(\max\left(1, \frac{V_w}{V_{r,w}}\right)\right)^l\right)$.
8. Postavite $S_0 = \frac{(d_0 - k - 1)(n - 1)}{n} \hat{\Sigma}_r$.

Štoviše, ako stavimo da je hiperparametar m_0 aritmetička sredina uzorka, iz (2.9) i Propozicije 2.1.1. dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} w^\top S_{t-1} w &= \frac{1}{n-1} w^\top \left[\sum_{i=t-n}^{t-1} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top + S_0 + nr_0 \frac{(m_0 - \bar{x}_{t-1})(m_0 - \bar{x}_{t-1})^\top}{n+r_0} \right] w \\
&= \left(w^\top \frac{1}{n-1} \sum_{i=t-n}^{t-1} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top w \right) + \left(w^\top \frac{1}{n-1} S_0 w \right) + 0 \\
&= w^\top \hat{\Sigma} w + \frac{(d_0 - k - 1)}{n} w^\top \hat{\Sigma}_r w \\
&= V_w + \frac{d_0 - k - 1}{n} V_{r,w} \approx V_w + (V_{r,w}/V_w)^h V_{r,w}.
\end{aligned}$$

Dakle, (2.9) postaje otprilike jednako

$$q_\alpha \sqrt{\frac{1}{1 + (V_{r,w}/V_w)^h} V_w + \frac{(V_{r,w}/V_w)^h}{1 + (V_{r,w}/V_w)^h} V_{r,w}}. \quad (2.10)$$

Vrijednost unutar korijena u (2.10) je konveksna kombinacija varijanci baziranih na nedavnom razdoblju i dugoročnom razdoblju gdje su težine između perioda određene s $(V_{r,w}/V_w)$ i h . Za slučaj $V_{r,w} < V_w$ analognim postupkom dobijemo da jednadžba (2.9) postaje otprilike jednaka

$$q_\alpha \sqrt{\frac{1}{1 + (V_w/V_{r,w})^l} V_w + \frac{(V_w/V_{r,w})^l}{1 + (V_w/V_{r,w})^l} V_{r,w}}. \quad (2.11)$$

Algoritam 1 iz Tablice 2.1 ima nekoliko zanimljivih svojstava koja su sažeta u Propoziciji 2.3.1. Neka od tih svojstava odnose se na usporedbe s empirijskom Bayesovskom procjenom za S_0 , koja je dana kao (vidi Dodatak B u [3])

$$S_0 = \frac{(d_0 - k - 1)(n - 1)}{n} \hat{\Sigma}. \quad (2.12)$$

Slijedeći pristup empirijske Bayesovske metode, postavljamo $m_0 = \bar{x}$.

Propozicija 2.3.1. *Definirajmo S_0 i d_0 kao u Algoritmu 1 iz Tablice 2.1. Tada vrijedi:*

1. *Procjene VaR-a i CVaR-a portfelja korištenjem nove metode su monotono rastuće u odnosu na h ako $n \rightarrow \infty$.*
2. *Procjene VaR-a i CVaR-a portfelja korištenjem nove metode monotono opadaju u odnosu na l ako $n \rightarrow \infty$.*
3. *Nova metoda je ekvivalentna empirijskom Bayesovskom pristupu ako stavimo $n_r = n$, $n \geq k + 2$ pri čemu u Bayesovskom pristupu koristimo $d_0 = n$.*
4. *Procjene VaR-a i CVaR-a portfelja korištenjem nove metode uvijek su veće nego pripadajuća empirijska Bayesovska procjena kada je $V_{r,w} > V_w$ gdje je u empirijskoj Bayesovskoj procjeni korišteno $d_0 = n$ i $n \rightarrow \infty$.*
5. *Procjene VaR-a i CVaR-a portfelja korištenjem nove metode uvijek su manje nego pripadajuća empirijska Bayesovska procjena kada je $V_{r,w} < V_w$ gdje je u empirijskoj Bayesovskoj procjeni korišteno $d_0 = n$ i $n \rightarrow \infty$.*

Dokaz. 1. Promotrimo samo slučaj $V_{r,w} > V_w$ jer se inače h ne pojavljuje u jednadžbi VaR-a i CVaR-a. Primijetimo da je (2.10) limes od (2.9) kada $n \rightarrow \infty$ i q_α će biti veće od nule. Ako povećamo h , faktor ispred $V_{r,w}$ postat će veći u konveksnoj kombinaciji između V_w i $V_{r,w}$. Stoga slijedi rezultat jer $V_{r,w} > V_w$, a procjene VaR-a i CVaR-a dane u (2.8) rastu s obzirom na drugi član.

2. Analogno kao 1.
3. Ako stavimo $n_r = n$ u Algoritmu 1 iz Tablice 2.1, D postaje jedinična matrica, $\hat{\Sigma}_r$ postaje $\hat{\Sigma}$, $V_w = V_{r,w}$ i d_0 postaje n . Ako u empirijskom Bayesovskom pristupu postavimo $d_0 = n$, izraz za S_0 postaje jednak u oba slučaja, a m_0 smo već pretpostavili da je jednaka.
4. Ako koristimo empirijsku Bayesovsku metodu procjene hiperparametara, S_0 nam je dan s (2.12) pri čemu stavljamo $d_0 = n$. Ako $n \rightarrow \infty$ ($d_0 \rightarrow n$), (2.9) postaje približno

$$q_\alpha \sqrt{\frac{(n + r_0 + 1)(n - 1)}{(n + r_0)(n + d_0 - 2k)}} \sqrt{\frac{1}{n - 1} w^\top S_{t-1} w} \approx q_\alpha \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{2V_w} = q_\alpha \sqrt{V_w}$$

gdje je $q_\alpha > 0$. Ako je $V_{r,w} > V_w$ tada je $q_\alpha \sqrt{V_w}$ manje nego limes korištenjem nove metode dan s (2.10). Budući da su procjene VaR-a i CVaR-a dane u (2.8) rastuće obzirom na drugi sumand, tvrdnja slijedi.

5. Analogno kao 4.

□

Nova metoda određivanja hiperparametara zahtijeva specifikaciju dodatna tri parametra: n_r , h i l . Parametar n_r govori koliko dugo treba trajati kratkoročno razdoblje, dok parametri h i l određuje koliko bi kratkoročna varijanca trebala utjecati na našu procjenu. Ovi hiperparametri mogu se odrediti korištenjem povijesnih podataka ili mogu biti zadani na temelju osobne procjene. U usporedbi s početnim hiperparametrima, ovi novi dodatni parametri (n_r , h i l) su lakši za interpretirati.

Za kraj još ostaje odrediti parametre r_0 i m_0 . Parametar m_0 možemo postaviti kao u empirijskoj Bayesovskoj metodi $m_0 = \bar{x}$, a parametar r_0 određuje sigurnost procjene od m_0 i možemo ga postaviti na neku konstantu određenu osobnom procjenom.

2.4 Testiranje VaR-a

Ovdje uvodimo novi test kvalitete VaR-a baziran na Baselskim dogovorima. Test je temeljen na nizu pogodaka, tj. nizu koji indicira premašivanje VaR-a za svaki dan trgovanja. Neka $\{I_t\}_{0 \leq t \leq T}$ označava niz pogodaka unutar vremena 0 i T , tj. I_t je definiran kao

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{ako je povrat portfelja u trenutku } t \text{ manji od procijenjenog -VaR-a,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Po definiciji, $(1 - \alpha)$ povrata portfelja bi trebalo biti manje od -VaR-a na razini α kada je VaR ispravno određen.

