SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bojan Štetić

HALES-JEWETTOV TEOREM I NJEGOVE POSLJEDICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Nina Kamčev

Zagreb, studeni, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ramseyeva teorija je grana kombinatorike koja proučava prisutnost pravilnih podstruktura u velikim strukturama. Problem koji je započeo razvoj ove grane matematike je 1930. iskazao čovjek po kojem je ta grana dobila ime, Frank Ramsey. Taj rezultat je danas poznat kao Ramseyev teorem. 1927. i 1963. dokazuju se dva fundamentalna teorema Ramseyeve teorije, danas poznata kao Van der Waerdenov teorem i Hales-Jewettov teorem. Ti teoremi su omogućili razvoj bezbroj drugih tvrdnji i značajno ubrzali razvoj Ramseyeve teorije.

Temeljni pojam tih teorema je bojenje, odnosno preslikavanje koje svakom elementu strukture pridružuje neku boju. Van der Waerdenov teorem tvrdi da za svako bojenje prirodnih brojeva, u konačni broj boja, postoji jednobojni aritmetički niz proizvoljne konačne duljine. Teorem se može izreći i tako da za fiksni konačni broj boja r i duljinu aritmetičkog niza k, postoji broj $W(k, r)$ takav da za svako bojenje $\{1, \ldots, W(k, r)\}$ u r boja postoji jednobojni aritmetički niz duljine k. Iz ovog iskaza prepoznajemo skup $\{1, \ldots, W(k, r)\}$ kao veliku strukturu u kojoj tražimo pravilnu podstrukturu, jednobojni aritmetički niz.

Hales-Jewettov teorem mnogi smatraju najvažnijim rezultatom Ramseyeve teorije jer se pomoću njega mogu dobiti brojni drugi rezultati. On govori o minimalnoj dimenziji kocke na k elemenata, tako da ona sadržava jednobojni pravac u svakom konačnom bojenju. Može ga se smatrati apstraktnim poopćenjem Van der Waerdenovog teorema, ujedno i zbog toga što Van der Waerdenov teorem slijedi iz njega. Najbolji primjer za dočarati taj teorem je igra križić-kružić, s kojom su A. W. Hales i R. I. Jewett opisali svoj teorem u originalnom radu iz 1963. Križić-kružić je igra u kojoj 2 igrača naizmjenično boje elemente od $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ u 2 boje i pobjednik je igrač koji prvi poveže 3 elementa svoje boje u nizu. Poznato je da igra završava neriješeno uz optimalnu igru oba igrača, ali ako se poveća broj dimenzija igračeg polja s 2 na n, tada Hales-Jewettov teorem govori da za dovoljno veliku dimenziju igra ne može završiti neriješeno.

Matematičari se aktivno bave proučavanjem vrijednosti funkcija $W(k, r)$ i $HJ(k, r)$, gdje $HJ(k, r)$ označava minimalnu dimenziju kocke na k elemenata za čije svako bojenje u r boja postoji jednobojni pravac. Točne vrijednosti tih funkcija nisu poznate, već su poznate samo neke ograde, ovisne o parametrima k i r. Iz originalnih dokaza Van der Waerdenovog i Hales-Jewettovog teorema proizlaze glomazne gornje ograde koje se ne mogu izračunati jednostrukom for petljom. Te ograde se godinama nisu poboljšale, do 1987., kada je izraelski logičar Saharon Shelah dokazom Hales-Jewettovog teorema pokazao postojanje ograda izračunljivih jednostrukom for petljom. Gotovo 50 godina je najbolja donja ograda bio rezultat Berlekampa, do nedavno, kad su matematičari Ben Green i Zach Hunter došli do velikih pomaka u određivanju donjih ograda za 2-bojne Van der Waerdenove brojeve.

U ovom radu će nam primarni fokus biti na Van der Waerdenovom i Hales-Jewettovom teoremu, rezultatima koji slijede kao posljedice tih teorema i spomenutim ogradama za funkcije W i HJ.

U prvom poglavlju, prije svega, iznosimo osnovne oznake i definicije koje ćemo koristiti tokom cijelog rada. Dajemo definiciju Ramseyeve funkcije i bavimo se Ramseyevim teoremom, konačnom verzijom tog teorema za 2-skupove te poopćenjem na k-skupove. Nakon toga spominjemo beskonačnu verziju i primjere korištenja danog teorema.

U drugom poglavlju iznosimo iskaz i dokaz Van der Waerdenovog teorema dvostrukom indukcijom koji koristi pojam nizova fokusiranih bojom u fokusu f te skicu dokaza na primjeru. Uz to, ukratko ćemo objasniti povijesni tok nastajanja teorema i na kraju dajemo jači rezultat, s nešto lakšim dokazom, iz kojeg direktno slijedi Van der Waerdenov teorem.

U trećem poglavlju se bavimo Hales-Jewettovim teoremom. Dajemo detaljniji opis primjera igre križić-kružić te iznosimo definicije n-dimenzionalne kocke na k elemenata i kombinatornog pravca nakon čega dajemo iskaz teorema. Sljedeće pokazujemo kako se Van der Waerdenov teorem izvodi iz Hales-Jewettovog teorema. Dajemo samo skicu dokaza Hales-Jewettovog teorema, zbog sličnosti dokazu Van der Waerdenovog teorema. Prije skice dajemo pojmove i teoreme potrebne za sam dokaz. Zatim slijedi skica originalnog dokaza, s dvostrukom indukcijom. Dalje iznosimo pojmove potrebne za Shelahov dokaz te 2 rezultata koja su ključni dijelovi dokaza. Za kraj iznosimo sam Shelahov dokaz.

U četvrtom poglavlju predstavljamo ograde za funkcije W i HJ. Prije samih ograda, definiramo Ackermannovu hijerarhiju funkcija, koje se često koriste za ocjene funkcija koje ekstremno brzo rastu. Nakon toga iznosimo ograde dobivene iz dokaza Van der Waerdenovog i Hales-Jewettovog teorema s dvostrukom indukcijom, izražene uz pomoć funkcija Ackermannove hijerarhije. Dalje pokazujemo primitivno rekurzivnu ogradu za W i HJ, dobivenu pomoću Shelahovog dokaza. Sljedeće dokazujemo duplo eksponencijalnu gornju ogradu za $HJ(3, r)$, koju je David Conlon objavio u nedavnom radu. Na kraju poglavlja se bavimo donjim ogradama za Van der Waerdenove brojeve. Prvo predstavljamo spomenutu ogradu od Berlekampa i dokazujemo nešto slabiji rezultat. Na kraju predstavljamo ideje spomenutih konstrukcija Grena i Huntera, njihove razlike te neformalno opisujemo zašto one funkcioniraju, bez ulaženja u detalje dokaza.

Peto poglavlje se bavi korolarima Hales-Jewettovog teorema. Prvo iznosimo dokaz proširanog Hales-Jewettovog teorema te Gallaievog teorema i neke primjene Gallaievog teorema. Dalje iznosimo teorem o postojanju k uzastopnih kvadratnih ostataka modulo dovoljno velik prost broj i dokazujemo ga koristeći Van der Waerdenov teorem. Za kraj rada predstavljamo neke otvorene probleme Ramseyeve teorije s dosadašnjim rezultatima.

Poglavlje 1

Ramseyev teorem

U ovom poglavlju cilj je navesti osnovne oznake i definicije te nakon toga izreći i dokazati Ramseyev teorem. Često ćemo kroz rad imati mogućnost da pojmove, leme ili teoreme iskažemo na prirodnim brojevima i time pojednostavimo njihov iskaz, ali ne smanjimo njihovu općenitost. Stoga je većina oznaka vezana uz podskupove fiksne kardinalnosti te skup prirodnih brojeva i njegove podskupove.

U prvom potpoglavlju iznosimo oznake i definicije koje se često koriste u ovom radu. Većina oznaka je standardno, ali u nekim izvorima se razlikuju pa ih iznosimo na početku. Iskazujemo jednu od najčešće korištenih definicija u ovom radu te općenito u Ramseyevoj teoriji, definiciju r-bojenja, koja se koristi u dokazu gotovo svakog teorema koji će biti iskazan.

U drugom potpoglavlju prvo dajemo neke od oznaka i definicija specifičnih za Ramseyev teorem te nakon toga dajemo iskaz i dokaz teorema. Uz konačne verzije Ramseyevog teorema bit će predstavljena i beskonačna verzija. Definicije i dokazi iz ovog potpoglavlja preuzeti su iz [9].

1.1 Osnovne oznake i definicije

Sljedeće oznake će se koristiti kroz cijeli rad bez dodatnog objašnjavanja.

- $|X|$ = kardinalnost skupa X.
- $[n] = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
- $[x, y] = \{x, x+1, \dots, y\}$, $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$.
- $\binom{X}{k} = \{Y : Y \subseteq X, |Y| = k\}$.
- $\binom{X}{\leq k} = \{Y : Y \subseteq X, |Y| \leq k\}$.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^<$ označava skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gdje je $x_1 < \ldots < x_n$.
Ako je χ preslikavanje s domenom $\binom{A}{k}$, ponekad ćemo pisati $\chi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ umjesto $\chi(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\})$.
Također napominjemo da standardno $0 \notin \mathbb{N}$.

Definicija 1.1.1. *Za proizvoljan skup S preslikavanje $\chi : S \to [r]$ nazivamo **r-bojenje** od S.*

Za konačni broj boja $r \in \mathbb{N}$, r-bojenje skupa S zovemo *konačno bojenje skupa S*. Ako je χ r-bojenje skupa S, tada $\chi(s)$ zovemo *boja* od s, $s \in S$. Za $T \subseteq S$ kažemo da je *jednobojni* ili *monokromatski* za χ, ako je χ konstantno na T. Često ispuštamo „za χ" ako je implicitno jasno na koje bojenje se misli.

Definicija 1.1.2 (Dirichletov princip)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Ako $n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, jedna od kutija će sadržati barem 2 predmeta.*

Dirichletov princip poznat je u literaturi kao *Pigeonhole principle* i često se koristiti tokom ovog rada kako bi se pokazalo da u danom konačnom bojenju postoji neki broj objekata iste boje. Primjer korištenja je da u $kr+1$ objekata obojenih s r boja mora postojati barem $k + 1$ objekata iste boje.

1.2 Ramseyev teorem

Ramseyev teorem je jedan od fundamentalnih rezultata kombinatorike. Dokaz tog teorema prvi je dao Frank Ramsey. Ramsey je primarno bio zainteresiran na probleme matematičke logike, ekonomije i folozofije. Ramseyev teorem je on prvi put iskazao u radu 1930. godine, čija tema je bio problem iz matematičke logike. Time je započeo razvoj grane matematike danas zvane Ramseyeva teorija.

Ramseyeva teorija fokusira se na pronalaženje pravilnih podstruktura nekih većih struktura. Jedan od najčešćih ciljeva je određivanje uvjeta koje struktura mora zadovoljavati kako bi mogli garantirati da sadrži određenu pravilnu podstrukturu.

U svrhu iskazivanja Ramseyevog teorema uvodimo neke nove oznake po uzoru na [9].

Definicija 1.2.1. *Kažemo da vrijedi $n \to (l)$, ako za proizvoljno 2-bojenje od $\binom{[n]}{2}$ postoji skup $T \subseteq [n]$, $|T| = l$, takav da je $\binom{T}{2}$ monokromatski.*

Teorem 1.2.2. *Za sve $l \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n \to (l)$.*

Dokaz. Dokazat ćemo da za proizvoljni $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{2l-1} - 1 \to (l)$. Fiksirajmo skup S_1, takav da je $|S_1| \geq 2^{2l-1} - 1$, i proizvoljno bojenje χ od $[S_1]^2$. Sada za svaki $1 \leq i \leq 2l - 1$, skup S_i i element x_i definiramo u dva koraka:

1. Ako je S_i već definiran, uzimamo proizvoljni $x_i \in S_i$.

2. Ako je x_i definiran, imamo skupove

$$T_j = \{u \in S_i : u \neq x_i,\ \chi(x_i, u) = j\}, \quad j = 1, 2.$$

S_{i+1} definiramo kao veći skup od T_1 i T_2. Iz $|T_1| + |T_2| = |S_i| - 1$ slijedi $|S_{i+1}| \geq (|S_i| - 1)/2$.

Zato što je S_1 dovoljno velik možemo definirati $x_1, \ldots, x_{2l-1}$ prije nego S_i postane $\emptyset$. Sada definiramo novo bojenje

$$\chi^* \{x_1, \ldots, x_{2l-1}\} \to \{1, 2\},$$

za koje je $\chi^*(x_i)$ jednak onom $j \in \{1, 2\}$ za koji je $\chi(x_i, y) = j$ za sve $y \in S_{i+1}$. To bojenje razdvaja $2l - 1$ elemenata u 2 boje pa prema Dirichletovom principu moraju postojati $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ takvi da

$$\chi^*(x_{i_s}) = j \quad \text{za sve } 1 \leq s \leq l,$$

za neki $j \in \{1, 2\}$. Tada je, za sve $1 \leq s < t \leq l$, $x_{i_t} \in S_{i_t} \subseteq S_{i_s+1}$ pa je $\chi(x_{i_s}, x_{i_t}) = j$. Iz toga se vidi da je $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$ traženi skup. □

Prethodni teorem moguće je povezati s teorijom grafova. Neka je n neki broj za koji vrijedi $n \to (a)$ i G proizvoljan neusmjeren graf s n vrhova, bez ciklusa. Možemo poistovjetiti 2-bojenje potpunog grafa s n vrhova s grafom G na način da je brid obojen u crveno akko je prisutan u G, dok je inače obojen plavo. To pridruživanje očito je bijekcija. U ovom formatu nam teorem govori da bilo koji graf G s n vrhova sadrži ili kliku s a vrhova ili nezavisan skup s a vrhova.

Iskaz prethodnog teorema se može poopćiti na r-bojenja. U svrhu preciznijeg iskazivanja tog teorema proširimo prethodno uvedenu oznaku.

Definicija 1.2.3. *Kažemo da vrijedi $n \to (l)_r$, ako za proizvoljno r-bojenje od $\binom{[n]}{2}$ postoji skup $T \subseteq [n]$, $|T| = l$, takav da je $\binom{T}{2}$ monokromatski. Ako r nije napomenut, pretpostavlja se da je $r = 2$.*

Teorem 1.2.4. *Za sve $l \in \mathbb{N}, r \geq 2$, postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $n \to (l)_r$.*

Dokaz. U dokazu koristimo matematičku indukciju po broju boja r, gdje za fiksni r dokazujemo tvrdnju za sve $l \in \mathbb{N}$. U prethodnom teoremu smo dokazali rezultat za $r = 2$. Pretpostavimo da rezultat vrijedi za $r - 1$ i da je $r > 2$.

Fiksirajmo proizvoljan $l \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci indukcije i bazi indukcije postoje $n, n' \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $n' \to (l)$ i $n \to (n')_{r-1}$. Tvrdimo da vrijedi $n \to (l)_r$. Neka je χ proizvoljno r-bojenje od $\binom{[n]}{2}$. Definiramo $(r-1)$-bojenje χ^* od $\binom{[n]}{2}$ kao

$$\chi^*(x) = \begin{cases} \chi(x) & \text{ako je } \chi(x) \leq r - 1, \\ r - 1 & \text{ako je } \chi(x) = r. \end{cases}$$

Prema pretpostavci indukcije, postoji $T \subseteq [n]$, $|T| = n'$, takav da je $\binom{T}{2}$ monokromatski pod χ^*. Ako je boja od $\binom{T}{2}$ manja od $r-1$ onda smo gotovi, jer je iz definicije jasno da $n' \geq l$, iz čega slijedi da je za proizvoljni $T' \subseteq T \subseteq [n]$, $|T| = l$, $\binom{T'}{2}$ monokromatski pod χ, jer je to bojenje isto kao χ^* na svim elementima čija je boja manja od r u χ. U suprotnom je $\binom{T}{2}$ obojen u 2 boje pod χ. Sada zbog $|T| = n'$, uz kanonsku identifikaciju T sa $[n']$, slijedi da postoji $T' \subseteq T \subseteq [n]$, $|T'| = l$, za koji je $\binom{T'}{2}$ monokromatski pod χ. Time je dokazan korak indukcije i tvrdnja teorema. □

Tehnika korištena za dokaz koraka indukcije prethodnog teorema se ponekad naziva „colour blindness". Ime se temelji na tome što se neke dvije boje poistovjete i tada se može iskoristiti pretpostavka indukcije za jednu boju manje. Korištenjem te metode ne dobije se dobra ocjena za veličinu traženog broja n, ali u ovom radu se neće razmatrati ocjene tog broja pa je korištena ta metoda zbog svoje jednostavnosti.

Prethodni teorem se može dokazati identično kao teorem za 2 boje, pri čemu umjesto $2^{2l-1} - 1 \to (l)$ dokazujemo da vrijedi $r^{(l-1)r+1} - 1 \to (l)_r$. Kao što smo napomenuli, u ovom radu nećemo razmatrati ocjene tih brojeva pa stoga ne iznosimo taj dokaz.

Kako bismo iskazali Ramseyev teorem za 2-skupove potrebno je još jedno proširenje notacije.

Definicija 1.2.5. *Kažemo da vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$, ako za proizvoljno r-bojenje od $\binom{[n]}{2}$ postoje i, $1 \leq i \leq r$, te skup $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$, takav da je $\binom{T}{2}$ monokromatski, boje i.*

Ako je $l_1 = \ldots = l_r = l$, oznaka se slaže s $n \to (l)_r$. Kao dosad, ako broj boja r nije definiran, pretpostavljamo da je $r = 2$. Stoga, $n \to (l)$, $n \to (l)_2$ i $n \to (l, l)$ označavaju istu izjavu.

Dana notacija ima neka trivijalna svojstva iz kojih će, uz prethodni teorem, slijediti tvrdnja Ramseyevog teorema.

