

# Sjene crnih rupa

---

**Busak, Laura**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:971428>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-02**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Laura Busak

SJENE CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Laura Busak**

Diplomski rad

**SJENE CRNIH RUPA**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2024.

Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Smoliću za pomoć, uloženo vrijeme i trud te iskazano strpljenje, razumijevanje i zavidnu staloženost tijekom izrade ovog rada, ali i tijekom studija. Ocu i prof. Mičiću zahvalna sam na svim poticajima koji su me doveli ovamo. Ostaloj obitelji, prijateljima i Luki također posebno zahvaljujem na dugogodišnjoj podršci i svim satima brbljanja o fizici.

## Sažetak

Premda je teorijsko proučavanje crnih rupa tema vezana za opću teoriju relativnosti još od ranih dana, tek nedavni promatrački uspjesi Event Horizon Telescope kolaboracije omogućili su direktno opažanje njihova izgleda. U ovom radu napravljen je pregled analitičkih studija vizualnih profila crnih rupa, poznatih pod nazivom "sjena", konkretno za statični sferno simetrični i Kerrov slučaj. Predstavljena je fizikalna pozadina pojave sjene, a zatim i razloženi osnovni koraci potrebni za njezinu konstrukciju, uz osvrt na dvije klase degeneracije sjene predstavljene u literaturi. Metodologija pronalaska oblika i veličine sjene oprimjerena je za nekoliko različitih metrika crnih rupa. Usporedbom slučajeva idealne sferne i ravne pozadine istaknuta je razlika između sjene i vizualnih efekata koji su posljedica samo konkretne raspodjele okolnih izvora elektromagnetskog zračenja.

Ključne riječi: sjene crnih rupa, fotonske orbite, efekt gravitacijske leće, Schwarzschildovo prostorvrijeme, jedinstvenost sjena crnih rupa

# Black hole shadows

## Abstract

Although black holes have been theoretically studied since the early days of the general theory of relativity, only recently have the observational successes of the Event Horizon Telescope collaboration made it possible to directly observe them. We provide an overview of current analytical studies of the visual appearance of black holes, also known as black hole shadows. We examine the shadows of spherically symmetric, static black hole spacetimes, as well as the Kerr spacetime. We explore the physical background of the phenomenon, explain the basic steps necessary to construct the shadow, and briefly review two shadow degeneracy classes presented in the literature. We derive the size of the shadow and show how the methodology may be used on the examples of several black hole spacetimes. Finally, we highlight the fundamental differences between the shadow and the visual effects of the specific distribution of the surrounding sources of electromagnetic radiation by comparing two idealized cases for a Schwarzschild black hole: a uniformly bright spherical background and an infinite uniformly bright planar background.

Keywords: black hole shadows, photon orbits, gravitational lensing, Schwarzschild spacetime, black hole shadow uniqueness

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Promatranje crnih rupa . . . . .	1
1.1.1	Alternativne definicije sjene . . . . .	6
1.2	Event Horizon Telescope . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Određivanje sjene crne rupe</b>	<b>9</b>
2.1	Fizikalna pozadina sjene . . . . .	9
2.1.1	Fundamentalna fotonska orbita i fotonski prsten . . . . .	9
2.1.2	Udarni parametar . . . . .	10
2.2	Opažač i promatrački važne veličine . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Sjene u statičnim, sferno simetričnim sustavima</b>	<b>14</b>
3.1	Crna rupa ispred uniformne svijetle pozadine . . . . .	14
3.1.1	Slučaj vrlo udaljenog opažača . . . . .	18
3.1.2	Slučaj vrlo bliskog opažača . . . . .	19
3.2	Sjene nekih crnih rupa . . . . .	20
3.2.1	Schwarzschildovo prostorvrijeme . . . . .	20
3.2.2	Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme . . . . .	23
3.2.3	Simpson-Visserovo ("black-bounce") prostorvrijeme . . . . .	26
3.3	Sjena ispred ravne uniformne pozadine . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Sjena rotirajuće (Kerrove) crne rupe</b>	<b>33</b>
4.1	Sjena ispred uniformne svijetle pozadine . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Jedinstvenost sjene</b>	<b>37</b>
5.1	Statična, sferno simetrična prostorvremena . . . . .	37
5.1.1	Degeneracija klase I . . . . .	39
5.1.2	Degeneracija klase II . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>42</b>
	<b>Dodatci</b>	<b>44</b>

