

# Simultana disperzivna interakcija više linija frekventnog češlja s hladnim atomskim oblakom

---

Kardum, Lovre

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:667431>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-15**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Lovre Kardum

SIMULTANA DISPERZIVNA INTERAKCIJA VIŠE  
LINIJA FREKVENTNOG ČEŠLJA S HLADNIM  
ATOMSKIM OBLAKOM

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Lovre Kardum**

Diplomski rad

**Simultana disperzivna interakcija više  
linija frekventnog češlja s hladnim  
atomskim oblakom**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Neven Šantić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2024.

Zahvaljujem se najprije mentoru dr. sc. Nevenu Šantiću na pomoći i strpljenju tijekom izrade diplomskog rada te što me zainteresirao za rad grupe za kvantne tehnologije. Također hvala i dr. sc. Ticijani Ban te doc. dr. sc. Damiru Aumileru na mnogim korisnim savjetima i raspravama na grupnim sastancima.

Veliko hvala Marinu Đujiću, koji me primio na svoj eksperiment, na prenijetom znanju i iskustvu.

Hvala i svim ostalim članovima grupe koji su mi uvijek bili spremni pomoći.

Zahvaljujem još i svojoj obitelji bez čije podrške i ljubavi zasigurno ne bih bio jednako uspješan.

Na kraju, hvala i svim prijateljima koji su mi svojom potporom i motivacijom uvelike olakšali cijeli studij.

## Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavan je linearni disperzivni režim interakcije više linija frekventnog češlja s hladnim atomima rubidija unutar optičkog rezonatora. U svrhu promatranja pojedinih linija frekventnog češlja sastavljen je novi dio postava u kojem se stvaraju udari između zrake transmitirane kroz rezonator i kontinuiranog lasera. Mjerenja spektra i signala pojedinih linija potvrdila su da ovakva interakcija dovodi do pomicanja modova optičkog rezonatora. Iz izmjerenih vrijednosti *lightshifta* određen je broj atoma unutar struka rezonatora za interakciju s različitim linijama. Dobivene vrijednosti međusobno su konzistentne za linije koje se nalaze s iste strane Rb rezonance te je dano moguće objašnjenje za odstupanja dobivena za linije s različitih strana rezonance. Detaljnije je proučena ovisnost transmitirane amplitude jedne linije frekventnog češlja o *detuningu* pri čemu je uočeno da amplituda ovisi o smjeru promjene *detuninga*.

Ključne riječi: frekventni češalj, hladni atomi, optički rezonator

# Simultaneous dispersive interaction of multiple frequency comb lines with a cold atomic cloud

## Abstract

In this thesis, we studied linear dispersive regime of interaction between multiple frequency comb lines and cold rubidium atoms inside an optical cavity. To observe individual frequency comb lines, we built a new part of the experimental setup, in which beats are created between a beam transmitted through the cavity and a continuous wave laser. Measurements of the spectrum and individual line signals confirmed that this type of interaction leads to a frequency shift of cavity modes. Using lightshift measurements we determined the number of atoms inside the cavity waist for interactions with different comb lines. The obtained values are mutually consistent for comb lines located on the same side of the Rb resonance, and a possible explanation was proposed for the deviations observed for the lines on the opposite sides of the Rb resonance. The dependence of transmitted amplitude on detuning was studied in more detail for one frequency comb line, and it was observed that the amplitude depends on the direction of the detuning change.

Keywords: frequency comb, cold atoms, optical cavity

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorijska pozadina</b>	<b>3</b>
2.1	Interakcija atoma sa svjetlosti . . . . .	3
2.2	Optički rezonator . . . . .	5
2.2.1	Jaynes–Cummings model . . . . .	7
2.2.2	Disperzivna interakcija atoma s optičkim rezonatorom . . . . .	9
2.3	Lasersko hlađenje . . . . .	10
2.3.1	Dopplerovo hlađenje . . . . .	10
2.3.2	Zatočenje atoma . . . . .	11
2.3.3	Atomi rubidija . . . . .	12
2.4	Optički frekventni češalj . . . . .	13
2.4.1	Preklapanje modova . . . . .	17
2.4.2	Interakcija atoma s frekventnim češljem . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Eksperimentalni postav</b>	<b>19</b>
3.1	Magneto-optička stupica . . . . .	20
3.1.1	Laseri . . . . .	20
3.1.2	Vakuumska komora . . . . .	21
3.2	Optički frekventni češalj . . . . .	22
3.3	Optički rezonator . . . . .	25
3.3.1	Stabilizacija optičkog rezonatora . . . . .	26
3.3.2	Preklapanje s oblakom . . . . .	27
3.4	Postav za mjerenje udara . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Mjerenja i rezultati</b>	<b>32</b>
4.1	Transmitirani spektar . . . . .	32
4.2	Mjerenje udara . . . . .	34
4.2.1	Lightshift . . . . .	36
4.3	Histereza . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>43</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>44</b>

<b>A Utjecaj disperzije zrcala</b>	<b>44</b>
<b>B Akusto-optički modulator</b>	<b>47</b>
<b>Literatura</b>	<b>49</b>



# 1 Uvod

Od kad je Theodore H. Maiman 1960. godine izradio prvi laser, laseri su pronašli mnoge primjene u fizici, kemiji, medicini kao i u industriji. Daljnji razvoj lasera omogućio je i brojna postignuća za koja su dodijeljene Nobelove nagrade, a koja uključuju razvoj metoda hlađenja i zarobljavanja atoma [1], upotrebu femtosekundne spektroskopije za proučavanje kemijskih reakcija [2], postizanje Bose-Einsteinovog kondenzata [3], razvoj optičkog frekventnog češlja i njegovu primjenu u spektroskopiji [4], razvoj optičke pincete i tehnike generiranja ultrakratkih laserskih pulseva visokog intenziteta [5] te stvaranje atosekundnih pulseva za proučavanje dinamike elektrona [6].

Ovo je omogućilo velike napretke u eksperimentalnom istraživanju interakcije svjetlosti i materije, a 1980-ih se razvilo i novo istraživačko područje CQED (eng. cavity quantum electrodynamics) koje proučava posebno zanimljiv slučaj atoma unutar optičkog rezonatora. Vezanje svjetla s optičkim rezonatorom visoke finese omogućava značajno pojačanje interakcije atoma i svjetlosti. To je dovelo do značajnih razina kontrole kvantnih stanja unutar rezonatora, čak do pojedinačnih atoma i fotona [7–9]. Za termalne hladne atomske plinove, disperzivni režim ove interakcije, koji se događa kada je frekvencija fotona dovoljno udaljena od optičkih prijelaza tako da je apsorpcija zanemariva, pokazao se ključnim za postizanje zanimljivih kolektivnih učinaka kao što su stiskanje spina [10–12], hlađenje pomoću rezonatora [13–15], superradijantno lasersko zračenje [16] i samoorganizacija [17–20].

Potpuno kvantnomehanička interakcija atoma s dva nivoa i jednog moda optičkog rezonatora teorijski je opisana Jaynes–Cummings modelom [24], a od nedavno, fokus istraživanja se usmjerava prema proučavanju interakcija s više modova rezonatora [25]. Neke od mogućih primjena višemodnih rezonatora uključuju proučavanje kvantnih sustava s više tijela (eng. many-body) [26, 27], obrađivanje kvantnih podataka [28, 29], samoorganizaciju i simultanu superradijantnu emisiju u više modova [21, 22] te kvantno žarenje u kvantno degeneriranim sustavima [23].

Cilj ovog diplomskog rada bio je proučiti linearni disperzivni režim interakcije oblaka hladnih atoma, unutar optičkog rezonatora, s optičkim frekventnim češljem. Frekventni češalj se sastoji od stotina tisuća linija, odnosno modova, koje se efektivno može promatrati kao mnogo pojedinačnih fazno zaključenih kontinuiranih la-

sera. Stoga se korištenjem frekventnog češlja može promatrati interakcija sa značajno većim brojem modova nego što je to moguće koristeći kontinuirane lasere.

U teorijskom dijelu diplomskog (poglavlje 2) opisana je klasična i kvantnomehanička interakcija atoma sa svjetlošću s posebnim naglaskom na slučaj atoma unutar optičkog rezonatora. Diskutiran je izgled modova optičkog rezonatora i frekventnog češlja te je dan kratki pregled teorije laserskog hlađenja. Zatim je u poglavlju 3 opisan eksperimentalni postav za hlađenje atoma pomoću magneto-optičke stupice te nešto detaljnije novosastavljeni postav za mjerenje udara. U posljednjem poglavlju predstavljeni su i diskutirani rezultati mjerenja.

Diplomski rad je napravljen na Institutu za fiziku, u grupi za kvantne tehnologije, pod mentorstvom dr. sc. Nevena Šantića.

## 2 Teorijska pozadina

U ovom poglavlju dan je teorijski pregled interakcije atoma sa svjetlošću. Prvo je dan potpuno klasičan, a kasnije i kvantni opis u obliku Jaynes–Cummings modela. Također je razmotren i specifični slučaj disperzivne interakcije atoma s optičkim rezonatorom te proširenje ovog modela na interakciju rezonatora s bilo kojim linearno polarizabilnim objektom.

U nastavku poglavlja ukratko je objašnjena teorija laserskog hlađenja uporabom magneto-optičke stupice i izgled energetskog spektra atoma rubidija.

Na kraju je izveden izgled frekventnog spektra optičkog rezonatora i frekventnog češlja te uvjet preklapanja njihovih modova.

### 2.1 Interakcija atoma sa svjetlosti

Interakciju atoma i elektromagnetskog polja klasično možemo opisati kao gušeni harmonijski oscilator prirodne frekvencije  $\omega_0$  pa jednačba gibanja za položaj elektrona  $x$  u vanjskom električnom polju  $E(t)$  glasi [30]:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + 2m\gamma\dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = -e\mathbf{E}(t) \quad (2.1)$$

gdje je  $e$  elementarni naboj, a  $m$  reducirana masa elektrona. Član  $m\omega_0^2\mathbf{x}$  opisuje harmonijsku silu koja vraća elektron u ravnotežni položaj, a član  $2m\gamma\dot{\mathbf{x}}$  predstavlja gušenje do kojeg dolazi zbog sudara s drugim atomima i spontane emisije (klasično gledano gušenje je posljedica akceleriranog gibanja elektrona). Vanjsko polje zadano je kao zbroj ravnih valova frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$  oblika:

$$E(r, t) = \hat{\varepsilon}E_1(r)e^{-i\omega_1 t} + \hat{\varepsilon}E_2(r)e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (2.2)$$

ovdje je  $\hat{\varepsilon}$  jedinični vektor u smjeru polarizacije električnog polja. Zbog postojanja gušenja, zanimaju nas samo pomaci direktno uzrokovani poljem koji će stoga biti u smjeru  $\hat{\varepsilon}$  pa u nastavku izvoda više neće biti eksplicitno naznačeni smjerovi vektorskih veličina. Kako su optičke valne duljine puno veće od dimenzija atoma može se iskoristiti dipolna aproksimacija i time zanemariti ovisnost električnog polja o položaju

elektrona. Rješavanjem jednadžbe 2.1 dobiva se:

$$x(t) = x(\omega_1)e^{-i\omega_1 t} + x(\omega_2)e^{-i\omega_2 t} + c.c. \quad (2.3)$$

pri čemu je iskorištena pokrata  $x(\omega_j)$  za amplitudu oscilacija frekvencijom  $\omega_j$ :

$$x(\omega_j) = -\frac{e}{m} \frac{E_j}{\omega_0^2 - \omega_j^2 - 2i\omega_j\gamma} \quad (2.4)$$

Postavljanjem materijala susceptibilnosti  $\chi$  u električno polje dolazi do pojave polarizacije dane s:

$$P(\omega_j) = \epsilon_0 \chi(\omega_j) E(\omega_j) \quad (2.5)$$

S druge strane, polarizaciju možemo i direktno povezati s pomacima elektrona preko izraza:

$$P(\omega_j) = -Nex(\omega_j) \quad (2.6)$$

gdje je  $N$  brojčana gustoća atoma. Izjednačavanjem prethodna dva izraza i uvrštavanjem jednadžbe 2.4 dobiva se susceptibilnost za vanjsko polje frekvencije  $\omega_j$ :

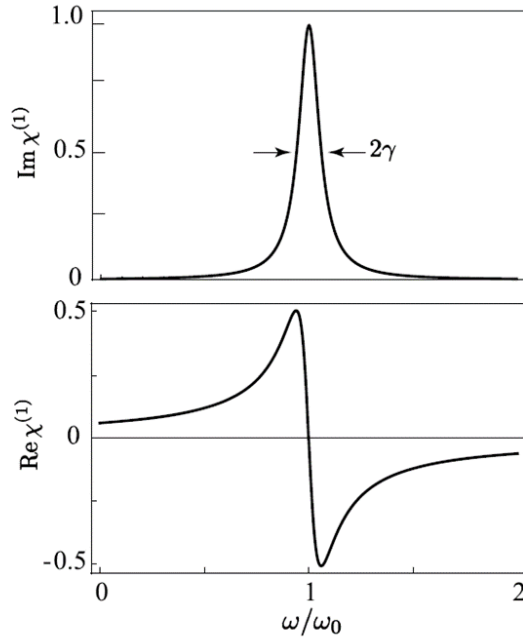
$$\chi(\omega_j) = \frac{Ne^2/(\epsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega_j^2 - 2i\omega_j\gamma} \quad (2.7)$$

Blizu rezonancije kada vrijedi  $\omega_j = \omega_0$  izraz u nazivniku može se aproksimirati s  $2\omega_0(\omega_j - \omega_0 - i\gamma)$  čime slijedi:

$$\chi(\omega_j) \approx \frac{Ne^2/(2\epsilon_0 m\omega_0)}{\omega_j - \omega_0 - i\gamma} = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0} \frac{(\omega_j - \omega_0) + i\gamma}{(\omega_j - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (2.8)$$

Oblik realnog i imaginarnog dijela susceptibilnosti (desna strana prethodnog izraza) prikazan je na slici 2.1.

U ovom izvodu koristili smo Lorentzov model atoma, a nešto općenitiji model u kojem je u jednadžbi gibanja 2.1 dodan nelinearni član povratne sile oblika  $m\alpha\tilde{x}^2$  detaljno je opisan u literaturi [31]. Ovakva nelinearnost omogućava opisivanje efekata kao što su stvaranje drugog harmonika (eng. second harmonic generation) i stvaranje zbrojenih frekvencija (eng. sum-frequency generation), ali ovi i drugi nelinearni efekti nisu razmatrani u sklopu ovog diplomskog rada.



Slika 2.1: Imaginarni i realni dio susceptibilnosti (izraz 2.8). Preuzeto iz [31].

## 2.2 Optički rezonator

Sustav zrcala postavljenih na način da se odbijanjem svjetlosti između njih stvara stojni val naziva se optički rezonator (eng. optical cavity). Pojedini foton napravi velik broj ciklusa prije izlaska iz rezonatora pa je intenzitet svjetlosti unutar rezonatora puno veći od intenziteta ulazne zrake. U najjednostavnijoj izvedbi optički rezonator se sastoji od dva ravna paralelno postavljena zrcala te se naziva Fabry-Pérot interferometar. Osim ove, postoje i mnoge druge konfiguracije pri čemu se koriste različite kombinacije ravnih i zakrivljenih zrcala. Postavljenjem medija unutar rezonatora povećavaju se efekti interakcije svjetlosti s medijem jer do interakcije može doći unutar svakog ciklusa kruženja fotona.

U ovom poglavlju promotrit ćemo frekventni spektar i osnovne karakteristike Fabry-Pérot interferometra za slučaj kada se unutar rezonatora nalazi vakuum. Oblik prostornih modova i ostale karakteristike rezonatora detaljno su razrađene u seminaru [32] i literaturi [33], a tamo se može pronaći i nešto detaljniji izvod frekventnog spektra.

Kako bi bio ispunjen uvjet stvaranja stojnog vala promjena faze nakon jednog ciklusa (prolaska od jednog do drugog zrcala i natrag) mora biti višekratnik od  $2\pi$ . Za rezonator duljine  $L$  unutar kojeg se nalazi sredstvo indeksa loma  $n$  to odgovara

uvjetu:

$$2knL = m \cdot 2\pi; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Iz čega slijedi izraz za dopuštene vrijednosti valnog broja  $k_m$ :

$$k_m = \frac{\pi m}{nL} \quad (2.10)$$

Korištenjem veze između valnog broja, valne duljine i frekvencije mogu se dobiti i relacije:

$$\lambda_m = \frac{2nL}{m}; \quad \nu_m = \frac{mc}{2nL} \quad (2.11)$$

Sada je vidljivo da se frekventni spektar optičkog rezonatora sastoji od niza međusobno ekvidistantnih linija odnosno modova rezonatora. Razlika frekvencija dvaju susjednih modova označava se kraticom *FSR* koja dolazi od engleskog naziva *free spectral range*:

$$FSR = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nL} \quad (2.12)$$

U daljnjem razmatranju odabran je slučaj  $n = 1$  te je tada važno primijetiti da *FSR* ovisi samo o duljini optičkog rezonatora. U prethodnom izvodu zanemarena je disperzija zrcala koja dovodi do pomicanja modova što je detaljnije opisano u dodatku A.

Za svaki realni rezonator postoje načini na koje dolazi do gubitaka fotona, a najvažniji doprinos dolazi od nesavršene reflektivnosti zrcala. Sada se može definirati finesa rezonatora koja ovisi samo o koeficijentu refleksije zrcala  $r$ :

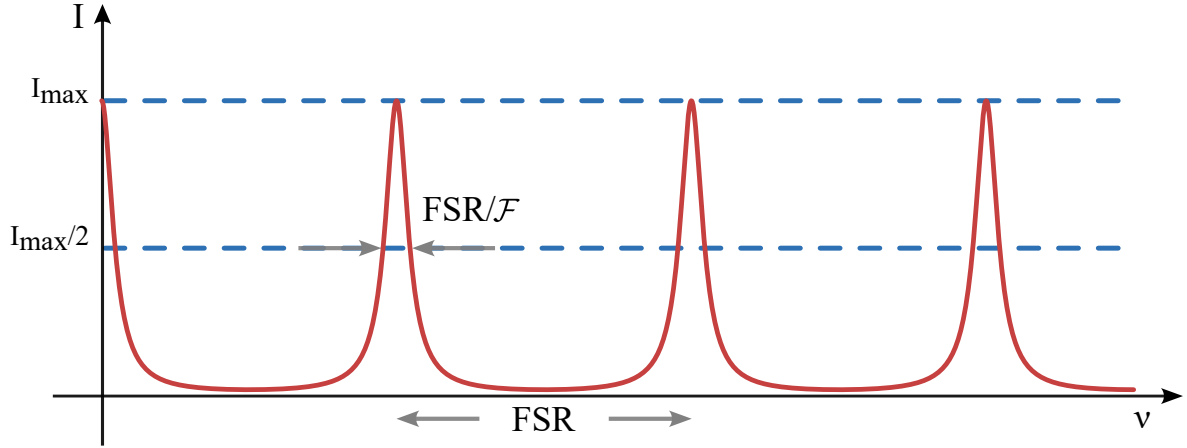
$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \quad (2.13)$$

Zbog postojanja gubitaka, modovi optičkog rezonatora nisu savršene delta funkcije već dobivaju konačnu širinu, a intenzitet svjetlosti frekvencije  $\nu$  unutar rezonatora iznosi [33]:

$$I = \frac{I_{max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\pi\nu/FSR)} \quad (2.14)$$

gdje je  $I_{max}$  maksimalni intenzitet izražen preko intenziteta ulazne svjetlosti  $I_0$ :

$$I_{max} = \frac{I_0}{1-r^2} \quad (2.15)$$



Slika 2.2: Ovisnost intenziteta unutar rezonatora o frekvenciji (izraz 2.14). Povećanjem finese  $\mathcal{F}$  modovi postaju uži.

Uvrštavanjem  $I = I_{max}/2$  u izraz 2.14 i korištenjem aproksimacije malih gubitaka ( $\mathcal{F} \gg 1$ ) može se odrediti širina na pola visine (eng. full width at half maximum, FWHM):

$$\delta_{\nu FWHM} = \frac{FSR}{\mathcal{F}} \quad (2.16)$$

Na slici 2.2 prikazan je intenzitet svjetlosti unutar rezonatora (izraz 2.14). Rezonatori s velikom finesom imaju vrlo uske modove.

### 2.2.1 Jaynes–Cummings model

Sada ćemo promotriti Jaynes–Cummings model koji opisuje kvantnomehaničku interakciju atoma s dva nivoa s kvantiziranim modom elektromagnetskog zračenja unutar optičkog rezonatora. Ukupan Hamiltonijan ovakvog sustava može se podijeliti na tri člana:

$$H = H_A + H_F + H_{AF} \quad (2.17)$$

gdje su  $H_A$ ,  $H_F$  i  $H_{AF}$  slijedom Hamiltonijani slobodnog atoma, slobodnog polja i interakcije atom-polje. Ako osnovno i pobuđeno stanje atoma označimo s  $|g\rangle$  i  $|e\rangle$ , a pripadajuće energije s  $E_g$  i  $E_e$ , Hamiltonijan slobodnog atoma iznosi:

$$H_A = E_g|g\rangle\langle g| + E_e|e\rangle\langle e| \quad (2.18)$$

Uvođenjem frekvencije prijelaza  $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$  te odabirom  $E_g = 0$ , prethodni izraz se pojednostavlja na:

$$H_A = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| \quad (2.19)$$

Polje unutar optičkog rezonatora može se opisati s Hamiltonijanom harmonijskog oscilatora [30]:

$$H_F = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.20)$$

gdje su  $a^\dagger$  i  $a$  operatori stvaranja i poništenja jednog moda polja frekvencije  $\omega$ .