Lema 1.2.6. *Za danu notaciju vrijede sljedeća svojstva:*

1. *Ako je $l'_i \leq l_i$, $1 \leq i \leq r$, tada iz $n \to (l_1, \ldots, l_r)$ slijedi $n \to (l'_1, \ldots, l'_r)$.*

2. *Ako je $m \geq n$, tada iz $n \to (l_1, \ldots, l_r)$ slijedi $m \to (l_1, \ldots, l_r)$.*

3. *Neka je σ permutacija od $[r]$. Tada vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$ ako i samo ako vrijedi $n \to (l_{\sigma_1}, \ldots, l_{\sigma_r})$.*

4. *$n \to (l_1, \ldots, l_r)$ ako i samo ako $n \to (l_1, \ldots, l_r, 2)$.*

Dokaz. Svojstvo 1 vrijedi jer ako za proizvoljno r-bojenje $\binom{[n]}{2}$ postoje i, T kao iz definicije, tada je bilo koji $S \subseteq T$, $|S| = l'_i$, monokromatski skup boje i.

Za svojstvo 2, pošto je $\binom{[n]}{2} \subseteq \binom{[m]}{2}$, svako r-bojenje $\binom{[m]}{2}$ zadaje r-bojenje $\binom{[n]}{2}$ i za njega postoje traženi i, T iz definicije.
Dokaz za svojstvo 3. Neka vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$ i neka je χ proizvoljno r-bojenje $\binom{[n]}{2}$. Definirajmo r-bojenje $\alpha = \sigma \circ \chi$. Zbog pretpostavke postoje i, $1 \leq i \leq r$ te $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$, takvi da je $\binom{T}{2}$ monokromatski boje i u α. Zato što je σ permutacija od $[r]$ postoji jedinstveni j, $1 \leq j \leq r$, takav da je $\sigma_j = i$. Sada se vidi da zapravo postoje j, $1 \leq j \leq r$, te $T \subseteq [n]$, $|T| = l_{\sigma_j}$, takvi da je $\binom{T}{2}$ monokromatski boje j u χ. Prema definiciji to upravo znači $n \to (l_{\sigma_1}, \ldots, l_{\sigma_r})$. Rezultat u suprotnom smjeru dobivamo gotovo identično uz korištenje permutacije σ^{-1}.
Za svojstvo 4, pretpostavimo prvo da vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$. Ako za neko $(r+1)$-bojenje $\binom{[n]}{2}$ postoji element obojen u boju $r+1$ tada vrijedi tražena tvrdnja. Ako ne postoji, onda je to bojenje zapravo r-bojenje i prema pretpostavci opet vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r, 2)$. Sad pretpostavimo $n \to (l_1, \ldots, l_r, 2)$. Svako r-bojenje je ujedno i $(r+1)$-bojenje, ali nema elemenata obojenih u boju $r+1$. Stoga zbog pretpostavke i nedostatka elemenata obojenih u $r+1$ vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$. □

Definicija 1.2.7. *Minimalni n za koji vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$ označavamo s $R(l_1, \ldots, l_r)$ i funkciju R nazivamo* ***Ramseyeva funkcija****. Sa $R(l; r)$ označavamo $R(l_1, \ldots, l_r)$, gdje je $l_1 = \ldots = l_r$. Kao dosad, ako r nije napomenut podrazumijevamo $r = 2$ i uvodimo oznaku $R(l) = R(l; 2) = R(l, l)$.*

Iz svojstva 1 leme 1.2.6 zaključujemo da je $R(l_1, \ldots, l_r)$ monotona po svakoj varijabli. Iz svojstva 3 vidimo da je simetrična, odnosno da njena vrijednost ne ovisi o redoslijedu njenih argumenata. Iz svojstva 4 se zaključuje da vrijedi $R(l_1, \ldots, l_r, 2) = R(l_1, \ldots, l_r)$ i $R(l, 2) = l$.

Sada imamo sve alate i definicije potrebne da iskažemo centralni rezultat ovog potpoglavlja.

Teorem 1.2.8 (Ramseyev teorem za 2-skupove)**.** *Funkcija R je dobro definirana. Preciznije, za sve $l_1, \ldots, l_r$ postoji n takav da je $n \to (l_1, \ldots, l_r)$.*

Primijetimo da je zbog dobre uređenosti skupa prirodnih brojeva za dobru definiranost $R(l_1, \ldots, l_r)$, za neke $l_1, \ldots, l_r$, dovoljno da postoji n takav da vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 1.2.4 i leme 1.2.6. □

Ramseyev teorem za 2-skupove može se poopćiti na bojenja skupa $\binom{[n]}{k}$. Kako bi mogli iskazati generaliziranu verziju teorema potrebno je dodatno proširiti prije uvedene oznake.

Definicija 1.2.9. *Kažemo da vrijedi $n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$ ako za svako r-bojenje $[n]^k$ postoje i, $1 \leq i \leq r$, $T \subseteq [n]$, $|T| = l_i$, takvi da je $[T]^k$ monokromatski boje i. Ako je $l_1 = \ldots = l_r = l$ koristimo oznaku $n \to (l)^k_r$. Ako r ili k nisu napomenuti, podrazumijeva se $r = 2$ ili $k = 2$.*

Definicija 1.2.10. *Sa R_k označavamo* ***Ramseyevu funkciju*** *za k-skupove, koju definiramo kao:*

- $R_k(l_1, \dots, l_r) = min\{n_0\text{: za sve } n \geq n_0 \text{ vrijedi } n \to (l_1, \dots, l_r)^k\}$,
- $R_k(l; r) = min\{n_0\text{: za sve } n \geq n_0 \text{ vrijedi } n \to (l)^k_r\}$,
- $R_k(l) = min\{n_0\text{: za sve } n \geq n_0 \text{ vrijedi } n \to (l)^k\}$.

Teorem 1.2.11 (Ramseyev teorem)**.** *Funkcija R je dobro definirana. Preciznije, za sve $k, l_1, \dots, l_r$ postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $n \to (l_1, \dots, l_r)^k$.*

Ovu verziju Ramseyevog teorema nećemo dokazivati, ali dokaz koristi sličnu ideju kao dokaz teorema 1.2.2 za 2-skupove i 2 boje te se može pronaći u [9].

U definiciji Ramseyeve funkcije i iskazu Ramseyevog teorema vidi se što je zapravo jedan od ciljeva proučavanja Ramseyeve teorije. Ramseyev teorem govori da uvijek postoji dovoljno velika struktura $\binom{[n]}{k}$ koja za svako bojenje sadrži pravilnu podstrukturu, monokromatski $\binom{T}{k}$, $T \subseteq [n]$. Navest ćemo neke od zanimljivih rezultata Ramseyeve teorije i pokazati na koji način se mogu pokazati nešto slabije verzije tih rezultata koristeći Ramseyev teorem.

Robert P. Dilworth pokazao je da bilo koji parcijalni uređaj P na barem $ab+1$ elemenata sadrži ili lanac duljine $a+1$ ili antilanac duljine $b+1$. Ako promatramo parcijalni uređaj na $R(a+1, b+1)$ elemenata, umjesto $ab+1$, dobivamo isti rezultat kao korolar Ramseyevog teorema. Za dani parcijalni uređaj obojimo $\{x, y\}$ crveno ako su x i y usporedivi, a plavo ako nisu. Crveni $(a+1)$-skup je traženi lanac, a plavi $(b+1)$-skup je traženi antilanac.

P. Erdős i G. Szekeres su dokazali da svaki niz duljine n^2+1 sadrži monoton podniz duljine $n+1$. Ako zamijenimo n^2+1 sa $R(n+1, n+1)$, teorem slijedi kao korolar Ramseyevog teorema. Za dani niz, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obojimo $\{i, j\}^<$ crveno ako vrijedi $a_i < a_j$, a inače plavo. Za crveni $(n+1)$-skup $\{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\}^<$ vrijedi $a_{k_i} < a_{k_j}$, $1 \leq i < j \leq n+1$, odnosno podniz $(a_{k_m})_{1\leq m\leq n+1}$ je rastući. Analogno iz plavog $(n+1)$-skupa dobivamo padajući podniz.

Turnir je usmjeren graf s n vrhova takav da za svaka dva različita vrha x, y sadrži točno jedan od bridova (x, y) i (y, x). Za turnir kažemo da je tranzitivan ako postojanje bridova (x, y) i (y, z) implicira postojanje brida (x, z). Drugim riječima, postoji strog totalni uređaj na skupu vrhova grafa takav da je (x, y) brid u grafu ako i samo ako $x < y$. P. Erdős i L. Moser dokazali su da svaki turnir s n igrača sadrži tranzitivni podturnir s $v(n)$ igrača, gdje je $v(n)$ funkcija koja teži u beskonačno kad n teži u beskonačno. Za neki turnir, poistovjetimo n vrhova sa skupom $[n]$ te definiramo 2-bojenje $\binom{[n]}{2}$, gdje $\{x, y\}^<$ bojimo crveno ako je brid (x, y) u grafu, a u plavu ako je brid (y, x) u grafu. Za svaki k postoji dovoljno velik n takav da je $n \geq R(k, k)$. Sada za dani turnir s n igrača uzmemo najveći k takav da vrijedi $n \geq R(k, k)$. Takav k mora postojati jer je $n \geq R(1, 1) = 1$, a $R(n+1, n+1) > n$ pa mora vrijediti $1 \leq k \leq n$. Za definirano bojenje sada postoji crveni ili plavi skup kardinalnosti

k čiji elementi induciraju podgraf koji je turnir i uz to je na njegovim vrhovima definiran totalni uređaj, odnosno taj podturnir je tranzitivan. Definiramo $v(n) = max\{k : n \geq R(k,k)\}$. Sada zbog dobre definiranosti Ramseyeve funkcije za svaki k postoji dovoljno velik n takav da vrijedi $n \geq R(k,k)$ i $v(n) \geq k$. Stoga $v(n)$ teži u beskonačno kad n teži u beskonačno. Ovime je dokazano postojanje takvog $v(n)$, ali ograde dane u radu Erdősa i Mosera su jače.

Ramseyev teorem može se iskazati i u beskonačnom obliku čiji dokaz koristi istu ideju kao dokaz teorema 1.2.2 za 2-skupove i 2 boje. Iz tog razloga iznosimo samo iskaz te verzije, dok se dokaz može pronaći u [9].

Teorem 1.2.12. *Za svako konačno bojenje χ od $\binom{\mathbb{N}}{2}$ postoji beskonačan $A \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $\binom{A}{2}$ monokromatski.*

Poglavlje 2

Van der Waerdenov teorem

Van der Waerdenov teorem jedan je od fundamentalnih rezultata koji je započeo razvoj Ramseyeve teorije. Prvi ga je naveo Issai Schur kao hipotezu dok je radio na distribuciji kvadratnih ostataka u $\mathbb{Z}_p$. Van der Waerden je čuo za tu hipotezu od Baudeta, koji je u to vrijeme bio student na sveučilištu u Göttingenu i kasnije se referirao na taj teorem kao Baudetovu hipotezu. Teorem je prvi put iskazan za 2 boje, a dokaz je B. L. van der Waerden izdao 1927. godine za verziju teorema s proizvoljnim konačnim brojem boja.

Teorem 2.0.1 (Van der Waerdenov teorem za 2 boje)**.** *Ako $\mathbb{N}$ particioniramo u dvije klase, tada barem jedna od njih mora sadržavati aritmetičke nizove proizvoljnih duljina.*

Kad se danas govori o Van der Waerdenovom teoremu misli se na nešto općenitiju verziju u kojoj se umjesto bojenja cijelog $\mathbb{N}$ razmatra bojenje nekog konačnog početnog segmenta $[n]$ i traži se postojanje monokromatskog aritmetičkog niza određene duljine. Uz to ćemo razmatrati konačna bojenja s r boja, umjesto samo dvije. Ta verzija teorema je ekvivalentna prije iskazanoj verziji, što se može dokazati argumentom dijagonalizacije. Ova promjena je ključna za skoro sve poznate dokaze teorema.

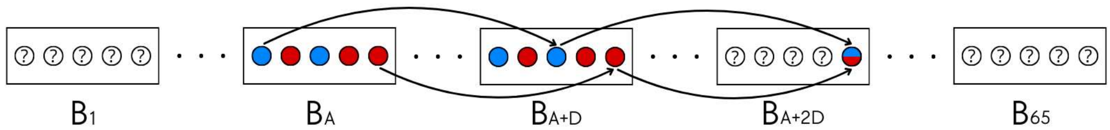
Teorem 2.0.2 (Van der Waerdenov teorem)**.** *Za sve $k, r \in \mathbb{N}$ postoji minimalni prirodni broj $W(k, r)$ takav da, za sve $n \geq W(k, r)$, proizvoljno r-bojenje od $[n]$ sadrži barem jedan monokromatski aritmetički niz duljine k.*

U prvom potpoglavlju razmotrit ćemo primjer za malene k, r i na njemu pokazati ideju dokaza teorema. Nakon toga dokazat ćemo Van der Waerdenov teorem s generaliziracijom ideje korištene u tom primjeru.

U drugom potpoglavlju definirat ćemo klase l-ekvivalencije od $\binom{0 \cup [l]}{m}$ i pomoću njih izreći i dokazati snažniju tvrdnju iz koje slijedi Van der Waerdenov teorem.

2.1 Van der Waerdenov teorem

Pogledajmo slučaj $k = 3, r = 2$. Pokažimo da je $W(3,2) \leq 325$. Podijelimo $[1,325]$ u 65 blokova veličine 5. Preciznije, $[1,325] = B_1 \cup \ldots \cup B_{65}$, pri čemu je $B_i = [5(i-1)+1, 5i]$. Svaki blok možemo obojiti u $2^5 = 32$ boje. Iz toga slijedi da unutar prva 33 bloka postoje 2 bloka istog uzorka. Neka su to blokovi B_a i B_{a+d}, gdje je $a, a+d \leq 33$ i $d > 0$. Primijetimo da blok B_{a+2d} također postoji, ali nije nužno iste boje kao B_a i B_{a+d}. Prema Dirichletovom principu unutar prva 3 elementa u B_a moraju postojati 2 elementa iste boje, nazovimo ih $b, b+l \in [5(a-1)+1, 5a-2]$, $l > 0$. Zbog odabrane veličine bloka je element $b+2l$ također u bloku B_a. Ako je $b+2l$ iste boje kao b i $b+l$, onda smo našli traženi niz. U suprotnom su $b+5d$ i $b+l+5d$ iste boje kao b, a $b+2l+5d$ je također element bloka B_{a+d} koji je iste boje kao $b+2l$. Sada imamo aritmetičke nizove b, $b+l+5d$, $b+2l+10d$, u kojem su prva dva elementa crvene boje, te $b+2l$, $b+2l+5d$, $b+2l+10d$, u kojem su prva dva elementa plave boje. Također, oba niza su „fokusirana" u točki $b+2l+10d$, koja je član bloka B_{a+2d}. Ta točka mora poprimiti jednu od dvije moguće boje, zbog čega sigurno postoji monokromatski niz duljine 3. Skicu opisanog primjera može se vidjeti na slici 2.1.



Slika 2.1: Skica dokaza Van der Waerdenovog teorema za $k = 3$ i $r = 2$

Glavna ideja dokaza je takozvano „fokusiranje" monokromatskih aritmetičkih nizova, međusobno različitih boja. Općenito, kad će biti r boja cilj je konstruirati r monokromatskih nizova duljine $k-1$ fokusiranih u istu točku i iz toga zaključiti postojanje niza duljine k. Elemente raspodijelimo u blokove 1. razine, nakon toga te blokove rasporedimo u blokove 2. razine i ponavljamo taj postupak dok ne dođemo do blokova $(r-1)$-ve razine. Pomoću blokova i-te razine prelazimo s i nizova fokusiranih u jednu točku na $i+1$ nizova fokusiranih u jednu točku. Zbog urednosti zapisa definirat ćemo pojam aritmetičkih nizova fokusiranih bojom.

Prije definicija i dokaza, zbog urednosti zapisa, preuzimamo oznaku $a + [0,k) \cdot r$ za aritmetički niz $a, a+r, \ldots, a+(k-1)r$ iz [10]. Dokaz spaja veličine intervala iz [9] i dokaz dan u [6]. Temelj dokaza je dvostruka indukcija po argumentima k i r, zbog čega $W(k,r)$ dobiven tim dokazom raste ekstremno brzo. Ogradama dobivenim iz tog dokaza ćemo se detaljnije baviti u 4. poglavlju.

Definicija 2.1.1. *Za d aritmetičkih nizova, $a_1 + [0,k) \cdot r_1, \ldots, a_d + [0,k) \cdot r_d$, kažemo da su **fokusirani** u f ako vrijedi $a_i + kr_i = f$, za sve $1 \leq i \leq d$. Tada f nazivamo **fokus** tih* *nizova. Dodatno, ako je svaki od tih nizova monokromatski i uz to su svi nizovi međusobno različitih boja, kažemo da su nizovi* ***fokusirani bojom*** *u f.*

Dokaz Van der Waerdenovog teorema. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k, duljini aritmetičkog niza. Baza indukcije za $k = 1$ je trivijalna, svaki element je monokromatski aritmetički niz duljine 1. Pretpostavimo da rezultat vrijedi za $k-1$. Sada tvrdimo da vrijedi sljedeća tvrdnja:

> Za svaki $d \leq r$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za svako r-bojenje od $[n]$ postoji ili monokromatski aritmetički niz duljine k ili d aritmetičkih nizova duljine $k-1$ fokusiranih bojom u f, gdje je $f \in [n]$.

Iz ove tvrdnje za $d = r$ slijedi korak vanjske indukcije, a time i tvrdnja teorema. To vrijedi jer ako postoji r monokromatskih aritmetičkih nizova duljine $k-1$ fokusiranih bojom u f, tada f mora poprimiti jednu od r boja i time stvoriti monokromatski niz duljine k.

Za dokaz te tvrdnje koristimo matematičku indukciju po d. Za $d = 1$ možemo uzeti $n = 2W(k-1, r) - 1$. Prvih $W(k-1, r)$ elemenata sigurno ima monokromatski aritmetički niz duljine $k-1$, a $[n]$ sadrži njegov fokus. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $d-1$ i da n zadovoljava tvrdnju. Pokažimo da $n' = (2W(k-1, r^n) - 1)n$ zadovoljava tvrdnju za d.