Basel zahtijeva da banke izračunaju broj premašivanja VaR-a tijekom jedne godine (otprilike 250 trgovinskih dana), tj. broj slučajeva kada metoda procjene VaR-a zakaže. Neka je $C_T = \sum_{t=1}^T I_t$ i neka c označava uočenu vrijednost varijable C_T izračunatu korištenjem dostupnih podataka. Zatim se, pod pretpostavkom da je $p_I = 1 - \alpha$ (vjerojatnost jednog premašivanja), računa

$$P_T = \mathbb{P}(C_T \leq c) \quad \text{gdje je} \quad C_T \sim B(T, 1 - \alpha).$$

Ako je vjerojatnost P_T manja od 95 %, rezultat se klasificira kao 'Zelen'. Klasificira se kao 'Žut' ako je vjerojatnost P_T između 95% i 99%. U suprotnom, ako je vjerojatnost P_T veća od 99%, rezultat se klasificira kao 'Crven'. Broj premašivanja utjecat će na kapitalne zahtjeve i može učiniti model nevažećim za korištenje.

2.5 Računanje VaR-a na simuliranim podacima

Sada ilustriramo kako nova metoda funkcionira pri procjeni VaR-a koristeći portfelj od nekoliko dionica. Razmatramo povrate iz dvije distribucije te se predloženi novi pristup uspoređuje s još tri metode procjene VaR-a, a kvalitetu uspoređujemo koristeći test iz prethodnog poglavlja.

Opis simulacije

Razmatramo dvije različite simulacije za prinose na dionice kako bi se vidjelo kako nova metoda funkcionira pod različitim tržišnim pretpostavkama. Distribucije iz kojih simuliramo povrate su:

1. Višedimenzionalna normalna distribucija (MVN)
2. Peturbirana višedimenzionalna normalna distribucija (PMVN)

U MVN scenariju, simulirani prinosi prate višedimenzionalnu normalnu distribuciju s fiksnim vektorom očekivanja i kovarijacijskom matricom.

PMVN scenarij je sličan MVN scenariju, s iznimkom da standardne devijacije koje odgovaraju višedimenzionalnoj normalnoj distribuciji mogu odstupati od osnovnih vrijednosti tijekom određenog vremenskog razdoblja. Prvi korak u implementaciji ovog scenarija je nasumično odabrati duljinu razdoblja. Duljina razdoblja može biti tri, četiri ili pet dana, s jednakim vjerojatnostima. Zatim se razdoblje klasificira kao razdoblje 'niske volatilnosti', 'normalne volatilnosti' ili 'visoke volatilnosti', s vjerojatnostima 0.05, 0.9 i 0.05 redom. Ako je razdoblje klasificirano kao razdoblje 'niske volatilnosti', osnovne standardne devijacije množe se s uniformno odabranom vrijednošću između 0.5 i 0.7 (tj. generiramo faktor

iz Unif(0.5, 0.7)). Slično tome, ako se radi o razdoblju 'visoke volatilnosti', standardne devijacije množe se faktorima nasumično odabranim iz uniformne distribucije između 1.5 i 3. Tijekom razdoblja 'normalne volatilnosti', standardne devijacije se ne skaliraju.⁷

Vektor očekivanja i kovarijacijska matrica u simulacijama povrata iz gore navedenih distribucija određeni su pomoću odgovarajućih procjenitelja dobivenih prilagodbom modela stvarnim tržišnim podacima. Koristimo nasumično odabrane tržišne podatke dionica iz S&P 500 indeksa u razdoblju između 1. kolovoza 2022. i 1. kolovoza 2024. godine. Nakon što su parametri procijenjeni, generira se 500 prinosa iz odgovarajuće distribucije, pri čemu se za procjenu VaR-a na sljedeći dan koriste podaci od prethodnih 250 dana. Na taj se način dobije 250 podataka za VaR te se promatra opažena vrijednost varijable C_T iz prethodnog poglavlja o testiranju VaR-a.

Osim novog pristupa temeljenog na metodi osjetljive volatilnosti, VaR računamo i parametarskim, povijesnim i empirijskim Bayesovskim modelom (EB) pri čemu je $d_0 = r_0 = n$.⁸

Koristimo dvije različite kombinacije parametara n_r , h i l za novu metodu osjetljive volatilnosti. U prvoj verziji stavljamo $n_r = 4$, $h = 2$ i $l = 0$ i označavamo ju s VS(4,2,0). Ovo bi trebalo odražavati parametre investitora koji nije sklon riziku, budući da se rizik brzo povećava kada je uočena visoka volatilnost, ali se ne smanjuje toliko kada je nedavna volatilnost niska. U drugoj verziji nove metode koristimo $n_r = 4$, $h = 0$ i $l = 0$ te ju označavamo s VS(4,0,0). Ova bi verzija trebala odražavati investitora koji nije previše zabrinut za nedavnu promjenu volatilnosti, no ipak koristi kovarijacijsku matricu s varijancama temeljenim na nedavnom periodu, tj. ovaj investitor nedavnu promjenu volatilnosti uključuje manje u određivanje VaR-a.

Razmatraju se jednako ponderirani portfelji koji se sastoje od 5 odnosno 10 dionica. Za svaku veličinu portfelja i simulacijski scenarij matricu povrata generiramo 100 puta. U svakom od 100 ponavljanja godišnju procjenu VaR-a klasificiramo kao 'Zelenu', 'Žutu' ili 'Crvenu' na način opisan u prethodnom poglavlju.

⁷Na primjer, ako odlučimo povećati standardnu devijaciju 3 puta mi cijelu kovarijacijsku matricu množimo s 3^2 budući da se u kovarijacijskoj matrici nalaze varijance i kovarijance. Također ne možemo samo varijance pomnožiti s faktorom budući da vrijedi: $a^2 Var(X) = Var(aX)$ te $Cov(aX, aY) = a^2 Cov(X, Y)$

⁸Primijetimo da smo u prvom poglavlju uveli parametarski i povijesni pristup za računanje VaR-a samo za portfelje s jednom dionicom, no ovdje koristimo te modele na portfelju od više dionica. Tako formula (1.10) za parametarski VaR postaje

$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{w^\top \Sigma_h w} - w^\top \mu_h$$

pri čemu je $\alpha < 0.5$, w vektor težina dionica u portfelju, Σ_h kovarijacijska matrica h -dnevnog povrata, a μ_h vektor očekivanja. Povijesni model računanja VaR-a ostaje isti, samo se povrat računa po formuli (2.1). Više o ovim modelim može se pronaći u [2].