<b>A</b>	<b>Kauzalna struktura i izometrije prostorvremena</b>	<b>44</b>
<b>B</b>	<b>Jednadžbe gibanja iz jednadžbe geodezika</b>	<b>45</b>
	<b>Literatura</b>	<b>47</b>



# 1 Uvod

U Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti materija oblikuje prostorvrijeme zakrivljujući ga i povlačeći. Tako nastala geometrijska svojstva prostorvremena manifestiraju se kao gravitacija. Sama se teorija zasniva na Einsteinovoj jednažbi, čije je prvo rješenje, koje sada nosi njegovo ime, iznio Karl Schwarzschild. Dobivena metrika opisuje vakuumsku geometriju prostorvremena uslijed djelovanja sferno simetrične, odnosno čak točkaste mase. Ispostavilo se da predstavlja zanimljiv konceptualni problem – iz Schwarzschildova rješenja izranjale su divergencije u metričkim članovima, pa i divergirajuća zakrivljenost, neovisno o izboru koordinatnog sustava. Schwarzschildova je bila prva crna rupa, objekt koji je popularno poznat po tome što iz njega ne može pobjeći ni svjetlost.

Tada vrlo egzotična, patološka pojava singulariteta potaknula je razvoj čitavog novog područja istraživanja. Ispostavilo se da singularnost nije tek artefakt visokog stupnja simetrije Schwarzschildove geometrije. Otkriveno je više rješenja Einsteinove jednažbe koja opisuju crne rupe, a opisana su i njihova geometrijska, termodinamička i elektrodinamička svojstva. Kako je rastao volumen teorijske literature o crnim rupama, tako je krenula i žustra potraga za dokazima njihova postojanja u svemiru. Razmišljamo li o tom sasvim novom fizikalnom objektu, prirodno je postaviti gotovo laičko pitanje – kako *izgleda*?

## 1.1 Promatranje crnih rupa

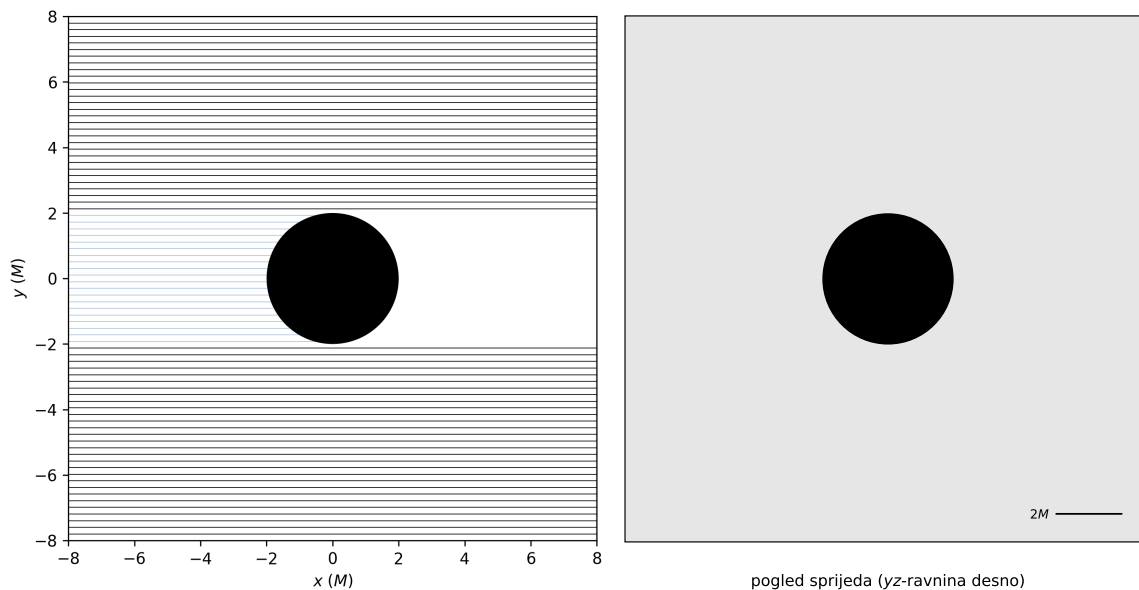
S obzirom na to da su realne crne rupe predmet astrofizike, koja je u praksi prije svega opažачka znanost, važnost pitanja njihova izgleda dodatno se izoštrava. Predviđanjem onoga što ćemo vidjeti gledanjem u crnu rupu možemo postaviti teren kako bismo pobili ili, s druge strane, dodatno potkrijepili teorije koje predviđaju njezino postojanje.