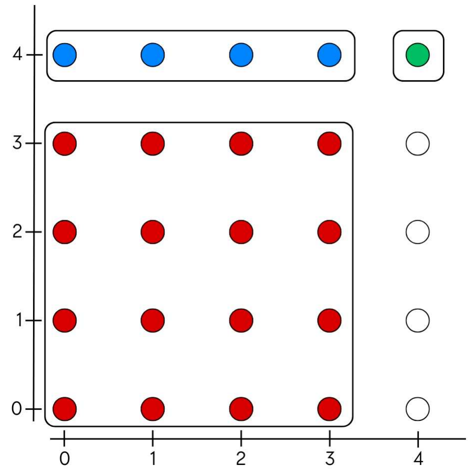
Fiksirajmo proizvoljno r-bojenje od $[n']$. Ako ono sadrži monokromatski aritmetički niz duljine k smo gotovi. Stoga, pretpostavimo da to nije slučaj. Podijelimo obojeni interval u $2W(k-1, r^n) - 1$ blokova veličine n. Preciznije, $[n'] = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{2W(k-1,r^n)-1}$, gdje je $B_i = [n(i-1) + 1, ni]$. Svaki blok se može obojiti na r^n načina, stoga unutar prvih $W(k-1, r^n)$ blokova postoji niz $B_s, B_{s+t}, \ldots, B_{s+(k-2)t}$, $1 \leq s, t \leq W(k-1, r^n)$, blokova istog uzorka boja. Primijetimo da blok $B_{s+(k-1)t}$ postoji, jer je $s + (k-1)t < 2W(k-1, r^n)$, ali ne mora biti istog uzorka boja kao prvih $k-1$ blokova niza.

Prema pretpostavci indukcije B_s sadrži $d-1$ aritmetičkih nizova duljine $k-1$ fokusiranih bojom u f, pri čemu je $f \in B_s$. Označimo te nizove s $a_1 + [0, k-1) \cdot r_1, \ldots, a_{d-1} + [0, k-1) \cdot r_{d-1}$, gdje je $r_1, \ldots, r_{d-1} > 0$. Zato što su svi blokovi $B_s, B_{s+t}, \ldots, B_{s+(k-2)t}$ istih boja, slijedi da blok B_{s+it}, $1 \leq i \leq k-2$, sadrži nizove $(a_1+itn)+[0, k-1)\cdot r_1, \ldots, (a_{d-1}+itn)+[0, k-1)\cdot r_{d-1}$ koji su istih boja kao odgovarajući nizovi u B_s. Uz to, B_{s+it} sadrži fokus tih nizova, $f + itn$, koji je iste boje kao f. Sada možemo konstruirati d nizova $a_1 + [0, k-1) \cdot (r_1 + tn), \ldots, a_{d-1} + [0, k-1) \cdot (r_{d-1} + tn), f + [0, k-1) \cdot (tn)$. Svi ti nizovi su monokromatski, zbog pretpostavke indukcije i odabranog n', te međusobno različitih boja, gdje to vrijedi za prvih $d-1$ nizova prema pretpostavci indukcije, a niz fokusa je drugačije boje nego ostalih $d-1$ promatranih nizova jer bi u protivnom postojao monokromatski aritmetički niz duljine k u $[n']$. Uz to su svi nizovi fokusirani u $f + (k-1)tn$, koji je element bloka $B_{s+(k-1)t}$. Sada, ako $f + (k-1)tn$ poprima istu boju kao neki od k nizova, imamo monokromatski aritmetički niz duljine k, u protivnom imamo d aritmetičkih nizova fokusiranih bojom u $f + (k-1)tn \in [n']$. Time je pokazan korak unutarnje indukcije, a time i korak vanjske indukcije te cijeli teorem. □

2.2 Klase l-ekvivalencije i snažniji rezultat

Definicija 2.2.1. *Uz fiksni m, definiramo relaciju ekvivalencije, gdje za svaki* $0 \leq i \leq m$*, skup* $(x_1, \ldots, x_m) \in [0, l]^m$ *u kojima se l nalazi na i najdesnijih indeksa te nigdje drugdje tvori klasu ekvivalencije. Za* $i = 0$*, to je klasa svih* $(x_1, \ldots, x_m) \in [0, l]^m$ *u kojima se l ne pojavljuje ni na kojem indeksu. Tu relaciju nazivamo* ***l-ekvivalencija****.*

Očito je da su klase l-ekvivalencije disjunktne. Klase ekvivalencije particioniraju skup $\{(x_1, \ldots, x_m) \in [0, l]^m : \text{ postoji } i \in [0, m] \text{ takav da } x_j \in [0, l-1] \text{ za } j \leq i, \text{ te } x_j = l \text{ za } j > i\}$, a preostale m-torke iz $[0, l]^m$ nisu član niti jedne klase. Klase l-ekvivalencije za $l = 4$ i $m = 2$ se mogu vidjeti na slici 2.2.



Slika 2.2: Klase l-ekvivalencije za $l = 4$ i $m = 2$

Definicija 2.2.2. *Za* $l, m \geq 1$*, definiramo* $S(l, m)$ *kao tvrdnju: Za svaki r, postoji* $N(l, m, r)$ *takav da za svako r-bojenje* $C : [1, N(l, m, r)] \to [1, r]$ *postoje prirodni brojevi* $a, d_1, \ldots, d_m$ *takvi da je* $C(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i)$ *konstantno za sve* $(x_1, \ldots, x_m)$ *koji pripadaju istoj klasi l-ekvivalencije, za dani m.*

Tvrdnja $S(l, 1)$ je zapravo tvrdnja Van der Waerdenovog teorema za aritmetičke nizove duljine l. Dokazat ćemo da $S(l, m)$ vrijedi za sve l, m i time dokazati tvrdnju Van der Waerdenovog teorema. Taj dokaz prati sličnu ideju kao prijašnji dokaz Van der Waerdenovog teorema, gdje se koristi indukcija i podjela elemenata u blokove i tih blokova u još veće blokove.

Teorem 2.2.3. *$S(l,m)$ vrijedi za $l,m \geq 1$.*

Dokaz. $S(1,1)$ vrijedi za $N(1,1,r) = 2$ i $a = d_1 = 1$. Pokazujemo da vrijede dvije tvrdnje iz kojih induktivno slijedi tvrdnja teorema.

1. $S(l,m')$ za sve $m' \leq m \Rightarrow S(l,m+1)$.

   Fiksirajmo proizvoljni r. Neka je $M = N(l,m,r)$, $M' = N(l,1,r^M)$ te C proizvoljno r-bojenje od $[MM']$. Podijelimo elemente u M' blokova veličine M i definiramo r^M-bojenje $C' : [1,M'] \to [1,r^M]$, koje reprezentira bojenje blokova, $C'(k) = C'(k')$ ako i samo ako $C(kM - j) = C(k'M - j)$, za svaki $0 \leq j < M$. Prema pretpostavci postoje a' i d' takvi da je $C'(a' + xd')$ konstantno za $x \in [0, l-1]$. Neka je $I = [a'M - (M-1), a'M]$ blok s indeksom a'. I je skup kardinalnosti M pa prema pretpostavci postoje $a, d_2, \ldots, d_{m+1}$ takvi da je suma $a + \sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i \in I$, gdje je $x_i \in [0,l]$ za sve $2 \leq i \leq m+1$, i $C(a + \sum_{i=2}^{m+1} x_i d_i)$ je konstantno na svakoj klasi l-ekvivalencije. Stavimo $N(l, m+1, r) = MM'$ i definiramo prirodne brojeve iz definicije $\bar{a} = a$, $\bar{d}_1 = d'M$ te $\bar{d}_i = d_i$ za $2 \leq i \leq m+1$. Sada je jasno da za te vrijednosti vrijedi tvrdnja iz $S(l, m+1)$ za dani r. Zbog proizvoljnosti r, vrijedi $S(l, m+1)$.

2. $S(l,m)$ za sve $m \geq 1 \Rightarrow S(l+1, 1)$.

   Fiksirajmo proizvoljni r. Neka je C proizvoljno r-bojenje $[1, N(l,r,r)]$. Prema pretpostavci postoje $a, d_1, \ldots, d_r$ takvi da vrijedi $a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i \in [1, N(l,r,r)]$ za $x_i \in [0,l]$, $1 \leq i \leq r$, i $C(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$ je konstantno na klasama l-ekvivalencije. Prema Dirichletovom principu postoje $1 \leq u < v \leq r+1$ takvi da vrijedi:

   $$C\left(a + \sum_{i=u}^{r} l d_i\right) = C\left(a + \sum_{i=v}^{r} l d_i\right).$$

   Zbog toga i zbog konstantnosti $C(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$ na klasama l-ekvivalencije slijedi

   $$C\left(\left(a + \sum_{i=v}^{r} l d_i\right) + x\left(\sum_{i=u}^{v-1} d_i\right)\right)$$

   konstantno za $x \in [0,l]$. Zbog proizvoljnosti r vidimo da vrijedi $S(l+1, 1)$.

□

Poglavlje 3

Hales-Jewettov teorem

Hales-Jewettov teorem je jedan od fundamentalnih teorema Ramseyeve teorije i pomoću njega se mogu dobiti brojni drugi rezultati Ramseyeve teorije, od kojih ćemo neke predstaviti u 5. poglavlju. Kao što je spomenuto u uvodu, on govori o minimalnoj dimenziji kocke na k elemenata, tako da ona sadržava monokromatski pravac u svakom konačnom bojenju. Smatramo ga apstraktnim poopćenjem Van der Waerdenovog teorema.

U originalnom radu, gdje su A. W. Hales i R. I. Jewett predstavili svoj teorem, razmatrali su generalizacije igre križić-kružić. Igru igraju 2 igrača tako da naizmjenično biraju elemente od $[3]^2$ i pobjednik je onaj igrač koji prvi odabere elemente koji tvore pravac, u širem geometrijskom smislu. Poznato je da će igra završiti neriješeno ako oba igrača igraju optimalno. Možemo zamisliti da igrač odabirom nekog elementa oboji taj element u svoju broju. Generalno se može definirati igra „N-dimenzionalni križić-kružić do k u redu" s r igrača, gdje r igrača, u nekom redoslijedu, igra na $[k]^N$ i svaki igrač tijekom svog poteza oboji neki, dosad neobojeni, element u svoju boju. Prvi igrač koji je obojio pravac u svoju boju je pobjednik. Hales-Jewettov teorem govori da za dovoljno veliku dimenziju, ta igra ne može završiti neriješeno.

U prvom potpoglavlju predstavit ćemo definicije potrebne za izreći teorem te u kratkim crtama predstaviti ideju klasičnog dokaza koji koristi dvostruku indukciju. Dokaz nećemo napisati u potpunosti jer je idejno vrlo sličan dokazu Van der Waerdenovog teorema. Nakon iskaza teorema ćemo pokazati kako iz njega slijedi tvrdnja Van der Waerdenovog teorema.

U drugom potpoglavlju predstavit ćemo Shelahov dokaz Hales-Jewettovog teorema. Prije samog dokaza dajemo definicije koje Shelah koristi u dokazu te 2 dodatna teorema, koji su temeljni dio dokaza. Dokaz sam po sebi ne dokazuje nikakvu jaču tvrdnju, ali pošto koristi jednostruku indukciju možemo dobiti fundamentalno jaču gornju ogradu za dimenziju kocke.

3.1 Hales-Jewettov teorem

Van der Waerdenov teorem možemo promatrati kao rezultat koji govori o konačnim nizovima stvorenih od konačnih skupova. Hales-Jewettov teorem zapravo makne sve nepotrebne elemente Van der Waerdenovog teorema i iskazuje srž Ramseyeve teorije. On je ključan element za mnogo rezultata i temelj većine naprednijih radova Ramseyeve teorije.

Prije samog iskaza teorema, potrebno je uvesti neke oznake kako bi lakše izrekli njegovu poantu.

Definicija 3.1.1. *Definiramo n-**dimenzionalnu kocku** na k elemenata, oznaka $[k]^n$, kao*

$$[k]^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [k]\}.$$

Definicija 3.1.2. *Podskup L od $[k]^n$ zovemo **kombinatorni pravac** ako postoje neprazan skup $I \subseteq [n]$ i $a_i \in [k]$ za svaki $i \notin I$ takvi da je*

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in [k]^n : x_i = a_i \text{ za sve } i \notin I \text{ te } x_i = x_j \text{ za sve } i, j \in I\}.$$

*Skup I ponekad nazivamo **skup aktivnih koordinata**.*

Pretpostavljamo da su točke kombinatornog pravcu poredane uzlazno po vrijednosti aktivnih koordinata. Primjeri kombinatornih pravaca za $k = 4$ i $n = 3$ su $\{131, 232, 333, 434\}$, za koju je $I = \{1, 3\}$, $a_2 = 3$, te $\{142, 242, 342, 442\}$, za koji je $I = \{1\}$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$. Sada imamo sve što nam je potrebno za iskaz teorema.

Teorem 3.1.3 (Hales-Jewettov teorem)**.** *Za sve $k, r \geq 1$ postoji $N' = HJ(k, r)$ takav da, za sve $N \geq N'$, vrijedi da za svako r-bojenje od $[k]^N$ postoji monokromatski pravac.*

Kao što smo spomenuli, iskaz Van der Waerdenovog teorema može se dobiti kao korolar Hales-Jewettovog teorema. Za aritmetičke nizove duljine k, prirodni broj a, $0 \leq a < k^N$, se poistovjećuje s N-torkom $(a_1, \dots, a_N)$ koja formira zapis od a u bazi k, odnosno $a = \sum_{k=1}^{N} a_i k^{i-1}$, $0 \leq a_i < k$. r-bojenje od $[0, k^N - 1]$ inducira r-bojenje od $[k]^N$, gdje za dovoljno velik N postoji monokromatski pravac, koji se može poistovjetiti s monokromatskim aritmetičkim nizom duljine k u $[0, k^N - 1]$.

Još jedan način na koji se Van der Waerdenov teorem može dobiti kao korolar Hales-Jewettovog teorema je funkcijom $f : [k]^n \to [kn]$, gdje je $f(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Lako se vidi da je za pravac S u $[k]^n$ skup $f(S)$ aritmetički niz u $[kn]$, za koji je razlika susjednih elemenata jednaka kardinalnosti skupa aktivnih koordinata u S. Bojenje od $[kn]$ inducira bojenje od $[k]^n$ i prema Hales-Jewettovom teoremu postoji monokromatski pravac u $[k]^n$ pa stoga postoji i monokromatski aritmetički niz u $[kn]$. Iz ovoga se vidi da vrijedi $W(k, r) \leq k \cdot HJ(k, r)$.

Ranije smo napomenuli da nećemo iznositi potpuni dokaz Hales-Jewettovog teorema, već samo skicu. Ali, i za skicu dokaza su nam potrebne neke dodatne definicije koje sad iznosimo.

Jasno je da kocku $[k]^n$ možemo zamijeniti s $\{a_1, \ldots, a_k\}^n$, za proizvoljni skup $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Pri tome se pravci u $\{a_1, \ldots, a_k\}^n$ definiraju putem prirodnog izomorfizma između $[k]^n$ i $\{a_1, \ldots, a_k\}^n$. Stoga, radi jednostavnosti, nadalje smatramo da je set vrijednosti za svaku koordinatu $[k]$. Također, nadalje ćemo govoriti samo pravac, bez posebnog naglašavanja da mislimo na kombinatorni pravac.

Definicija 3.1.4. *Neka je $1 \leq m \leq n$ i $[n] = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$, gdje $B_i \neq \emptyset$ za $1 \leq i \leq m$ i $B_1, \ldots, B_m$ su u parovima disjunktni skupovi. Neka je još $f : B_0 \to [k]$ proizvoljna funkcija. Definiramo preslikavanje $\hat{f} : [k]^m \to [k]^n$ kao*

$$\hat{f}(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n),$$

gdje je

$$x_i = f(i) \quad za\ i \in B_0,$$

$$x_i = y_j \quad za\ i \in B_j.$$

*Definiramo m-**dimenzionalan potprostor** kao sliku preslikavanja $\hat{f}$, za odabrane skupove $B_0, B_1, \ldots, B_m$ i funkciju f. Za $m = 1$ je definicija ekvivalentna definiciji pravca.*

m-dimenzionalan potprostor S od $[k]^n$ sa zadanom particijom $B_0, B_1, \ldots, B_m$, u nekom fiksnom poretku, je kanonski izomorfan $[k]^m$. U nastavku ćemo pretpostavljati da postoji fiksan redoslijed $B_0, B_1, \ldots, B_m$.

Za definiciju jednog od pojmova korištenih u dokazu teorema koristimo ranije definirane klase l-ekvivalencije, uz malu modifikaciju. Pojam $(k+1)$**-ekvivalencije** označavat će nam relaciju ekvivalencije, u kojoj je za svaki $0 \leq i \leq n$ klasa dana kao skup svih $(x_1, \ldots, x_n) \in [k+1]^n$ takvih da se $k+1$ pojavljuje na najdesnijih i koordinata te nigdje drugdje.

Definicija 3.1.5. *Za bojenje $[k+1]^n$ kažemo da je **slojevito** ako je konstantno na svakoj klasi $(k+1)$-ekvivalencije.*

Definicija 3.1.6. *Za m-dimenzionalan potprostor kažemo da je **slojevit** ako i samo ako je bojenje od $[k+1]^m$ slojevito, dobiveno poistovjećivanjem tog potprostor s $[k+1]^m$ kanonskim izomorfizmom. Posebno, kombinatorni pravac je **slojevit** ako i samo ako je prvih k točaka tog pravca monokromatsko.*

U dokazu Hales-Jewettovog teorem koristimo slojevite potprostore kako bi od monokromatskog pravca duljine k dobili monokromatski pravac duljine $k + 1$. Slojeviti m-dimenzionalan potprostor ima ulogu u dokazu koju pojam m aritmetičkih nizova fokusiranih bojom ima u dokazu Van der Waerdenovog teorema. Sljedeći teorem je sličan unutarnjoj rekurziji u dokazu Van der Waerdenovog teorema i iz njega vidimo upravo iskazanu sličnost.