Rezultati simulacije povrata iz višedimenzionalne normalne razdiobe

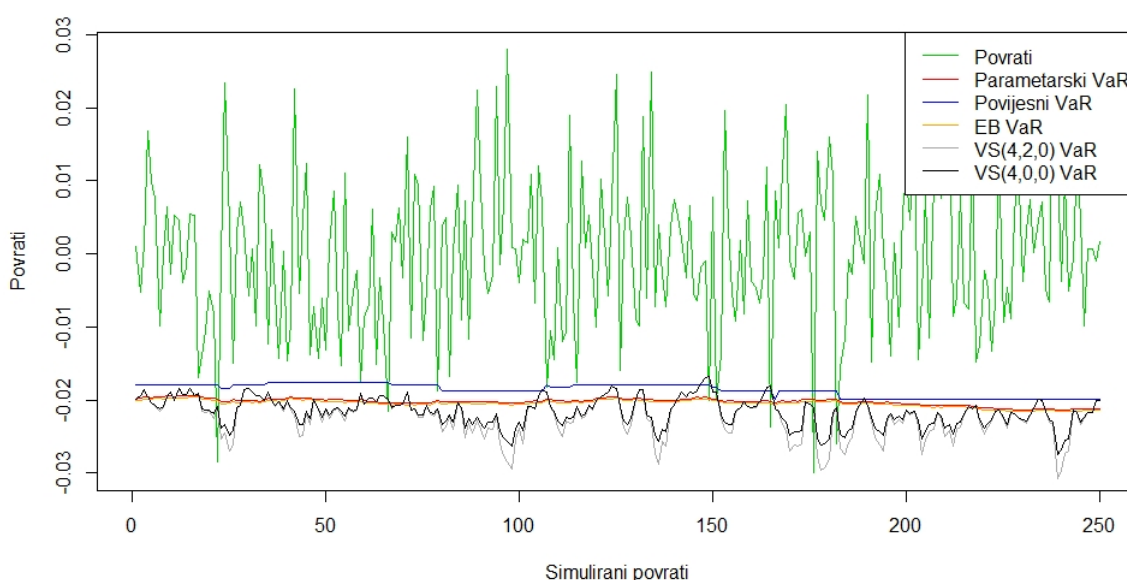
Tablica 2.2 prikazuje postotak procjena VaR-a klasificiranih kao 'Zelene', 'Žute' i 'Crvene' koristeći različite metode procjene kada su povrati simulirani koristeći višedimenzionalnu normalnu razdiobu. Budući da VaR računamo nad prethodnih 250 podataka, rezultate dobivene povijesnom metodom uzimamo s oprezom. Naime, kod uvođenja povijesne metode u prethodnoj cjelini napomenuta je važnost broja podataka u $(1 - \alpha)\%$ -tnom repu, a ovdje za 97.5%-tni i 99%-tni VaR imamo samo 6 odnosno 3 podatka u repu. Iz Tablice 2.2 je vidljivo kako kod računanja parametara novom metodom (VS(4,2,0) i VS(4,0,0)) dobivamo pouzdanije rezultate u odnosu na ostale metode. Ono što je posebno zanimljivo je da volatilno osjetljivom Bayesovskom metodom dobivamo bolje rezultate nego parametarskom, iako povrati dolaze iz višedimenzionalne normalne razdiobe.

Tablica 2.2: Postotak 'Zelenih', 'Žutih' i 'Crvenih' procjena VaR-a koristeći povrate simulirane iz višedimenzionalne normalne distribucije.

VaR razina	Veličina portfelja	Klasa	VS(4,2,0)	VS(4,0,0)	EB	Parametarski	Povijesni
95%	5	Zeleni	99%	99%	96%	94%	93%
		Žuti	1%	0%	3%	5%	4%
		Crveni	0%	1%	1%	1%	3%
	10	Zeleni	100%	100%	98%	98%	97%
		Žuti	0%	0%	2%	2%	3%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	0%
97.5%	5	Zeleni	99%	99%	96%	95%	95%
		Žuti	1%	1%	3%	4%	2%
		Crveni	0%	0%	1%	1%	3%
	10	Zeleni	98%	98%	93%	93%	92%
		Žuti	2%	1%	5%	5%	6%
		Crveni	0%	1%	2%	2%	2%
99%	5	Zeleni	97%	97%	93%	91%	86%
		Žuti	3%	3%	7%	9%	13%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	1%
	10	Zeleni	96%	94%	92%	91%	83%
		Žuti	4%	6%	8%	9%	14%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	3%

Iako se rezultati dobiveni Bayesovskom metodom osjetljivom na volatilnost čine bolji postoji opasnost da precjenjuju rizik i na taj način banka ili neka druga ustanova koja računa VaR rezervira više kapitala od potrebnog.

Pogledajmo zato sada kako izgleda procjena VaR-a gornjim metodama i koliko je puta u godini dana povrat bio manji od $-VaR$ -a. Za tu potrebu koristimo portfelj od 10 dionica te računamo 97.5%-tni VaR. Sa Slike 2.1 možemo vidjeti kako je VaR računat Bayesovskom metodom osjetljivom na volatilitnost puno dinamičniji od VaR-a računatog ostalim metodama. Računanjem broja premašaja VaR-a dobivamo da je povrat premašio VaR računat povijesnom metodom 9 puta, a za ostale metode 6 ili 7 puta. To su jako dobri rezultati budući da očekujemo oko 6 premašivanja VaR-a na 97.5%-tnoj razini pouzdanosti.



Slika 2.1: Usporedba metoda za računanje 97.5%-tnog VaR-a na povratima simuliranim iz višedimenzionalne normalne razdiobe

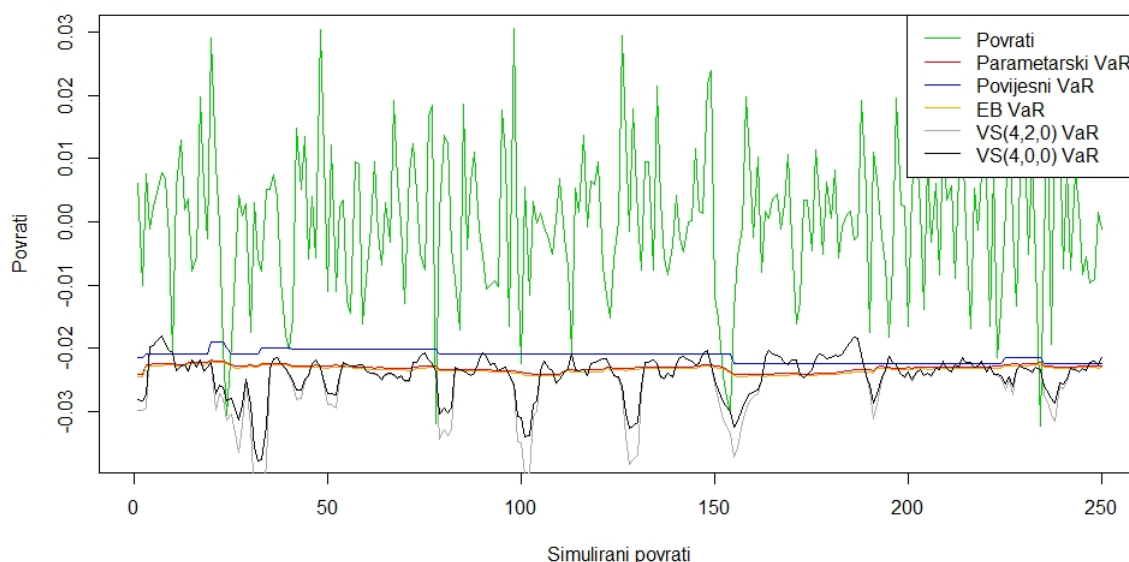
Rezultati simulacije povrata iz peturbirane višedimenzionalne normalne razdiobe

Rezultati simulacije koristeći peturbiranu višedimenzionalnu normalnu distribuciju za generiranje povrata prikazani su u Tablici 2.3. Primjećujemo da ponovno VaR računat volatilno osjetljivom Bayesovskom metodom daje najbolje rezultate, iako se na razinama značajnosti 95% i 97.5% i druge metode ponašaju relativno dobro kada se koriste peturbirani višedimenzionalni normalni povrti. Međutim za razinu VaR-a od 99% uočavamo da VS metoda ima jasnu prednost. To je zato što se ova metoda lako prilagođava brzim promjenama tržišnih uvjeta koje odgovaraju razdobljima visoke volatilitnosti.