Crna rupa kauzalno je odvojen dio prostorvremena, rascijepljen od beskonačnosti horizontom događaja. Preciznije, karakterizirana je time što nijedna buduće usmjerena krivulja vremenskog ili svjetlosnog tipa ne može pobjeći u asimptotsko područje. Crne rupe teorijski mogu zračiti Hawkingovim zračenjem, no ono je dosad nepotvrđeno i nije značajno u kontekstu astrofizike jer očekujemo da je jednostavno

premao kako bismo ga detektirali [1]. Stoga ih s promatračkog stajališta smatramo istinski crnima, odnosno mračnima. No, ekstremna svojstva crnih rupa omogućila su raznovrsne eksperimentalne potvrde, o kojima će biti nešto više riječi u narednim poglavljima. Najjača potvrda vjerojatno bi bila detekcija upravo Hawkingova zračenja. Međutim, novi promatrački pothvati, od kojih je moguće najznačajnija Event Horizon Telescope kolaboracija, uspjeli su uhvatiti trag koji crna rupa ostavlja na okolnim izvorima zračenja svojim jakim gravitacijskim utjecajem – fotografiju tamne mrlje, sjene crne rupe [2]. Budući da opažanje takvog vizualnog uzorka snažno ukazuje da promatrani objekt uistinu jest crna rupa, a ne neki ultrakompaktni objekt druge vrste [3, 4], slika sjene crne rupe prva je direktna potvrda njihova postojanja.

Dakle, iako crna rupa sama nije izvor elektromagnetskog zračenja, možemo očekivati da su realne crne rupe osvijetljene vanjskim svjetlosnim izvorima. Izgled crne rupe stoga će uvelike ovisiti upravo o karakteristikama osvjjetljenja – blizini, obliku, prostornoj i vremenskoj raspodjeli toka zračenja, vrsti zračenja itd. Međutim, možemo razaznati neke osobitosti već i razmatranjem slučaja savršeno uniformnog osvjjetljenja, koje je za početak prirodno postaviti kao beskonačno daleku svijetlu pozadinu. S obzirom na to da fotoni koji upadaju direktno od opažača na "površinu" crne rupe (odnosno horizont događaja) u pravilu ne mogu pobjeći natrag k opažaču i tako postići svojevrsan efekt refleksije, izbor osvjjetljenja straga umjesto sprijeda sasvim je jasan. Tako možemo očekivati, prikladno, crni obris. Kasnije ćemo vidjeti da su i slučajevi u kojima fotoni dolaze sprijeda zanimljivi unatoč izostanku refleksije, radi snažnog efekta leće.