Interakcija atoma i polja ima dipolni oblik:

$$H_{AF} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2.21)$$

pri čemu dipolni operator  $\mathbf{d}$  za atom s dva nivoa iznosi:

$$\mathbf{d} = \langle g|\mathbf{d}|e\rangle (|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) =: \mathbf{d}_{ge} (\sigma + \sigma^\dagger) \quad (2.22)$$

ovdje je uvedena pokrata  $\mathbf{d}_{ge}$  za matrični element dipolnog operatora  $\langle g|\mathbf{d}|e\rangle$  i atomski operator spuštanja  $\sigma = |g\rangle\langle e|$  (podizanja  $\sigma^\dagger = |e\rangle\langle g|$ ). Električno polje unutar optičkog rezonatora u Heisenbergovoj slici dano je s [30]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} [\mathbf{f}(\mathbf{r})a(t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{r})a^\dagger(t)] \quad (2.23)$$

gdje je  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  normalizirani prostorni profil moda. Uvrštavanjem u izraz 2.21 dobiva se Hamiltonijan interakcije:

$$H_{AF} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (\sigma + \sigma^\dagger) \mathbf{d}_{ge} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{r})a + \mathbf{f}^*(\mathbf{r})a^\dagger] \quad (2.24)$$

Korištenjem aproksimacije rotirajućih valova iščezavaju članovi koji ne poštuju očuvanje energije ( $\sigma a$  i  $\sigma^\dagger a^\dagger$ ). Uz definiciju energije vezanja atoma i polja:

$$\hbar g(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

pri čemu se  $2g$  obično naziva jedno-fotonska Rabi frekvencija ( $g$  se ponekad naziva i



QED konstanta vezanja), dobiva se konačan izraz za Hamiltonijan interakcije:

$$H_{AF} = \hbar g (\sigma a^\dagger + \sigma^\dagger a) \quad (2.26)$$

Sada imamo sve članove iz izraza 2.17 pa se uvrštavanjem i zanemarivanjem energije vakuuma dobiva:

$$H_{JC} = \hbar \omega_0 \sigma^\dagger \sigma + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar g (\sigma a^\dagger + \sigma^\dagger a) \quad (2.27)$$

Ovdje je iskorištena relacija  $\sigma^\dagger \sigma = |e\rangle \langle g| |g\rangle \langle e| = |e\rangle \langle e|$ , a dobiveni Hamiltonijan definira Jaynes–Cummings model koji opisuje interakciju atoma s jednim modom optičkog rezonatora blizu rezonancije pri čemu su zanemareni svi disipativni procesi. Detaljniji izvod Jaynes–Cummings modela može se naći u literaturi (npr. [30, 34]).

### 2.2.2 Disperzivna interakcija atoma s optičkim rezonatorom

Promotrimo sada atom unutar optičkog rezonatora koji se izvana pumpa laserom frekvencije  $\omega$  rezonantnim s određenim modom rezonatora. Atom osjeća interakciju s rezonatorom kroz disperzivne  $U_0$  i disipativne  $\Gamma_0$  efekte dane s [26]:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{g^2 \Delta_a}{\Delta_a^2 + \Gamma^2} \\ \Gamma_0 &= \frac{g^2 \Gamma}{\Delta_a^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdje je  $g$  koeficijent vezanja definiran izrazom 2.25,  $\Delta_a = \omega - \omega_a$  *detuning* pumpnog lasera od atomske frekvencije, a  $\Gamma$  stopa spontanog raspada atoma iz pobuđenog u osnovno stanje koja, za D2 liniju rubidija, iznosi  $\Gamma = 6.069 \pm 0.016$  MHz [35]. Potencijal  $U_0$  preko Stark efekta dovodi do pomaka atomskih nivoa, a istovremeno dolazi do *lightshifta* odnosno pomicanja modova rezonatora za  $U_0$ . Stopa gubitaka fotona koji raspršenjem izlaze izvan optičkog rezonatora dana je s  $\Gamma_0$  te dovodi do širenja modova rezonatora. Za linearno polarizabilan objekt  $U_0$  i  $\Gamma_0$  se mogu izraziti preko kompleksne susceptibilnosti  $\chi = \chi' - i\chi''$  [26]:

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{\chi'}{\mathcal{V}} \\ \Gamma_0 &= -\frac{\chi''}{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ovdje je efektivni volumen moda rezonatora  $\mathcal{V}$  definiran izrazom:

$$\mathcal{V} = \int d^3\mathbf{r} |f(\mathbf{r})|^2 \quad (2.30)$$

Iako je u izvodu jednadžbi 2.28 pretpostavljena interakcija s atomom s dva nivoa, veza između izraza 2.28 i 2.29 omogućava da se ovaj opis interakcije proširi na puno širi raspon različitih vrsta čestica. U ovom radu zadržat ćemo se na promatranju disperzivnog režima u kojem je udaljenost između frekvencije atomskog prijelaza i frekvencije pumpe  $\Delta_a = \omega - \omega_a$  dovoljno velika. Kako  $U_0$  opada s  $\Delta_a$ , a  $\Gamma_0$  s  $\Delta_a^2$  u ovom se režimu mogu zanemariti disipativni efekti.

Slučaj  $N$  atoma unutar rezonatora opisuje se korištenjem efektivne konstante vezanja [26]:

$$g_{eff} = g \sqrt{\sum_j f^2(\mathbf{r}_j)} \leq g\sqrt{N} \quad (2.31)$$

pri čemu se sumacija provodi po indeksima atomima  $j = 1, 2, \dots, N$ . Ovdje je zbog jednostavnosti pretpostavljeno da je prostorni profil moda  $f(\mathbf{r}_j)$  realan. Sad je iz izraza 2.28 vidljivo da se *lightshift* povećava linearno s brojem atoma  $N$ . Isti rezultat dobiva se i promatranjem relacija 2.29 jer je susceptibilnost proporcionalna broju atoma što je vidljivo iz izraza 2.7.

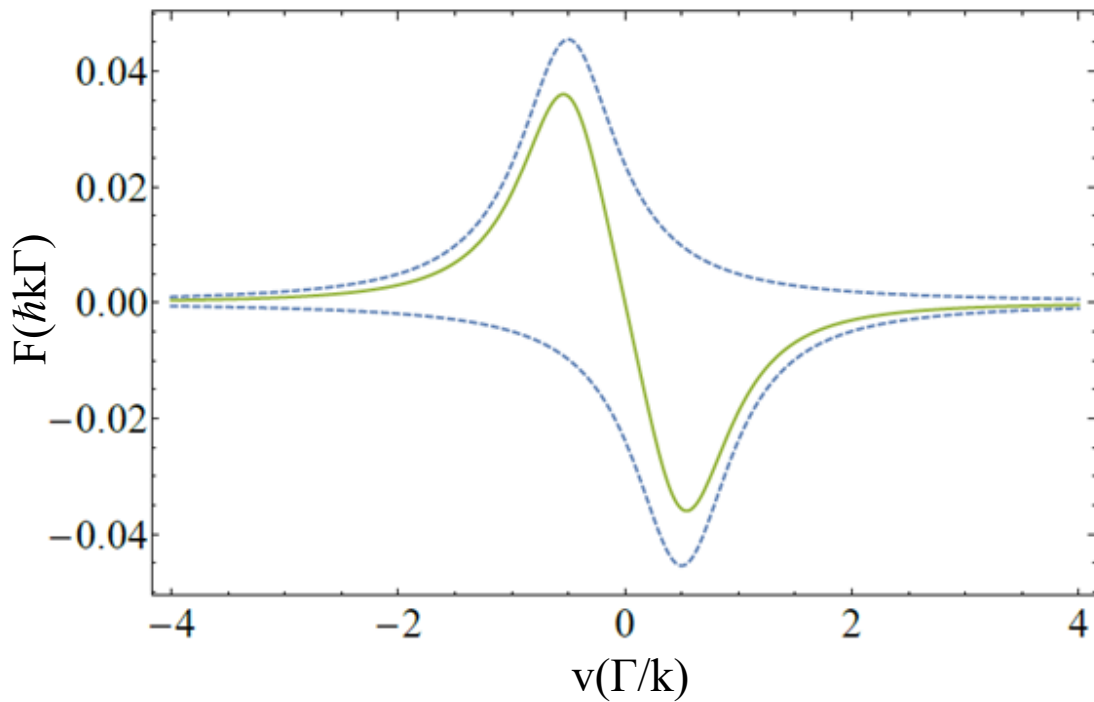
## 2.3 Lasersko hlađenje

Za dobivanje hladnih atoma u eksperimentima atomske fizike tipično se koriste metode laserskog hlađenja. U ovom radu korištena je magneto-optička stupica (eng. magneto-optical trap, MOT) čiji je princip rada ukratko opisan u nastavku poglavlja, a detaljniji opis može se naći u doktorskom radu [36].

### 2.3.1 Dopplerovo hlađenje

Lasersko hlađenje bazira se na činjenici da, prilikom apsorpcije ili spontane emisije fotona, dolazi do prijenosa količine gibanja. Kako je smjer fotona dobivenog spontanom emisijom nasumičan te ne ovisi o smjeru prethodno apsorbiranog fotona, ukupan doprinos količini gibanja atoma nakon velikog broja sudara ovisi samo o smjeru apsorbiranih fotona. Zbog Dopplerovog efekta dolazi do promjene frekvencije fotona koja ovisi o brzini i smjeru gibanja atoma pri čemu atom vidi višu frekvenciju kada se

foton giba u smjeru suprotnom od gibanja atom, a nižu kada se atom i foton gibaju u istom smjeru. Atom može apsorbirati samo one fotone čija energija odgovara energiji prijelaza u neko njegovo više stanje pa se korištenjem laserske zrake s frekvencijom nešto nižom od frekvencije određenog prijelaza postiže da se fotoni preferencijalno apsorbiraju na atomima koji se gibaju u smjeru suprotnom od propagacije laserske zrake. Na slici 2.3 prikazana je sila na atom koji se giba brzinom  $v$  za 1D slučaj u kojemu imamo jedan par suprotno propagirajućih laserskih zraka.



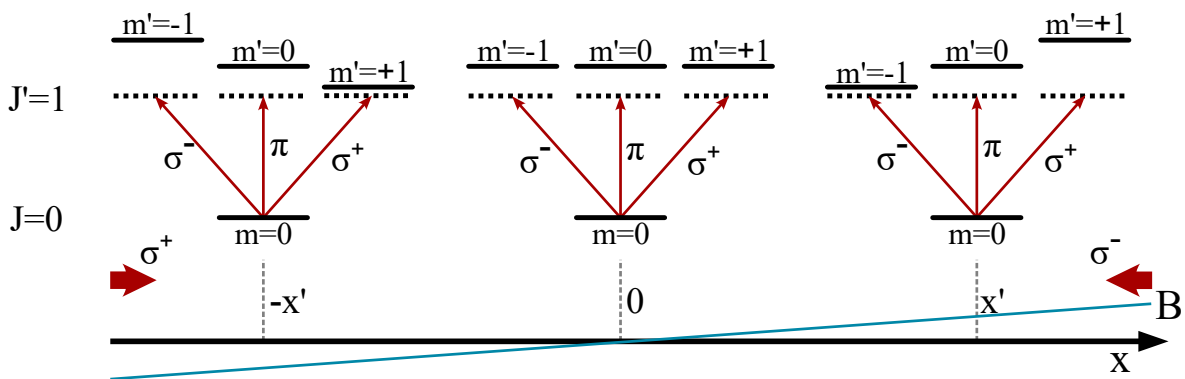
Slika 2.3: Sila na atom koji se giba brzinom  $v$  za dvije suprotno propagirajuće laserske zrake.  $\Gamma$  je prirodna širina prijelaza, a  $k$  valni vektor. Iscrtkano su prikazani doprinosi pojedinačnih zraka, a punom crtom ukupna sila. Preuzeto iz [36].

Za hlađenje atoma u tri dimenzije potrebno je pripremiti tri takva međusobno ortogonalna para suprotno propagirajućih laserskih zraka.

### 2.3.2 Zatočenje atoma

Ovako ohlađeni atomi još uvijek se kreću brzinama od približno 10 cm/s pa bi vrlo brzo izašli iz područja presijecanja laserskih zraka te je stoga potrebno uvesti dodatnu silu ovisnu o položaju kojom se postiže prostorno zatočenje atoma. U ovu svrhu koristi se prostorno promjenjivo magnetsko polje koje dovodi do Zeemanovog cijepanja atomskih nivoa. Kod magneto-optičke stupice ovo je polje dobiveno dvjema zavojnicama postavljenim u približno anti-Helmholtzovu konfiguraciju.

Pogledajmo sada 1D slučaj za prijelaz između osnovnog stanja s  $J = 0$  i pobuđenog stanja s  $J' = 1$ . Za dovoljno male pomake od središta stupice  $x$  magnetsko polje će biti približno linearno pa će i Zeemanov pomak atomskih nivoa biti linearan u  $x$ . Kako je, zbog potreba hlađenja atoma, laserska frekvencija pomaknuta u crveno u odnosu na rezonanciju, prijelaz u stanje projekcije  $m' = -1$  bit će vjerojatniji (manje vjerojatan) od prijelaza u stanje  $m' = +1$  za pozitivan (negativan)  $x$ . Ako koristimo kružno polarizirane zrake prijelaz iz početnog stanja s  $m = 0$  u stanje  $m' = +1$  može pobuditi samo desno ( $\sigma^+$ ), a prijelaz u stanje  $m' = -1$  samo lijevo ( $\sigma^-$ ) kružno polarizirana zraka. Damo li sada laserskoj zruci koja se propagira u  $-\hat{x}$  ( $\hat{x}$ ) smjeru  $\sigma^-$  ( $\sigma^+$ ) polarizaciju osigurat ćemo da atomi preferencijalno apsorbiraju onu zraku koja ih gura prema središtu stupice, kao što je prikazano na slici 2.4.



Slika 2.4: Mehanizam zatočenja atoma unutar magneto-optičke stupice. Zbog Zeemanovog efekta dolazi do pomaka nivoa u ovisnosti o položaju. Atom na pozitivnom dijelu  $x$  osi preferencijalno apsorbira  $\sigma^-$  polariziranu zraku koja ga gura prema središtu stupice. Preuzeto iz [36].

### 2.3.3 Atomi rubidija

Rubidij, oznake Rb, je alkalijski metal srebrnobijele boje s elektronskom konfiguracijom  $[\text{Kr}] 5s^1$ . Na Zemlji se javlja u dva izotopa pri čemu 72% čini stabilni izotop  $^{85}\text{Rb}$ , a preostalih 28% slabo radioaktivni izotop  $^{87}\text{Rb}$ . Ime je dobio od latinske riječi *rubidus* značenja tamno crveno zbog boje svojeg emisijskog spektra. Kako su laserske diode u tom dijelu spektra jeftine i lako dostupne te zbog jednostavne strukture atomskih levela, rubidij je najčešće korišten element u eksperimentima laserskog hlađenja. U ovom poglavlju opisana je energetska struktura  $^{87}\text{Rb}$  s naglaskom na prijelaze korištene za lasersko hlađenje, a detaljan opis fizikalnih i optičkih svojstava može se naći u literaturi [37].

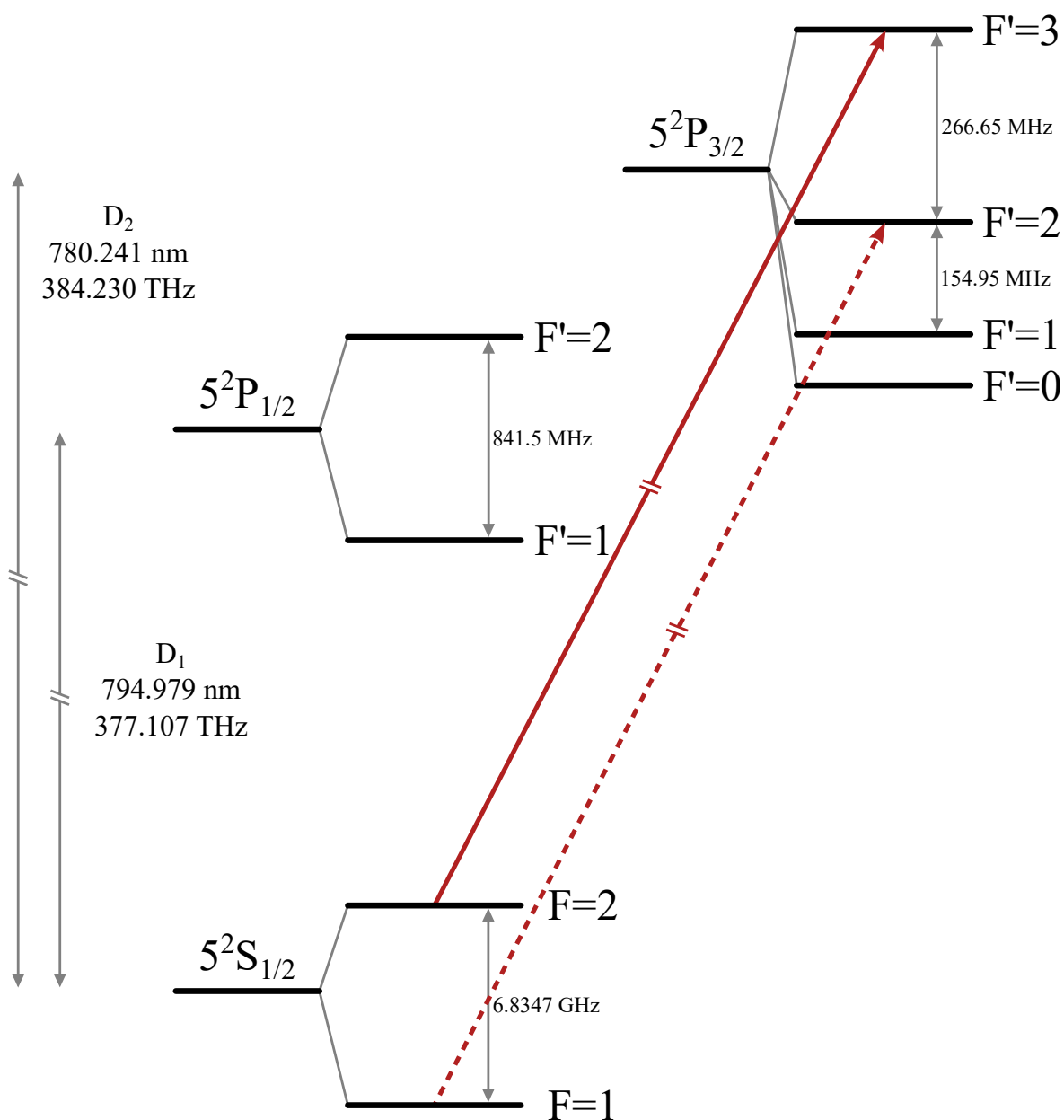
Spinski  $\mathbf{S}$  i orbitalni angularni moment  $\mathbf{L}$   $^{87}\text{Rb}$  ovise samo o valentnom elektronu pa je osnovno stanje  $5^2S_{1/2}$ , pri čemu je korištena notacija  $n^{2S+1}L_J$ . Ovdje je  $n$  glavni kvantni broj, a  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  ukupni angularni moment. Prvo pobuđeno stanje  $5P$  se, zbog vezanja spinskog i orbitalnog angularnog momenta, cijepa u dva stanja fine strukture  $5^2P_{1/2}$  i  $5^2P_{3/2}$ . Prijelazi iz osnovnog u ova dva pobuđena stanja nazivaju se D1 i D2 rezonantni prijelazi te odgovaraju valnim duljinama od 795nm i 780nm, respektivno. Potrebno je još promotriti hiperfinu strukturu koja nastaje zbog vezanja ukupnog elektronskog angularnog momenta  $\mathbf{J}$  sa spinskim angularnim momentom jezgre  $\mathbf{I}$  koji, za  $^{87}\text{Rb}$ , iznosi  $I = 3/2$ . Time se dobiva ukupni angularni moment  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$  s vrijednostima  $|I - J| \leq F \leq |I + J|$ . Energetska struktura  $^{87}\text{Rb}$  prikazana je na slici 2.5.