Tablica 2.3: Postotak 'Zelenih', 'Žutih' i 'Crvenih' procjena VaR-a koristeći povrate simulirane iz peturbirane višedimenzionalne normalne distribucije.

VaR razina	Veličina portfelja	Klasa	VS(4,2,0)	VS(4,0,0)	EB	Parametarski	Povijesni
0.95	5	Zeleni	100%	100%	94%	93%	90%
		Žuti	0%	0%	4%	5%	9%
		Crveni	0%	0%	2%	2%	1%
	10	Zeleni	100%	99%	99%	96%	93%
		Žuti	0%	1%	1%	3%	6%
		Crveni	0%	0%	0%	1%	1%
0.975	5	Zeleni	98%	98%	97%	97%	96%
		Žuti	2%	2%	3%	3%	3%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	1%
	10	Zeleni	100%	99%	95%	94%	94%
		Žuti	0%	1%	4%	5%	4%
		Crveni	0%	0%	1%	1%	2%
0.99	5	Zeleni	98%	93%	80%	77%	83%
		Žuti	1%	6%	14%	16%	14%
		Crveni	1%	1%	6%	7%	3%
	10	Zeleni	94%	92%	85%	83%	87%
		Žuti	6%	7%	15%	16%	12%
		Crveni	0%	1%	0%	1%	1%

Pogledajmo kako izgleda procjena VaR-a gornjim metodama i koliko je puta u godini dana povrat bio manji od -VaR-a. Ponovno koristimo portfelj od 10 dionica te računamo 97.5%-tni VaR. Sa Slike 2.2 možemo vidjeti kako je Bayesovska metoda osjetljiva na volatilitnost dosta konzervativnija od ostalih metoda, tj. dosta puta rezerviramo previše kapitala. Računanjem broja premašaja VaR-a dobivamo da je povrat premašio VaR računat povijesnom metodom 10 puta, a VaR računat parametarskom i empirijskom Bayesovskom metodom 6 puta. VaR računat metodom VS(4,0,0) povrat je premašio 5 puta, dok je VaR računat metodom VS(4,2,0) povrat premašio samo 3 puta. Time vidimo kako nam se u ovom testu parametarska, empirijska Bayesovska i VS(4,0,0) metoda dobro ponašaju, no VS(4,2,0) metoda je prekonzervativna.



Slika 2.2: Usporedba metoda za računanje 97.5%-tnog VaR-a na povratima simuliranim iz peturbirane višedimenzionalne normalne razdiobe

2.6 Računanje VaR-a na povijesnim podacima

Sada gledamo kako Bayesovske metode djeluju u usporedbi s povijesnom i parametarskom koristeći stvarne podatke iz 2019. i 2020. godine.

Opis postupka

U empirijskoj usporedbi koristimo dnevne povrate dionica nasumično odabranih iz S&P 500 indeksa. Kao i u simulacijskoj studiji, razmatramo portfelje od 5 i 10 dionica. Za svaku veličinu portfelja odabrano je 100 grupa imovine iz S&P 500 indeksa na početku 2019. ili 2020. godine, te je konstruirano 100 jednako ponderiranih portfelja koji ostaju nepromijenjeni tijekom cijele godine. Za svaki portfelj procjenjujemo VaR na dnevnoj bazi koristeći zadnjih 250 podataka ($n = 250$), te koristimo iste metode procjene kao u simulacijskoj studiji. Na kraju godine izračunavamo broj premašivanja VaR-a na razinama od 95%, 97.5% i 99%, te klasificiramo rezultate prema gore navedenom testu.

Godine 2019. i 2020. odabrane su za empirijsku usporedbu jer su to dvije vrlo zahvalne godine za ovakav pregled. Naime, 2019. se može smatrati tipičnom stabilnom godinom, dok 2020. uključuje vrlo turbulentno razdoblje zbog izbijanja pandemije Covid-19. Stoga

bi teoretski trebale biti reprezentativne za različite tržišne uvjete.

Rezultati za 2019. godinu

Tablica 2.4 prikazuje postotak procjena VaR-a klasificiranih kao 'Zelene', 'Žute' i 'Crvene' koristeći različite metode procjene u 2019. godini. Kao što se može vidjeti u Tablici 2.4, sve metode daju prilično slične rezultate tijekom 2019. godine u skladu s Baselovim testom. Sve pokazuju dobre rezultate na razini VaR-a od 95% i 97.5%, dok rezultati izgledaju nešto lošiji na razini od 99%.

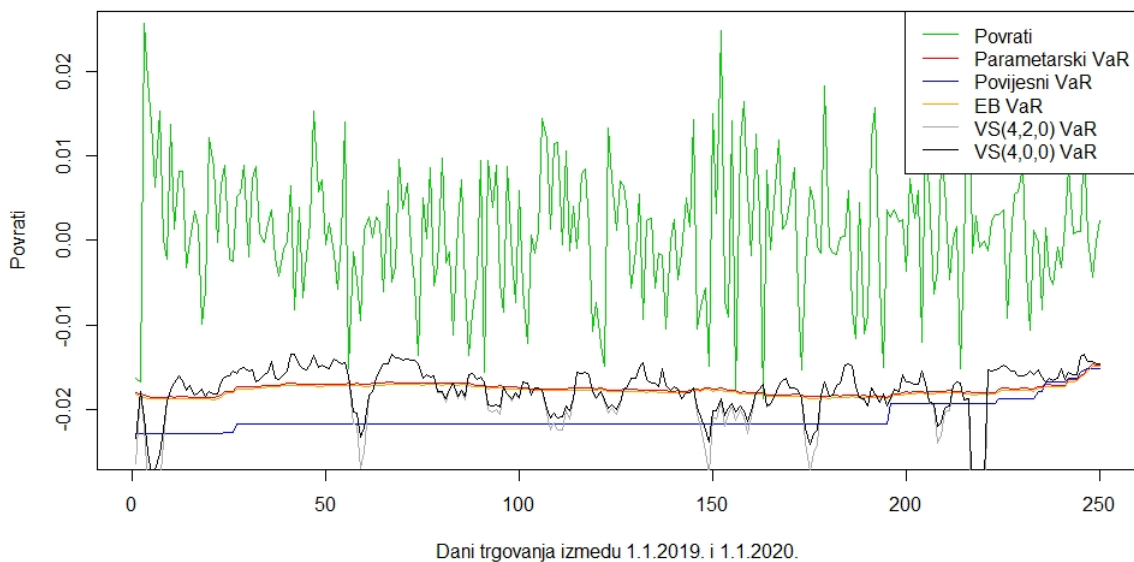
Tablica 2.4: Postotak 'Zelenih', 'Žutih' i 'Crvenih' procjena VaR-a koristeći povrate portfelja nasumično odabranih dionica iz indeksa S&P 500 za 2019. godinu.