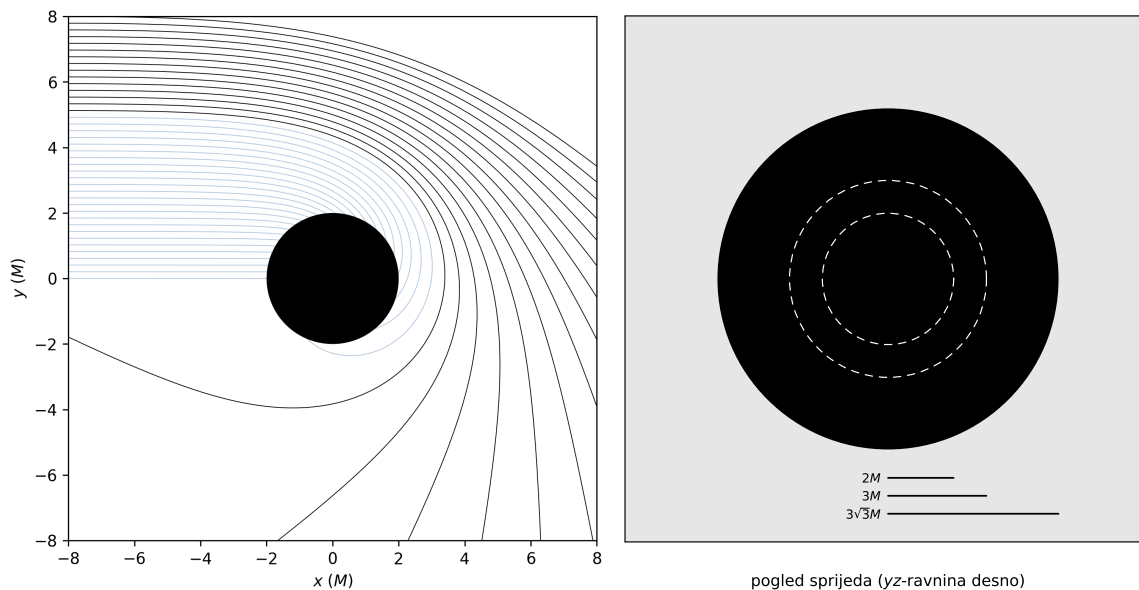
Razmotrimo prvo primjer bez relativističkih efekata – običnu, negravitirajuću crnu kuglu ispred svijetle pozadine, okruženu vakuumom. Zamislimo da sama ne zrači značajno (barem u relevantnom dijelu spektra) i da savršeno apsorbira sve upadno zračenje, dakle da je idealno crno tijelo. Ravninu paralelnu s ravninom pozadine, izabranu tako da je između njih jedino crna kugla, možemo smatrati opažačem; u stvarnosti bismo točke na ravnini opažača mogli povezati s pikselima kamere. Ovako postavljen problem, prikazan na slici 1.1, trivijalan je zadatak u geometrijskoj optici. Svjetlosne zrake upadaju paralelno na ravninu promatranja svugdje osim ondje gdje ih blokira kugla. Tako opažač dobiva sliku (siluetu) relevantnog predmeta (ilustriranu na slici 1.1 desno), čiji oblik izravno odgovara stvarnom obliku, odnosno obrisu kugle.



Slika 1.1: Primjer negravitirajuće crne kugle osvijetljene straga. Lijevo su prikazane putanje odabranih svjetlosnih zraka od svijetle pozadine ( $yz$ -ravnina slijeva) k ravni opažanja ( $yz$ -ravnina zdesna). Kugla blokira dolazak određenih zraka, ovdje prikazanih svjetloplavom bojom, do opažača te time stvara crni obris vidljiv na slici desno. Pri izradi desne slike pretpostavili smo da je promatrač na dovoljnoj udaljenosti da se projekcijom na ravninu minimalno gube informacije o veličini ili obliku.

Za analognu – statičnu, nenabijenu, sferno simetričnu – crnu rupu u vakuumu, međutim, taj je isti zadatak sasvim netrivialan. Naime, premda ponovno čak i naivnim razmatranjem možemo predvidjeti tamni obris ondje gdje svjetlost ne uspijeva doprijeti do ravnine opažača, nije jednostavno identificirati zrake koje zadovoljavaju taj uvjet. Na slici 1.2 lijevo neke od tih zraka prikazane su svjetloplavom bojom [5, 6] na primjeru Schwarzschildova prostora vremena. U zakrivljenom prostoru vremenu svjetlost putuje po geodizicima, koji su općenito zakrivljeni, a ne ravni.