Teorem 3.1.7. *Slojevit m-dimenzionalni prostor obojen s najviše m boja sadrži monokromatski pravac.*

Dokaz. Pošto su svi m-dimenzionalni prostori nad $k + 1$ elemenata kombinatorno izomorfni, dovoljno je rezultat dokazati za prostor $[k + 1]^m$.

Razmotrimo $m + 1$ točaka x_i, $0 \leq i \leq m$, gdje je $x_{ij} = k + 1$ za $j > i$, a 1 za $j \leq i$, $1 \leq j \leq m$. Prema Dirichletovom principu postoje $u < v$ takvi da su x_u i x_v iste boje. Zbog toga i zbog slojevitosti prostora su sve točke $y_1, \ldots, y_{k+1}$, dane sa

$$y_s = (y_{s1}, \ldots, y_{sm}), \quad y_{si} = \begin{cases} 1 & \text{za } i \leq u, \\ s & \text{za } u < i \leq v, \\ k + 1 & \text{za } v < i, \end{cases}$$

za $1 \leq s \leq k + 1$, monokromatske i tvore kombinatorni pravac. □

Sada imamo sve potrebno za skicu dokaza Hales-Jewettovog teorema.

Skica dokaza Hales-Jewettovog teorema. Definiramo dvije tvrdnje ovisne o parametru k:

- $HJ(k)$: Za sve r postoji $N' = HJ(k, r)$, takav da za $N \geq N'$, ako r-obojimo $[k]^N$, on sadrži monokromatski pravac.
- $LHJ(k)$: Za sve r, m postoji $M' = LHJ(k, r, m)$, takav da za $M \geq M'$, ako r-obojimo $[k + 1]^M$, postoji slojevit m-dimenzionalan potprostor.

Tvrdnja se dokazuje indukcijom po k. Pokazuje se da vrijedi

1. $HJ(k) \Rightarrow LHJ(k)$
2. $LHJ(k) \Rightarrow HJ(k + 1)$

Prvo se pokazuje $HJ(2, r) = r$.

Za dokazati prvu tvrdnju radimo unutarnju indukciju po parametru m za sve parametre r istovremeno. Prvo se pokaže da možemo staviti $LHJ(k, r, 1) = HJ(k, r)$. Nakon toga, uz pretpostavku da tvrdnja vrijedi za m i oznake $l = LHJ(k, r, m)$, $s = r^{(k+1)^l}$, $l' = LHJ(k, s, 1)$, stavimo $LHJ(k, r, m + 1) = l' + l$. Time se pokazuje da tvrdnja vrijedi za $m + 1$.

Druga tvrdnja slijedi direktno iz Teorema 3.1.7, gdje za fiksni broj boja r uzmemo r-dimenzionalan slojevit potprostor i dobivamo monokromatski pravac duljine $k + 1$.

Detaljan dokaz može se pronaći u [9].

□

3.2 Shelahov dokaz

Prijašnji dokazi Van der Waerdenovog i Hales-Jewettovog teorema oba sadrže dvostruku indukciju. Kasnije ćemo vidjeti da ako gradimo ogradu za $W(k, r)$ ili $HJ(k, r)$ iz nekog od dosad pokazanih dokaza, ta ograda je jako velika. Korištenje duple indukcije u dokazu daje ograde koje nije moguće izračunati jednostrukom indukcijom, odnosno, tako dobivene ograde nisu primitivno rekurzivne. Matematičari su se dugo vremena pitali postoji li uopće dokaz koji daje primitivno rekurzivne ograde za $W(k, r)$ i $HJ(k, r)$.

Odgovor na to pitanje je dao izraelski logičar Saharon Shelah 1987. dokazom Hales-Jewettovog teorema. Njegov dokaz daje ograde za te brojeve koje su značajno bolje nego one dobivene iz prijašnjih dokaza. Za razliku od prijašnjih dokaza, Shelahov dokaz ne koristi dvostruku indukciju. Ideja dokaza je reducirati $HJ(k, r)$ na $HJ(k - 1, r)$, tako da se pronađe dovoljno velik potprostor, u kojem su slova $k - 1$ i k na neki način zamjenjiva, iz čega tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije za $HJ(k - 1, r)$. Ograde dobivene iz tog dokaza ćemo diskutirati u Poglavlju 4. Prije davanja Shelahovog dokaza potrebno je uvesti neke nove oznake.

Definicija 3.2.1. *Kombinatorni pravac $L \subset [k]^n$ je **Shelah pravac** ako postoji redoslijed elemenata tog pravca, $l_1, l_2, \ldots, l_k$, gdje je $l_m = (x_{m1}, \ldots, x_{mn})$, te i, j za koje vrijedi $0 \leq i < j \leq n$, takvi da je*

$$x_{ms} = \begin{cases} k - 1 & za\ s \leq i, \\ m & za\ i < s \leq j, \\ k & za\ j < s. \end{cases}$$

Definicija 3.2.2. *Za točku $l = (x_1, \ldots, x_n) \in [k]^n$ kažemo da je **Shelah točka** ako postoji Shelah pravac kojem ta točka pripada.*

Koordinate Shelah točke su zapravo sastavljene od bloka (moguće praznog) elemenata $k - 1$, nakon toga slijedi neprazan konstantan blok i na kraju je blok (moguće prazan) elemenata k. Primjećujemo da je Shelah točka određena s parametrima i, j, m, gdje su $0 \leq i < j \leq n$ te $1 \leq m \leq k$, stoga postoji najviše $\binom{n+1}{2} k$ Shelah točaka unutar $[k]^n$.

Definicija 3.2.3. *Neka su dani $n_1, \ldots, n_s$, stavimo $n = n_1 + \ldots + n_s$ i promotrimo $[k]^n$ kao $[k]^{n_1} \times [k]^{n_2} \times \ldots \times [k]^{n_s}$. Za $1 \leq j \leq s$ i dane $n_1, \ldots, n_s$, neka je L_j Shelah pravac u $[k]^{n_j}$. Kartezijev produkt $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_s$ nazivamo **Shelah s-prostor** od $[k]^n$.*

Sa $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \to [k]^s$ označavamo kanonski izomorfizam koji je dan sa $\varphi(\xi) = \alpha_1 \ldots \alpha_s$, gdje je α_i vrijednost aktivnih koordinata u bloku koordinata koji odgovara i-tom Shelah pravcu.

Definicija 3.2.4. *Za točke $X = (x_1, \ldots, x_s)$ i $Y = (y_1, \ldots, y_s)$, pri čemu su $X, Y \in [k]^s$, kažemo da su **bliske**, ako postoji točno jedan $i \in [s]$ za koji vrijedi $\{x_i, y_i\} = \{k-1, k\}$ te $x_j = y_j$ za $j \neq i$.*

Definicija 3.2.5. *Za bojenje χ od $[k]^s$ kažemo da je **fliptop**, ako svake dvije bliske točke imaju istu boju.*

Definicija 3.2.6. *Neka je $L_1 \times \ldots \times L_s$ Shelah s-prostor sa kanonskim izomorfizmom $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \to [k]^s$. Za bojenje χ od $L_1 \times \ldots \times L_s$ kažemo da je **fliptop** ako je bojenje χ' od $[k]^s$ dano sa $\chi'(P) = \chi[\varphi^{-1}(P)]$ fliptop. Posebno, bojenje Shelah pravca je fliptop ako su zadnja i predzadnja točka pravca iste boje.*

Sada imamo svu potrebnu notaciju kako bi mogli izreći teoreme i leme potrebne za Shelahov dokaz Hales-Jewettovog teorema.

Lema 3.2.7. *Za proizvoljne n, c, takve da je $n \geq c$, za svako c-bojenje od $[k]^n$ postoji fliptop Shelah pravac.*

Dokaz. Za $0 \leq i \leq n$ definiramo $P_i \in [k]^n$ kao n-torku u kojoj prvih i koordinata ima vrijednost $k-1$, dok preostale imaju vrijednost k. Sada zbog $n+1 > c$ prema Dirichletovom principu slijedi da postoje $0 \leq i < j \leq n$, takvi da su P_i i P_j iste boje. To su zadnje dvije točke Shelah pravca $l_1, \ldots, l_k$ definiranog sa

$$l_{ms} = \begin{cases} k-1 & \text{za } s \leq i, \\ m & \text{za } i < s \leq j, \\ k & \text{za } j < s. \end{cases}$$

Zato što su P_i i P_j iste boje slijedi da je taj Shelah pravac fliptop. □

Sljedeći teorem je temelj Shelahovog dokaza Hales-Jewettovog teorema. On govori da za fiksni konačni broj boja postoji dovoljno velik n, takav da u svakom bojenju od $[k]^n$ postoji fliptop Shelah s-prostor.

Teorem 3.2.8. *Neka su r, s, k prirodni brojevi. Definiramo $n_1, \ldots, n_s$ kao*

$$n_1 = r^{k^{s-1}},$$

$$n_2 = r^{\binom{n_1+1}{2} k^{s-1}},$$

općenito, za određene $n_1, \dots, n_i$ *definiramo*

$$A_i = \left[\prod_{j \le i} \binom{n_j + 1}{2} \right] k^{s-1}$$

pa pomoću toga definiramo

$$n_{i+1} = r^{A_i}, 1 \le i < s.$$

Stavimo $n = n_1 + \ldots + n_s$. *Tada za proizvoljno r-bojenje* χ *od* $[k]^n$ *postoji fliptop Shelah s-prostor.*

Prije samog dokaza, pokažimo ideju teorema za $r = s = 2$ te $k = 3$. Definirani su $n_1 = 8, n_2 = 2^{108}$, $n = 8 + 2^{108}$ te neka je χ proizvoljno 2-bojenje od $[3]^n$. Ovdje $[3]^n$ promatramo kao $[3]^8 \times [3]^{2^{108}}$, pri čemu njegove elemente označavamo sa x, y, gdje je $x \in [3]^8$ i $y \in [3]^{2^{108}}$. Stvorimo relaciju ekvivalencije nad $[3]^{2^{108}}$, tako da y i y' pripadaju istoj klasi ekvivalencije, ako je $\chi(x, y) = \chi(x, y')$ za sve Shelah točke $x \in [3]^8$. Tih točaka je najviše $\binom{9}{2} \cdot 3 = 108$, odnosno ima najviše 2^{108} klasa ekvivalencija, koje se mogu smatrati klasama boja 2^{108}-bojenja od $[3]^{2^{108}}$. Prema prethodnom teoremu sad postoji fliptop Shelah pravac $L_2 \in [3]^{2^{108}}$. Na isti način stvaramo relaciju ekvivalencije nad $[3]^8$, ali umjesto razmatranja svih Shelah točki u $[3]^{2^{108}}$, razmatramo samo 3 točke iz L_2. Stoga ima najviše $2^3 = 8$ klasa ekvivalencije nad $[3]^8$, iz čega, prema prethodnom teoremu, dobivamo fliptop Shelah pravac L_1 u $[3]^8$. Sada iz definicija danih klasa ekvivalencije vidimo da je $L_1 \times L_2$ traženi fliptop Shelah 2-prostor.

Dokaz. $[k]^n$ poistovjećujemo sa $[k]^{n_1} \times \ldots \times [k]^{n_s}$ i točku $y \in [k]^n$ zapisujemo kao $y = y_1, \dots, y_s$ gdje je $y_j \in [k]^{n_j}$. Definiramo relaciju ekvivalencije $\equiv$ na $[k]^{n_s}$ sa

$$y_s \equiv y_s' \text{ ako i samo ako } \chi(y_1, \dots, y_{s-1}, y_s) = \chi(y_1, \dots, y_{s-1}, y_s')$$

$$\text{za sve Shelah točke } y_1, \dots, y_{s-1}, \text{ gdje je } y_i \in [k]^{n_i} \text{ za sve } i < s$$

Postoji najviše $\binom{n_j+1}{2}k$ Shelah točaka u $[k]^{n_j}$, $1 \le j \le s$, prema napomeni nakon definicije Shelah pravca. Stoga postoji najviše A_{s-1} izbora $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$ i najviše $n_s = r^{A_{s-1}}$ klasa ekvivalencije. Ako relaciju ekvivalencije gledamo kao bojenje, zapravo imamo n_s-bojenje $\hat{\chi}$ od $[k]^{n_s}$. Prema prethodnoj lemi, postoji fliptop Shelah pravac $L_s \subset [k]^{n_s}$ pod bojenjem $\hat{\chi}$.

Sad koristimo obrnutu indukciju da dokažemo postojanje Shelah pravca $L_i \subset [k]^{n_i}$ za $1 \le i < s$, koji je fliptop pod bojenjem definiranim relacijom ekvivalencije sličnom kao za n_s. Pretpostavimo da su pronađeni takvi Shelah pravci $L_s, L_{s-1}, \dots, L_{i+1}$. Definiramo tu relaciju ekvivalencije $\equiv$ na $[k]^{n_i}$ kao

$$y_i \equiv y_i' \text{ ako i samo ako } \chi(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \dots, z_s) = \chi(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \dots, z_s)$$

za sve Shelah točke $y_1, \ldots, y_{i-1}$, gdje je $y_j \in [k]^{n_j}$, za sve $j < i$, te sve moguće $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Kao što smo napomenuli postoji najviše $\binom{n_j+1}{2}k$ izbora za y_j, $1 \leq j < i$. Uz to, za svaki j, $i+1 \leq j \leq s$, postoji k izbora za z_j, zato što su pravci $L_{i+1}, \ldots, L_s$ već određeni. Iz toga zaključujemo da ukupno postoji najviše A_{i-1} izbora za $y_1, \ldots, y_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_s$. Stoga postoji najviše $n_i = r^{A_{i-1}}$ klasa ekvivalencije. Ovdje opet možemo relaciju ekvivalencije $\equiv$ promatrati kao n_i-bojenje $\hat{\chi}$ od $[k]^{n_i}$. Primjenom prethodne leme dobivamo postojanje Shelah pravca $L_i \subset [k]^{n_i}$ koji je fliptop pod $\hat{\chi}$.

Tvrdimo da je $L_1 \times \ldots \times L_s$ traženi fliptop Shelah s-prostor. Uzmimo proizvoljni i, $1 \leq i \leq s$, i fiksirajmo ga. Neka su y_i i y_i' zadnje dvije točke od L_i. Zbog toga što je Shelah pravac $L_i \subset [k]^{n_i}$ fliptop, pod odgovarajućim bojenjem $\hat{\chi}$, slijedi da je

$$\chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \ldots, z_s)$$

za sve Shelah točke $y_1, \ldots, y_{i-1}$, gdje je $y_j \in [k]^{n_j}$ za sve $j < i$, te sve moguće $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Točke $z_j \in L_j$, $1 \leq j < i$, su također Shelah točke. Stoga vrijedi

$$\chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i', z_{i+1}, \ldots, z_s)$$

za sve $z_j \in L_j$, $1 \leq j \leq s$, $j \neq i$. Sada zbog proizvoljnosti i slijedi tvrdnja. □

Lema 3.2.9. *Neka je $s = HJ(k-1, r)$ takav da za svako r-bojenje od $[k-1]^s$ postoji monokromatski pravac. Tada za svako fliptop r-bojenje od $[k]^s$ postoji monokromatski pravac.*

Dokaz. Neka je dano neko fliptop r-bojenje od $[k]^s$. Ograničimo domenu bojenja na $[k-1]^s \subset [k]^s$. Tada prema izboru s postoji monokromatski pravac $l_1, \ldots, l_{k-1}$. Neka je l_k točka u $[k]^s$ dobivena tako da sve koordinate koje nisu konstantne u danom pravcu postavimo na k. Tada je $l_1, \ldots, l_{k-1}, l_k$ pravac u $[k]^s$. Točka l_k može se dobiti iz l_{k-1} tako da promijenimo podskup koordinata iz $k-1$ u k. Svaka promjena neke koordinate iz $k-1$ u k ne utječe na boju točke pa onda konačan niz promjena koordinata iz $k-1$ u k također ne utječe na boju točke. Stoga možemo zaključiti da l_{k-1} i l_k imaju istu boju. Pošto $l_1, \ldots, l_{k-1}$ imaju istu boju, slijedi da je pravac $l_1, \ldots, l_{k-1}, l_k$ u $[k]^s$ monokromatski za dano bojenje. □

Sada ćemo ponovno dokazati Hales-Jewettov teorem, iskazan isto kao u 3.1.3, pomoću Shelahovog dokaza.

Shelahov dokaz Hales-Jewettovog teorema. Uzmimo proizvoljni r i fiksirajmo ga. Radimo indukciju po parametru k. Trivijalno se vidi $HJ(1, r) = 1$. Pretpostavimo da postoji $s = HJ(k-1, r)$. Neka je n dan kao u teoremu 3.2.8. Za zadano r-bojenje χ od $[k]^n$ postoji fliptop Shelah s-prostor $L_1 \times \ldots \times L_s$. To bojenje inducira bojenje χ' od $[k]^s$ zadano sa $\chi'(y) = \chi(\varphi^{-1}(y))$, gdje je $\varphi : L_1 \times \ldots \times L_s \to [k]^s$ kanonski izomorfizam. Tada je χ' fliptop bojenje od $[k]^s$ i prema prethodnoj lemi postoji monokromatski pravac $L \subset [k]^s$. Tada je $\varphi^{-1}(L) \subset L_1 \times \ldots \times L_s$ pravac u $[k]^n$ koji je također monokromatski. □

Poglavlje 4

Ograde za funkcije $W(k,r)$ i $HJ(k,r)$

Kao što je ranije spomenuto, važnost Shelahovog dokaza je u tome što s njime dobivamo bolju gornju ogradu za funkciju $HJ(k,r)$. Mnogi matematičari kroz povijest su nagađali da je Hales-Jewettova funkcija takva da ju nije moguće definirati bez dvostruke indukcije. U prvom izdanju [9] navedeno je da upravo to nagađaju i kako vjeruju da bi u budućnosti matematički logičari mogli doći do dokaza te tvrdnje. U drugom izdanju, navedenom u izvorima, govore kako su se iznenadili da je matematički logičar uspio dati dokaz Hales-Jewettovog teorema koji opovrgava tu slutnju te koristi kombinatorne argumente u dokazu.