VaR razina	Veličina portfelja	Klasa	VS(4,2,0)	VS(4,0,0)	EB	Parametarski	Povijesni
0.95	5	Zeleni	100%	100%	100%	100%	100%
		Žuti	0%	0%	0%	0%	0%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	0%
	10	Zeleni	100%	100%	100%	100%	100%
		Žuti	0%	0%	0%	0%	0%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	0%
0.975	5	Zeleni	100%	100%	100%	100%	100%
		Žuti	0%	0%	0%	0%	0%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	0%
	10	Zeleni	100%	100%	100%	100%	100%
		Žuti	0%	0%	0%	0%	0%
		Crveni	0%	0%	0%	0%	0%
0.99	5	Zeleni	85%	83%	85%	84%	100%
		Žuti	15%	17%	14%	15%	0%
		Crveni	0%	0%	1%	1%	0%
	10	Zeleni	85%	81%	79%	75%	100%
		Žuti	15%	19%	20%	24%	0%
		Crveni	0%	0%	1%	1%	0%

Ono što je posebno zanimljivo u Tablici 2.4 je da povijesna VaR metoda na razini od 99% daje puno bolje rezultate od drugih, naprednijih metoda. Ono što naš test radi je da za svaki od 100 ponavljanja generiranja portfelja i računanja VaR-a u jednoj godini gleda koliko smo puta u 250 dana premašili VaR (tj. koliko puta je procijenjeni VaR bio manji od apsolutnog gubitka sljedećeg dana) te onda računa vjerojatnost da slučajna varijabla C_T , za

koju u ovom slučaju pretpostavljamo da ima Binomnu(250, 0.01) distribuciju, poprimi manju vrijednost od broja premašivanja c . Kod računanja VaR-a na razini od 99% za portfelj od 5 dionica povijesnom metodom dobijemo da je VaR bio premašen maksimalno 4 puta u jednoj godini te vrijedi $\mathbb{P}(C_T \leq 4) = 89.22\% < 95\%$ pa uz činjenicu da je funkcija distribucije rastuća, dobivamo da je povijesna metoda uvijek okarakterizirana kao 'Zelena'. Dodatno, u povijesnoj metodi 68 puta (od mogućih 100) prekoračimo VaR jednom ili nijednom u godini dana, a u prosjeku bi to trebalo biti 2.5 puta. Dakle, budući da Basel test gleda samo događaje u kojima smo VaR prekoračili previše puta, on povijesnu metodu karakterizira kao dobru iako je zapravo prekonzervativna. No, to je bilo i za očekivati budući da su u repu uzorka od 250 podataka samo 3 podatka, a opća preporuka je da bi trebalo biti barem 20 podataka, pa možemo reći da u obzir uzimamo i *outliere* te tako dobivamo prekonzervativne procjene.

Slika 2.3 dodatno ilustrira ponašanje modela prikazujući kako se povrati i procjene VaR-a mijenjaju tijekom 2019. godine za portfelj veličine 10 i 97.5%-tni VaR. Slika 2.3 potvrđuje sličnost između različitih metoda u 2019. godini. Također možemo vidjeti kako je volatilno osjetljiva Bayesovska VaR metoda puno promjenjivija, što je i bilo za očekivati, dok je povijesna VaR metoda konstantno ispod parametarske i empirijske Bayesovske.



Slika 2.3: Usporedba metoda za računanje 97.5%-tnog VaR-a na povratima u 2019. godini

Rezultati za 2020. godinu

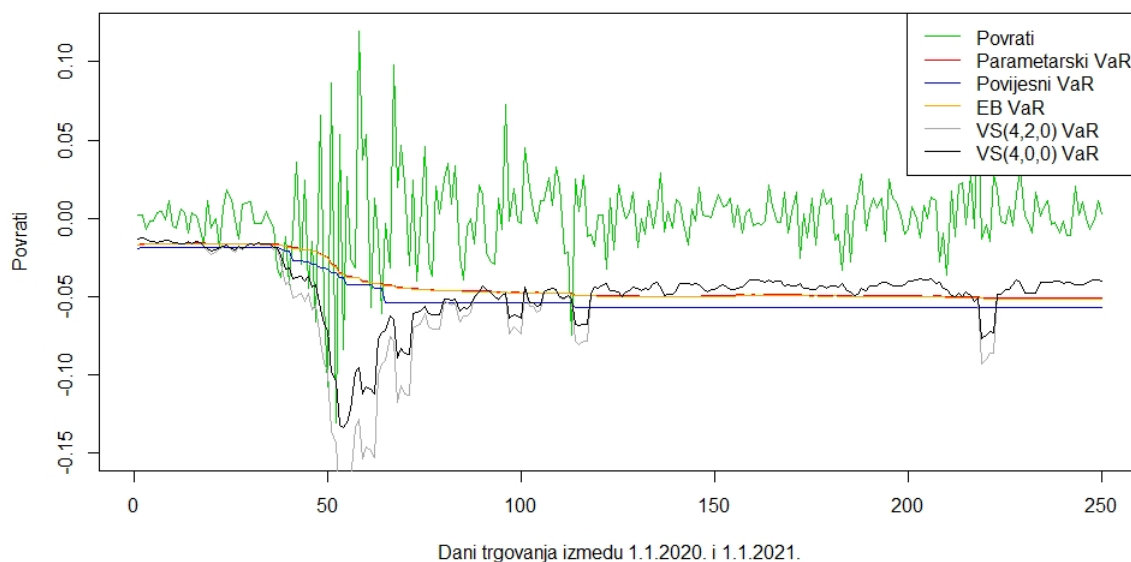
Tablica 2.5 prikazuje usporedbu različitih modela tijekom turbulentnije godine, kao što je bila 2020. Primjećujemo jasnu prednost volatilno osjetljivih Bayesovskih metoda, posebno VS(4,2,0). Na razini od 95% i 97.5%, gotovo svi rezultati klasificirani su kao 'Zeleni' koristeći VS metodu, dok druge metode rezultiraju većim brojem rezultata klasificiranih kao 'Žuti' ili 'Crveni', pogotovo na razini od 97.5%. Iako na razini od 99% sve metode imaju 'Crvenih' procjena, volatilno senzitivna metoda se i dalje puno bolje ponaša od ostalih.

Tablica 2.5: Postotak 'Zelenih', 'Žutih' i 'Crvenih' procjena VaR-a koristeći povrate portfelja nasumično odabranih dionica iz indeksa S&P 500 za 2020. godinu.