Za hlađenje atoma koristi se zatvoreni prijelaz  $|5^2S_{1/2}; F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}; F' = 3\rangle$ . Kako fotoni imaju jediničan spin, dozvoljeni su samo električni dipolni prijelazi između stanja čiji se ukupni angularni momenti razlikuju za  $\Delta F = 0, \pm 1$ . Sada je očito da se atom iz pobuđenog stanja  $|5^2P_{3/2}; F' = 3\rangle$  može deekscitirati samo natrag u stanje  $|5^2S_{1/2}; F = 2\rangle$ , međutim, pošto je razmak između stanja  $|5^2P_{3/2}; F' = 2\rangle$  i  $|5^2P_{3/2}; F' = 3\rangle$  relativno malen, a laser za hlađenje pomaknut u crveno, postoji mala, ali nezanemariva vjerojatnost da se atom pobudi u stanje  $|5^2P_{3/2}; F' = 2\rangle$ . Iz ovog stanja moguć je prijelaz u stanje  $|5^2S_{1/2}; F = 1\rangle$  čime atom izlazi iz ciklusa hlađenja. Dodavanjem još jednog lasera (tzv. laser za naseljavanje), čija frekvencija odgovara prijelazu  $|5^2S_{1/2}; F = 1\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}; F' = 2\rangle$ , osigurava se da se ti atomi deekscitacijom u stanje  $|5^2S_{1/2}; F = 2\rangle$  ponovno vrate u ciklus hlađenja. Spomenuti prijelazi označeni su na slici 2.5.

## 2.4 Optički frekventni češalj

Frekventni spektar niza fazno koreliranih femtosekundnih pulseva sastoji se od velikog broja međusobno jednako razmaknutih uskih linija te se zbog toga naziva frekventni češalj (eng. frequency comb, FC).

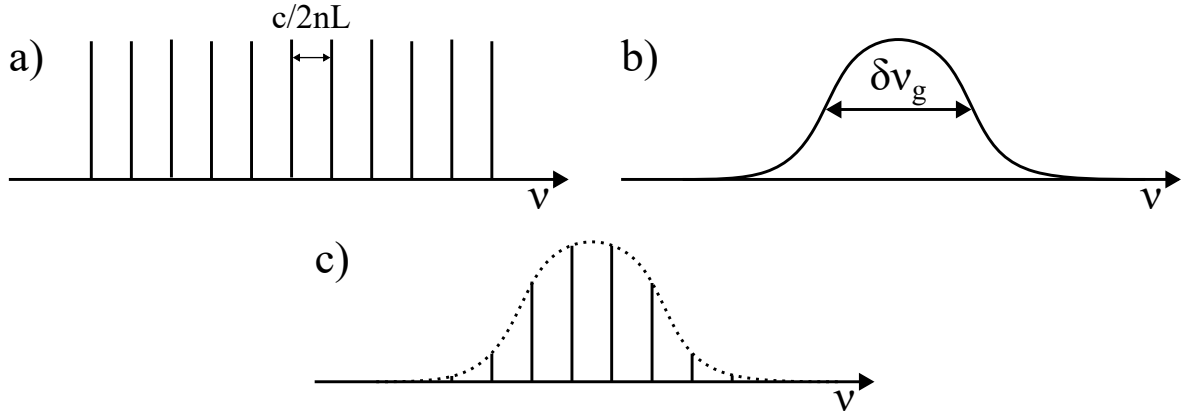
Prvo ćemo promotriti osnovni princip generiranja ultrakratkih laserskih pulseva. U optičkom rezonatoru femtosekundnog lasera nastaju longitudinalni modovi čije su frekvencije  $\nu_m$ , kao što smo pokazali u poglavlju 2.2, dane uvjetom stojnog vala  $\nu_m = \frac{mc}{2nL}$ . Ovdje je  $L$  duljina optičkog rezonatora, a  $c/n$  brzina svjetlosti u laserskom



Slika 2.5: Atomični nivoi  $^{87}\text{Rb}$  bitni za lasersko hlađenje. Prijelaz korišten za hlađenje označen je punom, a prijelaz korišten za vraćanje atoma u ciklus hlađenja isprekidanom crtom. Adaptirano iz [36].

mediju indeksa loma  $n$ . Do laseriranja dolazi samo za frekvencije unutar emisijskog spektra laserskog medija širine  $\delta\nu_g$  pa ukupni broj nastalih modova iznosi približno  $M \simeq \frac{\delta\nu_g}{\Delta}$ , gdje je  $\Delta = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nL}$  razmak između susjednih modova. Na slici 2.6 prikazani su longitudinalni modovi optičkog rezonatora i emisijski spektar laserskog medija.

Ako  $m$ -ti mod frekvencije  $\omega_m = 2\pi\nu_m$  oscilira s amplitudom  $\mathcal{E}_m$  i fazom  $\Phi_m$ ,



Slika 2.6: a) Longitudinalni modovi laserskog rezonatora. b) Emisijski spektar aktivnog medija. c) Longitudinalni modovi koji mogu istovremeno oscilirati unutar rezonatora femtosekundnog lasera. Preuzeto iz [38].

ukupno električno polje dano je s:

$$E(t) = \sum_m \mathcal{E}_m e^{i(\omega_m t + \Phi_m)} \quad (2.32)$$

Za generiranje ultrakratkih pulseva potrebno je osigurati stalnu razliku u fazi između susjednih modova, a ovdje ćemo, radi jednostavnosti, pretpostaviti da svi modovi imaju istu fazu  $\Phi_m = \Phi_0$  i amplitudu  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0$ . Uz redefiniciju frekvencije modova  $\omega_m = \omega_c + 2\pi\Delta m$ , tako da je dana u odnos na centralnu frekvenciju  $\omega_c$ , možemo raspisati izraz 2.32 čime se dobiva [39]:

$$E(t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega_c t + \Phi_0)} \sum_{-(M-1)/2}^{+(M-1)/2} e^{2im\pi\Delta t} = \mathcal{E}_0 \frac{\sin(M\pi\Delta t)}{\sin(\pi\Delta t)} e^{i(\omega_c t + \Phi_0)} \quad (2.33)$$

Sad je vidljivo da se električno polje može opisati kao brzo titranje frekvencijom  $\omega_c$  unutar envelope  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \frac{\sin(M\pi\Delta t)}{\sin(\pi\Delta t)}$ . Za veliki broj spregnutih modova  $M$  dobivamo niz pulseva međusobno razmaknutih za vrijeme repeticije  $T_{rep} = \frac{1}{\Delta} = \frac{2nL}{c}$  i trajanja  $\tau_{pulse} = \frac{1}{M\Delta}$ . Kako se val nosioc širi faznom brzinom  $v_f$ , a envelope grupnom brzinom  $v_g$  između njih postoji fazni pomak koji za dva susjedna pulsa iznosi  $\Phi_R$  te time  $m\Phi_R$  za  $m$ -ti puls. Ukupno električno polje niza od  $m_{uk}$  pulseva dano je izrazom [39]:

$$E(t) = \sum_{m=1}^{m_{uk}} \mathcal{E}(t - mT_{rep}) e^{i\omega_c(t - mT_{rep})} e^{im\Phi_R} \quad (2.34)$$

Frekventni spektar ovakvog niza pulseva dobiva se Fourierovim transformatom pret-

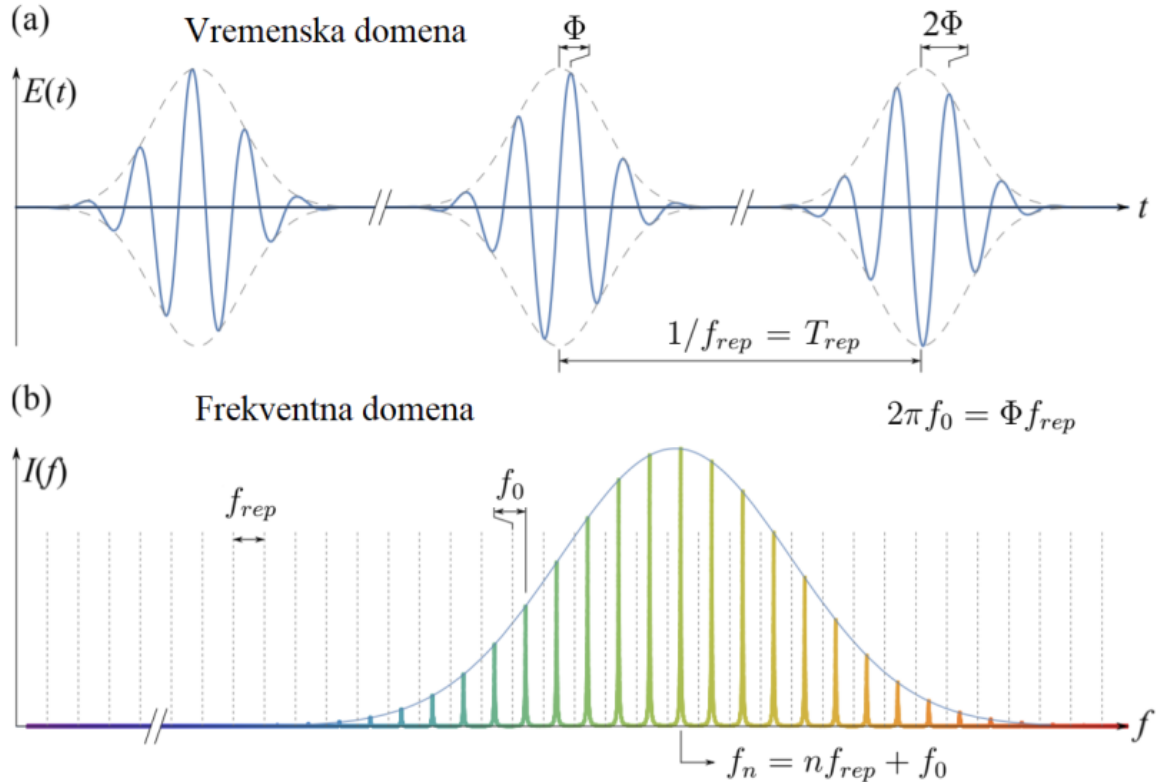
hodnog izraza:

$$\tilde{E}(\omega) = \tilde{\mathcal{E}}(\omega - \omega_c) \sum_{m=1}^{m_{uk}} e^{-im(\omega T_{rep} - \Phi_R)} \quad (2.35)$$

Ovdje je  $\tilde{\mathcal{E}}(\omega - \omega_c)$  spektralna envelope dobivena Fourierovim transformatom envelope  $\mathcal{E}(t - mT_{rep})$  u vremenskoj domeni. Iz oscilatornog člana je vidljivo da spektar čini velik broj uskih linija na frekvencijama za koje je izraz u eksponentu višekratnik od  $2\pi$  odnosno vrijedi:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{T_{rep}} + \frac{\Phi_R}{2\pi T_{rep}} \quad (2.36)$$

Ovakav spektar naziva se optički frekventni češalj te je prikazan na slici 2.7, a frekvencija  $n$ -te linije ( $n$ -tog moda) dana je s  $f_n = n f_{rep} + f_0$ . Usporedbom s izrazom 2.36 slijedi  $f_{rep} = 1/T_{rep}$  i  $f_0 = \Phi_R/2\pi T_{rep}$ .



Slika 2.7: Električno polje niza pulseva u vremenskoj domeni a) odgovara uskim ekvidistantnim linijama u frekventnoj domeni b). Preuzeto iz [36].

Značaj optičkog frekventnog češlja proizlazi iz činjenice da su, zbog velikog broja modova  $n$  (tipično od  $10^5$  do  $10^7$ ), frekvencije  $f_n$  u vidljivom ili blisko-infracrvenom (NIR) području povezane s frekvencijama  $f_{rep}$  i  $f_0$  u radio (RF) području. Uporabom elektroničkih uređaja moguće je precizno mjeriti RF frekvencije do nekoliko GHz, ali ne i optičke frekvencije ( $> 100$  THz). Frekventni češalj nam dakle omogućuje pre-



cizno određivanje apsolutne optičke frekvencije  $n$ -tog moda  $f_n$  mjerenjem frekvencija  $f_{rep}$  i  $f_0$ .

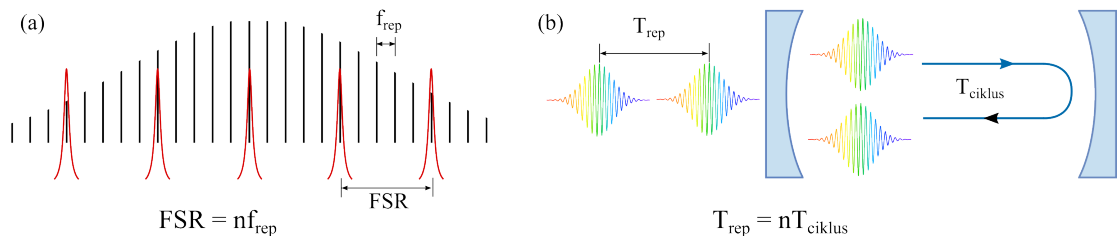
### 2.4.1 Preklapanje modova

Kao što smo već pokazali, frekventni češalj i optički rezonator imaju vrlo sličnu strukturu spektra koji čine niz ekvidistantnih uskih linija. Zbog toga je preciznim ugađanjem frekvencija  $f_{rep}$  i  $f_0$  moguće postići preklapanje velikog broja FC modova s modovima rezonatora. U frekventnoj domeni potrebno je ispuniti uvjet:

$$FSR = n f_{rep} \quad (2.37)$$

čime dolazi do preklapanja svakog  $n$ -tog moda frekventnog češlja kao što je prikazano na slici 2.8(a). Preklapanje modova u vremenskoj domeni prikazano je na slici 2.8(b), a odgovara uvjetu da je vrijeme repeticije  $T_{rep}$  višekratnik vremena potrebnog da foton prijeđe put od jednog do drugog zrcala rezonatora i natrag  $T_{ciklus}$  odnosno mora vrijediti:

$$T_{rep} = n T_{ciklus} \quad (2.38)$$



Slika 2.8: Preklapanje FC modova i modova rezonatora u a) frekventnoj i b) vremenskoj domeni. Preuzeto iz [45].

U slučaju kada disperzija zrcala nije zanemariva modovi rezonatora se pomiču pa ih nije moguće sve istovremeno preklopiti s FC modovima. Ovo je nešto detaljnije diskutirano u dodatku A.

### 2.4.2 Interakcija atoma s frekventnim češljem

Ako zanemarimo nelinearne efekte interakcija atoma s frekventnim češljem odgovara slučaju u kojem imamo velik broj kontinuiranih lasera (eng. continuous wave, cw) čije frekvencije odgovaraju modovima frekventnog češlja.

Frekventni češalj je posebno značajan za rezonatorom potpomognutu spektroskopiju kao i za rad optičkih atomskih satova, jer omogućava precizno određivanje frekvencija u optičkom dijelu spektra, a ove i mnoge druge primjene opisane su u preglednom radu [41].

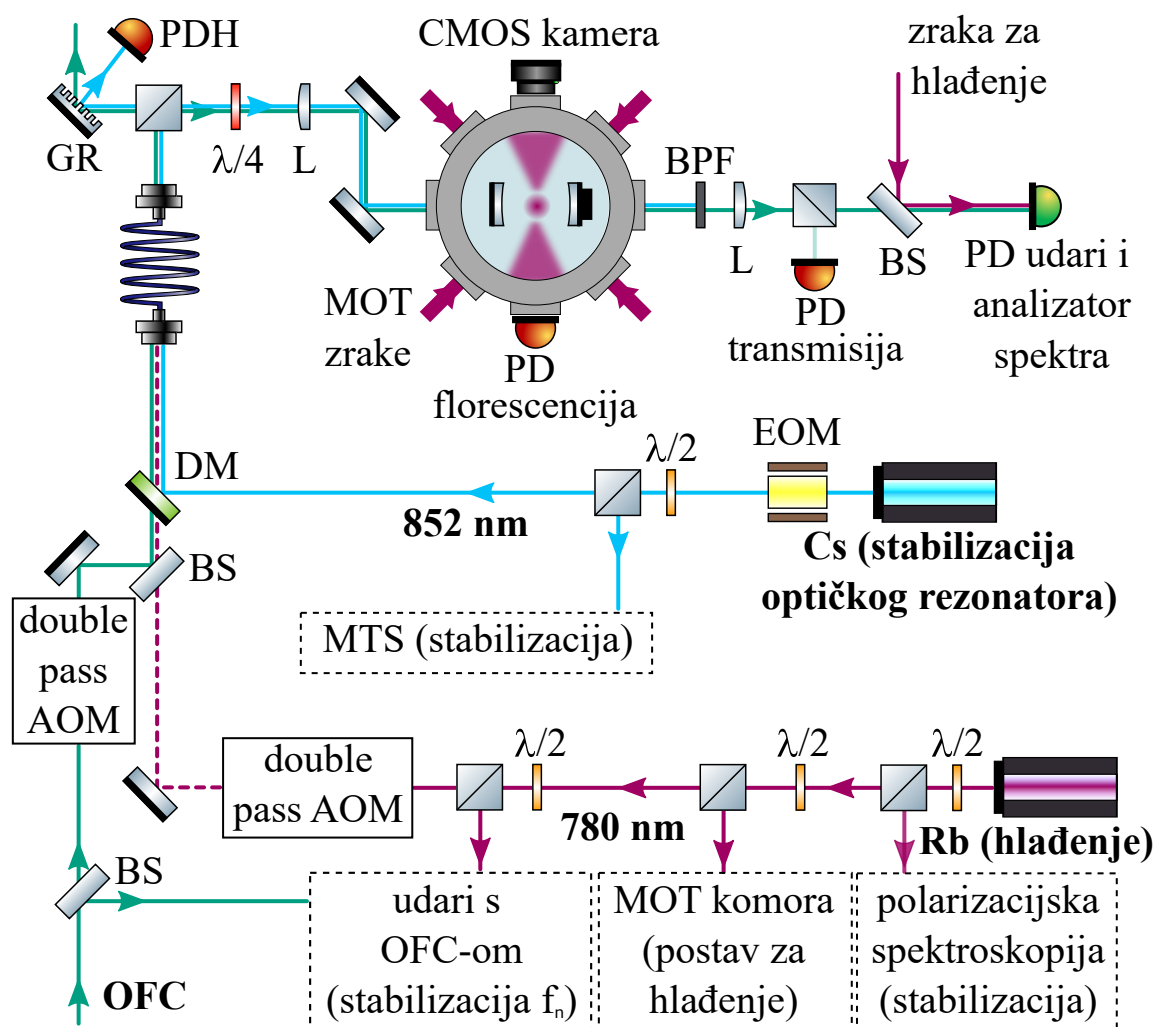
U grupi za kvantne tehnologije na Institutu za fiziku već se neko vrijeme proučava mogućnost hlađenja frekventnim češljem [42, 43]. Pri tom je prednost frekventnog češlja ta što se pojedine linije mogu nalaziti u UV području u kojem nisu dostupni kontinuirani laseri te je stoga moguće hlađenje većeg broja elemenata. Glavno ograničenje predstavlja mala snaga pojedine linije češlja pa se korištenje optičkog rezonatora predstavlja kao moguće rješenje.

Kao što je spomenuto u uvodu, frekventni češalj omogućuje pobuđivanje velikog broja modova optičkog rezonatora što omogućava mnoge zanimljive primjene [21–23, 26–29].

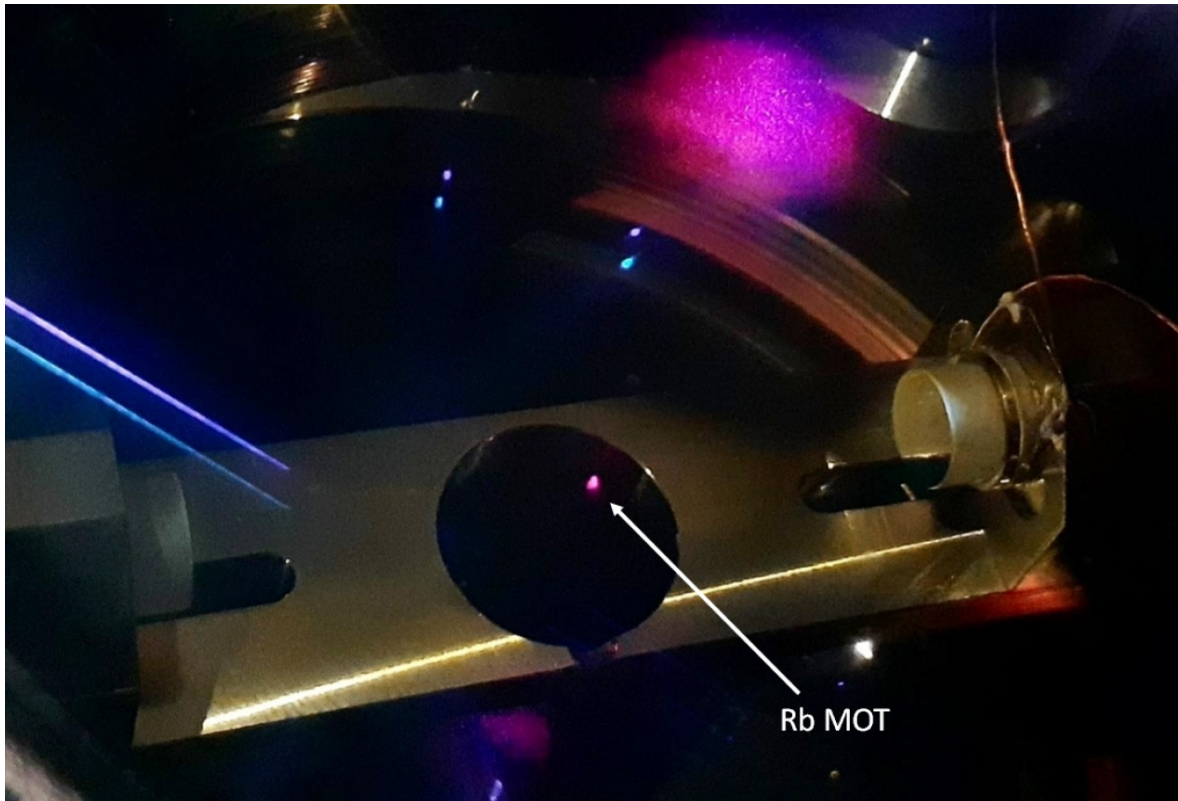
### 3 Eksperimentalni postav

U ovom poglavlju ukratko je opisan već postojeći postav za hlađenje atoma unutar magneto-optičke stupice čije se središte preklapa sa strukom (eng. waist) optičkog rezonatora. Za potrebe ovog rada sastavljen je dio postava za promatranje udara između frekventnog češlja transmitiranog kroz rezonator i kontinuiranog (eng. continuous wave, cw) lasera koji je detaljno opisan na kraju poglavlja.