Funkcije ograde koje dobijemo iz dokaza koji koriste dvostruku indukciju, za Van der Waerdenov teorem i Hales-Jewettov teorem, rastu ekstremno brzo, što će se vidjeti po ogradama dobivenima u ovom odjeljku. Za iskazati te gornje ograde uvest ćemo posebni niz funkcija koje su logičari uveli za baratanje s funkcijama rapidnog rasta. Ovdje nam $W(k,r)$ označava najmanji n takav da za proizvoljno r-bojenje $[n]$ postoji monokromatski niz duljine k. Slično tome, $HJ(k,r)$ označava najmanji n takav da za proizvoljno r-bojenje $[k]^n$ postoji monokromatski kombinatorni pravac.

U prvom potpoglavlju uvodimo spomenuti niz funkcija, koji nazivamo Ackermannova hijerarhija. To je niz funkcija $f_1, f_2, \ldots$, čija domena i kodomena su skup prirodnih brojeva. Iskazat ćemo nekoliko varijacija definicije tih funkcija koje su sve međusobno ekvivalentne i pokušati dočarati ekstremnu brzinu rasta tih funkcija.

U drugom potpoglavlju iznosimo ograde za $W(k,r)$ dobivene iz standardnog dokaza Van der Waerdenovog teorema. Nakon toga ćemo iskazati ograde koje dobivamo pomoću Shelahovog dokaza Hales-Jewettovog teorema za 2-bojenja.

U trećem potpoglavlju iznosimo nedavni rezultat Davida Conlona, iz [1], za gornju ogradu vrijednosti $HJ(3,r)$, koja je mnogo jača nego prije iznesene ograde.

U četvrtom potpoglavlju iznosimo poznati rezultat za donju ogradu $W(p+1,2)$, gdje je p prost. Nakon toga opisujemo nedavni rezultat o donjim ogradama Van der Waerdenovih brojeva, koji je prvo pokazao Ben Green i kasnije poboljšao Zach Hunter.

4.1 Ackermannova hijerarhija

Ackermannova hijerarhija, poznata ponekad kao Grzegorczykova hijerarhija, je niz funkcija $f_1, f_2, \ldots$ kojima su domena i kodomena skup prirodnih brojeva. Prvu funkciju, f_1, zovemo $DOUBLE$ i definirana je kao

$$f_1(x) = DOUBLE(x) = 2x.$$

Drugu funkciju, f_2, zovemo $EXPONENT$ i definirana je kao

$$f_2(x) = EXPONENT(x) = 2^x.$$

Iz ove dvije definicije vidimo da vrijednost $f_2(x)$ možemo dobiti tako da krenemo s brojem 1 i x puta primijenimo f_1. Funkciju f_3 još zovemo $TOWER$ i nju dobivamo na isti način, ali iz funkcije $EXPONENT$, krenemo od broja 1 i primijenimo $EXPONENT$ na to x puta. $TOWER(x)$ možemo zapisati kao $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, odnosno to je toranj od x dvojki, što opravdava ime funkcije. Uvedimo oznaku $f^{(x)}$ za funkciju f primijenjenu x puta. Općenito, f_{i+1} možemo zapisati kao

$$f_{i+1}(x) = f_i^{(x)}(1).$$

f_{i+1} možemo definirati i na induktivan način

$$f_{i+1}(1) = 2,$$

$$f_{i+1}(x+1) = f_i\left[f_{i+1}(x)\right].$$

Primijetimo da je takva definicija zapravo dvostruka indukcija. Prva indukcija je indukcija po parametru i, pretpostavljamo postojanje funkcije f_i za definiciju f_{i+1}. Druga indukcija je indukcija po parametru x, gdje pretpostavljamo da je definirano $f_{i+1}(x)$.

Da se dočara koliko te funkcije brzo rastu, vrijednost $f_3(3) = 16$, dok je vrijednost $f_3(4) = 2^{16} = 65536$, a $f_3(5) = 2^{65536}$, što je broj s gotovo 20000 znamenki. Broj $f_3(6)$ je broj s $(\log_{10} 2) f_3(5)$ znamenki, što je stravično veliko. Funkciju f_4 se ponekad naziva WOW funkcija. To ime dolazi od reakcije „wow" kada netko promatra vrijednosti te funkcije, već $f_3(4)$ je toranj dvojki veličine 65536.

Iz definicije hijerarhije se vidi da je funkcija g primitivno rekurzivna, ako postoje $n, x_0 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $g(x) \leq f_n(x)$, za svaki $x \geq x_0$. Za definiciju samo jedne f_n, za fiksni n, nam nije potrebna indukcija po parametru i, iz čega slijedi da se vrijednosti f_n mogu izračunati običnom „for" petljom. Pošto je $g(x) > f_n(x)$ za konačno mnogo točaka, možemo vrijednosti funkcije g također izračunati običnom „for" petljom.

Primijetimo, neslužbeno, koliko prostora ima kad se barata s tim funkcijama. Primjenom funkcije f_i na $f_{i+1}(x)$ dobivamo $f_{i+1}(x+1)$, što je opet vrijednost funkcije f_{i+1}. Sa sljedećom lemom ćemo pokazati da na isti način možemo primijeniti funkciju f_j, za $j \leq i$, na $f_{i+1}(x)$ i opet dobiti vrijednost manju ili jednaku $f_{i+1}(x+1)$. Time zapravo vidimo da možemo vrijednost funkcije f_i, za dovoljno velik i, množiti s 2, uzimati kao eksponent funkcije 2^x, čak napraviti toranj visine $f_i(x)$ i opet dobiti vrijednost manju ili jednaku $f_i(x+1)$.

Teorem 4.1.1. *Funkcije $f_i(x)$ su monotone po parametru x i po parametru i.*

Dokaz. Pokazat ćemo nešto jaču tvrdnju za parametar x, a to je da su funkcije strogo rastuće po x. Trivijalno je $f_1(x) = 2x$ strogo rastuća funkcija. Pretpostavimo da je f_i strogo rastuća po x. Tada je $f_{i+1}(x+1) = f_i\left[f_{i+1}(x)\right] > f_{i+1}(x)$ zbog stroge monotonosti funkcije f_i.

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $f_i(1) = 2$, pa je niz $f_1(1), f_2(1), \ldots$ monoton. Pretpostavimo da je $f_i(y)$ monotono po parametru i za svaki $y \leq x$. Tada je $f_{i+1}(x+1) = f_i\left[f_{i+1}(x)\right] \geq f_i\left[f_1(x)\right] = f_i(2x) \geq f_i(x+1)$, gdje prva nejednakost slijedi iz pretpostavke indukcije, a zadnja zbog monotonosti f_i. □

Dijagonalizacijom se može doći do još brže rastuće funkcije koju nazivamo Ackermannova funkcija i označavamo s f_ω ili $ACKERMANN$ i definiramo kao

$$f_\omega(x) = ACKERMANN(x) = f_x(x).$$

Za proizvoljni n i za svaki $x \geq n$ je $ACKERMANN(x) = f_x(x) \geq f_n(x)$. Odnosno, Ackermannova funkcija raste brže nego bilo koja funkcija f_n. Logičari su uspjeli dokazati da Ackermannova funkcija raste brže nego bilo koja primitivno rekurzivna funkcija, što zapravo znači da je dupla indukcija nužna za definiciju Ackermannove funkcije.

4.2 Ograde iz dokaza HJ i VDW

Označimo s $W_k(r)$ vrijednost $W(k,r)$ koju dobijemo iz originalnog dokaza Van der Waerdenovog teorema, s nizovima fokusiranim bojom iz 2. poglavlja, za r boja i duljinu aritmetičkog niza k.

Pokazat ćemo da taj dokaz Van der Waerdenovog teorema i originalan dokaz Hales-Jewettovog teorema daju ograde za $W_k(2)$ koje nisu primitivno rekurzivne, dok su ograde dobivene iz Shelahovog dokaza dane u terminima f_4 i one su primitivno rekurzivne.

Prateći originalan dokaz Van der Waerdenovog teorema ćemo dobit neke ograde za te funkcije. Iz navedenog dokaza možemo za fiksni broj boja r i traženu duljinu aritmetičkog niza k uz već poznati $W_{k-1}(r)$ definirati niz

$$c_1 = 2W_{k-1}(r) - 1$$

$$c_{i+1} = (2W_{k-1}(r^{c_i}) - 1)c_i.$$

Prema dokazu zaključujemo da je $W_k(r) = c_r$. Ovaj niz koristimo kako bismo dobili odgovarajuće ograde.

Lema 4.2.1. *Za $r \geq 2$ vrijedi*

$$f_3(r+1) \leq W_3(r) \leq f_3(3r-1).$$

Dokaz. Očito vrijedi $W(2, r) = r + 1$. Za fiksne r, k, ranije opisani niz je stoga

$$c_1 = 2r + 1$$

$$c_{i+1} = g(c_i) \quad \text{gdje je } g(x) = (2r^x + 1)x,$$

pri čemu je $W_3(r) = c_r$.

Definirajmo još jedan niz sa $d_1 = c_1$, $d_{i+1} = 2^{d_i}$. Primjećujemo da je $2^x \leq g(x)$ za $x \geq 1$. Prema tome, zbog $d_1 = c_1$, vrijedi $d_i \leq c_i$ za sve $i \geq 1$. Vrijedi $d_1 > 4 = f_3(2)$. Indukcijom dobivamo

$$d_i \geq f_3(i+1),$$

pa je $W_3(r) = c_r \geq d_r \geq f_3(r+1)$.

Zbog $r \geq 2$ je $c_i \geq 5$, za sve $i \geq 1$. Stoga za $x \geq 5 > r$ zaključujemo

$$g(x) \leq 2x^x x = 2^{x \log_2(x)+1} x \leq 2^{x^2+1+x} \leq 2^{2^x}.$$

Sada vidimo da $c_i \leq f_3(a)$ implicira $c_{i+1} \leq f_3(a+2)$. Vrijedi $c_1 = 2r + 1 \leq f_3(r+1)$, s još puno prostora. Na kraju možemo zaključiti $c_r \leq f_3(3r-1)$. □

Sljedeća lema koju iznosimo govori da se zahtijevanjem dodatnog člana u monokromatskom aritmetičkom nizu ograde za $W_k(r)$, podižu za jednu razinu više u funkcijama Ackermannove hijerarhije. To nam zapravo govori da za broj $W_k(r)$, dobiven u spomenutom dokazu Van der Waerdenovog teorema, ne postoje primitivno rekurzivne ograde. Drugim riječima, ne postoje ograde za $W_k(r)$ definirane jednostrukom rekurzijom.

Lema 4.2.2. *Za $k \geq 3$, $r \geq 2$ vrijedi*

$$f_k(r+1) \leq W_k(r) \leq f_k(4r)$$

Dokaz. Rezultat dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $k = 3$ smo rezultat pokazali u prethodnoj lemi. Pretpostavimo $k \geq 4$ i da rezultat vrijedi za $k-1$. Dokazujemo da rezultat onda vrijedi i za k. Za donju ogradu vrijedi

$$c_1 = 2W_{k-1}(r) - 1 \geq W_{k-1}(r) \geq f_{k-1}(r+1)$$

prema pretpostavci indukcije. Za svaki i vrijedi

$$c_{i+1} \geq W_{k-1}(r^{c_i}) \geq W_{k-1}(c_i) \geq f_{k-1}(c_i + 1) \geq f_{k-1}(c_i)$$

iz čega, indukcijom po i, slijedi

$$c_i \geq f_{k-1}^{(i)}(r + 1).$$

Sada vrijedi

$$W_k(r) = c_r \geq f_{k-1}^{(r)}(r + 1) \geq f_{k-1}^{(r)}(2) = f_{k-1}^{(r+1)}(1) = f_k(r + 1).$$

Za gornju ogradu imamo

$$c_1 < 2W_{k-1}(r) \leq f_{k-1}(f_{k-1}(4r))$$

prema pretpostavci indukcije i jer je $f_{k-1}(x) \geq 2x$.

Pokažimo da vrijedi $xf_j(x) \leq 2^{f_j(x)}$, za sve $j, x \geq 3$. To je ekvivalentno tvrdnji $\log_2(xf_j(x)) \leq f_j(x)$. Ali, zbog $f_j(x) > x$, vrijedi $\log_2(xf_j(x)) < \log_2(f_j(x) \cdot f_j(x)) = 2\log_2(f_j(x)) \leq f_j(x)$, jer je $2\log_2(y) \leq y$ za $y \geq 4$.

Zato što je $c_i > r$ sada vrijedi

$$\begin{aligned}
c_{i+1} &\leq 2W_{k-1}(r^{c_i}) \cdot c_i \\
&\leq 2W_{k-1}(c_i^{c_i}) \cdot c_i \\
&\leq 2f_{k-1}(4c_i^{c_i}) \cdot c_i \\
&\leq f_{k-1}(4c_i^{c_i}) \cdot 4c_i^{c_i} \\
&\leq f_2(f_{k-1}(4c_i^{c_i})) \\
&\leq f_{k-1}(f_{k-1}(4c_i^{c_i})) \\
&\leq f_{k-1}(f_{k-1}(f_{k-1}(c_i)))
\end{aligned}$$

zato što je $4x^x = 2^{x\log_2 x+2} \leq 2^{2^x} \leq f_{k-1}(x)$, za $x \geq 4$. Iz toga slijedi $c_r \leq f_{k-1}^{(3r-1)}(4r)$. Na kraju, zbog $f_k(r + 1) \geq 4r$, vrijedi

$$W_k(r) = c_r \leq f_{k-1}^{(3r-1)}(f_k(r + 1)) = f_k(4r).$$

□

Sljedeća lema dodatno razjašnjava intuiciju da ogradu za $W_k(2)$ nije moguće dobiti jednostrukom indukcijom.

Lema 4.2.3. *Za $k \geq 8$ vrijedi*

$$ACKERMANN(k - 2) \leq W_k(2) \leq ACKERMANN(k).$$

Dokaz. Prema prethodnoj lemi i uvjetu $k \geq 8$ imamo

$$W_k(2) \leq f_k(8) \leq f_k(k) = ACKERMANN(k).$$

Također iz prethodne leme i iz definicije Ackermannove hijerarhije za donju ogradu vrijedi

$$\begin{aligned} W_k(2) \geq f_k(3) &= f_{k-1}^{(3)}(1) = f_{k-1}(4) \\ &= f_{k-2}^{(4)}(1) = f_{k-2}(f_{k-2}(4)). \end{aligned}$$

Pokažimo da je $f_t(4) \geq t$ matematičkom indukcijom. Za $t = 1$ je $f_1(4) = 8 \geq 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $t-1$ i $t \geq 2$. Vrijedi $f_t(4) = f_{t-1}^{(4)}(1) = f_{t-1}(f_{t-1}(4)) \geq f_{t-1}(t-1) \geq 2t-2 \geq t$.

Iz te tvrdnje sad dobivamo

$$W_k(2) \geq f_{k-2}(k-2) = ACKERMANN(k-2).$$

□

Razmotrimo sada ograde koje se dobivaju iz Shelahovog dokaza za Hales-Jewettov teorem, iz poglavlja 3, za 2 boje. Tvrdimo da su te ograde puno manje nego one iznesene u prethodnim lemama. Neka je $S(k)$ broj n dobiven iz Shelahovog dokaza takav da svako 2-bojenje od $[k]^n$ sadrži monokromatski pravac. Dakle, $W(k,2) \leq k \cdot S(k)$. $S(k)$ je definiran rekurzivno. Stavimo $S(1) = 1$ i pretpostavimo da je $S(k-1) = s$ definiran. Sada definiramo, kao u dokazu,

$$n_1 = 2^{k^{s-1}}$$

te za $1 \leq i < s$ je

$$n_{i+1} = 2^{A_i}$$

gdje je

$$A_i = \left[\prod_{j \leq i} \binom{n_j + 1}{2}\right] k^{s-1}.$$

Na kraju stavimo $S(k) = n = n_1 + \ldots + n_s$.

Teorem 4.2.4. *Za $k \geq 3$ vrijedi*

$$f_4(k) \leq S(k) \leq f_4(k+1).$$

Dokaz. Prvo pokazujemo rezultat za donju ogradu pomoću indukcije. Za $k = 3$ se rezultat direktno provjeri, jer je $S(1) = 1, S(2) = 2$ i $S(3) = 8 + 2^{108}$ te $f_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 2^{16}$. Pretpostavimo da donja ograda vrijedi za $k-1$ te neka je $s = S(k-1)$ i $n_1, \ldots, n_s$ su definirani. Vrijedi $n_1 \geq 2 = TOWER(1)$, zato što je $s > 1$. Iz definicije A_i je očito $A_i \geq n_i$, za sve $1 \leq i < s$, pa stoga $n_{i+1} \geq 2^{n_i}$. Sada indukcijom po i dobivamo $n_i \geq TOWER(i)$, za $1 \leq i \leq s$. Sada imamo

$$S(k) \geq n_s \geq TOWER(s) \geq TOWER(f_4(k-1)) = f_4(k).$$

Za gornju ogradu ćemo dokazati jaču hipotezu, $S(k) \leq f_4(k+1)/6$. To dokazujemo indukcijom po parametru k. Za $k = 3$ tvrdnja vrijedi direktnom provjerom, jer je $f_4(4)$ toranj visine 2^{16}, a $S(3) = 8 + 2^{108}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k-1$. Vrijedi

$$n_1 = 2^{k^{s-1}} < s^{s^s} < TOWER(s).$$

Za svaki i, možemo k i sve n_j, $j \leq i$, ograničiti s n_i i tako dobivamo

$$A_i \leq n_i^s n_i^{2s} \leq n_i^{3n_i} < 2^{2^{n_i}}.$$

Sada vidimo da iz $n_i \leq TOWER(a)$ slijedi $n_{i+1} \leq TOWER(a+3)$ i zato je $n_s \leq TOWER(s+3(s-1)) = TOWER(4s-3)$. Iz toga slijedi

$$S(k) = n_1 + \ldots + n_s \leq sn_s \leq 2^{n_s} \leq TOWER(4s-2).$$

Prema pretpostavci indukcije je $s \leq f_4(k)/6$, stoga je $4s - 2 < f_4(k) - 1$ iz čega slijedi

$$S(k) \leq TOWER(f_4(k) - 1) = log_2(f_4(k+1)) < f_4(k+1)/6.$$

□

4.3 Gornja ograda za $HJ(3,r)$

Dani rezultat predstavio je David Conlon u članku [1] objavljenom 2022. godine. Dobivena ograda je duplo eksponencijalna funkcija, što je bolje nego ograda klase $TOWER$, zbog čega je bolja nego ograda klase WOW dobivena iz Shelahovog dokaza. Primijetimo da je kod ograde iz Shelahovog dokaza broj boja jednak 2, a parametar k, broj elemenata u jednoj dimenziji kocke, proizvoljan. Za razliku od toga, ovdje je broj elemenata u jednoj dimenziji kocke fiksan i jednak 3, dok je broj boja proizvoljan.