Na istoj slici vidljivo je da crne zrake, koje nisu zarobljene, također ne dopijevaju nužno do opažača, ovisno o razini zakrivljenosti. Pokazat ćemo da uz prikazane zrake postoje i neke koje prebrišu jedan ili više punih krugova oko crne rupe prije nego se zapute prema opažaču ili u beskonačnost. Rezultantna silueta, koju se upravo stoga primjereno naziva sjenom crne rupe, oblikom i veličinom potencijalno je sasvim različita od izvornog objekta. Svjetlosne zrake koje izostaju s opažačeva nebeskog svoda ne upadaju nužno u crnu rupu, već je jedino bitno da ostaju zarobljene. Sjena se, dakle, zasniva na postojanju svjetlosnih orbita. Pritom vrijedi naglasiti da, ovisno o raspodjeli zračenja, sjena ne mora biti jedina tamna regija. Efektom leće mogu se stvoriti višestruke tamne slike, no sjena je fundamentalno različite prirode – ona nije



Slika 1.2: Utjecaj gravitirajuće mase na svjetlost na primjeru Schwarzschildova prostora. Lijevo su, kao i na slici 1.1, prikazane putanje odabranih svjetlosnih zraka od svijetle pozadine ( $yz$ -ravnina slijeva) k ravnini opažanja ( $yz$ -ravnina zdesna). Svjetloplave zrake poniru u crnu rupu i stoga ne mogu biti opažene neovisno o položaju (udaljenog) opažača. Regija izostanka osvjetljenja polumjera  $3\sqrt{3}M$ , odnosno crni obris koji opažač vidi (slika desno), zato je prividno veća i od horizonta događaja (polumjera  $2M$ ) i od fotonske sfere (polumjera  $3M$ ). Pri izradi desne slike pretpostavili smo da je promatrač na dovoljnoj udaljenosti da se projekcijom na ravninu minimalno gube informacije o veličini ili obliku.

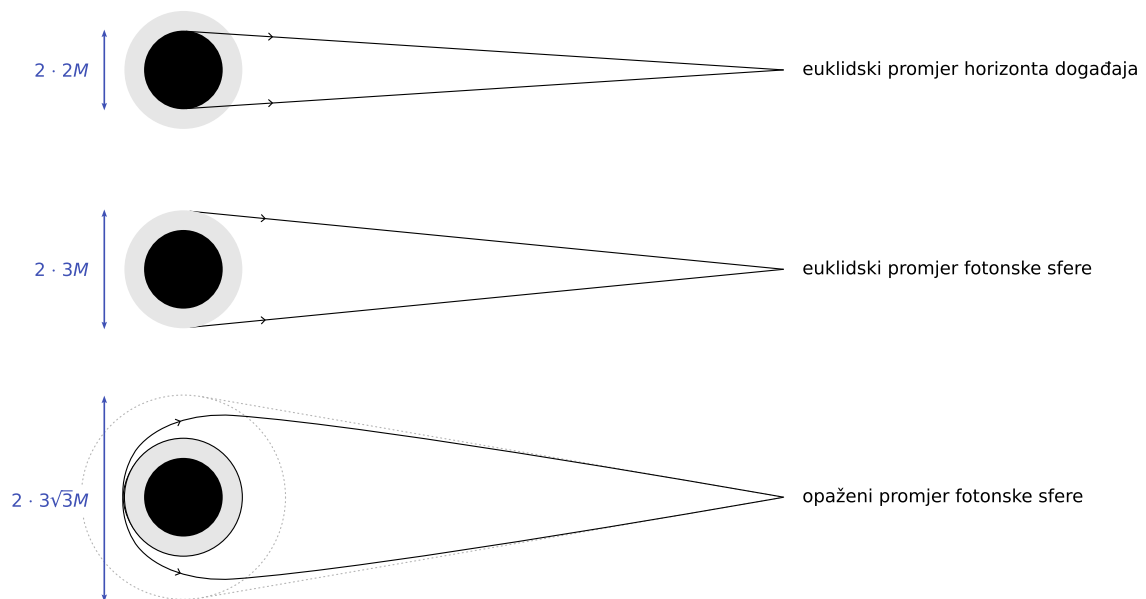
odraz nekog postojećeg tamnog dijela svijetle pozadine, već stvara tamu ondje gdje je inače nema. Nevidljiva je po principu.