Cijeli postav složen je na dva optička stola, pri čemu se na prvom nalaze svi laseri te elementi potrebni za njihovu stabilizaciju, dok je na drugom postavljena MOT komora i postav za mjerenje udara. Laserske zrake se između dva stola provode optičkim vlaknima, a skica cijelog postava prikazana je na slici 3.1.



Slika 3.1: Shema eksperimentalnog postava za hlađenje. Dio postava za stvaranje udara detaljnije je prikazan na slici 3.10. Oznake: PD - fotodioda, BS - djelitelj zrake, AOM - akusto-optički modulator, EOM - elektro-optički modulator, OFC - optički frekventni češalj, L - leća,  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$  - polarizacijske pločice, BPF - pojasni filter, GR - optička rešetka, DM - dikroično zrcalo



Slika 3.2: MOT komora s oblakom hladnih atoma postavljenim u središte optičkog rezonatora. Preuzeto iz [45].

### 3.1 *Magneto-optička stupica*

Oblak hladnih atoma (slika 3.2) u ovom se radu dobiva hlađenjem u magneto-optičkoj stupici realiziranoj unutar vakuumske komore. U ovom poglavlju prvo je opisan postav lasera za hlađenje i naseljavanje te njihova frekventna stabilizacija. Ukratko je predstavljen dizajn vakuumske komore i zavojnica potrebnih za dobivanje magnetskog polja, a na kraju poglavlja objašnjen je način određivanja temperature i broja atoma unutar oblaka.

#### 3.1.1 Laseri

Kao što je objašnjeno u poglavlju 2.1 za rad MOT-a potrebni su laser za hlađenje i naseljavanje. Za oba ova lasera korišteni su poluvodički diodni laseri s vanjskim rezonatorom (eng. External Cavity Diode Laser, ECDL). Kao laser za hlađenje korišten je MOGLabs CEL002, a kao laser za naseljavanje Toptica Photonics DL 100. Oba lasera imaju nominalnu valnu duljinu 780 nm, a nominalna snaga im iznosi 100 mW i 30 mW respektivno.

Zbog promjene vanjskih parametara kao što su temperatura, vlažnost, tlak, me-

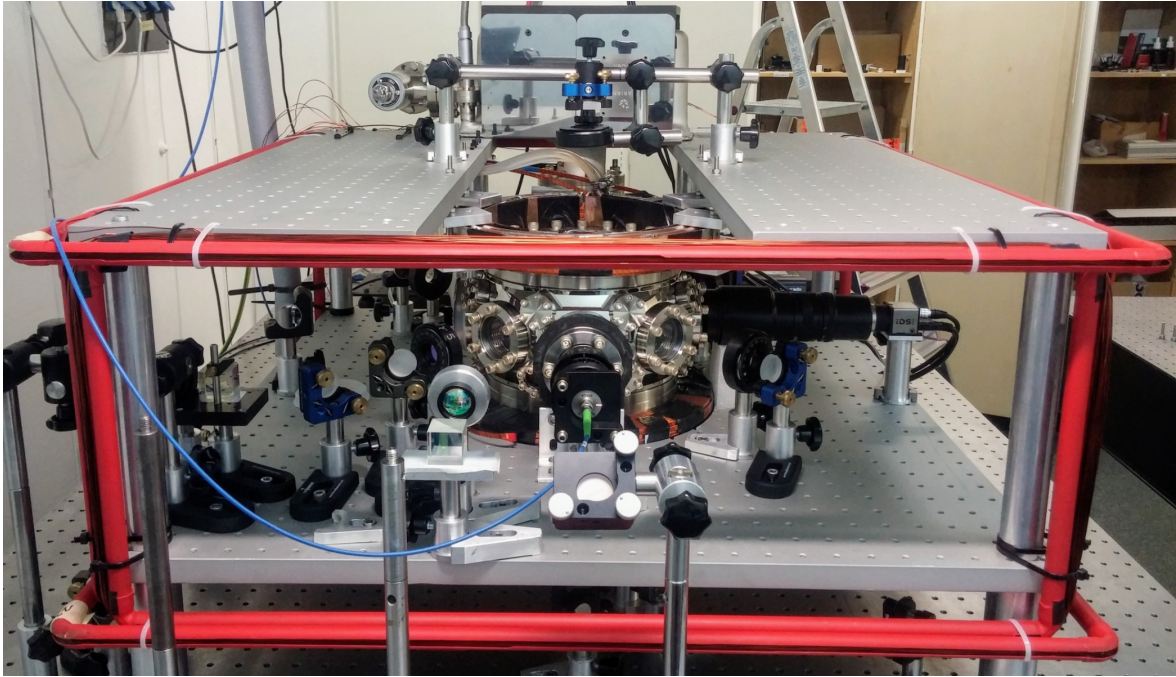
haničke vibracije i sl. dolazi do fluktuacija u frekvenciji lasera. Kako bi spriječili da takve fluktuacije dovedu do odstupanja od frekvencije korištenog hiperfinog prijelaza, a time i prestanka hlađenja, potrebno je stabilizirati oba lasera za što se koriste tehnike saturacijske i polarizacijske spektroskopije. Ove metode stabilizacije detaljno su opisane u diplomskom radu [38], a dobiveni *error* signal se dovodi na PID (eng. Proportional-Integral-Derivative) regulator te se modulacijom struje laserske diode i pomicanjem difrakcijske rešetke piezoelektričnim elementom uvodi negativna povratna veza.

Upotrebom akusto-optičkog modulatora (eng. Acousto-Optic Modulator, AOM) može se precizno podesiti frekvenciju i intenzitet laserske zrake, pri čemu dolazi i do promjene optičkog puta. AOM radi na principu ogiba ulazne zrake na zvučnom valu unutar transparentnog kristala, a detaljniji opis dan je u dodatku B. U ovom eksperimentu korišteni su AOM-ovi koji, u prvom redu difrakcije, frekvenciju ulaznog lasera mogu pomaknuti u rasponu od 50 MHz do 90 MHz. Na ovaj se način laser za hlađenje može pomaknuti u crveno od rezonancije kao što to zahtijeva uvjet hlađenja. Postavljanjem AOM-a u konfiguraciju dvostrukog prolaska (eng. double-pass) izbjegava se, u ovom slučaju neželjena, promjena optičkog puta i udvostručuje frekventni pomak.

### 3.1.2 Vakuumska komora

Oblak hladnih atoma stvara se unutar vakuumske komore prikazane na slici 3.3. Riječ je o komori od nehrđajućeg čelika sa staklenim prozorima koji omogućuju prolazak laserskih zraka te snimanje nastalog oblaka. Kvadrupolno magnetsko polje stvara se dvjema zavojnicama postavljenim u anti-Helmholtzovu konfiguraciju. Obje zavojnice imaju 100 namotaja, a struja kroz njih iznosi 17 A. Dizajn komore i MOT zavojnica detaljnije je opisan u doktorskom radu [36]. Ionskom pumpom postiže se tlak od  $10^{-8}$  mbar, a atomi rubidija dovode se pomoću dispnzera. Mijenjanjem struje kroz dispnzere kontrolira se broj atoma  $^{87}\text{Rb}$  unutar komore.

Za promatranje nastalog oblaka hladnih atoma koriste se dvije CMOS kamere postavljene pod različitim kutovima što omogućuje određivanje položaja oblaka u tri dimenzije. Primjer jedne tako dobivene fotografije dan je na slici 3.4. Fluorescencija atoma bilježi se i jednom fotodiodom čime se dobiva informacija o njenim brzim promjenama.



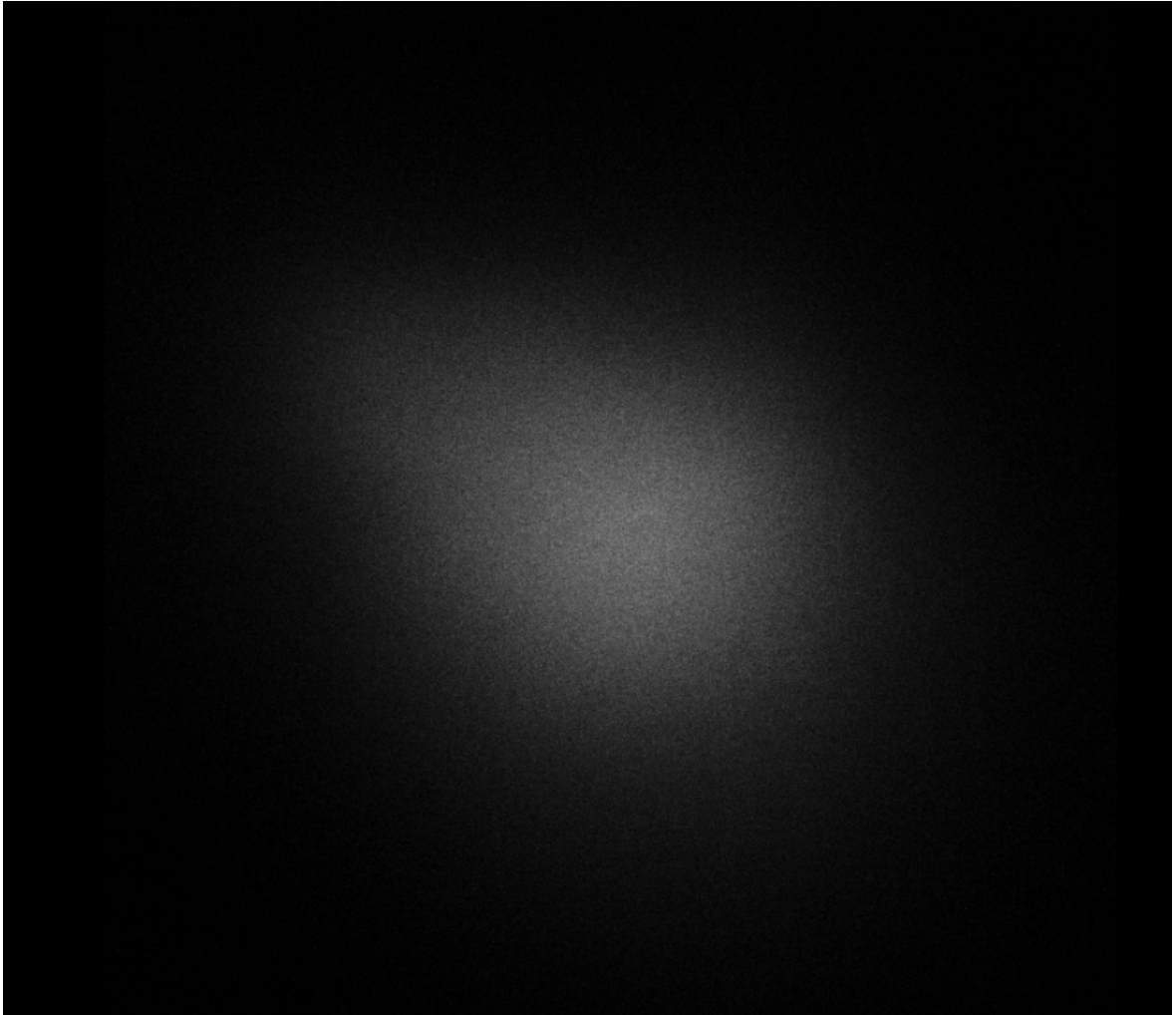
Slika 3.3: Vakuumska komora magneto-optičke stupice. Preuzeto iz [36].

Nakon naglog gašenja MOT zraka atomi u oblaku gibaju se balističkim putanjama s brzinama zadanim Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom. Okidanjem kamere nakon kratkog vremena (tzv. vrijeme preleta) može se promatrati širenje oblaka. Iz slika dobivenih za nekoliko različitih vremena preleta računanjem brzine širenja može se odrediti temperatura oblaka. Ovakav način mjerenja temperature oblaka hladnih atoma naziva se tehnika vremena preleta (eng. time of flight, TOF), a detaljniji opis može se naći u diplomskom radu [44]. Temperature oblaka u ovom eksperimentu iznosile su približno  $50 \mu\text{K}$ .

Broja atoma unutar oblaka proporcionalan je ukupnom intenzitetu izmjenom na jednoj od kamera, a konstanta proporcionalnosti izračunata je iz usporedbe s rezultatima dobivenim mjerenjem optičke debljine (eng. optical thickness) koje je detaljno opisano u doktorskom radu [45]. Promjenom struje kroz dispnzere u rasponu od 3.6 A do 5.1 A dobiveni su oblaci s približno  $10^8$  do  $10^9$  atoma.

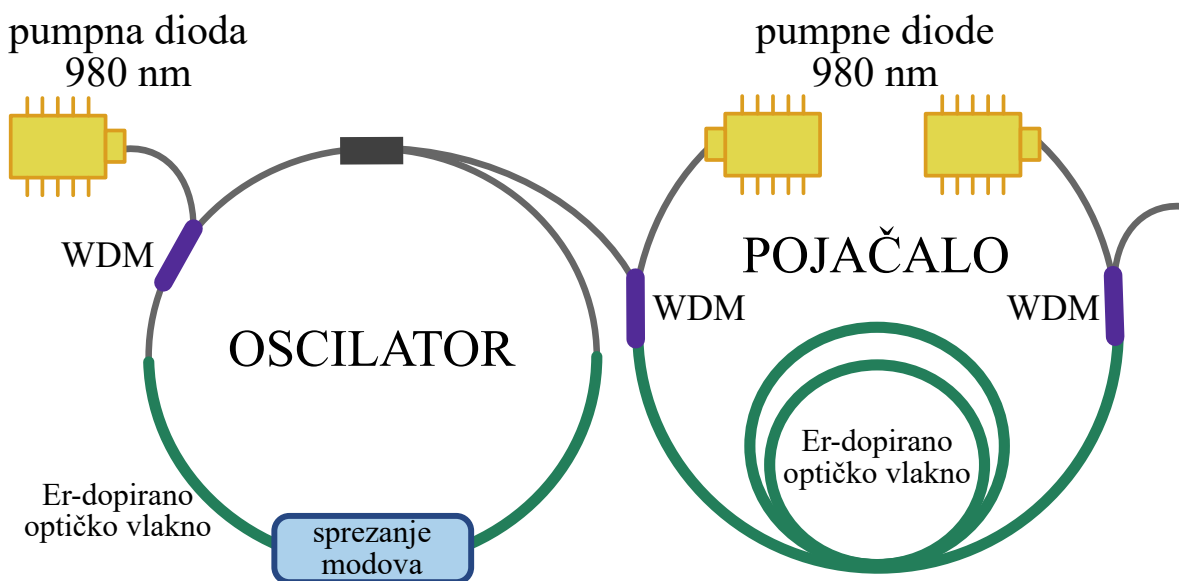
### **3.2 Optički frekventni češalj**

U poglavlju 2.4 vidjeli smo da je za dobivanje optičkog frekventnog češlja potreban femtosekundni pulsni laser, a ovdje je korišten laser s optičkim vlaknom dopiranim erbijevim ionima: Femtofiber Scientific FFS Laser koji je proizvela Toptica Photonics AG.



Slika 3.4: Fotografija oblaka hladnih atoma. Promjer oblak iznosi približno 1 mm.

U korištenom laseru optičko vlakno u kružnoj konfiguraciji (eng. ring cavity) dopirano ionima  $\text{Er}^{3+}$  ujedno služi kao rezonator i aktivni medij. Pumpanjem laserskom diodom valne duljine 980 nm dolazi do laseriranja u širokom dijelu spektra centriranom oko 1550 nm. Sprezanje modova, potrebno za nastanak ultrakratkih pulseva, postiže se metodom nelinearne polarizacijske rotacije čiji se detaljan opis može naći u radu [46]. Dobiveni pulsevi zatim ulaze u pojačalo građeno od još jednog erbij dopiranog optičkog vlakna i dvije 980 nm laserske diode kao što je prikazano na slici 3.5, a na izlazu se dobivaju pulsevi središnje valne duljine 1550 nm i trajanja 200 fs s frekvencijom repeticije 80.531 MHz.



Slika 3.5: Shematski prikaz korištenog femtosekundnog lasera. Sprezanjem modova nastaju femtosekundni pulsevi koji se zatim pojačavaju. Preuzeto iz [38].

U ovom eksperimentu spektar frekventnog češlja mora se preklapati s D2 linijom rubidija koja se nalazi na 780 nm pa je potrebno frekventno udvostručiti dobivene pulseve za što se koristi jedinica za stvaranje drugog harmonika (eng. second harmonic generator, SHG). Konačno dobiveni optički frekventni češalj širine 5 nm sadrži približno 100 000 linija te je centriran oko 780 nm, a srednja snaga iznosi približno 75 mW.

Kako bi stabilizirali frekvenciju  $n$ -tog moda frekventnog češlja potrebno je stabilizirati frekvenciju repeticije  $f_{rep}$  i frekvenciju pomaka  $f_0$ . Dio zrake odvaja se te dovodi na brzu fotodiodu, a tako izmjerena frekvencija repeticije se na detektoru faze uspoređuje s referentnim signalom dobivenim iz generatora frekvencije (eng. Direct Digital Synthesizer, DDS). Dobiveni *error* signal šalje se na PID regulator čiji



se izlazni signal dovodi na piezoelektrični element femtosekundnog lasera koji, promjenom duljine rezonatora, mijenja frekvenciju repeticije. Ovakva povratna veza stabilizira  $f_{rep}$  na vrijednost zadanu DDS-om. Nakon što je stabilizirana frekvencija repeticije  $f_{rep}$  frekvenciju pomaka  $f_0$  može se indirektno stabilizirati stabilizacijom frekvencije  $n$ -tog moda  $f_n$ . Preklapanjem frekventnog češlja i cw lasera na fotiodiodi mjeri se frekvencija udara koja odgovara razlici njihovih frekvencija  $f_{beat} = |f_n - f_{cw}|$ . Kao referentni cw laser ovdje se koristi dio zrake odvojene od lasera za hlađenje pa je  $f_{beat}$  u MHz području. Za usporedbu sa signalom s DDS-a ponovno se koristi detektor faze, a dobiveni *error* signal šalje se na PI regulator koji regulira struju pumpnih dioda.

### 3.3 Optički rezonator

Snaga pojedine linije frekventnog češlja vrlo je mala te iznosi približno  $0.6 \mu\text{W}$ . Interakcija hladnih atoma s ovakvom zrakom bila bi vrlo slaba te je stoga u ovom eksperimentu korišten optički rezonator. Intenzitet svjetlosti unutar korištenog rezonatora približno je 500 puta veća od intenziteta upadne zrake.

Karakteristike optičkog rezonatora uvelike su zadane potrebom da se njegovi modovi prostorno i frekventno preklapaju (eng. coupling) s modovima frekventnog češlja. Prvi uvjet je na duljinu rezonatora, pri čemu mora vrijediti  $FSR = m f_{rep}$  odnosno dolazi do frekventnog preklapanja svakog  $m$ -tog moda frekventnog češlja s modovima optičkog rezonatora. Za  $m = 1$  čime bi se preklapili svi FC modovi optički rezonator morao bi biti nešto kraći od 2 m što nije izvedivo unutar postojeće vakuumske komore MOT-a te je stoga izabrano  $m = 24$  što odgovara duljini rezonatora  $L = 7.757$  cm. Takvim odabirom i uz poznavanje frekvencije repeticije frekventnog češlja dobiva se  $FSR = 1932$  MHz. Zbog potrebe da struk rezonatora bude dovoljno velik da može doći do dobrog preklapanja s MOT oblakom odabrana je konfokalna geometrija. Ovo daje uvjet na radijus zakrivljenosti korištenih zrcala  $R = L$ , a zbog dostupnosti su iskorištena zrcala s radijusom  $R = 7.5$  cm. Za ovako dizajniran optički rezonator izračunata je jedno-fotonska Rabijeva frekvencija  $g \approx 2\pi \cdot 138$  kHz i finesa  $\mathcal{F} \approx 12000$ . Više detalja o izvedbi optičkog rezonatora i razlozima za ovakav odabir parametara može se naći u doktorskom radu [45].