Teorem 4.3.1. *Postoji pozitivna konstanta c takva da vrijedi*

$$HJ(3,r) \leq 2^{2^{cr}}.$$

Dokaz. Uzmimo t zasad kao proizvoljan, ali fiksiran, prirodni broj. Definiramo brojeve n_j, $1 \leq j \leq t$, kao $n_j = r^{6^{t-j}}$ i stavimo $s_j = n_1 + \ldots + n_j$. Neka je $n = s_t$ i χ proizvoljno r-bojenje od $[3]^n$. Pokazat ćemo indukcijom unatrag po j, počevši od $j = t$, sve do $j = 0$, da za svaki

j postoje funkcije $f_k : [3]^{s_j} \to \binom{0\cup[n_k]}{2}$, za sve $k > j$, takve da za proizvoljnu riječ w duljine s_j, uz oznake $f_k(w) = \{p_{k,1}, p_{k,2}\}$, gdje je $p_{k,1} < p_{k,2}$, za sve $k > j$, vrijedi sljedeće:
Za sve $l > j$ i $a_{l+1}, \ldots, a_t \in [3]$, dvije riječi $v_i = v_i(l; a_{l+1}, \ldots, a_t), i = 1, 2$, imaju istu boju. Pri tome je

$$v_i = w\underbrace{11\ldots1}_{p_{j+1,2}}\underbrace{22\ldots2}_{n_{j+1}-p_{j+1,2}}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{p_{l,i}}\underbrace{22\ldots2}_{n_l-p_{l,i}}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{p_{t,1}}\underbrace{a_ta_t\ldots a_t}_{p_{t,2}-p_{t,1}}\underbrace{22\ldots2}_{n_t-p_{t,2}}.$$

Preciznije, v_i je jednak w prvih s_j znakova. Za $j < k < l$, interval $[s_{k-1}+1, s_k]$ se sastoji od $p_{k,2}$ jedinica koje slijedi $n_k - p_{k,2}$ dvojki. Interval $[s_{l-1}+1, s_l]$ se sastoji od $p_{l,i}$ jedinica te $n_l - p_{l,i}$ dvojki nakon toga. Primijetimo da je to jedino korištenje varijable i u definiciji v_i. Za $l < k \le t$ se interval $[s_{k-1}+1, s_k]$ sastoji od $p_{k,1}$ jedinica nakon kojih slijedi $p_{k,2} - p_{k,1}$ kopija od a_k te $n_k - p_{k,2}$ dvojki na kraju.

U tvrdnji za $j = t$ se nema što dokazivati. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $j+1$. Tada su za svaku riječ w' duljine s_{j+1} definirani $f_{j+2}(w'), \ldots, f_t(w')$. Neka je w proizvoljna riječ duljine s_j. Za svaki $0 \le q \le n_{j+1}$ definiramo

$$w(q) = w\underbrace{11\ldots1}_{q}\underbrace{22\ldots2}_{n_{j+1}-q}$$

i označimo $f_k(w(q)) = \{p_{k,1}(q), p_{k,2}(q)\}^<$, za sve $k > j+1$. Za proizvoljne $a_{j+2}, \ldots, a_t \in [3]$ definiramo

$$w(q; a_{j+2}, \ldots, a_t) = w(q)\underbrace{11\ldots1}_{p_{j+2,1}(q)}\underbrace{a_{j+2}a_{j+2}\ldots a_{j+2}}_{p_{j+2,2}(q)-p_{j+2,1}(q)}\underbrace{22\ldots2}_{n_{j+2}-p_{j+2,2}(q)}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{p_{t,1}(q)}\underbrace{a_ta_t\ldots a_t}_{p_{t,2}(q)-p_{t,1}(q)}\underbrace{22\ldots2}_{n_t-p_{t,2}(q)}.$$

Preciznije, $w(q; a_{j+2}, \ldots, a_t)$ je jednak $w(q)$ prvih s_{j+1} znakova. Za $j+1 < k \le t$ se interval $[s_{k-1}+1, s_k]$ sastoji od $p_{k,1}(q)$ jedinica, nakon čega slijedi $p_{k,2}(q) - p_{k,1}(q)$ kopija od a_k te na kraju $n_k - p_{k,2}(q)$ dvojki.

Sada definiramo bojenje χ_{j+1} u kojemu za svaki $0 \le q \le n_{j+1}$ riječi $w(q)$ pridružujemo boju $\chi_{j+1}(w(q))$ definiranu kao

$$\prod_{k=j+2}^{t} f_k(w(q)) \times \prod_{a_{j+2},\ldots,a_t\in[3]} \chi(w(q; a_{j+2}, \ldots, a_t)).$$

Primijetimo da je ukupan broj boja

$$\prod_{k=j+2}^{t} \binom{n_k+1}{2} \times r^{3^{t-j-1}} \le (n_{j+2}\cdots n_t)^2 r^{3^{t-j-1}}.$$

Pošto vrijedi

$$(n_{j+2}\cdots n_t)^2 r^{3^{t-j-1}} = (r^{6^{t-j-2}+6^{t-j-3}+\ldots+6^1+6^0})^2 r^{3^{t-j-1}} = r^{\frac{2}{5}(6^{t-j-1}-1)+3^{t-j-1}} \le r^{6^{t-j-1}} = n_{j+1}$$

prema Dirichletovom principu slijedi da postoje $p_{j+1,1}, p_{j+1,2}$, $0 \leq p_{j+1,1} < p_{j+1,2} \leq n_{j+1}$, izbori za q takvi da je $\chi_{j+1}(w(p_{j+1,1})) = \chi_{j+1}(w(p_{j+1,2}))$.

Sada tvrdimo da funkcije $f_{j+1}(w) = \{p_{j+1,1}, p_{j+1,2}\}$ i $f_k(w) = f_k(w(p_{j+1,1})) = f_k(w(p_{j+1,2}))$, za $j+1 < k \leq t$ zadovoljavaju tražene uvjete za dani j. Za $l = j+1$, $v_i(j+1; a_{j+2}, \ldots, a_t)$ za $i = 1,2$, poprimaju istu boju zato što je $v_i(j+1; a_{j+2}, \ldots, a_t) = w(p_{j+1,i}; a_{j+2}, \ldots, a_t)$, a vrijedi da su oni iste boje jer je $\chi_{j+1}(w(p_{j+1,1})) = \chi_{j+1}(w(p_{j+1,2}))$. Za $l > j+1$ primijetimo da je $v_i(l; a_{l+1}, \ldots, a_t)$ isti kao $v_i'(l; a_{l+1}, \ldots, a_t)$, koji je definiran na isti način, ali s početnom riječi $w(p_{j+1,2})$ i bez prvih n_{j+1} znakova koji se nalaze nakon ulazne riječi zato da izlazna riječ ima n znakova. Prema pretpostavci indukcije, za svaki $l > j+1$ i $a_{l+1}, \ldots, a_t \in [3]$, riječi $v_i'(l; a_{l+1}, \ldots, a_t)$, $i = 1,2$, poprimaju istu boju. Time smo dokazali korak indukcije.

Nastavimo li indukciju do $j = 0$, uz oznaku ϵ za praznu riječ, koja je i jedina riječ u $[3]^{s_0} = [3]^0$, za $1 \leq k \leq t$ dobivamo brojeve $p_{k,1}$ i $p_{k,2}$, $0 \leq p_{k,1} < p_{k,2} \leq n_k$, gdje je $\{p_{k,1}, p_{k,2}\} = f_k(\epsilon)$, za $f_1, \ldots, f_t$, funkcije koje zadovoljavaju tražene uvjete za $j = 0$. Za te brojeve vrijedi:
Za svaki $0 \leq l \leq t$ i $a_{l+1}, \ldots, a_t \in [3]$, dvije riječi $v_i = v_i(l; a_{l+1}, \ldots, a_t)$, $i = 1,2$, imaju istu boju, gdje je

$$v_i = \underbrace{11\ldots1}_{p_{1,2}}\underbrace{22\ldots2}_{n_1-p_{1,2}}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{p_{l,i}}\underbrace{22\ldots2}_{n_l-p_{l,i}}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{p_{t,1}}\underbrace{a_ta_t\ldots a_t}_{p_{t,2}-p_{t,1}}\underbrace{22\ldots2}_{n_t-p_{t,2}}.$$

Preciznije, za $1 \leq k < l$, interval $[s_{k-1}+1, s_k]$ ima $p_{k,2}$ jedinica i $n_k - p_{k,2}$ dvojki nakon toga. Interval $[s_{l-1}+1, s_l]$ sadrži $p_{l,i}$ jedinica i $n_l - p_{l,i}$ dvojki nakon toga. Za $l < k \leq t$, interval $[s_{k-1}+1, s_k]$ ima prvo $p_{k,1}$ jedinica, nakon toga $p_{k,2} - p_{k,1}$ kopija od a_k i na kraju $n_k - p_{k,2}$ dvojki.

Primijetimo da su za proizvoljne $a_1, \ldots, a_t \in [3]$, dvije riječi $v_i(0; a_1, \ldots, a_t)$, $i = 1,2$, identične, odnosno nezavisne o i. Da pronađemo traženi monokromatski pravac, uzmimo $t = r$ i razmotrimo riječi $v(q) = v(0; 1, 1, \ldots, 1, 3, 3, \ldots, 3)$, gdje su parametri q jedinica i $r - q$ trojki za neki $0 \leq q \leq r$. Prema Dirichletovom principu postoje q_1 i q_2, takvi da je $q_1 < q_2$, za koje vrijedi $\chi(v(q_1)) = \chi(v(q_2))$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\chi(v(q_2)) &= \chi(v_2(q_2; 3, 3, \ldots, 3)) \\
&= \chi(v_1(q_2; 3, 3, \ldots, 3)) \\
&= \chi(v_2(q_2 - 1; 2, 3, 3, \ldots, 3)) \\
&= \ldots \\
&= \chi(v_2(q_1 + 1; 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 3)) \\
&= \chi(v_1(q_1 + 1; 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 3))
\end{aligned}$$

gdje je uvijek $r - q_2$ trojki na kraju. Uzastopne jednakosti vrijede zbog redom identičnosti riječi te primjene gornje napomene. Lako je vidjeti da vrijedi

$$v_1(q_1 + 1; 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 3) = v(0; 1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2, 3, 3, \ldots, 3),$$

gdje u parametrima od v ima q_1 jedinica, nakon čega je $q_2 - q_1$ dvojki te na kraju $r - q_2$ trojki. Sada zajedno sa $v(q_1)$ i $v(q_2)$, u kojima su dvojke iz parametara zamijenjene s trojkama, odnosno jedinicama, dobijemo monokromatski pravac. $\square$

4.4 Donje ograde za Van der Waerdenove brojeve

Dosad smo dali donju ogradu samo za funkciju $W_k(r)$, što je vrijednost $W(k,r)$ dobivena iz originalnog dokaza za Van der Waerdenov teorem. To nije donja ograda za $W(k,r)$, zato što $W(k,r)$ označava minimalni n takav da u svakom r-bojenju od $[n]$ postoji monokromatski aritmetički niz duljine k, dok $W_k(r)$ nije nužno minimalni takav n.

U ovom potpoglavlju prvo ćemo promotriti jednu od najstarijih i najpoznatijih donjih ograda za funkciju $W(k,2)$. Tu ogradu dao je Berlekamp svojim radom iz 1968. godine. Preko 50 godina to je jedna od najboljih donjih ograda za $W(k,2)$.

Teorem 4.4.1. *Za prost broj p vrijedi $W(p+1,2) \geq p2^p$.*

Dokaz. Ovdje ćemo pokazati nešto slabiji rezultat, koji tvrdi $W(p+1,2) > p(2^p - 1)$. Sa $GF(2^p)$, standardno, označavamo konačno polje s 2^p elemenata. Fiksirajmo $\alpha \in GF(2^p)$, takav da je α primitivan, odnosno, α generira cikličku multiplikativnu grupu $GF(2^p)^*$. Fiksiramo bazu $v_1, v_2, \ldots, v_p$ od $GF(2^p)$ nad $\mathbb{Z}_2$. Za cijeli broj j definiramo

$$\alpha^j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{pj}v_p, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}_2.$$

Sada definiramo

$$C_0 = \{j : a_{1j} = 0, 1 \leq j \leq p(2^p - 1)\},$$
$$C_1 = \{j : a_{1j} = 1, 1 \leq j \leq p(2^p - 1)\}.$$

Tvrdimo da je 2-bojenje, u kojem su C_0 i C_1 dvije klase boja, traženo 2-bojenje koje ne sadrži monokromatski aritmetički niz duljine $p+1$. Pretpostavimo suprotno i neka je $\{a, a+b, a+2b, \ldots, a+pb\} \subseteq C_k$, $k = 0$ ili 1. Definiramo $\beta = \alpha^a$, $\gamma = \alpha^b$. Pošto vrijedi $1 \leq a < a+pb \leq p(2^p-1)$, slijedi $b < 2^p - 1$, zbog čega $\gamma \neq 1$. Tada imamo $p+1$ elemenata iz $GF(2^p)$, β, $\beta\gamma, \ldots, \beta\gamma^p$, koji svi imaju istu prvu koordinatu, kad su zapisani kao vektori.

1. $k = 0$. Tada je β, $\beta\gamma, \ldots, \beta\gamma^{p-1}$ niz p vektora iz $(p-1)$-dimenzionalnog prostora, pošto svi imaju prvu koordinatu jednaku 0 pa su stoga međusobno zavisni. Točnije, postoje $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}_2$, od kojih barem jedan nije jednak 0, takvi da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i \left(\beta\gamma^i\right) = 0,$$

iz čega slijedi

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i \gamma^i = 0.$$

Vrijedi $\gamma \in GF(2^p)$, $\gamma \neq 0, 1$, a ekstenzija polja $GF(2)$ generirana elementom γ je $GF(2^p)$ pa ima dimenziju p, iz čega dobivamo kontradikciju.

2. $k = 1$. Ovdje β, $\beta\gamma, \ldots,$ $\beta\gamma^p$ imaju prvu koordinatu jednaku 1. U ovom slučaju su $\beta(\gamma - 1)$, $\beta(\gamma^2 - 1), \ldots,$ $\beta(\gamma^p - 1)$ vektori u $(p - 1)$-dimenzionalnom prostoru. Stoga postoje $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}_2$, pri čemu barem jedan a_i nije 0, takvi da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \left(\beta\left(\gamma^i - 1\right)\right) = 0.$$

Dijeljenjem sa $\beta(\gamma - 1)$ dobivamo kontradikciju na isti način kao u slučaju $k = 0$.

□

Zbog toga što je funkcija $W(k, 2)$ rastuća po parametru k, očito je da ovime dobivamo i ogradu kada k nije nužno jednak $p + 1$, za prosti broj p.

Ta ograda bila je najbolja donja ograda vezana uz Van der Waerdenove brojeve, do 2022., kada je Ben Green izdao rad [3] u kojem daje novu donju ogradu za 2-bojne Van der Waerdenove brojeve $w(3, k)$, $k \geq 3$.

Definicija 4.4.2. *2-bojni Van der Waerdenov broj, u oznaci $w(a, b)$, označava minimalni N, takav da svako plavo − crveno bojenje od $[N]$, sadrži ili plavi aritmetički niz duljine a ili crveni aritmetički niz duljine b.*

Teorem 4.4.3. *Postoji plavo − crveno bojenje od $[N]$ bez plavih aritmetičkih nizova duljine 3 i bez crvenih aritmetičkih nizova duljine $e^{C(\log N)^{3/4}(\log\log N)^{1/4}}$. Iz toga slijedi ograda $w(3, k) \geq k^{b_0(k)}$, gdje je $b_0(k) = c\left(\frac{\log k}{\log\log k}\right)^{1/3}$.*

Devet mjeseci nakon što je Greenov rad postao javan, Zachary Hunter je u [4] pojednostavnio neke dijelove dokaza te poboljšao ogradu.

U ovom radu nećemo prikazivati potpuni dokaz tih tvrdnji, već ćemo pokazati ideje tih dokaza te neformalno objasniti u čemu se one razlikuju i zašto funkcioniraju. Prije nego počnemo objašnjavati ideje oba dokaza, iskazujemo Hunterov rezultat.

Definicija 4.4.4. *Funkcija $f(N)$ označava najmanji k, takav da je $w(3, k) > N$. Drugim riječima, $f(N)$ je najmanji broj za koji postoji plavo − crveno bojenje od $[N]$ bez plavog aritmetičkog niza duljine 3 i bez crvenog aritmetičkog niza duljine $f(N)$.*

Teorem 4.4.5. *Vrijedi $w(3, k) \geq k^{b(k)}$, gdje je $b(k) = \frac{c \log k}{\log \log k}$, gdje je $c > 0$ konstanta. Drugim riječima, vrijedi $f(N) \leq e^{C(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{1/2}}$, za konstantu $C > 0$.*

Neformalno ćemo objasniti ideje konstrukcija, njihove razlike te zašto one rade, prateći objašnjenja iz [4]. Hunter u tom radu objašnjava konstrukcije za fiksni N i gledajući gornju ogradu za $f(N)$.

Glavna ideja konstrukcije, u oba dokaza, je da d-dimenzionalna sfera ne sadrži 3 kolinearne točke. U oba dokaza, odabere se dimenzija D i razmatra se D-dimenzionalni torus, $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$. Za neki $\theta \in \mathbb{T}^D$ i *plavo − crveno* bojenje $f : \mathbb{T}^D \to \{Plava, Crvena\}$, možemo dobiti bojenje $F = F_{f,\theta}$ od $[N]$, tako da povežemo $n \in [N]$ sa $\theta n \in \mathbb{T}^D$ i stavimo $F(n) = f(\theta n)$. Cilj obje konstrukcije je dobiti bojenje torusa, iz čega na opisani način dobijemo bojenje od $[N]$.