VaR razina	Veličina portfelja	Klasa	VS(4,2,0)	VS(4,0,0)	EB	Parametarski	Povijesni
0.95	5	Zeleni	100%	99%	37%	36%	6%
		Žuti	0%	1%	54%	53%	42%
		Crveni	0%	0%	9%	11%	52%
	10	Zeleni	100%	100%	43%	40%	12%
		Žuti	0%	0%	54%	57%	43%
		Crveni	0%	0%	3%	3%	45%
0.975	5	Zeleni	99%	90%	1%	1%	3%
		Žuti	1%	10%	5%	4%	27%
		Crveni	0%	0%	94%	95%	70%
	10	Zeleni	100%	91%	0%	0%	0%
		Žuti	0%	9%	0%	0%	20%
		Crveni	0%	0%	100%	100%	80%
0.99	5	Zeleni	66%	21%	0%	0%	0%
		Žuti	32%	42%	0%	0%	21%
		Crveni	2%	37%	100%	100%	79%
	10	Zeleni	62%	5%	0%	0%	1%
		Žuti	37%	43%	0%	0%	13%
		Crveni	1%	52%	100%	100%	86%

Slika 2.4 pruža dublji uvid u ponašanje različitih modela prikazujući kako se povrati i procjene VaR-a mijenjaju tijekom 2020. godine za portfelj veličine 10 i 97.5%-tni VaR. Pokazuje se kako se VS metoda brzo može prilagoditi promjenjivim tržišnim uvjetima, kao što je bio slučaj u ožujku 2020. godine. Druge metode su puno više stacionarne te se zbog toga ponašaju loše kod iznenadnih promjena na tržištu.

Pogledajmo još koliko smo puta premašili VaR ovisno o metodi kojom smo ga računali. Računajući VaR parametarskom i empirijskom Bayesovskom metodom povrat je bio 15



Slika 2.4: Usporedba metoda za računanje 97.5%-tnog VaR-a na povratima u 2020. godini

puta ispod procijenjenog VaR-a, dok je premašio VaR 13 puta u slučaju povijesne metode. Kod VS(4,0,0) metode VaR smo premašili 9 puta, a kod VS(4,2,0) metode samo 6 što je otprilike 2.5% puta u 250 dana. Dakle, iako je VS(4,2,0) u nekim slučajevima prekonzervativna, kod turbulentne 2020. godine pokazala se kao pun pogodak.

Poglavlje 3

Dodatak

3.1 Dodatak 1

Dokažimo identitet

$$\sum_{i=1}^n (n-i+1)x^i = \frac{x[n(1-x) - x(1-x^n)]}{(1-x)^2}, \quad \text{za } |x| < 1.$$

Napišimo sumu S kao:

$$S = \sum_{i=1}^n (n-i+1)x^i = \sum_{i=1}^n nx^i - \sum_{i=1}^n ix^i + \sum_{i=1}^n x^i.$$

Neka su:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n nx^i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n ix^i, \quad \text{i} \quad S_3 = \sum_{i=1}^n x^i.$$

Dakle, suma S može se napisati kao:

$$S = S_1 - S_2 + S_3.$$

Izračunajmo redom S_1 , S_2 i S_3 . Vrijedi

$$S_1 = \sum_{i=1}^n nx^i = n \sum_{i=1}^n x^i = n \left(\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right).$$

Koristimo formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza, diferenciranu po x :

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

Deriviramo obje strane po x :

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n x^i \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right)$$

dobivamo:

$$\sum_{i=1}^n ix^{i-1} = \frac{(1-x^n)(1-x) - xnx^{n-1}(1-x) + x(1-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Množimo obje strane s x i dobijemo:

$$S_2 = \sum_{i=1}^n ix^i = \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(1-x)^2}.$$

Nadalje,

$$S_3 = \sum_{i=1}^n x^i = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

Na kraju dobijemo

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 + S_3 = \frac{nx(1-x^n)(1-x) - x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) + x(1-x^n)(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x[n - nx - nx^n + nx^{n+1} - nx^{n+1} + nx^n + x^n - 1 + 1 - x^n - x + x^{n+1}]}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x[n(1-x) - x(1-x^n)]}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

čime je identitet dokazan.

3.2 Dodatak 2

Konjugirana apriori distribucija - višedimenzionalna normalna razdioba

Ovaj dodatak je napravljen uz pomoć poglavlja 3.6 u [9].

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor podataka, pri čemu je svaki $x_i \in \mathbb{R}^k$ iz višedimenzionalne normalne razdiobe s parametrima μ i Σ . Kako bi pokazali da je Normalna-Inverzna-Wishartova distribucija $p(\mu, \Sigma)$, pri čemu su μ i Σ dani sa:

$$\mu \mid \Sigma \sim N_k\left(m_0, \frac{1}{r_0}\Sigma\right) \quad \text{i} \quad \Sigma \sim \text{IW}_k(d_0, S_0), \quad (3.1)$$

upravo konjugirana apriori distribucija za višedimenzionalnu normalnu razdiobu, treba pokazati da vrijedi

$$p(\mu, \Sigma \mid x) \propto L(\mu, \Sigma \mid x)p(\mu, \Sigma)$$

gdje je $L(\mu, \Sigma \mid x) = p(x \mid \mu, \Sigma)$ funkcija vjerodostojnosti, a \propto oznaka za proporcionalno. Izračunajmo zajedničku gustoću $p(\mu, \Sigma)$.

$$\begin{aligned} p(\mu, \Sigma) &= p(\mu \mid \Sigma)p(\Sigma) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\frac{1}{r_0}\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu - m_0)^\top \left(\frac{1}{r_0}\Sigma\right)^{-1}(\mu - m_0)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\det(S_0)^{-d_0/2}}{2^{d_0 k/2} \pi^{(k/2)} \prod_{j=1}^k \Gamma[(d_0 + 1 - j)/2]} \det(\Sigma)^{-(d_0+k+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S_0 \Sigma^{-1})\right) \\ &\propto [\text{Ispuštamo sve što ne ovisi o } \mu \text{ i } \Sigma] \\ &\propto \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r_0}{2}(\mu - m_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu - m_0)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \det(\Sigma)^{-(d_0+k+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S_0 \Sigma^{-1})\right) \\ &= \det(\Sigma)^{-((d_0+k)/2+1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S_0 \Sigma^{-1}) - \frac{r_0}{2}(\mu - m_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu - m_0)\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Izračunajmo i funkciju vjerodostojnosti. Vrijedi:

$$\begin{aligned} p(x \mid \mu, \Sigma) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right) \\ &= (2\pi)^{-nk/2} \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right) \\ &\propto \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)\right) \\
&= \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x}) + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \right)\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \text{ je skalarni umno\u017ek } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top \text{ i } \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu), \right. \\
&\quad \left. \text{a } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top = 0 \right] \\
&= \left[\text{Ako stavimo } S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top \text{ vrijedi} \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\top \Sigma^{-1} (x_i - \bar{x}) = \text{tr}(S \Sigma^{-1}) \right] \\
&= \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S \Sigma^{-1}) - \frac{1}{2} n (\bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)\right)
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada kako izgleda aposteriori distribucija $p(\mu, \Sigma | x)$.