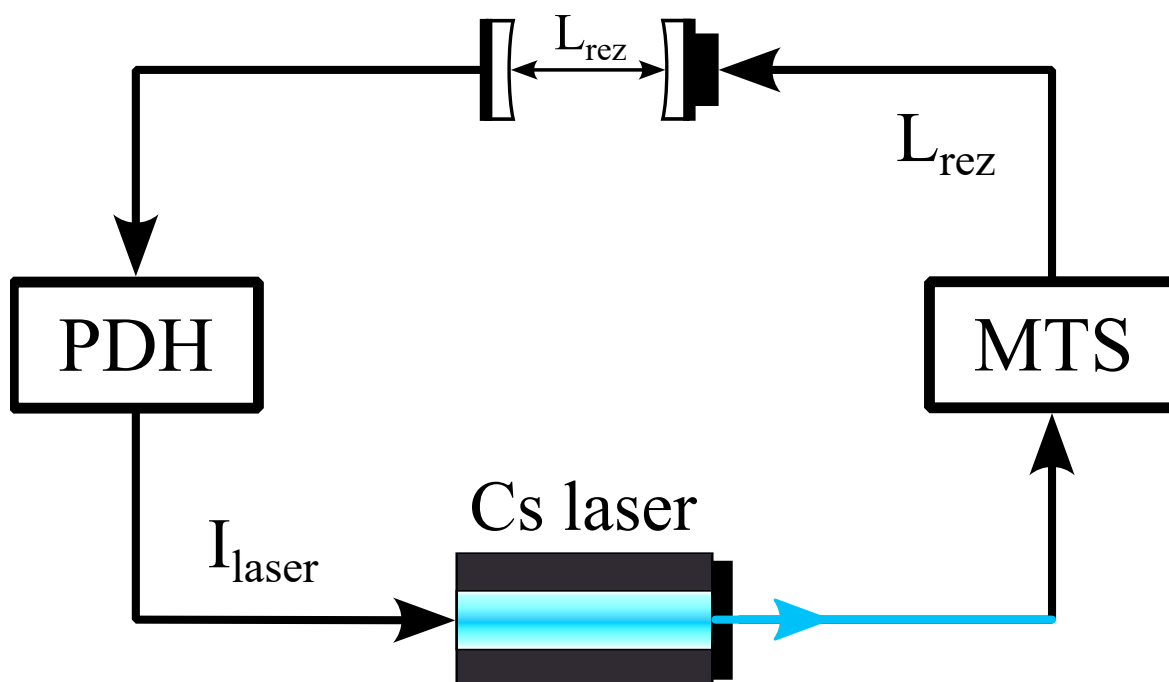
### 3.3.1 Stabilizacija optičkog rezonatora

Stabilizaciju se postiže Pound-Drever-Hall (PDH) metodom, najčešće korištenom metodom stabilizacije optičkog rezonatora. Modulacijom frekvencije laserske zraka koja ulazi u rezonator stvaraju se *sidebandovi* oko središnje frekvencije. Promatranjem svjetla reflektiranog od optičkog rezonatora na fotiododi i demodulacijom dobivenog signala istom frekvencijom, ali s pomakom u fazi dobiva se *error* signal korišten za stabilizaciju. Detaljno objašnjenje PDH metode i karakterizacija optičkog rezonatora dani su u seminaru [32].

Za stabilizaciju optičkog rezonatora korišten je laser valne duljine 852 nm što odgovara prijelazu za atome cezija, a daleko je od prijelaza atoma rubidija te je time izbjegnuta interakcija s atomima unutar MOT-a. Potrebno je još i stabilizirati ovaj laser za što se koristi tehnika spektroskopije s prijenosom modulacije (eng. modulation transfer spectroscopy, MTS). Slično kao kod saturacijske spektroskopije i ovdje se koriste dvije suprotno-propagirajuće zrake (nazivamo ih pumpa i proba) koje interagiraju s atomskim parama (eng. atomic vapour) unutar kivete. Obje zrake imaju približno jednaku snagu, a bitna razlika je da je pumpna zraka fazno modulirana frekvencijom  $\omega_m$ . Tako modulirana zraka može se opisati kao val nosioc frekvencije  $\omega_c$  i *sidebandovi* na frekvencijama  $\omega_c \pm \omega_m$ . U režimu kada je interakcija pumpe i nedomulirane probe s atomskim parama dovoljno nelinearna dolazi do pojave modulacija na probnoj zraci, što se može objasniti preko efekta miješanja četiri vala (eng. four-wave mixing) [47]. Nakon prolaska kroz kivetu probna zraka pada na fotiododu čime se dobiva *error* signal koji se koristi za stabilizaciju. U članku [48] može se naći detaljniji opis ove metode te neke prednosti i nedostaci u odnosu na ostale metode stabilizacije.

Uporabom ove dvije tehnike stabilizacije postiže se kružna stabilizacija optičkog rezonatora i Cs lasera shematski prikazana na slici 3.6. *Error* signal dobiven PDH metodom dolazi na PID kontroler koji, promjenom struje kroz lasersku diodu, regulira frekvenciju Cs lasera. Ovo utječe na *error* signal dobiven MTS tehnikom, pri čemu se izlazni PID signal šalje na piezoelektrični element koji mijenja duljinu optičkog rezonatora. Kako duljina rezonatora utječe na PDH signal zatvara se krug te se postiže međusobna stabilizacija duljine rezonatora i frekvencije Cs lasera.

Ovakva metoda stabilizacije izabrana je prvenstveno iz praktičnih razloga pri čemu se jednom modulirana zraka prvo koristi u MTS tehnici, a zatim i u PDH metodi

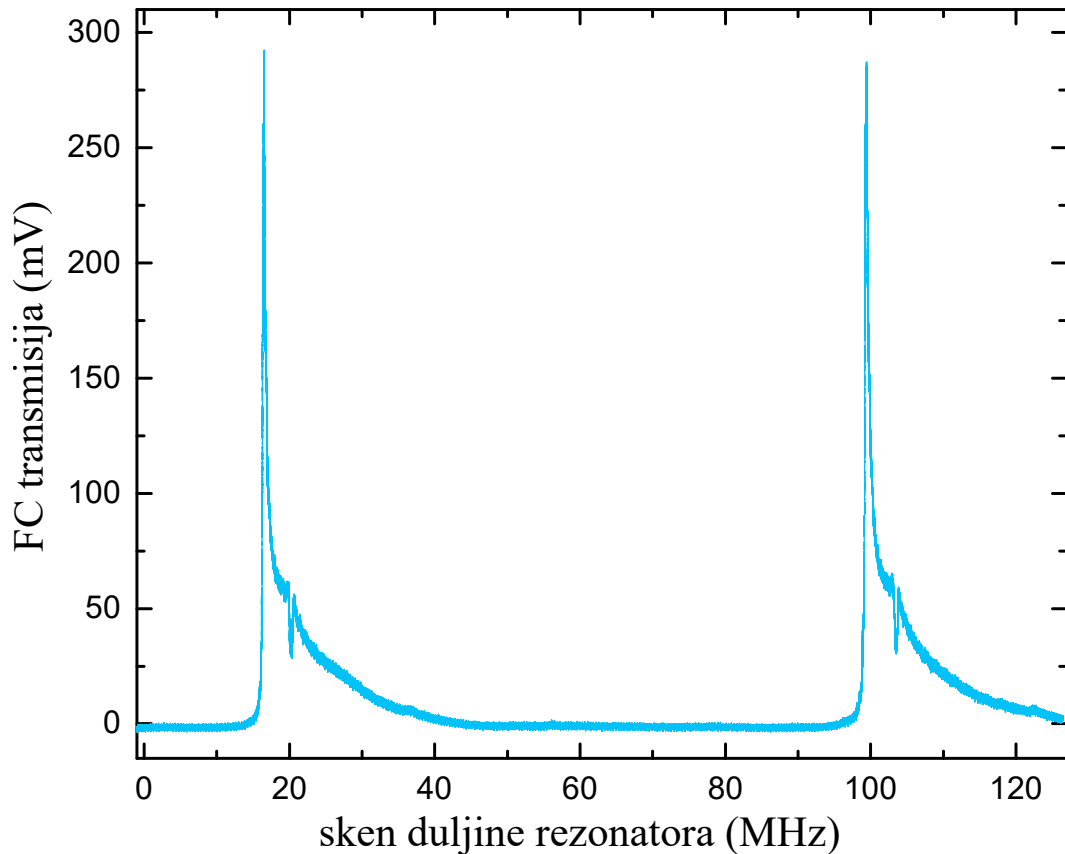


Slika 3.6: Shematski prikaz stabilizacije optičkog rezonatora. Signal dobiven PDH tehnikom koristi se za modulaciju struje lasera, a signal MTS metode za kontrolu duljine rezonatora.

za konačnu stabilizaciju optičkog rezonatora.

### 3.3.2 Preklapanje s oblakom

Kako bi se osiguralo preklapanje struka rezonatora s MOT oblakom skenira se duljina rezonatora, a na osciloskopu se promatra signal nakon transmisije FC zrake prikazan na slici 3.7. Svaki vrh odgovara jednom modu frekventnog češlja, dok je nesimetričnost uzrokovana visokom disperzijom zrcala rezonatora. Detaljni pregled utjecaja disperzije zrcala na izgled transmitiranog spektra dan je u dodatku A. Rupa u transmisiji na krilu signala posljedica je apsorpcije na atomima rubidija, a uvećani prikaz je dan na slici 3.8. Podešavanjem zrcala i struje na MOT zavojnicama može se pomicati oblak, pri čemu bolji preklop sa strukom rezonatora odgovara dubljoj rupi u transmisiji. Pri podešavanju su korištene i dvije kamere na kojima se vidi oblik i položaj oblaka. Unutar struka optičkog rezonatora, za različite postavke struje dispenzera, nalazilo se između 150 000 i 350 000 atoma.



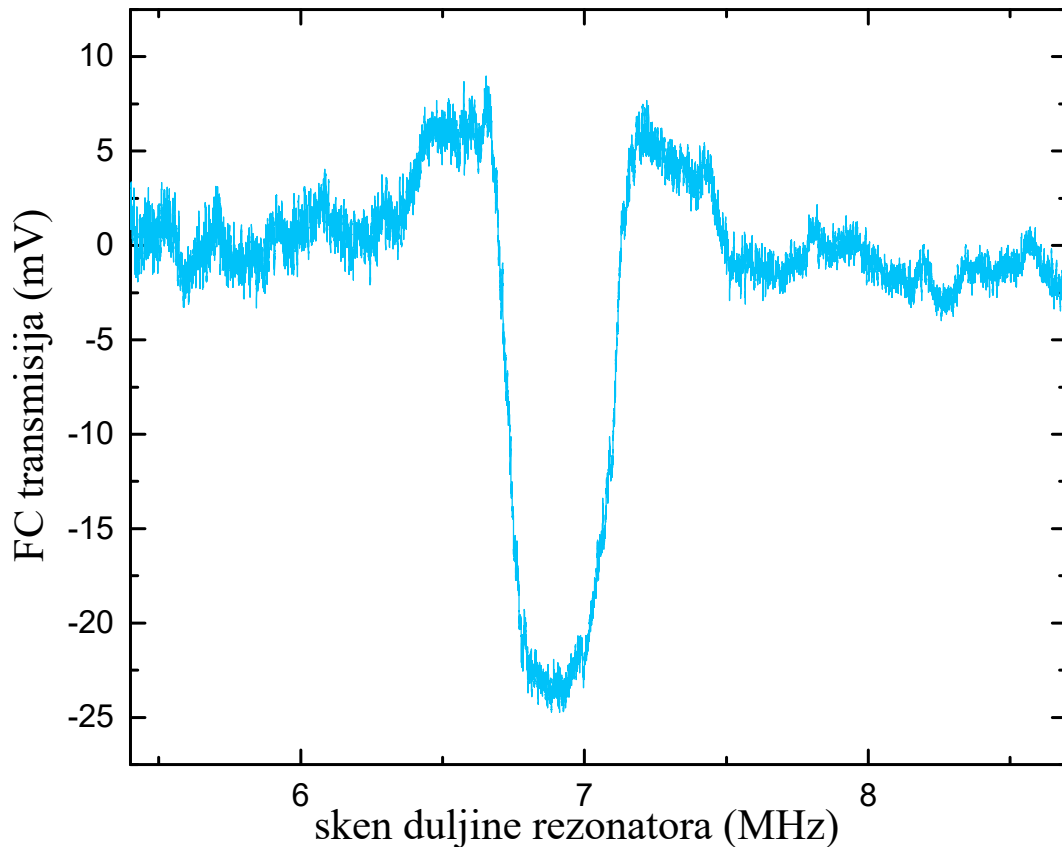
Slika 3.7: Frekventni češalj transmitiran kroz optički rezonator s MOT oblakom prilikom skeniranja duljine rezonatora.

### 3.4 Postav za mjerenje udara

U sklopu ovog diplomskog rada sastavljen je novi dio postava za mjerenje udara prikazan na slici 3.9. Ovim je omogućeno promatranje pojedinih linija frekventnog češlja koje, zbog nedovoljno velike rezolucije, nije bilo moguće na optičkom analizatoru spektra u prethodnoj iteraciji postava.

Kako su frekvencije pojedinih modova frekventnog češlja koje promatramo u optičkom području nije ih moguće direktno mjeriti elektroničkim uređajima. Ovaj problem je riješen promatranjem udara (eng. beat) s cw laserom bliske i dobro poznate frekvencije, a u tu svrhu je odvojen dio zrake lasera za hlađenje. Nakon preklapanja ovih dviju zraka na fotodiodi, pri čemu je potrebno osigurati da obje zrake imaju približno istu veličinu i intenzitet, dobiveni signal oscilira s frekvencijom koja odgovara razlici optičkih frekvencija korištenih zraka. Kako je ova razlika u gigahercnom području moguće ju je mjeriti upotrebom analizatora spektra.

Skica postava prikazana je na slici 3.10. Zraka frekventnog češlja transmitirana kroz optički rezonator prvo dolazi na djelitelj zrake gdje se manji dio reflektira te



Slika 3.8: Pad u transmisiji zbog apsorpcije na atomima rubidija. Da bi se jasnije vidjelo rupu ovdje je oduzet linearni trend vidljiv na slici 3.7.

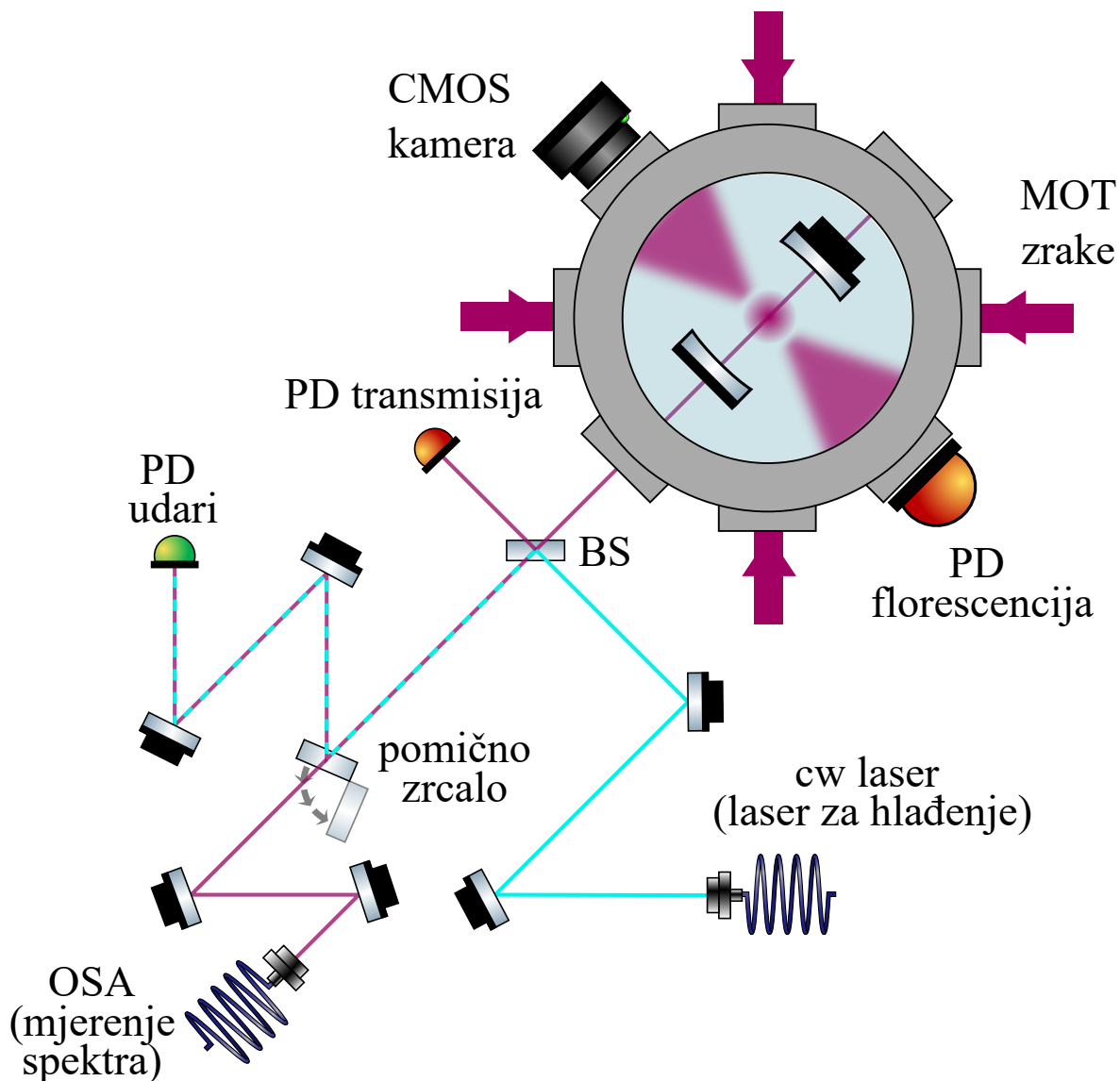
upada na fotodiodu. Signal s diode promatra se na osciloskopu te služi za kontrolu preklopa FC zrake s MOT oblakom kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju. Na djelatelj zrake upada i cw laser koji je dvama zrcalima podešen tako da se njegov reflektirani dio preklapa s transmitiranim dijelom FC zrake. Ove dvije zrake dalje se kopropagiraju te nakon prolaska kroz pojasni filter, čime se blokira daljnja propagacija Cs lasera (koji služi za stabilizaciju rezonatora), novodobivena zraka dolazi do pomičnog zrcala. U jednoj poziciji zrcala zraka upada na optičko vlakno te se tako dovodi do optičkog analizatora spektra (eng. optical spectrum analyser, OSA) Thorlabs OSA 201C. Postavljanjem pomičnog zrcala u drugi položaj zraka se skreće te upada na vrlo brzu fotodiodu EOT ET-4000 čiji se signal, nakon pojačanja pojačalom LNA-2535, promatra na analizatoru spektra Anritsu VNA Master MS2036C.

Za mjerenje histereze korištena su dva pojačala, a prije analizatora spektra dodan je djelatelj snage (eng. power splitter) čiji je drugi izlaz spojen na RF ulaz frekventnog miksera. Kao lokalni oscilator korišten je generator signala, a signal dobiven na IF (eng. intermediate-frequency) izlazu, čija frekvencija odgovara razlici frekvencija dvaju ulaznih signala, prolazi kroz niskopropusni filter te se konačno promatra na

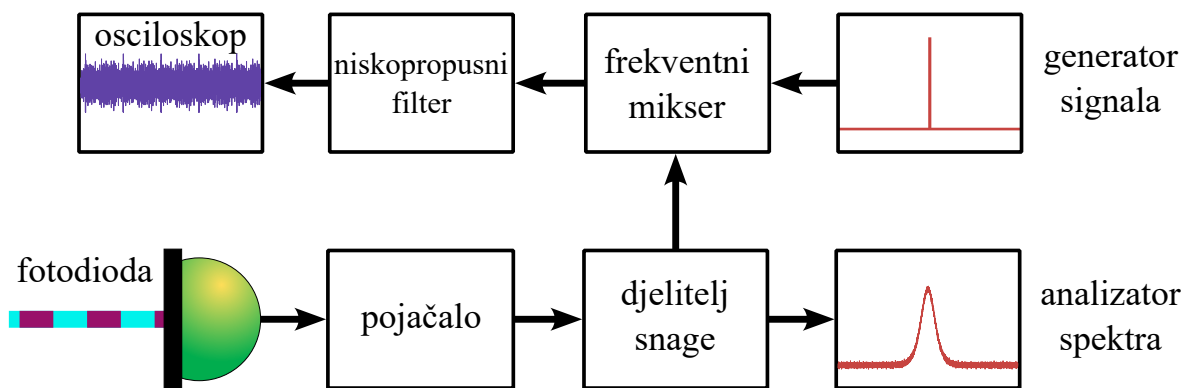


Slika 3.9: Fotografija postava za mjerenje udara.

osciloskopu. Shematski prikaz ovog dijela postava prikazan je na slici 3.11.



Slika 3.10: Shema postava za mjerenje udara. Oznake: PD - fotodioda, BS - djelitelj zrake, OSA - optički analizador spektra



Slika 3.11: Shematski prikaz elektroničkog dijela postava. Za mjerenja udara promatra se signal s analizatora spektra, a za mjerenje histereze signal s osciloskopa. Amplituda udara proporcionalna je korijenu srednje kvadratne vrijednosti signala s osciloskopa.

## 4 Mjerenja i rezultati

Cilj ovog eksperimenta je pokazati disperzivnu interakciju hladnih atoma s pojedinom linijom frekventnog češlja za nekoliko linija najbližih atomske rezonanci.