U Greenovom radu se prvo fiksira „dobro distribuirani" skup točaka $x_1, \ldots, x_M \in \mathbb{T}^D$. Ako točke biramo nasumično iz $\mathbb{T}^D$, velika je šansa da dođemo do takvog skupa. Nakon toga kreiramo bojenje f od $\mathbb{T}^D$, takvo da je

$$f^{-1}(Plava) = \bigcup_{i \in [M]} (x_i + \mathcal{A}),$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ projekcija nasumičnog tankog eliptičkog vijenca, s malim radijusom, na $\mathbb{T}^D$. Preostale točke torusa su crvene. Na kraju, odaberemo nasumični $\theta \in \mathbb{T}^D$ i obojimo $[N]$ sa $F_{f,\theta}$.

Hunter je u svojem radu umjesto eliptičkog vijenca fiksnog radijusa koristio tanke kružne vijence nasumičnih malenih radijusa. Kao u Greenovom radu, nasumično odaberemo „dobro distribuirane" točke $x_1, \ldots, x_M \in \mathbb{T}^D$ i $\theta \in \mathbb{T}^D$. Ovdje bojenje f od $\mathbb{T}^D$ napravimo nasumično, tako da je

$$f^{-1}(Plava) = \bigcup_{i \in [M]} (x_i + \mathcal{A}_i),$$

gdje je $\mathcal{A}_i$ projekcija tankog kružnog vijenca, malog radijusa, na $\mathbb{T}^D$. Kao kod Greena, preostale točke torusa su crvene. Na kraju, $[N]$ obojimo sa bojenjem $F_{f,\theta}$. Napomenimo da se ovdje radijusi vijenaca biraju međusobno nezavisno.

Napomenimo da debljine vijenaca, broj točaka M te d, dimenzija torusa koji razmatramo, sve ovise o veličini danog N.

Relativno jednostavno se pokaže da konstrukcije, s velikom vjerojatnosti, ne stvaraju plave aritmetičke nizove duljine 3. U [4] je navedeno da tanki vijenac, pri čemu debljina ovisi o broju N, radijusa $\leq 1/4$ ne sadrži aritmetički niz duljine 3, gdje aritmetičkim nizom smatramo sliku aritmetičkog niza u $[N]$ preko preslikavanja $n \to \theta n$. Pošto su središta vijenaca $x_1, \ldots, x_M$ „dobro distribuirana", s velikom vjerojatnošću možemo reći da konstrukcije neće sadržavati plave aritmetičke nizove duljine 3.

Nedostatak dugačkih crvenih nizova se za Greenovu strukturu pokazuje se u 2 koraka. Prvo, pokazuje se, pošto su središta vijenaca „dobro distribuirana", da svaki dugi niz ima točku blizu središtu nekog od tih vijenaca. Nakon toga se pokazuje da postoji eliptički vijenac, takav da svaki dugački niz koji ima točku vrlo blizu središta tog vijenca mora ujedno imati i neprazan presjek s tim vijencem. Sada svaki dugi niz mora imati neku točku koja je plava i time spriječimo duge crvene nizove.

U Hunterovoj strukturi se dugi crveni nizovi sprječavaju nešto drugačije. Primijetimo da iz „dobre distribuiranosti" središta vijenaca možemo zaključiti više. Možemo zaključiti da, zato što je niz dugačak, će postojati dosta točaka niza blizu središta nekog vijenca. Radijusi vijenaca se odabiru tako da za svaku točku blizu centra vijenca postoji pozitivna šansa da će biti obojena plavo. Što je više točaka blizu središtima, to je manja šansa da nijedna točka niza neće biti obojena plavo. Stoga ova konstrukcija, s velikom vjerojatnošću, sprječava duge crvene nizove.

Sprječavanje dugih crvenih aritmetičkih nizova je vrlo kompleksan problem i bio je usko grlo za mnoge prethodne algoritme te ujedno za Greenovu metodu u odnosu na Hunterovu. U ovome radu nećemo ulaziti u detalje kako dane strukture sprječavaju duge crvene aritmetičke nizove, ali ćemo iskazati krajnje rezultate za prisustvo tih nizova.

Za pokazati da bojenje $F_{f,\theta}$ nema monokromatskih aritmetičkih nizova duljine X, dovoljno je pokazati da f ne boja skup $\{x_0, x_0+\alpha, \dots, x_0+(X-1)\alpha\} \subset \mathbb{T}^D$ monokromatski, za sve $x_0, \alpha \in S_\theta = \{\theta, 2\theta, \dots, N\theta\}$. Primijetimo, skup $\{x_0, x_0+\alpha, x_0+2\alpha\}$ može biti plav jedino za jako malen α, no pošto je $\theta \in \mathbb{T}^D$ odabran nasumično, svi $d\theta$ će biti „dobro distribuirani" i šansa da neki od njih bude malen je vrlo niska. U dokazu se neće promatrati samo $x_0 \in S_\theta$, već x_0 iz puno veće domene. To ćemo raditi zato što, kao što smo napomenuli, skup S_θ je „dobro distribuiran" pa za svaku točku $x_0 \in \mathbb{T}^D$ postoji neki $d\theta$ koji mu je blizu. Iz toga slijedi da dobiveni nizovi $\{x_0, x_0+\alpha, \dots, x_0+(X-1)\alpha\}$ i $\{d\theta, d\theta+\alpha, \dots, d\theta+(X-1)\alpha\}$ neće biti znatno različiti. S druge strane, domenu od α nećemo povećavati, jer mala promjena α ima veliki utjecaj na niz.

Rezultat Greenovog rada kaže da u njegovoj strukturi za nasumično odabran $\theta \in \mathbb{T}^D$ i nasumično odabran eliptički vijenac $\mathcal{A}$ za definirati f, s velikom vjerojatnošću vrijedi da ni za jedan $\alpha \in S_\theta$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{T}^D$ takav da je niz $\{x_0, x_0+\alpha, \dots, x_0+(X-1)\alpha\}$ monokromatski crven pod f, pri čemu je $X = N^{O(1/\sqrt{D})}$.

Hunter u svom dokazu pokazuje da za nasumično odabran θ te bilo koje fiksne $x_0 \in \mathbb{T}^D$, $\alpha \in S_\theta$, kad nasumično odredimo f, tako da odaberemo radijuse kružnih vijenaca, vjerojatnost da je niz $\{x_0, x_0+\alpha, \dots, x_0+(X-1)\alpha\}$ monokromatski crven pod f je vrlo malena, pri tome je $X = N^{O(1/D)}$. Ta vjerojatnost će biti manja od N^{-3}, stoga je velika vjerojatnost da se ni za jedan izbor x_0, α, od $< N^2$ izbora koji odgovaraju aritmetičkim nizovima u $[N]$, neće pojaviti monokromatski crven skup $\{x_0, x_0+\alpha, \dots, x_0+(X-1)\alpha\}$.

Detaljnija objašnjenja struktura i tvrdnji, koje su ovdje neformalno navedene, uz njihove dokaze, mogu se naći u [3] i [4].

Poglavlje 5

Posljedice HJ teorema i otvoreni problemi

Hales-Jewettov teorem neki smatraju najbitnijim teoremom Ramseyeve teorije, zato što iz njega direktno slijedi jako puno drugih rezultata. U ovome poglavlju predstavit ćemo neke od tih rezultata.

U prvom potpoglavlju dajemo proširenje Hales-Jewettovog teorema, koje u iskazu umjesto pojma monokromatskog pravca ima monokromatski n-dimenzionalni potprostor. Također ćemo predstaviti Gallaiev teorem, za koji na prvi pogled nije očita veza s Ramseyevom teorijom.

U drugom potpoglavlju predstavljamo poveznicu Hales-Jewettovog teorema s teorijom brojeva. Dokazat ćemo rezultat o postojanju dovoljno velikog prostog broja p, takvog da postoji k uzastopnih kvadratnih ostataka modulo p i opisati povijesni razvoj dokaza te tvrdnje.

U trećem potpoglavlju predstavljamo neke otvorene probleme Ramseyeve teorije koji su povezani s gradivom ovog rada.

5.1 Direktni korolari Hales-Jewettovog teorema

U ovome poglavlju ćemo u nekoliko navrata razmatrati kocke s drugačijim skupom koordinata od standardnog skupa, $[k]$.

Teorem 5.1.1 (Prošireni Hales-Jewettov teorem, [9]). *Za sve m, k, r postoji N' takav da, za sve $N \geq N'$, vrijedi da proizvoljno r-bojenje od $[0, k-1]^N$ sadrži monokromatski m-dimenzionalni potprostor.*

Dokaz. Za skup vrijednosti svake koordinate $[0, k^m - 1]^s$ možemo uzeti skup $[0, k-1]^m$. Primijetimo da su svi dosadašnji rezultati nezavisni o tom skupu. Svaki element $(x_1, \ldots, x_{ms}) \in$

$[0, k-1]^{ms}$ podijelimo u s blokova veličine m. Svaki blok je neka m-torka koja je zapravo element u $[0, k-1]^m$. Sada svaki taj blok pretvorimo u jednu koordinatu i tako dobijemo s-torku $(y_1, \ldots, y_s)$ gdje je $y_i \in [0, k-1]^m$, za sve $1 \leq i \leq s$, te tako dobijemo bijekciju između $[0, k-1]^{ms}$ i $[0, k^m - 1]^s$. Slika kombinatornog pravca u $[0, k^m - 1]^s$ preko te bijekcije je k^m-člani podskup od $[0, k-1]^{ms}$ i očito je da je to m-dimenzionalni potprostor od $[0, k-1]^{ms}$. Jasno je koje vrijednosti treba uzeti za skupove $B_0, B_1, \ldots, B_m$ te funkciju $f : B_0 \to [0, k-1]$ iz definicije m-dimenzionalnog potprostora od $[0, k-1]^{ms}$. Na primjer:

$$\text{pravac } \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\} \subseteq [0,3]^2$$

se poistovjećuje s 2-dimenzionalnim potprostorom

$$\{(0,0,0,0), (0,1,0,1), (1,0,1,0), (1,1,1,1)\} \subseteq [0,1]^4.$$

Stavimo $s = HJ(k^m, r)$ i neka je $N' = ms$. r-bojenje od $[0, k-1]^{ms}$ se poistovjećuje s r-bojenjem od $[0, k^m - 1]^s$. Prema definiciji s, za to bojenje postoji monokromatski kombinatorni pravac u $[0, k^m - 1]^s$, koji se prema prethodnoj napomeni, poistovjećuje s m-dimenzionalnim potprostorom od $[0, k-1]^{ms}$, koji je monokromatski pod originalnim bojenjem. Za $N \geq N'$, $[0, k-1]^N$ sadrži $[0, k-1]^{N'}$, na način da neke koordinate imaju fiksne vrijednosti, pa opet postoji traženi potprostor. $\square$

Definicija 5.1.2. *Neka je $V = \{v_0, \ldots, v_{t-1}\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Kažemo da je $W = \{w_0, \ldots, w_{t-1}\}$ homotetičan V ako za neki uređaj elemenata od W postoje $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, te $b \in \mathbb{R}^m$ takvi da vrijedi*

$$w_i = cv_i + b, \quad 0 \leq i < t.$$

To ponekad označavamo sa $W = cV + b$.

Teorem 5.1.3 (Gallaiev teorem, [9]). *Neka je dano proizvoljno konačno bojenje točaka od $\mathbb{R}^m$. Za svaki konačni $V \subseteq \mathbb{R}^m$ postoji monokromatski $W \subseteq \mathbb{R}^m$ homotetičan V.*

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljni broj boja r te skup V, $|V| = t$. Definirajmo $N = HJ(t, r)$. Neka kocka ima skup vrijednosti koordinate jednak V, odnosno to je kocka $[V]^N$. Definiramo preslikavanje $\psi : [V]^N \to \mathbb{R}^m$ kao

$$\psi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} k_i x_i$$

gdje su $k_1, \ldots, k_N$ realne konstante. Pretpostavimo da je ψ injektivna funkcija. To uvijek možemo postići jer izbor $k_1, \ldots, k_N$ mora zadovoljavati da za svake $(x_1, \ldots, x_N) \neq (x'_1, \ldots, x'_N)$, oba elementi od $[V]^N$, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{N} k_i (x_i - x'_i) \neq 0.$$

Pošto je $[V]^N$ konačan skup, slijedi da $k_1, \ldots, k_N$ ne smiju zadovoljavati konačan broj jednakosti. Ali, za svaki k_i ima beskonačno mnogo izbora pa uvijek postoji izbor $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{R}$, koji ne zadovoljavaju nijednu od danih jednadžbi i za njih je ψ injektivna.

Dano r-bojenje od $\mathbb{R}^m$ (dovoljno je bojenje slike od ψ) inducira r-bojenje od $[V]^N$. Zbog izbora N, za to bojenje postoji monokromatski pravac u $[V]^N$. Označimo njegov skup aktivnih koordinata s I. Taj pravac odgovara monokromatskom $W = \{w_0, \ldots, w_{t-1}\} \subseteq \mathbb{R}^m$, uz $w_i = \psi(x_1, \ldots, x_N)$, sa $x_j = v_i$, za sve $j \in I$, te x_j fiksan za $j \notin I$. Stavimo

$$c = \sum_{i \in I} k_i, \quad b = \sum_{i \notin I} k_i x_i.$$

Sada je očito $W = cV + b$. Primijetimo da ovako dobiveni c može biti i 0. Dodavanjem dodatnog uvjeta na parametre $k_1, \ldots, k_N$ osiguravamo da se to ne desi. Dodamo $2^N - 1$ nejednakosti oblika $\sum_{i \in S} k_i \neq 0$, za svaki $S \subseteq [N], S \neq \emptyset$. Sada smo našli traženi monokromatski $W \subseteq \mathbb{R}^m$ koji je homotetičan V. □

Ako dodatno odaberemo $k_i \in \mathbb{N}$, za sve $1 \leq i \leq N$, opet biramo svaki k_i iz beskonačnog skupa i istim argumentima će postojati traženi koeficijenti takvi da je ψ injekcija i vrijedi teorem. Ali, u tome slučaju zapravo osiguravamo da je i $c \in \mathbb{N}$ i tako dobivamo jači rezultat.

Kada bi domenu $\mathbb{R}^m$ iz iskaza zamijenili s $\mathbb{N}^m$, tvrdnja teorema bi i dalje vrijedila. Zaista, za odabrane $k_i \in \mathbb{N}$, zbog $V \subseteq \mathbb{N}^m$, bi slika od ψ bila podskup od $\mathbb{N}^m$ i prema prethodnoj napomeni bi vrijedilo $c \in \mathbb{N}$. Također, zbog $k_i \in \mathbb{N}$ i $x_i \in V \subseteq \mathbb{N}^m$, vrijedi i $b \in \mathbb{N}$. Iz takvog iskaza teorema dolazimo do 2-dimenzionalne verzije Van der Waerdenovog teorema. Za rešetku $V = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq i, j < t\}$, iz tvrdnje teorema, slijedi da za svako konačno bojenje od $\mathbb{N}^2$ postoje $x_0, y_0, d \in \mathbb{N}$, takvi da svih t^2 točaka oblika $(x_0 + id, y_0 + jd)$, $0 \leq i, j < t$, imaju istu boju.

5.2 Poveznica s teorijom brojeva

U ovom potpoglavlju cilj je dokazati sljedeći teorem.

Teorem 5.2.1. *Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji dovoljno velik prost broj p, takav da postoji k uzastopnih kvadratnih ostataka modulo p.*

Dokaz tog teorema, za razne k-ove, se postepeno razvijao kroz povijest. Za $k = 2$ je Gauss dokazao da je broj uzastopnih parova kvadratnih ostataka $\frac{p-5}{4}$ za $p \equiv 1 \pmod 4$, odnosno $\frac{p-3}{4}$ za $p \equiv 3 \pmod 4$.

Za $p \equiv 1 \pmod 4$, broj uzastopnih trojki kvadratnih ostataka ovisi o parametru $a \in \mathbb{Z}$, koji je jedinstveno rješenje jednadžbe $p = a^2 + b^2$, uz $a \equiv 1 \pmod 4$, i postoji prema Fermatovom teoremu o dva kvadrata te može biti negativno. Gauss je dokazao da je broj uzastopnih trojki kvadratnih ostataka jednak $\frac{p-2a-15}{8}$ za $p \equiv 1 \pmod 8$ ili $\frac{p+2a-7}{8}$ za $p \equiv 5 \pmod 8$. Detaljnije informacije i primjeri su dani u [5].

Za postojanje k uzastopnih kvadratnih ostataka za neki dovoljno velik prosti broj p se početkom 20. stoljeća znalo za $k \leq 5$. Tvrdnju s početka potpoglavlja je dokazao Brauer uz ojačan Van der Waerdenov teorem.

Lema 5.2.2. *Za sve $k, r \in \mathbb{N}$ postoji n takav da za svako r-bojenje skupa $[n]$, postoje $x, d \in [n]$ takvi da su*

$$d, x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$$

monokromatski.

Dokaz. Neka je k proizvoljan i fiksan. Radimo matematičku indukciju po broju boja, r. Za $r = 1$ je tvrdnja očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $r - 1$ i da je n' dovoljno velik broj iz iskaza za $r - 1$.

Fiksirajmo proizvoljno r-bojenje od $[n]$, gdje je $n \geq W((k - 1)n' + 1, r)$. Za to bojenje postoji monokromatski niz $y, y + d, \ldots, y + kn'd$.