$$\begin{aligned}
p(\mu, \Sigma | x) &\propto L(\mu, \Sigma | x) p(\mu, \Sigma) = p(x | \mu, \Sigma) p(\mu, \Sigma) \\
&= \det(\Sigma)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S \Sigma^{-1}) - \frac{1}{2} n (\bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \det(\Sigma)^{-((d_0+k)/2+1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S_0 \Sigma^{-1}) - \frac{r_0}{2} (\mu - m_0)^\top \Sigma^{-1} (\mu - m_0)\right) \\
&= \det(\Sigma)^{-((d_0+k+n)/2+1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(S \Sigma^{-1} + S_0 \Sigma^{-1}) - \frac{1}{2} n (\bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r_0}{2} (\mu - m_0)^\top \Sigma^{-1} (\mu - m_0)\right)
\end{aligned}$$

pri \u010demu je

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{1}{2}\text{tr}(S\Sigma^{-1} + S_0\Sigma^{-1}) - \frac{1}{2}n(\bar{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu) - \frac{r_0}{2}(\mu - m_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu - m_0)\right) = \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}n\left(\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} - 2\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\mu + \mu^\top \Sigma^{-1}\mu\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{r_0}{2}\left(\mu^\top \Sigma^{-1}\mu - 2m_0^\top \Sigma^{-1}\mu + m_0^\top \Sigma^{-1}m_0\right)\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left((n + r_0)\mu^\top \Sigma^{-1}\mu - 2(n\bar{x} + r_0m_0)^\top \Sigma^{-1}\mu + n\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r_0m_0^\top \Sigma^{-1}m_0\right)\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left((n + r_0)\left[\mu^\top \Sigma^{-1}\mu - 2\frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\Sigma^{-1}\mu \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\Sigma^{-1}\frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right) - \frac{1}{n + r_0}(n\bar{x} + r_0m_0)^\top \Sigma^{-1}(n\bar{x} + r_0m_0) \right. \\
& \quad \left. + n\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} + r_0m_0^\top \Sigma^{-1}m_0\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left((n + r_0)\left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)^\top \Sigma^{-1}\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)\right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{n + r_0}\left(n^2\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} + 2nr_0\bar{x}^\top \Sigma^{-1}m_0 + r_0^2m_0^\top \Sigma^{-1}m_0\right) + n\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} + r_0m_0^\top \Sigma^{-1}m_0\right)\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left((n + r_0)\left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)^\top \Sigma^{-1}\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)\right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{nr_0}{n + r_0}\bar{x}^\top \Sigma^{-1}\bar{x} + \frac{nr_0}{n + r_0}m_0^\top \Sigma^{-1}m_0 - 2\frac{nr_0}{n + r_0}\bar{x}^\top \Sigma^{-1}m_0\right)\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left((n + r_0)\left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)^\top \Sigma^{-1}\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)\right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{nr_0}{n + r_0}(\bar{x} - m_0)^\top \Sigma^{-1}(\bar{x} - m_0)\right)\right] \\
& = \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\left((S + S_0)\Sigma^{-1}\right) - \frac{n + r_0}{2}\left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)^\top \Sigma^{-1}\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0m_0)^\top}{(n + r_0)}\right)\right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2}\text{tr}\left(\frac{nr_0}{n + r_0}(\bar{x} - m_0)(\bar{x} - m_0)^\top \Sigma^{-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \left(\left(S + S_0 + \frac{nr_0}{n+r_0} (\bar{x} - m_0)(\bar{x} - m_0)^\top \right) \Sigma^{-1} \right) - \frac{n+r_0}{2} \left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0 m_0)}{(n+r_0)} \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0 m_0)}{(n+r_0)} \right) \right] \right].$$

Konačno,

$$p(\mu, \Sigma | x) \propto \det(\Sigma)^{-((d_0+k+n)/2+1)} \exp \left[-\frac{1}{2} \text{tr} \left(\left(S + S_0 + \frac{nr_0}{n+r_0} (\bar{x} - m_0)(\bar{x} - m_0)^\top \right) \Sigma^{-1} \right) - \frac{n+r_0}{2} \left[\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0 m_0)}{(n+r_0)} \right)^\top \Sigma^{-1} \left(\mu - \frac{(n\bar{x} + r_0 m_0)}{(n+r_0)} \right) \right] \right]$$

Ako usporedimo aposteriori distribuciju $p(\mu, \Sigma | x)$ s apriori distribucijom $p(\mu, \Sigma)$ danom s (3.2), vidimo da je aposteriori distribucija iz iste familije, no njeni parametri su:

$$\begin{aligned} \hat{m}_0 &= \frac{n\bar{x} + r_0 m_0}{n + r_0} \\ \hat{r}_0 &= r_0 + n \\ \hat{d}_0 &= d_0 + n \\ \hat{S}_0 &= S_0 + S + \frac{nr_0}{n+r_0} (\bar{x} - m_0)(\bar{x} - m_0)^\top \end{aligned}$$

gdje je $S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top$. Dakle, možemo zaključiti da je distribucija $p(\mu, \Sigma)$, pri čemu su μ i Σ dani s (3.1), konjugirana apriori distribucija za višedimenzionalnu normalnu razdiobu.

3.3 Dodatak 3

Generalizirana t -distribucija

Studentova t -distribucija generalizira se u troparametarsku t -distribuciju $lst(\mu, \tau^2, \nu)$, uvođenjem lokacijskog parametra μ i parametra skaliranja τ . Neka je $T \sim t_\nu$, tada transformacijom

$$X = \mu + \tau T$$

dobivamo

$$X \sim lst(\nu, \mu, \tau^2)$$

Rezultirajuća distribucija naziva se i nestandardizirana Studentova t -distribucija.

Generalizirana t -distribucija ima gustoću definiranu sa:

$$p(x | \nu, \mu, \tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu\tau}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-\mu}{\tau}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Jednako tako, gustoća se može zapisati u terminima τ^2 :

$$p(x | \nu, \mu, \tau^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu\tau^2}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x-\mu)^2}{\tau^2}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Očekivanje slučajne varijable X dano je sa:

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{za } \nu > 1,$$

a varijanca je dana sa:

$$\text{Var}[X] = \tau^2 \frac{\nu}{\nu-2} \quad \text{za } \nu > 2.$$

3.4 Dodatak 4

Lema 3.4.1. *Neka je dana neprekidna slučajna varijabla X s funkcijom distribucije F i funkcijom gustoće f . Neka je $Y = r(X)$ druga slučajna varijabla pri čemu je $r : S \rightarrow T$ diferencijabilna strogo rastuća funkcija. Tada vrijedi*

$$g(y) = f[r^{-1}(y)] \frac{d}{dy} r^{-1}(y)$$

pri čemu je g funkcija gustoće slučajne varijable Y .

Dokaz. Neka je G funkcija distribucije slučajne varijable Y . Budući da je r rastuća vrijedi:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P[r(X) \leq y] = P[X \leq r^{-1}(y)] = F[r^{-1}(y)].$$

Budući da je $F' = f$ tvrdnja slijedi. □

Lema 3.4.2. *Pretpostavimo da se slučajna varijabla z može napisati na sljedeći način:*

$$z \stackrel{d}{=} \frac{\tau_1}{\sqrt{vd}} + \sqrt{1 + \frac{\tau_1^2}{d}} \frac{\tau_2}{\sqrt{d+1}},$$

pri čemu je $d > 0$, a τ_1 i τ_2 su nezavisne slučajne varijable gdje je $\tau_1 \sim t(d)$ te $\tau_2 \sim t(d+1)$. Tada z ima t distribuciju s d stupnjeva slobode, lokacijskim parametrom 0 i parametrom skaliranja $\tau = \sqrt{(v+1)/vd}$.

Dokaz leme ne navodimo, a zainteresirane upućujemo na Dodatak A u [7].