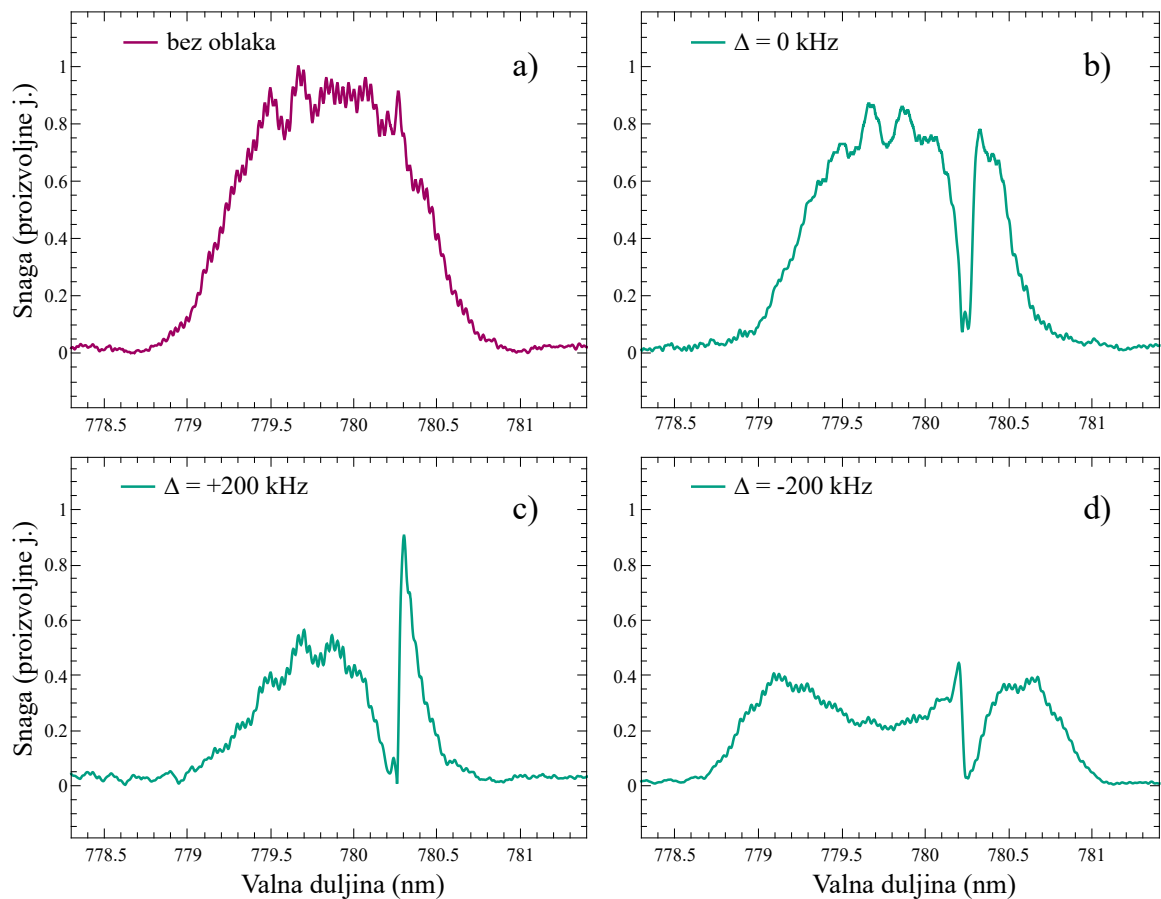
U ovom poglavlju prvo su predstavljene rezultati mjerenja transmitiranog spektra te je opisano kako promjena broja atoma i *detuninga* frekventnog češlja utječu na izgled spektra. Mjerenjem signala udara promatrana je interakcija pojedinih linija frekventnog češlja, a određivanjem *lightshifta* izračunat je broj atoma unutar struka optičkog rezonatora. Na kraju poglavlja diskutiran je izgled izmjerenih signala udara kao posljedica bistabilnosti, a mjerenjem njihove amplitude za rastuće i padajuće vrijednosti *detuninga* pokazano je da dolazi do pojave histereze.

### 4.1 Transmitirani spektar

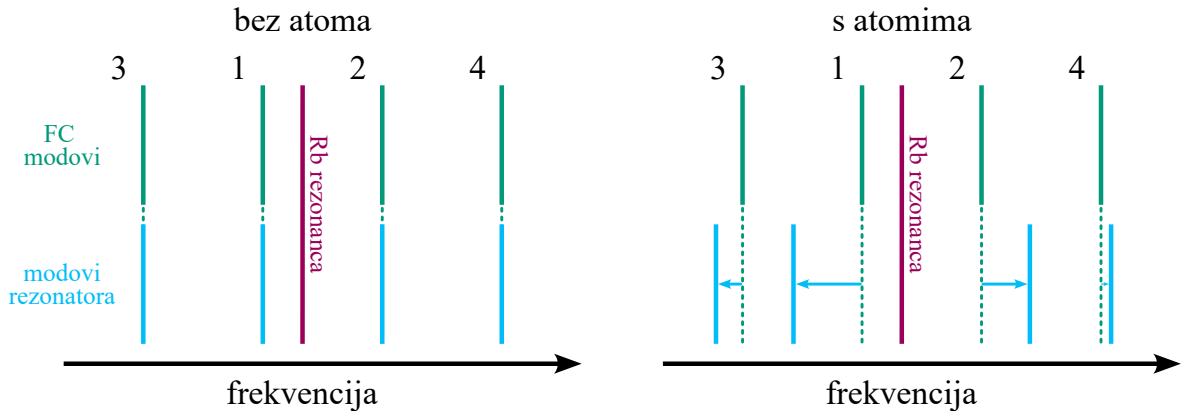
Spektar frekventnog češlja transmitiranog kroz optički rezonator prikazan je na slici 4.1(a). Kako rezolucija korištenog optičkog analizatora spektra nije dovoljno velika ne mogu se vidjeti pojedine FC linije, a spektar nakon transmisije užu je od FC spektra prije prolaska kroz optički rezonator zbog visoke disperzije zrcala.

Isto ovo mjerenje provedeno je i uz prisustvo oblaka hladnih atoma, a izmjereni rezultati prikazani su na slikama 4.1(b)-(d). Ovdje je prije uvođenja oblaka osigurano da dolazi do preklapanja između modova rezonatora i FC modova što je prikazano na lijevom dijelu slike 4.2. Prisustvo oblaka dovodi do pojave *lightshifta* kako je objašnjeno u teorijskom poglavlju 2.2.2. Modovi optičkog rezonatora najbliži rezonanciji s D2 prijelazom rubidija pomiču se najviše, dok se vrlo daleki modovi praktički ne pomiču (desni dio slike 4.2). Iz jednadžbe 2.28 jasno je vidljivo da se modovi uvijek pomiču u smjeru suprotnom od rezonancije. Modovi frekventnog češlja blizu rezonancije više nisu preklapljeni s ovako pomaknutim modovima rezonatora pa se slabije transmitiraju što je vidljivo na slici 4.1(b). Ako se vrijednost  $f_0$  smanji za 200 kHz (*detuning*  $\Delta = +200$  kHz) svi FC modovi će se jednoliko pomaknuti prema nižim frekvencijama (prema crvenom) pa dolazi do boljeg preklapanja s modovima rezonatora crveno od rezonancije, a lošijeg s modovima plavo od rezonancije (slika 4.3). Rezultati za ovaj slučaj prikazani su na slici 4.1(c), a bitno je primijetiti da, osim povećanja transmisije crveno od rezonancije i smanjenja transmisije plavo od rezonancije, dolazi i do smanjenja transmisije u području daleko od Rb rezonancije

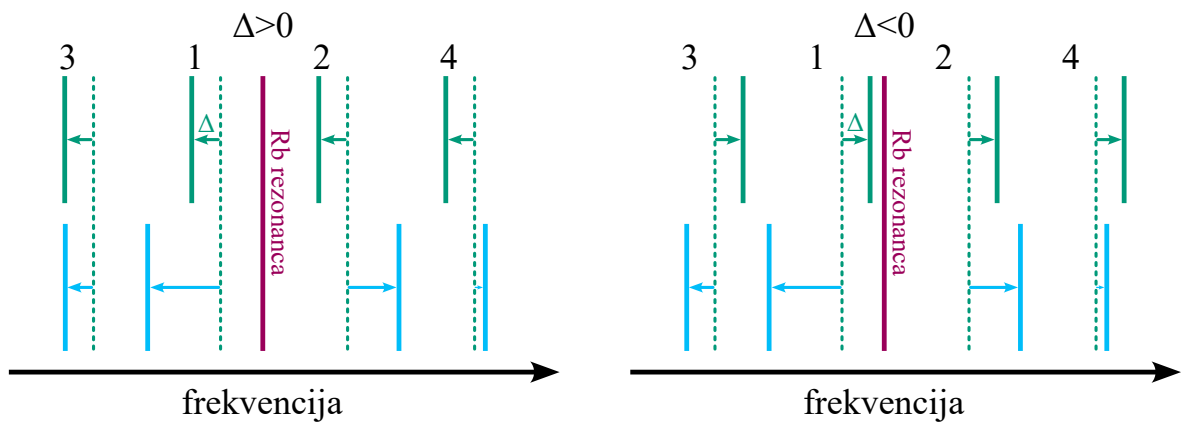




Slika 4.1: Transmitirani spektar frekventnog češlja bez a) i s MOT oblakom b)-d). Za *detuning*  $\Delta = 0$  kHz dolazi do lošijeg preklapanja modova blizu Rb rezonance što se vidi kao rupa u spektru. Promjenom *detuninga*  $\Delta$  dolazi do boljeg preklapanja modova na jednom rubu ove rupe, a lošijeg drugdje. Širenje transmitiranog spektra na slici d) posljedica je disperzije zrcala te je objašnjeno u dodatku A.



Slika 4.2: Preklapanje FC modova s modovima rezonatora. Interakcija s atomima pomiče modove rezonatora što dovodi do lošijeg preklapanja s FC modovima.



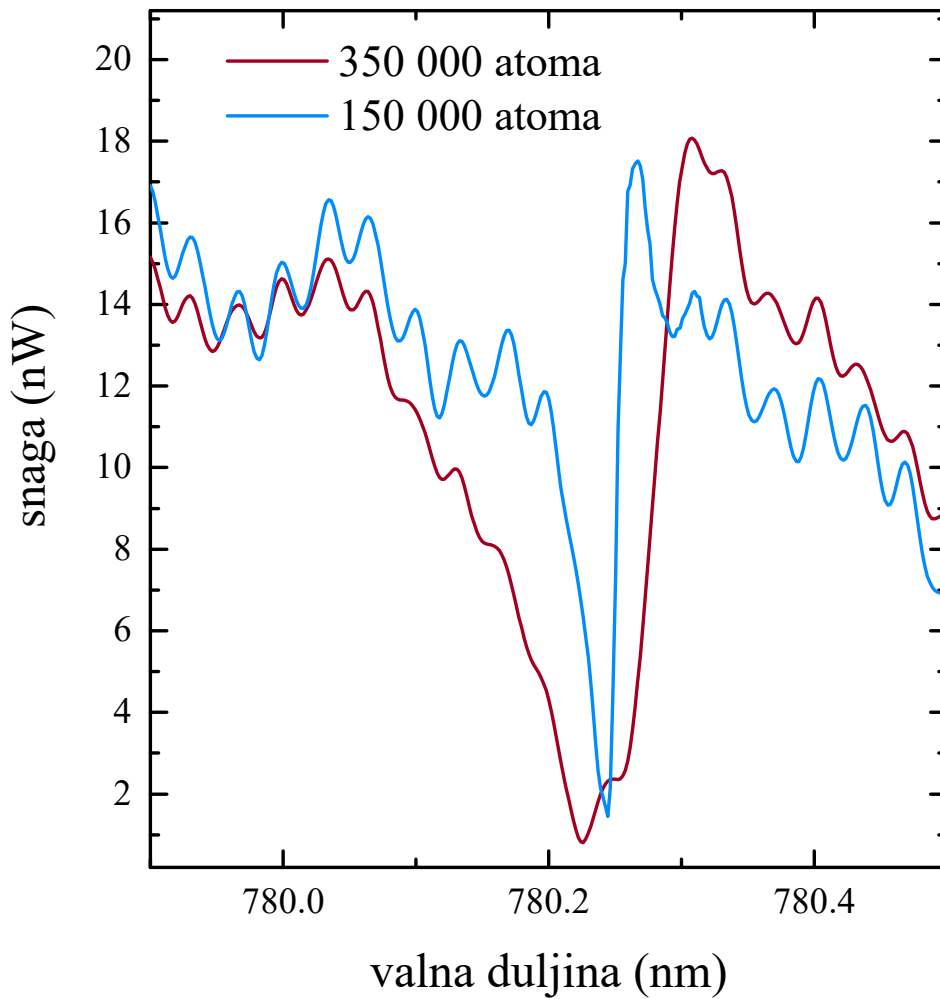
Slika 4.3: Pomicanjem frekvencije  $f_0$  za neki *detuning*  $\Delta > 0$  dolazi do boljeg preklapanja modova crveno od rezonance, a lošijeg preklapanja modova plavo od rezonance. Za  $\Delta < 0$  preklapanje je bolje sa plave strane. Pozitivan predznak  $\Delta$  označava da se najbliži mod udaljava od Rb rezonance.

u odnosu na slučaj  $\Delta = 0$ . Analogni slučaj za pomak od 200 kHz u plavo ( $\Delta = -200$  kHz) prikazan je na slici 4.1(d) pri čemu se povećanje transmisije događa plavo od rezonance.

Mjerenje spektra uz  $\Delta = 0$  provedeno je za dva različita broja atoma, a rezultati su prikazani na slici 4.4. Povećanjem broja atoma povećava se i *lightshift* pa je veći broj modova lošije preklapljen što dovodi do proširenja rupe u transmitiranom spektru. Broj atoma unutar struka rezonatora dobiven je mjerenjem *lightshifta*, a detaljan opis ovog mjerenja dan je u poglavlju 4.2.1.

## 4.2 Mjerenje udara

Za mjerenje interakcije s pojedinim modom frekventnog češlja koriste se udari s laserom za hlađenje koji je pomaknut 12 MHz crveno od D2 linije rubidija. Kao što



Slika 4.4: Transmitirani spektar za dva različita broja atoma. Veći broj atoma uzrokuje širu rupu u spektru jer je *lightshift* proporcionalan broju atoma.

je pokazano u poglavlju 3.4, frekvencija udara mjerena na analizatoru spektra odgovara razlici frekvencija lasera za hlađenje i promatrane FC linije, a ovdje ćemo koristiti oznaku  $f_k$  za udare s  $k$ -tom najbližom linijom. Kako FSR iznosi nešto manje od 2 GHz uvijek će jedna transmitirana linija frekventnog češlja biti udaljena manje od 1 GHz od lasera za hlađenje. Frekvenciju  $f_1$  može se odrediti pretraživanjem signala s analizatora spektra na frekvencijama manjim od 1 GHz dok se ne pronađe vrh. Sve ostale frekvencije  $f_k$  mogu se jednostavno izračunati iz formule:

$$\begin{aligned} f_{2q} &= q \cdot FSR - f_1 \\ f_{2q+1} &= q \cdot FSR + f_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

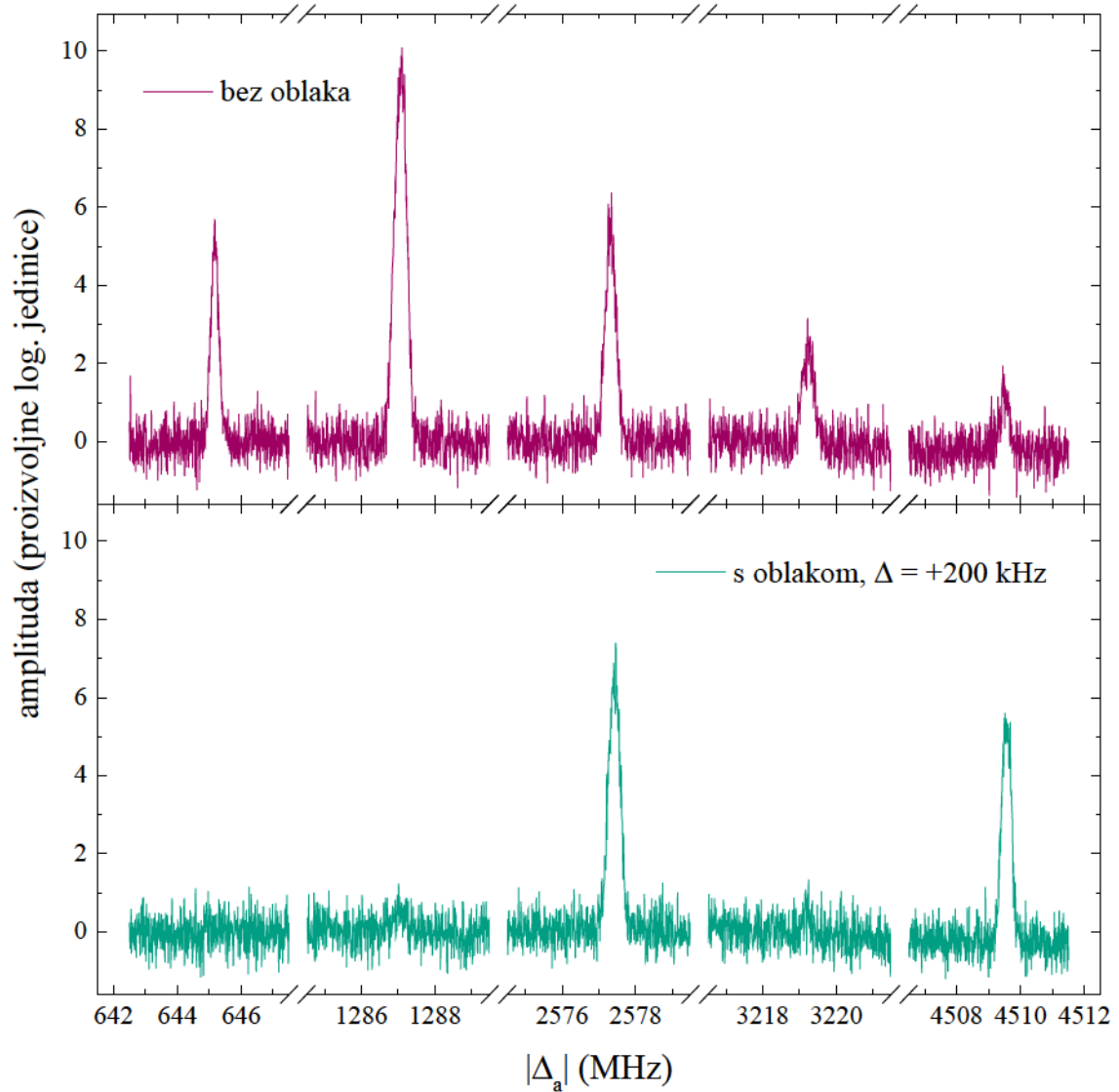
gdje je  $q = 1, 2, 3, \dots$ , a pritom se parne i neparne linije nalaze na suprotnim stranama Rb rezonance.

Izmjereni signali udara za prvih pet najbližih linija prikazani su na slici 4.5. Za mjerenja provedena bez MOT oblaka vide se signali svih pet linija, a različita visina vrhova uzrokovana je disperzijom zrcala i pojačalom čije pojačanje ovisi o frekvenciji signala te pada iznad 2500 MHz. Mjerenje uz prisutnost MOT oblaka provedeno je za *detuning*  $\Delta = 200$  kHz što odgovara spektru na slici 4.1(c). Kao što je objašnjeno u prethodnom poglavlju, ovakav *detuning* dovodi do bolje transmisije modova plavo od Rb rezonance (neparni  $n$ ) i lošije transmisije modova crveno od Rb rezonance (parni  $n$ ). Ovo odgovara mjerenju sa slike 4.5(dolje) uz napomenu da najbliži mod doživljava značajno veći *lightshift* od ostalih modova pa ga se vidi tek na nešto većem *detuningu*.