Promotrimo skup $D = \{d, 2d, \ldots, n'd\}$. Ako je neki $sd \in D$ iste boje kao elementi dobivenog monokromatskog niza, onda je $sd, y, y + sd, \ldots, y + (k - 1)sd$ tražena struktura. U protivnom, elementi u d su obojeni u $r - 1$ boja i možemo primijeniti pretpostavku indukcije, uz izomorfizam. Time dobivamo traženu monokromatsku strukturu i dokazan je korak indukcije. $\square$

Ovaj teorem koristimo za dokazivanje teorema 5.2.1. Prije dokaza, napomenimo da $\left(\frac{x}{p}\right)$ označava Legendreov simbol, koji poprima vrijednost

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \text{ kvadratni ostatak modulo } p \text{ i } x \not\equiv 0 \pmod p \\ -1 & \text{ako je } x \text{ kvadratni neostatak modulo } p, \\ 0 & \text{ako je } x \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Dokaz teorema 5.2.1. Fiksirajmo proizvoljan $k \in \mathbb{N}$. Neka je n broj koji dobijemo iz prethodne leme za dani k i $r = 2$. Uzmimo proizvoljan prost broj $p > n$ i definiramo 3-bojenje $\phi : [0, p - 1] \to \{-1, 0, 1\}$ sa

$$\phi(x) = \left(\frac{x}{p}\right).$$

Zbog $p > n$, iz tvrdnje prethodne leme, slijedi da postoje $x, d \in [0, p - 1]$, $d > 0$, takvi da su $d, x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$ monokromatski. Primijetimo da mora biti $x > 0$, jer bi inače x i $d > 0$ imali drugačiju boju.

Ključan dio za dokaz je multiplikativnost Legendeovog simbola, iz čega slijedi multiplikativnost funkcije bojenja, odnosno za $x, y \in [0, p - 1]$ vrijedi $\phi(x)\phi(y) = \phi(z)$, gdje je

$z \equiv xy \pmod p$ i $z \in [0, p-1]$. Primijetimo također da je 1 kvadratni ostatak modulo p, za svaki prost broj p.

Ako je $\phi(d) = \phi(x) = \ldots = \phi(x + (k-1)d) = 1$, zbog multiplikativnosti funkcije bojenja, imamo da je

$$1 = \phi(dd^{-1}) = \phi(d)\phi(d^{-1}) = \phi(x)\phi(d^{-1}) = \phi(xd^{-1}) = \phi(xd^{-1} + 1) = \ldots = \phi(xd^{-1} + (k-1)).$$

U slučaju da je $\phi(d) = \phi(x) = \ldots = \phi(x + (k-1)d) = -1$, imamo $\phi(d^{-1}) = \frac{1}{\phi(d)} = -1$ pa opet, zbog multiplikativnosti Legendreovog simbola, slijedi ista tvrdnja.

Sada je niz $z_0, \ldots, z_{k-1}$, gdje je $z_i \equiv xd^{-1} + i \pmod p$, tražena k-torka uzastopnih kvadratnih ostataka modulo p. □

5.3 Nekoliko otvorenih problema Ramseyeve teorije

U ovom potpoglavlju predstavljamo nekoliko otvorenih problema, hipoteza te neka nagađanja o ogradama, koja još nisu dokazana.

Ramseyeva teorija je grana matematike koja se još uvijek aktivno razvija i ima velik broj otvorenih problema pa stoga iznosimo jako malen skup problema koji su usko vezani uz temu ovog diplomskog rada.

Navodimo Owingsovu hipotezu, preuzetu iz [7], te neke slutnje i rezultate iz članka [2], koji je Graham napisao kao sažetak svog govora koji je održao 2005. u Carrolltonu. Na kraju iznosimo Greenovu slutnju o gornjoj ogradi 2-bojnih Van der Waerdenovih brojeva, navedenu u [3].

Slutnja 5.3.1 (Owingsova hipoteza)**.** *Za svako* 2*-bojenje skupa prirodnih brojeva postoji prebrojiv skup* $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$*, takav da su svi* $x_i + x_j$ *iste boje, za* $i, j \in \mathbb{N}$.

Bitan uvjet je da $2x_i$ moraju biti iste boje za sve $i \in \mathbb{N}$, jer tvrdnju teorema bez tog uvjeta dobivamo direktno iz beskonačne verzije Ramseyevog teorema za 2 boje. Uistinu, ako za fiksno 2-bojenje od $\mathbb{N}$, nazovimo ga c, definiramo 2-bojenje χ od $\binom{\mathbb{N}}{2}$ kao

$$\chi(i, j) = c(i + j),$$

tada prema beskonačnoj verziji Ramseyevog teorema postoji prebrojiv skup $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$, takav da je $\binom{A}{2}$ monokromatski u χ, odnosno, za sve $i, j \in \mathbb{N}$, takve da $i \neq j$, je $\chi(x_i, x_j)$ konstantan, odnosno $c(x_i + x_j)$ je konstantan.

Problemu možemo pristupiti na način da umjesto bojenja u 2 boje, gledamo bojenja u 3 ili više boja. Pokazuje se da za 3 boje već postoji bojenje za koje ne vrijedi uvjet iz teorema. Sljedeće iznosimo jedno takvo 3-bojenje i dokaz zašto za njega ne postoji traženi skup.

Lema 5.3.2. *Definirajmo 3-bojenje od $\mathbb{N}$ tako da podijelimo prirodne brojeve u blokove $A_0, A_1, \ldots$, gdje su veličine blokova definirane kao:*

$$|A_0| = |A_1| = 1,$$

$$|A_i| = 2^{\lfloor i/2 \rfloor - 1}, \ za\ i \geq 2.$$

Elemente dijelimo u blokove na prirodni način, prvih $|A_0|$ elemenata stavimo u A_0, sljedećih $|A_1|$ elemenata u blok A_1 i tako dalje. Obojimo blok A_i, za $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, u boju $j \in \{0, 1, 2\}$, takvu da vrijedi $i \equiv j \pmod 3$. Za tako opisano bojenje ne postoji prebrojiv skup $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$, takav da su svi $x_i + x_j$ iste boje, za $i, j \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Primijetimo da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{2k-1} |A_i| = 2^k.$$

Iz toga očito slijedi

$$|A_{2k}| = |A_{2k+1}| = \frac{\sum_{i=0}^{2k-1} |A_i|}{2}.$$

Ove napomene ćemo koristiti za zaključke o tome kojem bloku pripada $x + y$, ako znamo u kojim su blokovima x i y.

Označimo traženi prebrojiv skup iz tvrdnje teorema sa S. Pokažimo da ako S sadrži element iz A_j, za neki $j < 2i$, onda ne može sadržavati element iz $A_{2i} \cup A_{2i+1}$. Pretpostavimo da S sadrži $x \in A_j$, $j < 2i$.

Ako postoji $y \in S$, takav da $y \in A_{2i}$, tada je $y + y \in A_{2i+2}$. Očito je $x + y \in A_{2i} \cup A_{2i+1} \cup A_{2i+2}$, a zato što $x + y$ i $y + y$ moraju biti iste boje, mora vrijediti $x + y \in A_{2i+2}$. To može vrijediti jedino za $x > |A_{2i+1}|$. Iz napomene s početka dokaza sada slijedi $x \in A_{2i-2} \cup A_{2i-1}$. Zbog odabranih veličina blokova, sad imamo $x + x \in A_{2i} \cup A_{2i+1}$, a to su blokovi drugačijih boja od A_{2i+2}, što je kontradikcija sa definicijom skupa S.

Ako postoji $y \in S$ takav da $y \in A_{2i+1}$, tada je $y + y \in A_{2i+3}$. Ovdje mora vrijediti $x + y \in A_{2i+1} \cup A_{2i+2} \cup A_{2i+3}$, ali opet moraju $x + y$ i $y + y$ biti iste boje pa je $x + y \in A_{2i+3}$. Ali, to nije moguće zato što bi trebalo vrijediti $x > |A_{2i+2}| = \frac{\Sigma_{i=0}^{2i+1}|A_i|}{2} = \frac{\Sigma_{i=0}^{2i-1}|A_i|}{2} + |A_{2i}| + |A_{2i+1}| = \Sigma_{i=0}^{2i-1}|A_i|$, a vrijedi $x \in A_j$, za neki $j < 2i$.

Time smo pokazali da ako $S \cap A_k \neq \emptyset$, mora vrijediti $S \cap A_i = \emptyset$, za sve $i > k + 1$, iz čega slijedi da S mora biti konačan skup, što nije moguće. □

Definicija 5.3.3. *Funkciju $r(n)$ definiramo kao minimalni broj, takav da proizvoljni graf s $r(n)$ čvorova sadrži ili kliku veličine n ili nezavisan skup veličine n. Vrijednost $r(n)$ ponekad nazivamo* ***Ramseyev broj****.*

Brzina rasta funkcije $r(n)$ je jedno od najstarijih pitanja Ramseyeve teorije, koje je postavio Erdős u tridesetim godinama prošlog stoljeća. Neke od najranijih ograda za tu funkciju dao je Erdős kao:

$$\frac{1}{e\sqrt{2}} n 2^{n/2}(1 + o(1)) < r(n) \leq \binom{2n-2}{n-1}.$$

Do unazad 20 godina se nije napravio veliki napredak od tih ograda. Nakon toga pronađeno je nekoliko novih ograda, među kojima je i revolucionarna ograda koju su 2023. predstavili Campos, Griffiths, Morris i Sahasrabudhe u [8]. Ta ograda tvrdi da postoji konstanta $\epsilon > 0$, za koju vrijedi

$$r(n) \leq (4 - \epsilon)^n.$$

Otvoren problem vezan za ovu funkciju je **konstruktivno** dokazati sljedeću tvrdnju:

Slutnja 5.3.4. *Vrijedi $r(n) > (1 + c)^n$, za neki $c > 0$.*

Sljedeći problem vezan je uz ograde funkcije f, poznat još kao Erdős-Szekeresov problem.

Definicija 5.3.5. *Za $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ označava najmanji prirodni broj, takav da svaki skup od $f(n)$ točaka ravnine sadrži konveksni podskup od n točaka.*

U originalnom radu, iz 1935., su Erdős i Szekeres dali sljedeće ograde za tu funkciju:

$$2^{n-2} + 1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Prvo poboljšanje te ograde došlo je 1997., kada su Fan Chung i Ronald Graham poboljšali gornju ogradu na

$$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2},$$

što je minimalno poboljšanje, ali je prvo poboljšanje u više od 60 godina. Nakon toga su brzo slijedila daljnja poboljšanja. Do 2006. dokazala se ograda

$$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 5,$$

što je otprilike duplo manje od originalne ograde iz 1935. Mnogi matematičari pretpostavljaju da je zapravo donja ograda iz originalnog rada stvarna vrijednost funkcije. Donja ograda se ne može poboljšati, zato što postoje skupovi s 2^{n-2} točaka koji ne sadrže konveksan podskup veličine n. Tom idejom dolazimo do hipoteze vezane uz ovaj problem.

Slutnja 5.3.6. *Vrijedi* $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Zna se da ova hipoteza vrijedi za $n \leq 5$.

Zadnja hipoteza je vezana za ograde Van der Waerdenovih brojeva, preciznije, za funkciju $W(n, 2)$. Uz ograde koje smo dosad pokazali, najbolju gornju ogradu je dao Gowers tako što je promatrao gornju asimptotsku gustoću podskupova od $[N]$ koji ne sadrže aritmetički niz duljine n. Iz njegovog rezultata slijedi ograda

$$W(n, 2) < 2^{2^{2^{2^{n+9}}}}.$$

Ta ograda je potvrdila Grahamove sumnje, navedene u [9], gdje je Graham tvrdio da je $W(n, 2)$ odozgo ograničena s $TOWER(n)$. Nakon potvrdnog odgovora na tu tvrdnju, Graham je u [2] dao novu hipotezu za gornju ogradu.

Slutnja 5.3.7. *Za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$W(n) < 2^{n^2}.$$

U [3], Green je napomenuo da vjeruje kako bi mogla vrijediti sljedeća ograda za 2-bojne Van der Waerdenove brojeve $w(3, k)$, definirane u Poglavlju 4.

Slutnja 5.3.8. *Vrijedi* $w(3, k) \leq k^{O(\log k)}$.

Pošto je u [4] dokazano $w(3, k) \geq k^{(\log k)^{1-o(1)}}$, Green sumnja da bi to mogla biti i najbolja moguća ocjena.

Ovdje je navedeno samo nekoliko otvorenih problema. Ramseyeva teorija je veliko područje matematike s mnogo otvorenih problema kojima se matematičari aktivno bave. Više tih problema može se pronaći u izvorima danima na kraju [2].

Bibliografija

[1] David Conlon, *Monochromatic combinatorial lines of length three*, Proceedings of the American Mathematical Society **150** (2022), br. 1, 1–4.

[2] Ronald Graham, *Some of my favorite problems in Ramsey theory*, Combinatorial number theory (2007), 229–236.

[3] Ben Green, *New lower bounds for van der Waerden numbers*, Forum of Mathematics, Pi, sv. 10, Cambridge University Press, 2022.

[4] Zach Hunter, *Improved lower bounds for van der Waerden numbers*, Combinatorica **42** (2022), br. 2, 1231–1252.

[5] Nina Kamčev, *Ramseyeva teorija*, `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/07-feb-rt.pdf`, str. 33–35.

[6] Imre B. Leader, *Ramsey Theory*, 2000, `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~par31/notes/ramsey.pdf`, str. 1–10.

[7] Imre Leader i Paul A. Russell, *Monochromatic infinite sumsets*, arXiv preprint arXiv:1707.08071 (2017).

[8] Robert Morris Marcelo Campos, Simon Griffiths i Julian Sahasrabudhe, *An exponential improvement for diagonal Ramsey*, arXiv preprint arXiv:2303.09521 (2023).

[9] Bruce L. Rothschild i Joel H. Spencer Ronald L. Graham, *Ramsey Theory*, 2nd., Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[10] Terence Tao, *The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi's theorem*, arXiv preprint math/0604456 (2006).

Sažetak

U ovom radu izlažu se rezultati Ramseyeve teorije, sa fokusom na Hales-Jewettov i Van der Waerdenov teorem te njihove korolare.

U prvom poglavlju uvodimo standardne oznake te definiramo pojam bojenja. Dalje uvodimo pojam Ramseyeve funkcije i dokazujemo konačne verzije Ramseyevog teorema te na kraju iznosimo beskonačnu verziju teorema.

U drugom poglavlju iznosimo povijesnu pozadinu Van der Waerdenovog teorema te dajemo iskaz i dokaz teorema, koji koristi dvostruku indukciju. Nakon toga predstavljamo jači rezultat iz kojeg direktno slijedi Van der Waerdenov teorem.

Treće poglavlje uvodi definicije n-dimenzionalne kocke na k elemenata te kombinatornog pravca i pomoću njih iskazuje Hales-Jewettov teorem. Nakon toga dajemo izvod Van der Waerdenovog teorema pomoću Hales-Jewettovog teorem. Sljedeće, predstavljamo skicu standardnog dokaza Hales-Jewettovog teorema, dvostrukom indukcijom, te na kraju prikazujemo Shelahov dokaz teorema, bez dvostruke indukcije.

U četvrtom poglavlju prvo iznosimo Ackermannovu hijerarhiju funkcija. Pomoću nje iskazujemo ograde za Van der Waerdenove i Hales-Jewettove brojeve, dobivene prateći originalne dokaze tih teorema te prateći Shelahov dokaz. Nakon toga predstavljamo gornju ogradu za Hales-Jewettove brojeve, za kocke na 3 elementa, iz nedavnog reda Davida Conlona. Na kraju dajemo Berlekampovu donju ogradu za Van der Waerdenove brojeve te neformalno predstavljamo rezultate za donju ogradu 2-bojnih Van der Waerdenovih brojeva iz nedavnih radova Greena i Huntera.

U zadnjem poglavlju predstavljamo korolare Hales-Jewettovog teorema, Prošireni Hales-Jewettov teorem te Gallaiev teorem. Sljedeće, dokazujemo rezultat o postojanju uzastopnih kvadratnih ostataka, koji slijedi iz Van der Waerdenovog teorema. Na kraju predstavljamo neke otvorene probleme Ramseyeve teorije vezane uz rezultate ovog rada.

Summary

In this thesis, we present the results of Ramsey theory, focusing on the Hales-Jewett and Van der Waerden theorems, along with their corollaries.

In the first chapter, we introduce standard notations and give the definition of a coloring. Next, we introduce the Ramsey function and prove the finite versions of Ramsey's theorem, concluding with the infinite version of the theorem.

In the second chapter, we provide the historical background of Van der Waerden's theorem and present its statement and proof, which uses double induction. After that, we introduce a stronger result from which Van der Waerden's theorem directly follows.

The third chapter introduces the definitions of an n-dimensional cube over k elements and a combinatorial line, later using them to state the Hales-Jewett theorem. Following this, we derive Van der Waerden's theorem using the Hales-Jewett theorem. Next, we present an outline of the standard proof of the Hales-Jewett theorem, which employs double induction, and finally, we discuss Shelah's proof of the theorem, which avoids double induction.

In the fourth chapter, we first present the Ackermann hierarchy of functions. Using it, we establish bounds for the Van der Waerden and Hales-Jewett numbers, obtained by following the original proofs of these theorems and by following Shelah's proof. After that, we present an upper bound for the Hales-Jewett numbers for cubes over 3 elements, based on a recent paper by David Conlon. Finally, we present Berlekamp's lower bound for the Van der Waerden numbers and informally introduce results on the lower bound of 2-color Van der Waerden numbers from recent works by Green and Hunter.

In the final chapter, we present corollaries of the Hales-Jewett theorem, the Extended Hales-Jewett theorem, and Gallai's theorem. Next, we prove a result on the existence of consecutive quadratic residues, which follows from Van der Waerden's theorem. Finally, we introduce some open problems in Ramsey theory related to the results of this paper.

Životopis

Rođen sam 29. studenog 2000. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje sam završio u Osnovnoj školi Dragutina Tadijanovića u Zagrebu. Nakon toga sam upisao prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Lucijana Vranjanina. Tijekom srednje škole sam se aktivno bavio natjecateljskim programiranjem, gdje sam sudjelovao na nekolicini nacionalnih natjecanja.

Akademske godine 2019./2020. sam upisao Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, akademske godine 2022./2023. sam upisao Diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika. Tijekom studija sam se nastavio aktivno baviti natjecateljskim programiranje, plasirajući se na tri ekipna Srednjoeuropska studentska natjecanja.