Skica dokaza Propozicije 2.1.1. U Teoremu 2 članka [4] aposteriori distribucija povrata portfelja karakterizirana je stohastičkom reprezentacijom varijable $\hat{X}_{P,t}$ danom formulom

$$\hat{X}_{P,t} \stackrel{d}{=} m + \sqrt{s} \left(\frac{\tau_1}{\sqrt{vd}} + \sqrt{1 + \frac{\tau_1^2}{d}} \frac{\tau_2}{\sqrt{d+1}} \right)$$

pri čemu je $m = w^\top \bar{x}_{t-1}$, $s = w^\top S_{t-1} w$, $v = n + r_0$ i $d = n + d_0 - 2k$. Dakle, $\hat{X}_{P,t}$ je oblika

$$\hat{X}_{P,t} \stackrel{d}{=} m + \sqrt{s} \cdot Z$$

gdje je primjenom Leme 3.4.2. $Z \sim t(v = n + d_0 - 2k, \mu = 0, \tau^2 = \frac{n+r_0+1}{(n+r_0)(n+d_0-2k)})$. Pronađimo sada razdiobu od $\hat{X}_{P,t}$. Vrijedi:

$$Z = \frac{\hat{X}_{P,t} - m}{\sqrt{s}}$$

Koristeći Lemu 3.4.1., funkcija gustoće od $\hat{X}_{P,t}$ dana je sa:

$$f_X(x) = f_Z\left(\frac{x-m}{\sqrt{s}}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-m}{\sqrt{s}}\right).$$

Vrijedi

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

pa raspisom formule za $f_Z\left(\frac{x-m}{\sqrt{s}}\right)$ dobivamo

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu\tau^2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{\left(\frac{x-m}{\sqrt{s}}\right)^2}{\tau^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

odnosno:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu s\tau^2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x-m)^2}{s\tau^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Dakle $\hat{X}_{P,t} \sim t\left(\nu = n + d_0 - 2k, \mu = m = w^\top \bar{x}_{t-1}, \tau^2 = w^\top S_{t-1} w \frac{n+r_0+1}{(n+r_0)(n+d_0-2k)}\right)$

□

3.5 Dodatak 5

Počinjemo s integralom

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}}{2}\right)\sqrt{\pi d_{k,n}}}\int_{d_\alpha}^{\infty} t\left(1+\frac{t^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}+1}{2}} dt.$$

Koristeći supstituciju $u = 1 + \frac{t^2}{d_{k,n}}$ dobivamo:

$$du = \frac{2}{d_{k,n}} t dt.$$

Granice integracije se također mijenjaju: $t = d_\alpha \rightarrow u = 1 + \frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}$, and $t = \infty \rightarrow u = \infty$. Sada imamo

$$\int_{d_\alpha}^{\infty} t\left(1+\frac{t^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}+1}{2}} dt = \frac{d_{k,n}}{2} \int_{1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}}^{\infty} u^{-\frac{d_{k,n}+1}{2}} du.$$

Računanjem tog integrala dobivamo:

$$\int_{1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}}^{\infty} u^{-\frac{d_{k,n}+1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{d_{k,n}-1}{2}}}{-\frac{d_{k,n}-1}{2}} \Bigg|_{1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}}^{\infty} = \frac{2}{d_{k,n}-1} \left(1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}-1}{2}}.$$

Dakle, dobili smo:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}}{2}\right)\sqrt{\pi d_{k,n}}}\cdot\frac{d_{k,n}}{2}\cdot\frac{2}{d_{k,n}-1}\left(1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_{k,n}}{2}\right)\sqrt{\pi d_{k,n}}}\cdot\frac{d_{k,n}}{d_{k,n}-1}\left(1+\frac{d_\alpha^2}{d_{k,n}}\right)^{-\frac{d_{k,n}-1}{2}}.$$

Bibliografija

- [1] C. Alexander, *Market Risk Analysis, Volume I, Quantitative Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd., 2008.
- [2] ———, *Market Risk Analysis, Volume IV, Value at Risk Models*, John Wiley & Sons Ltd., 2008.
- [3] D. Bauder, T. Bodnar, N. Parolya i W. Schmid, *Bayesian inference of the multi-period optimal portfolio for an exponential utility*, (2020), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047259X1930123X>.
- [4] ———, *Bayesian mean–variance analysis: optimal portfolio selection under parameter uncertainty*, (2021), <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14697688.2020.1748214#d1e191>.
- [5] J. M. Bernardo i A. F. M. Smith, *Bayesian Theory*, John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [6] T. Bodnar, M. Lindholm, V. Niklasson i E. Thorsen, *Bayesian portfolio selection using VaR and CVaR*, (2022), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300322002041>.
- [7] T. Bodnar, V. Niklasson i E. Thorsen, *Volatility Sensitive Bayesian Estimation of Portfolio VaR and CVaR*, (2022), <https://arxiv.org/pdf/2205.01444>.
- [8] R. A. DeFusco, D. W. McLeavey, J. E. Pinto i D. E. Runkle, *Quantitative Investment Analysis*, John Wiley & Sons Ltd., 2020.
- [9] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Dunson, A. Vehtari i D.B. Rubin, *Bayesian Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2014.
- [10] P. D. Hoff, *A First Course in Bayesian Statistical Methods*, Springer, 2009.

Sažetak

Glavna tema ovog rada je uvid u mjeru tržišnog rizika VaR.

U prvom poglavlju dana je definicija VaR-a te su uvedene tri osnovne metode za računanje istog. Također, uz svaku metodu dan je i primjer računanja VaR-a tom metodom na povijesnim podacima. Za kraj poglavlja uveden je i pojam uvjetnog VaR-a (CVaR-a).

U drugom poglavlju na VaR gledamo iz Bayesovske perspektive. Poglavlje započinje definicijom aposteriori prediktivne distribucije povrata portfelja te su dane formule za računanje VaR-a i CVaR-a u Bayesovskom okruženju. Poglavlje nastavljamo prezentacijom algoritma za računanje hiperparametara u konjugiranoj apriori distribuciji koji omogućava brzu prilagodbu na promjene volatilnosti. Dodatno, uvedena je i empirijska Bayesovska metoda za računanje hiperparametara. Na kraju su ilustrirane prednosti nove metode testiranjem na simuliranim i empirijskim podacima.

U trećem poglavlju nalaze se dokazi pojedinih pomoćnih tvrdnji korištenih u radu.

Summary

The main topic of this paper is an insight into the market risk measure, VaR.

In the first chapter, the definition of VaR is provided, along with an introduction to three fundamental methods for its calculation. Each method is accompanied by an example of calculating VaR using historical data. To conclude the chapter, the concept of Conditional VaR (CVaR) is introduced.

In the second chapter, VaR is examined from a Bayesian perspective. The chapter begins with the definition of the posterior predictive distribution of portfolio returns, followed by formulas for calculating VaR and CVaR in a Bayesian framework. The chapter continues with a presentation of an algorithm for specifying hyperparameters in a conjugate prior, which enables quick adaptation to changes in volatility. Additionally, the empirical Bayesian method for calculating hyperparameters is introduced. Finally, the advantages of the new method are illustrated through testing on simulated and empirical data.

The third chapter contains proofs of certain auxiliary results used in this thesis.

Životopis

Rođen sam 24. svibnja 2000. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Šestine, 2015. godine upisujem V. gimnaziju u Zagrebu. Za vrijeme gimnazijskog obrazovanja stekao sam Deutsches Sprachdiplom der Kultusministerkonferenz - Zweite Stufe (C1 razina).

U listopadu 2019. upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu kojeg završavam 2022. Iste godine upisujem sveučilišni diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom sveučilištu. 2024. godine dobivam nagradu Matematičkog odsjeka za najuspješnije studente završnih godina studija.