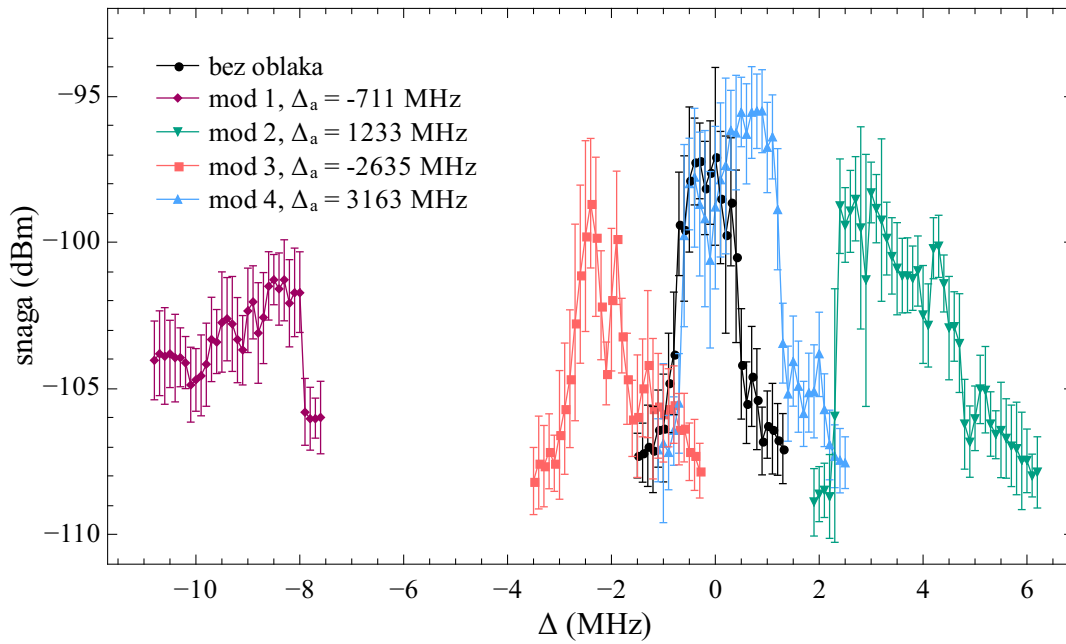
#### 4.2.1 Lightshift

Za određivanje *lightshifta* provedena su mjerenja udara uz prisutnost atoma za različite vrijednosti *detuninga*  $\Delta = \omega_c - \omega_{c,N=0}$  gdje je  $\omega_c$  frekvencija izmjerenih udara, a  $\omega_{c,N=0}$  frekvencija udara u slučaju kada nema MOT oblaka. Za svaku vrijednost *detuninga* provedeno je 20 mjerenja, a nakon njihovog usrednjavanja određena je maksimalna vrijednost signala koja je prikazana na slici 4.6. Jasno je vidljivo da se *lightshift* smanjuje s povećanjem udaljenosti odgovarajućeg moda od Rb rezonance.

Korištenjem jednadžbe 2.28 i efektivne konstante vezanja dane izrazom 2.31



Slika 4.5: Signal udara izmjeren na analizatoru spektra za pet modova najbližih Rb rezonanci. S MOT oblakom za *detuning*  $\Delta = 200$  kHz transmitiraju se samo modovi plavo od rezonance. *Lightshift* prvog moda je značajno veći, pa bi ga se vidjelo tek na većem *detuningu*.



Slika 4.6: Ovisnost maksimalne snage izmjerenih signala o *detuningu*  $\Delta = \omega_c - \omega_{c,N=0}$  za četiri najbliža moda uz prisustvo MOT oblaka. Signal za prvi mod bez prisustva oblaka prikazan je crno.

može se odrediti broj atoma unutar struka optičkog rezonatora pri čemu vrijedi:

$$N = U_0 \frac{\Delta_a^2 + \Gamma^2}{g^2 \Delta_a} \quad (4.2)$$

Dobiveni rezultati, nakon uvrštavanja izmjerenih vrijednosti *lightshifta* i udaljenosti od rezonance za četiri najbliža moda, prikazani su u tablici 4.1. Vrijednosti dobivene za prvi i treći mod u dobrom su međusobnom slaganju, dok su za drugi i četvrti mod dobivene nešto niže vrijednosti. Kao što je vidljivo na slici 4.6 izmjereni signali su ne-

broj moda	1	2	3	4
$\Delta_a$ [MHz]	-711	1233	-2635	3163
$U_0$ [MHz]	-8.5	3.0	-2.4	0.9
$N$	$3.2 \cdot 10^5$	$1.9 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^5$

Tablica 4.1: Izmjerene vrijednosti *lightshifta* i udaljenosti od rezonance te izračunat broj atoma za četiri najbliža moda. Prvi i treći mod nalaze se crveno, a drugi i četvrti plavo od rezonance s D2 prijelazom rubidija.

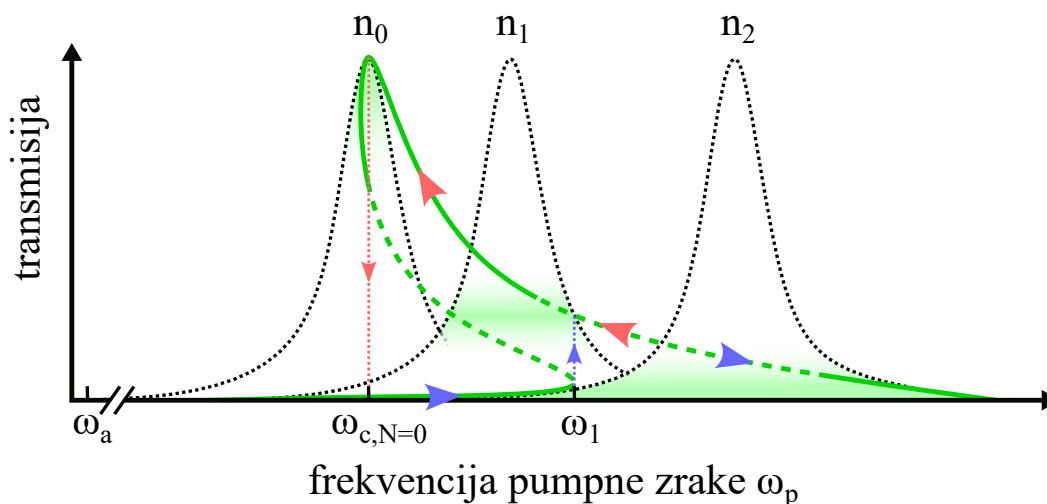
simetrični, a neodređenost u mjerenju bitno je veća u blizini maksimalne izmjerene vrijednosti. Ovo je najočitije na signalu drugog udara koji s lijeve strane (bliže Rb rezonanci) naglo naraste unutar 100 kHz, dok s desne strane polako pada kroz pri-

bližno 1.5 MHz. Velika neodređenost mjerenja uzrokovana je pojavom bistabilnosti, a pojedinačna mjerenja mogu se podijeliti u dvije skupine. Izmjerene amplitude unutar prve skupine međusobno su konzistentne i značajno više od prosječne vrijednosti svih mjerenja dok su u drugoj skupini izmjerene vrijednosti u razini šuma. Ova pojava detaljnije je objašnjena u sljedećem poglavlju. Zbog ovakvog oblika izmjerenih signala za određivanje *lightshifta* korištena je frekvencija na kojoj je izmjerena najveća snaga.

### 4.3 Histereza

Oblik signala udara, opisan u prošlom poglavlju, posljedica je bistabilnosti i fenomena nalik histerezi do kojih dolazi u optičkim sustavima koji sadrže nelinearni medij unutar optičkog rezonatora. Ovakvo ponašanje za slučaj interakcije hladnih atoma iterbija i kontinuiranog lasera objašnjeno je i eksperimentalno pokazano u radu [49], a u nastavku ovog poglavlja dan je kvalitativan opis potreban za razumijevanje izmjerenih podataka.

U našem slučaju nelinearnost se javlja kroz disperzivne efekte pri čemu efektivni broj atoma ovisi o intenzitetu svjetlosti unutar rezonatora. Povećanjem intenziteta svjetlosti dolazi do saturacije pri čemu se atomi pumpaju u pobuđeno stanje te time postaju prozirni za pumpnu zraku što dovodi do efektivnog smanjenja broja atoma. Kako je *lightshift* proporcionalan s brojem atoma ujedno dolazi i do pomicanja promatranog moda rezonatora. Ovo dovodi do pomicanja i naginjanja rezonantne krivulje kao što je prikazano na slici 4.7. Prilikom povećanja frekvencije pumpe transmitirani intenzitet slijedi donji dio krivulje, a dolaskom do točke  $\omega_1$  intenzitet unutar rezonatora postaje dovoljno velik te počinje pumpanje atoma u pobuđeno stanje. Smanjenje *lightshifta* sada povećava intenzitet koji dodatno smanjuje efektivni broj atoma sve dok sustav ne dođe u novu ravnotežnu točku na gornjem dijelu krivulje koja odgovara broju atoma  $n_1$ . Nakon ovakvog naglog skoka, s dodatnim povećanjem frekvencije, transmitirani intenzitet prati gornji dio krivulje pri čemu dolazi do postepenog povećanja *lightshifta* sve dok se svi atomi ne vrate u osnovno stanje ( $n_2$  na slici 4.7). U suprotnom smjeru transmitirani intenzitet prati gornji dio krivulje sve do vrha na frekvenciji  $\omega_{c,N=0}$ , kada dolazi do potpune saturacije, te zatim naglo pada na nulu.

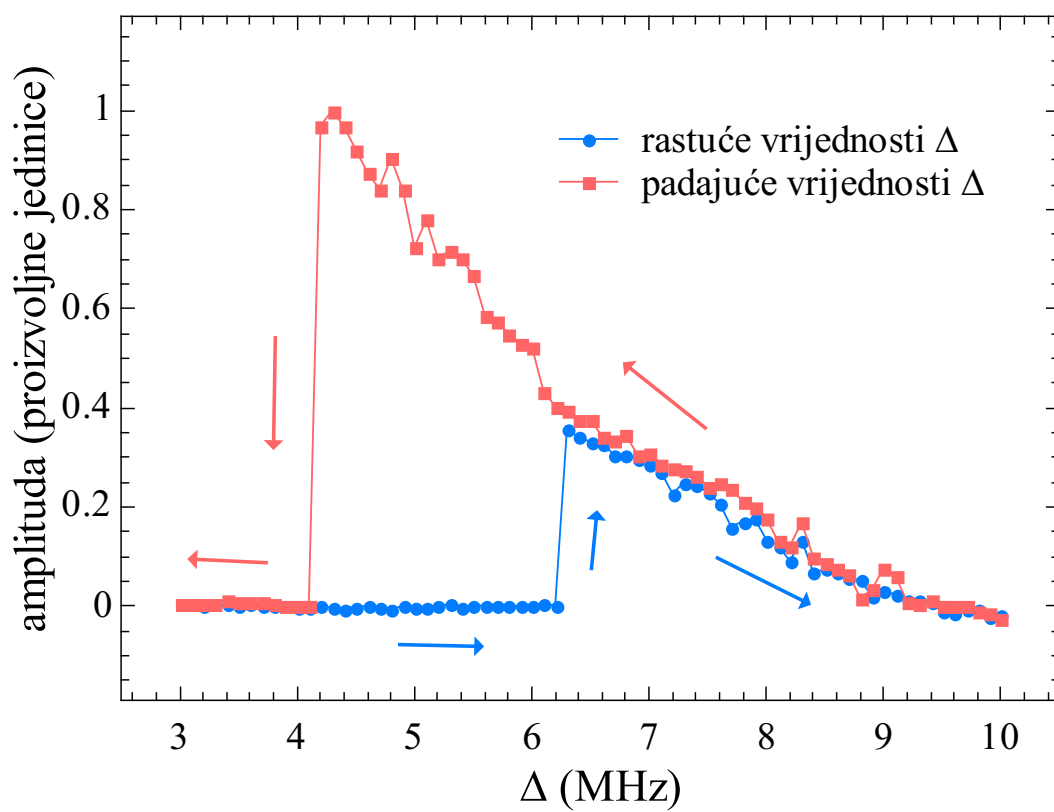


Slika 4.7: Pojava histereze. Svjetlost unutar rezonatora pumpa atome u pobuđeno stanje što dovodi do efektivnog smanjenja broja atoma, a time i do smanjenja *lightshifta*. Adaptirano iz [49].

Procedura korištena za mjerenje *lightshifta* opisana u prethodnom poglavlju nije prikladna za mjerenje histereze jer pojedinačno mjerenje traje predugo. Kako nas u ovom mjerenju zanima samo amplituda na zadanoj frekvenciji pojačani signal s fotodiode uspoređuje se s onim iz generatora signala na frekventnom mikseru. Izlazni signal promatra se na osciloskopu pri čemu amplituda udara odgovara izmjerenom korijenu srednje kvadratne vrijednosti (eng. root mean square, RMS). Na početku mjerenja generator signala postavljen je na frekvenciju koja odgovara izmjerenom položaju signala udara na analizatoru spektra. *Detuning*  $\Delta = \omega_c - \omega_{c,N=0}$  smanjen je sve dok signal udara nije potpuno nestao, a frekvencija na generatoru signala pomaknuta je za isti iznos. Zatim su provedena uzastopna mjerenja RMS-a između kojih su  $\Delta$  i frekvencija na generatoru signala promijenjeni u koracima od 100 kHz. Cijelo mjerenje je ponovljeno u suprotnom smjeru (od većih prema manjim frekvencijama), a dobiveni rezultati prikazani su na slici 4.8.

Izgled izmjenjenog signala udara ovisi o smjeru skeniranja *detuninga*  $\Delta$ , a s obzirom da je promatrani mod plavo od rezonance povećanje  $\Delta$  odgovara povećanju frekvencije  $f_0$  frekventnog češlja. Prilikom skeniranja od manjih prema većim vrijednostima  $\Delta$  amplituda signala naglo naraste u točki  $\Delta = 6.3$  MHz te zatim polako pada. Skeniranjem u suprotnom smjeru dobivaju se približno iste vrijednosti u području u kojem je  $\Delta > 6.3$  MHz, ali daljnjim smanjenjem *detuninga* signal nastavlja rasti sve dok naglo ne padne na *detuningu*  $\Delta = 4.2$  MHz. Ovo se dešava na *detuningu* većem od 0 MHz jer je intenzitet jedne linije frekventnog češlja konačan pa ne može





Slika 4.8: Ovisnost amplitude o *detuningu*  $\Delta = \omega_c - \omega_{c,N=0}$  za rastuće (plavo) i padajuće (crveno) vrijednosti *detuninga*. Dolazi do pojave histereze.

doći do potpune saturacije.

Primijećeno je da dolazi do značajnih razlika u jačini fluorescencije između mjerenja provedenih s crvene i plave strane Rb rezonance što daje moguće objašnjenje odstupanja izmjerenog broja atoma za različite modove iz poglavlja 4.2.1.

## 5 Zaključak

U ovom diplomskom radu proučavan je linearni disperzivni režim interakcije optičkog frekventnog češlja s hladnim atomima rubidija unutar optičkog rezonatora. Za hlađenje atoma korišten je već postojeći postav magneto-optičke stupice čije je središte preklapljeno sa strukom optičkog rezonatora.

Provedeno je mjerenje spektra frekventnog češlja nakon transmisije kroz rezonator sa i bez oblaka hladnih atoma. Prisustvo atoma dovodi do stvaranja rupe u spektru na valnoj duljini koja odgovara rubidij rezonanci, a *detuningom* frekventnog češlja stvara se oštar vrh na rubu te rupe. Ovakav izgled izmjerenog spektra posljedica je pomicanja modova rezonatora prilikom interakcije s atomima. Mjerenje je provedeno i za dva različita broja atoma pri čemu se mijenja širina rupe u spektru.

Za kvantitativno određivanje *lightshifta*, odnosno frekventnog pomaka moda rezonatora nakon uvođenja atoma, sastavljen je novi dio postava u kojem se stvaraju udari između transmitirane zrake i zrake kontinuiranog lasera te je na ovaj način omogućeno mjerenje pojedinačnih linija frekventnog češlja. Mijenjanjem *detuninga* frekventnog češlja određen je položaj modova rezonatora, a time i njihov *lightshift*. Izmjerene vrijednosti iskorištene su za računanje broja atoma unutar struka rezonatora, a vrijednosti dobivene za prvi i treći mod u dobrom su međusobnom slaganju. Za drugi i četvrti mod dobivene su nešto niže vrijednosti te je ponuđeno moguće objašnjenje.

U posljednjem dijelu rada provedeno je mjerenje amplitude signala udara za rastuće i padajuće vrijednosti *detuninga* te je pokazano da dolazi do pojave histereze.

# Dodaci

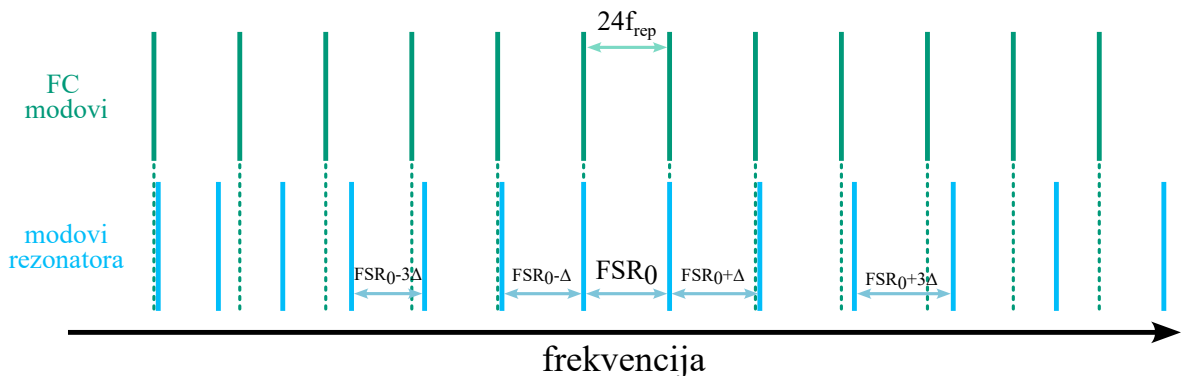
## Dodatak A Utjecaj disperzije zrcala

Disperzija zrcala optičkog rezonatora dovodi do odstupanja od položaja modova idealnog rezonatora opisanog u poglavlju 2.2. Modovi više nisu ekvidistantni, a ovdje pretpostavljamo da se udaljenost između dva susjedna moda, s povećanjem frekvencije, poveća za  $\Delta$  [45].

Uvjet preklapanja modova rezonatora s FC modovima iz poglavlja 2.4.1 sada osigurava egzaktno preklapanje samo dva moda na centralnoj frekvenciji  $f_c$  pri čemu u korištenom postavu vrijedi:

$$FSR_0 = 24f_{rep} \quad (\text{A.1})$$

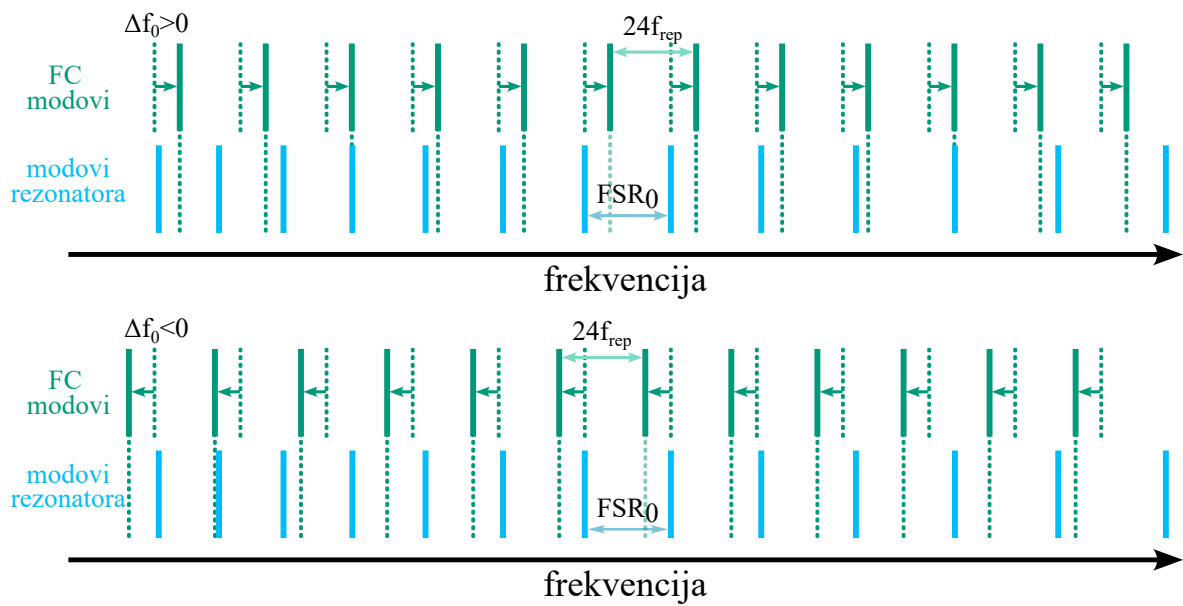
Za udaljenije modove dolazi do sve lošijeg preklapanja, kao što je prikazano na slici A.1 pa se kroz rezonator transmitira samo uski dio spektra (približno 1 nm FWHM) centriran oko  $f_c$ .



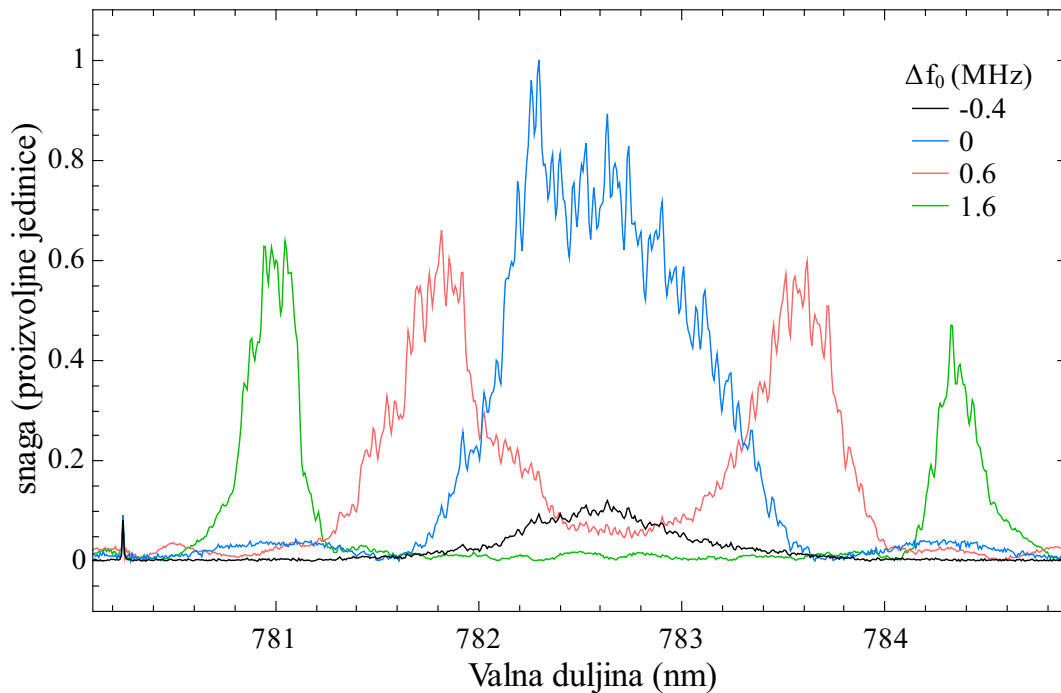
Slika A.1: Utjecaj disperzije zrcala na modove optičkog rezonatora. Kako modovi više nisu ekvidistantni dolazi do egzaktnog preklapanja sa samo dva moda frekventnog češlja.

Iz gornjeg dijela slike A.2 vidljivo je da se povećanjem frekvencije  $f_0$  za neki iznos  $\Delta f_0$  modovi lijevo i desno od  $f_c$  preklapaju bolje, a modovi u blizini  $f_c$  lošije nego u slučaju  $\Delta f_0 = 0$ . Promatrajući spektar na slici A.3 vidi se da se središnji vrh približno simetrično razdvaja na dva vrha koji se povećanjem  $\Delta f_0$  dodatno udaljavaju. Za negativne vrijednosti  $\Delta f_0$  središnji vrh se smanjuje i sužava što je i očekivano s obzirom da su tada svi modovi lošije preklapljeni (slika A.2 dolje).

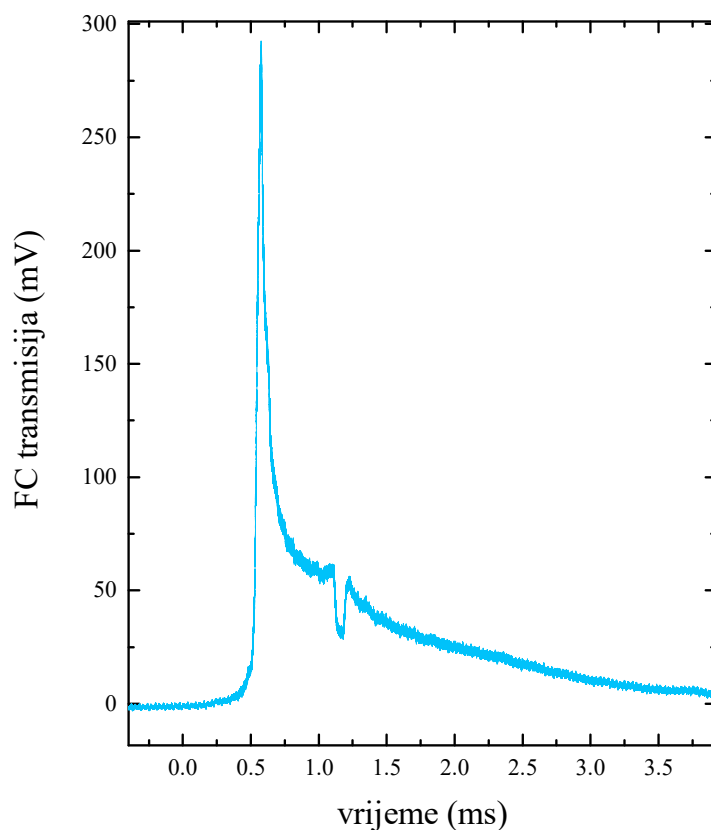
Utjecaj disperzije zrcala vidi se i u nesimetričnom obliku signala dobivenog pro-



Slika A.2: Preklapanje modova nakon pomicanja frekvencije  $f_0$  za neki iznos  $\Delta f_0$ . Za  $\Delta f_0 > 0$  (gore) modovi su bolje preklapljeni lijevo i desno od  $FSR_0$ , a za  $\Delta f_0 < 0$  (dolje) svi modovi su lošije preklapljeni (uz uvjet  $\Delta f_0 \ll FSR$ ).



Slika A.3: Spektar frekventnog češlja nakon transmisije kroz optički rezonator za nekoliko vrijednosti  $\Delta f_0$ . Adaptirano iz [45].



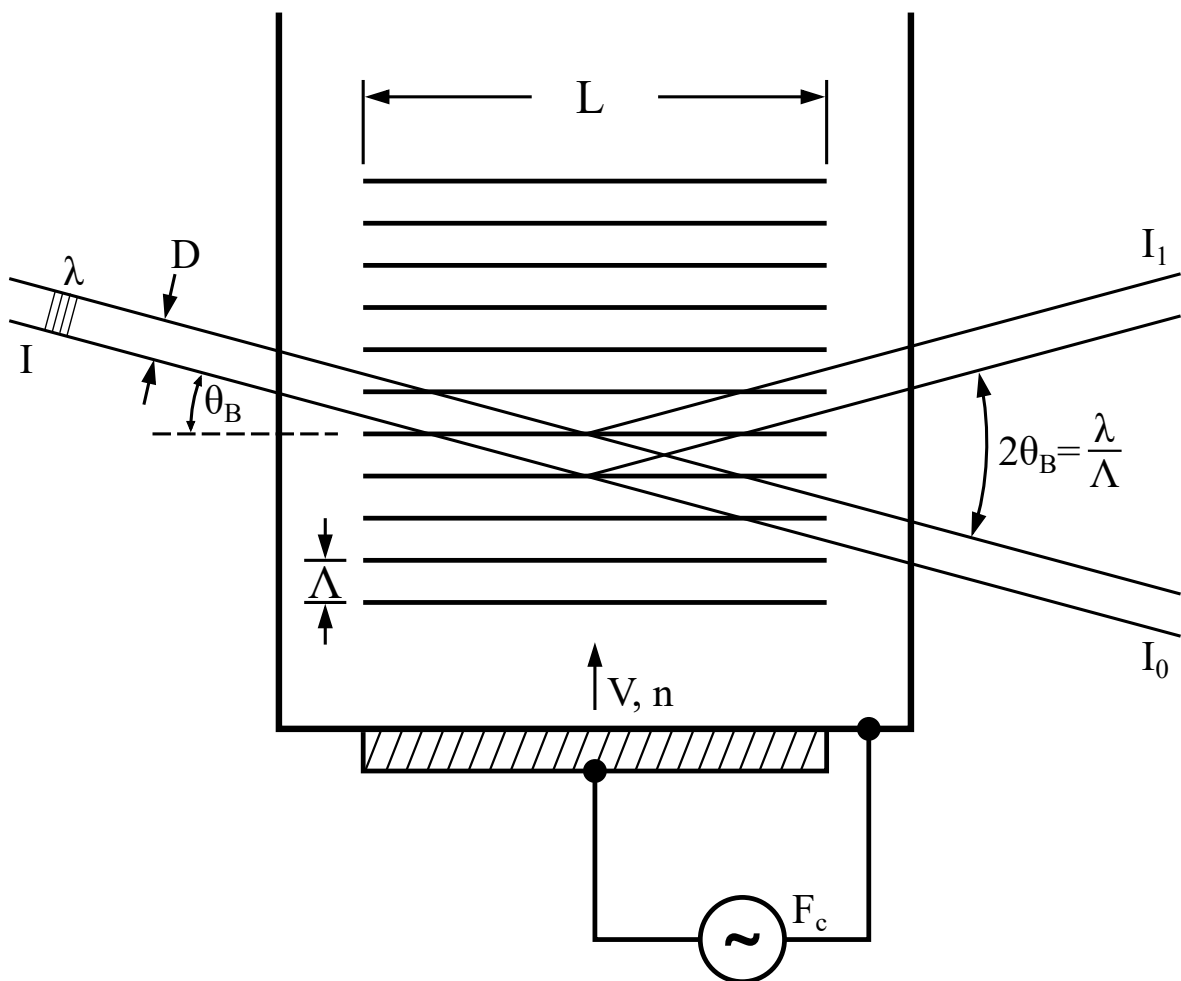
Slika A.4: Transmitirani signal dobiven skeniranjem duljine rezonatora. Rep na desnoj strani signala posljedica je disperzije zrcala.

matranjem transmitiranog intenziteta prilikom skeniranje duljine optičkog rezonatora. Povećanjem duljine rezonatora  $FSR$  se smanjuje (izraz 2.12) što dovodi do pomicanja modova rezonatora prema nižim frekvencijama i time boljeg preklapanja s FC modovima na frekvencijama višim od  $f_c$ . Ovo objašnjava izgled desnog krila signala na slici A.4. Ako se unutar rezonatora nalazi MOT oblak zbog apsorpcije dolazi do stvaranja rupe na krilu kada promatrana linija frekventnog češlja ima frekvenciju nižu od D2 linije rubidija. Time je potvrđeno da vrijednosti u krilu odgovaraju dijelu FC spektra plavo od promatrane linije.

U doktorskom radu [45], za ovdje korišten rezonator, izmjerena je vrijednost  $\Delta = (18 \pm 2)$  Hz. Unatoč tome što je ovo puno manje od udaljenosti dva FC moda koja iznosi 80.5 MHz, iz izmjerenih podataka vidljivo je da disperzija ima značajan utjecaj na transmitirani spektar. Stoga je u sljedećoj iteraciji eksperimenta planirana zamjena korištenih zrcala za zrcala s nižom disperzijom.

## Dodatak B Akusto-optički modulator

Akusto-optički modulator (eng. Acousto-optic modulator, AOM) optički je uređaj koji se tipično koristi za modulaciju intenziteta, frekvencije i optičkog puta ulazne laserske zrake [50]. Prolaskom zvučnog vala kroz transparentni kristal dolazi do stvaranja periodičkih područja zgušnjavanja i razrjeđenja, a time i do prostornih oscilacija indeksa loma. Ova pojava naziva se akusto-optički efekt, a potreban zvučni val dobiva se dovođenjem RF signala na piezoelektrični pretvornik pričvršćen na jednu stranu kristala. Skica AOM-a prikazana je na slici B.1.



Slika B.1: Shematski prikaz rada akusto-optičkog modulatora. Preuzeto iz [51].

Tako dobiven periodični indeks loma ponaša se kao optička rešetka na kojoj se ulazna laserska zraka ogiba poštujući Braggov zakon zbog čega se ponekad koristi i naziv Braggova ćelija. Kut difrakcije  $\theta_d$  u  $m$ -tom redu za sredstvo indeksa loma  $n$  iznosi:

$$2 \sin(\theta_d) = \frac{m\lambda_L}{n\lambda_s} \quad (\text{B.1})$$

gdje je  $\lambda_L$  valna duljina ulaznog lasera, a  $\lambda_s$  valna duljina zvučnog vala. Uz to dolazi i do promjene frekvencije laserske zrake, pri čemu se frekvencija  $m$ -tog reda  $f_m$  pomiče u odnosu na frekvenciju ulazne zrake  $f_L$ :

$$f_m = f_L + mf_s \quad (\text{B.2})$$

ovdje je  $f_s$  frekvencija zvučnog vala koja odgovara RF signalu na piezoelektričnom pretvorniku.

Kao što je vidljivo iz izraza B.1 i B.2 promjenom frekvencije RF signala mijenjaju se frekvencija i kut izlazne zrake. Kako bi izlazna zraka prolazila istim optičkim putem za sve frekvencije zvučnog vala koristi se konfiguracija dvostrukog prolaska kroz AOM (eng. double-pass). Nakon prvog prolaska zraka se reflektira od zrcala te ponovno prolazi kroz isti AOM, a izlazna zraka prolazi istim optičkim putem kao ulazna zraka neovisno o frekvenciji zvučnog vala. Zbog dvostrukog prolaska pomak u frekvenciji je udvostručen pa vrijedi  $f_m = f_L + 2mf_s$ .

Promjenom intenziteta zvučnih valova (amplitude RF signala) mijenja se udio difraktirane svjetlosti, tako se intenzitet prvog reda ( $m = 1$ ) tipično može varirati u rasponu od 0% do 80% intenziteta ulazne zrake. Vrijeme potrebno da se intenzitet difraktirane zrake poveća s 10% na 90% maksimalne vrijednosti većinom je između 4 ns i 300 ns [51] pa se AOM može koristiti i za brzo paljenje i gašenje laserske zrake to jest vremensku kontrolu eksperimenta.



## Bibliography

- [1] The Nobel Prize in Physics 1997. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1997/summary/>, 14.8.2024.
- [2] The Nobel Prize in Chemistry 1999. <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1999/summary/>, 14.8.2024.
- [3] The Nobel Prize in Physics 2001. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/summary/>, 14.8.2024.
- [4] The Nobel Prize in Physics 2005. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2005/summary/>, 14.8.2024.
- [5] The Nobel Prize in Physics 2018. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2018/summary/>, 14.8.2024.
- [6] The Nobel Prize in Physics 2023. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2023/summary/>, 14.8.2024.
- [7] Kimble H. J. Strong interactions of single atoms and photons in cavity QED. // *Physica Scripta* 1998, 127, 1998.
- [8] Raimond J. M.; Brune M.; Haroche S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. // *Rev. Mod. Phys.* 73, 565, 2001.
- [9] Reiserer A.; Rempe G. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. // *Rev. Mod. Phys.* 87, 1379, 2015.
- [10] Takeuchi M.; Ichihara S.; Takano T.; Kumakura M.; Yabuzaki T.; Takahashi Y. Spin Squeezing via One-Axis Twisting with Coherent Light. // *Phys. Rev. Lett.* 94, 023003, 2005.
- [11] Leroux I. D.; Schleier-Smith M. H.; Vuletić V. Implementation of Cavity Squeezing of a Collective Atomic Spin. // *Phys. Rev. Lett.* 104, 073602, 2010.
- [12] Cox K. C.; Greve G. P.; Weiner J. M.; Thompson J. K. Deterministic Squeezed States with Collective Measurements and Feedback. // *Phys. Rev. Lett.* 116, 093602, 2016.

- [13] Domokos P.; Ritsch H. Collective Cooling and Self-Organization of Atoms in a Cavity. // Phys. Rev. Lett. 89, 253003, 2002.
- [14] Xu M.; Jäger S. B.; Schütz S.; Cooper J.; Morigi G.; Holland M. J. Supercooling of Atoms in an Optical Resonator. // Phys. Rev. Lett. 116, 153002, 2016.
- [15] Hosseini M.; Duan Y.; Beck K. M.; Chen Y. T.; Vuletić V. Cavity Cooling of Many Atoms. // Phys. Rev. Lett. 118, 183601, 2017.
- [16] Bohnet J. G.; Chen Z.; Weiner J. M.; Meiser D.; Holland M. J.; Thompson J. K. A steady-state superradiant laser with less than one intracavity photon. // Nature 484, 78, 2012.
- [17] Black A. T.; Chan H. W.; Vuletić V. Observation of Collective Friction Forces due to Spatial Self-Organization of Atoms: From Rayleigh to Bragg Scattering. // Phys. Rev. Lett. 91, 203001, 2003.
- [18] von Cube C.; Slama S.; Kruse D.; Zimmermann C.; Courteille P. W.; Robb G. R. M.; Piovella N.; Bonifacio R. Self-Synchronization and Dissipation-Induced Threshold in Collective Atomic Recoil Lasing. // Phys. Rev. Lett. 93, 083601, 2004.
- [19] Arnold K. J.; Baden M. P.; Barrett M. D. Self-Organization Threshold Scaling for Thermal Atoms Coupled to a Cavity. // Phys. Rev. Lett. 109, 153002, 2012.
- [20] Muniz J. A.; Barberena D.; Lewis-Swan R. J.; Young D. J.; Cline J. R.; Rey A. M.; Thompson J. K. Exploring dynamical phase transitions with cold atoms in an optical cavity. // Nature 580, 602, 2020.
- [21] Krämer S.; Ritsch H. Self-ordering dynamics of ultracold atoms in multicolored cavity fields. // Phys. Rev. A 90, 033833, 2014.
- [22] Torggler V.; Ritsch H. Adaptive multifrequency light collection by self-ordered mobile scatterers in optical resonators. // Optica Vol. 1, Issue 5, 2014.
- [23] Torggler V.; Krämer S.; Ritsch H. Quantum annealing with ultracold atoms in a multimode optical resonator. // Phys. Rev. A 95, 032310, 2017.

- [24] Jaynes, E. T.; Cummings, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. // Proceedings of the IEEE, Vol. 51, No. 1, Pp. 89-109, 1963.
- [25] Lentrodt D.; Diekmann O.; Keitel C. H.; Rotter S.; Evers J. Certifying multimode light-matter interaction in lossy resonators. // Phys. Rev. Lett. 130, 2023.
- [26] Ritsch H.; Domokos P.; Brennecke F.; Esslinger T. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials. // Rev. Mod. Phys, 85, 2013.
- [27] Vaidya V. D.; Guo Y.; Kroeze R. M.; Ballantine K. E.; Kollár A. J.; Keeling J.; Lev B. L. Tunable-range, photon-mediated atomic interactions in multimode cavity QED. // Phys. Rev. X, Vol. 8, Iss. 1, 2018.
- [28] Blais A.; Grimsmo A. L.; Girvin S. M.; Wallraff A. Circuit quantum electrodynamics. // Rev. Mod. Phys. Vol. 93, Iss. 2, 2021.
- [29] Chakram S.; Oriani A. E.; Naik R. K.; Dixit A. V.; He K.; Agrawal A.; Kwon H.; Schuster D. I. Seamless high-Q microwave cavities for multimode circuit quantum electrodynamics. // Phys. Rev. Lett. Vol. 127, Iss. 10, 2021.
- [30] Steck, D. A. Quantum and Atom Optics. 2007. <http://steck.us/teaching>, Rev. 0.16.1, 16.6.2024.
- [31] Boyd, R. W. Nonlinear Optics. 4th ed. Elsevier, 2020.
- [32] Đujić, M. Stabilizacija optičkog rezonatora. Seminarski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2021.
- [33] Steck, D. A. Classical and Modern Optics. 2006. <http://steck.us/teaching>, Rev. 1.8.5, 25.5.2024.
- [34] Auletta, G.; Fortunato M.; Parisi G. Quantum Mechanics. New York : Cambridge University Press, 2009.
- [35] Schultz, B. E. Measurement of the rubidium D2 natural transition linewidth. Doctoral Thesis. Ontario: York University, 2010.
- [36] Šantić, N. Synthetic Lorentz force for neutral atoms. Doctoral Thesis. Zagreb: Faculty of Science, 2018.

- [37] Steck, D. A. Rubidium 87 D line data. <https://steck.us/alkalidata/rubidium87numbers.pdf>, 16.8.2024.
- [38] Cipriš, A. Hlađenje atoma optičkim frekventnim češljem. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2017.
- [39] Diels, J. C.; Rudolph, W. Ultrashort Laser Pulse Phenomena. 2nd ed. Academic Press, 2016.
- [40] Kruljac, M. Koherentni efekti u hladnom atomskom plinu. Diplomski rad. Zagreb: Prirodoslovno-matematički fakultet, 2018.
- [41] Fortier T.; Baumann E. 20 years of developments in optical frequency comb technology and applications. // Communications Physics vol. 2, 153, 2019.
- [42] Šantić N.; Buhin D.; Kovačić D.; Krešić I.; Aumiler D.; Ban T. Cooling of atoms using an optical frequency comb. // Scientific Reports 9, 2510, 2019.
- [43] Buhin D.; Kovačić D.; Schmid F.; Kruljac M.; Vulić V.; Ban T.; Aumiler D. Simultaneous dual-species laser cooling using an optical frequency comb. // Physical Review A 102, 021101(R), 2020.
- [44] Puljić, I. Istovremeno hlađenje dvije vrste atoma optičkim frekventnim češljem. Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2020.
- [45] Kruljac, M. Cavity cooling and self-organization of atoms using an optical frequency comb. Doctoral Thesis. Zagreb: Faculty of Science, 2022.
- [46] Skolnik, G. Koherentna spektroskopija femtosekundnim frekventnim češljem. Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2008.
- [47] Raj, R. K.; Bloch, D.; Snyder, J. J.; Camy, G.; Ducloy, M. High-frequency optically heterodyned saturation spectroscopy via resonant degenerate four-wave mixing. // Phys. Rev. Lett., 44:1251, 1980.
- [48] McCarron, D. J.; King, S. A.; Cornish, S. L. Modulation transfer spectroscopy in atomic rubidium. // Measurement Science and Technology. Vol. 19, 10, 2008.

- [49] Gothe H.; Valenzuela T.; Cristiani M.; Eschner J. Optical bistability and nonlinear dynamics by saturation of cold Yb atoms in a cavity. // Physical Review A. Vol. 99, Iss. 1, January 2019.
- [50] RP Photonics, Acousto-optic Modulators, [https://www.rp-photonics.com/acousto\\_optic\\_modulators.html](https://www.rp-photonics.com/acousto_optic_modulators.html), 24.6.2024.
- [51] Lekavich, J. Basics of acousto-optic devices. // Lasers and Applications. 4.1986. Str. 59–64.