Ako opažača smjestimo u udaljenu točku, za Schwarzschildovu crnu rupu možemo razmotriti još jedan ilustrativan primjer [5]. Prva skica odozgo na slici 1.3 prikazuje naivni pristup, kad bismo crnu rupu promatrali kao i klasičnu kuglu. Svjetlosne zrake koje definiraju rub sjene prolaze tik do horizonta događaja i dalje putuju ravno do opažača, koji mjeri kutni promjer koji odgovara disku promjera  $2R_S$ , gdje je  $R_S = 2M$  Schwarzschildov polumjer<sup>1</sup>, odnosno polumjer horizonta događaja.

To, naravno, nije slučaj. Iako izvan horizonta događaja fotoni mogu izbjeći pad u središte crne rupe, nije nužno da mogu proći proizvoljno blizu crnoj rupi i pobjeći u beskonačnost, gdje se naš opažač efektivno nalazi. Ispostavlja se da postoji minimalna udaljenost najbližeg prolaska ondje gdje svjetlosni geodezici zatvaraju nestabilnu kružnu orbitu, tzv. fotonski prsten ili fotonsku sferu. Dakle, crna rupa ima

<sup>1</sup> Svugdje u tekstu, osim ako je drukčije napomenuto, koristit ćemo  $(-, +, +, +)$  signaturu metrike i prirodne jedinice,  $c = G = 1$ .

vizualni rub izvan svoje stvarne površine. U Schwarzschildovu slučaju to odgovara polumjeru  $3M$ , odnosno  $3R_S/2$ .



Slika 1.3: Usporedba veličina horizonta događaja (gore) i fotonskog prstena (sredina), odnosno pogrešnih konstrukcija sjene crne rupe, s njezinom stvarnom veličinom (dolje) za Schwarzschildovo prostorvrijeme s centralnom masom  $M$ . Prilagođeno iz [5, 7].

Izvan stručnih krugova često se poistovjećuju sjena (slika) crne rupe i fotonska sfera, u smislu da opažatelj vidi fotonsku sferu kao klasičnu kuglu (slučaj prikazan na srednjoj skici na slici 1.3). Ovdje, međutim, vreba zabluda. Disk koji će opažatelj vidjeti u pravilu je veći – a ponekad, ovisno o svojstvima prostorvremena, i sasvim različitog oblika – zbog jake zakrivljenosti svjetlosnih geodezika u blizini crne rupe. Tipična interpretacija ove razlike jest da disk koji vidimo predstavlja projekciju čitave fotonske sfere na ravninu promatranja. Pri opažanju prostorvrijeme lokalno vidimo kao ravno, što možemo zamisliti kao da zaprimljene svjetlosne zrake produljujemo pod kutom pod kojim ih zaprimamo, također ravno, u beskonačnost. U stvarnosti, zrake bliske rubu sjene dramatično su zakrivljene, zbog čega se slika doima većom nego što zapravo jest. Uzmemo li i to u obzir, dobivamo predodžbu o stvarnoj situaciji, kao što je ilustrirano na posljednjoj skici sa slike 1.3 [5, 8, 6].

Za različite geometrije potreban je precizan matematički tretman kako bi se riješilo pitanje oblika, veličine ili ostalih svojstava sjene. Svojstva sjene u pravilu nisu odmah očita iz svojstava samog prostorvremena, pogotovo jer je sjena po prirodi ovisna o izvoru zračenja i o opažatelju. Budući da sad postoji mogućnost direktnog opažanja sjena

crnih rupa, vrijedi izgraditi dobro fizikalno razumijevanje sjene i utjecaja konkretnih teorija gravitacije ili modela unutar njih na svojstva sjene kako bismo je mogli iskoristiti kao eksperimentalni alat.

### 1.1.1 Alternativne definicije sjene

S obzirom na to da je "sjena crne rupe" zapravo općeprihvaćeni naziv za "ono što vidimo gledajući u crnu rupu", u literaturi susrećemo mnoštvo različitih upotreba tog termina. Do toga je došlo dijelom i jer je ime, a zajedno s njime i konkretna fizikalna interpretacija sjene, povijesno prošlo više etapa razvoja. Već od sredine prošlog stoljeća poznata je tzv. Syngeova formula:

$$\sin^2 \alpha_{\text{esc}} = \frac{27M^2(1 - 2M/r_O)}{r_O^2}. \quad (1.1)$$

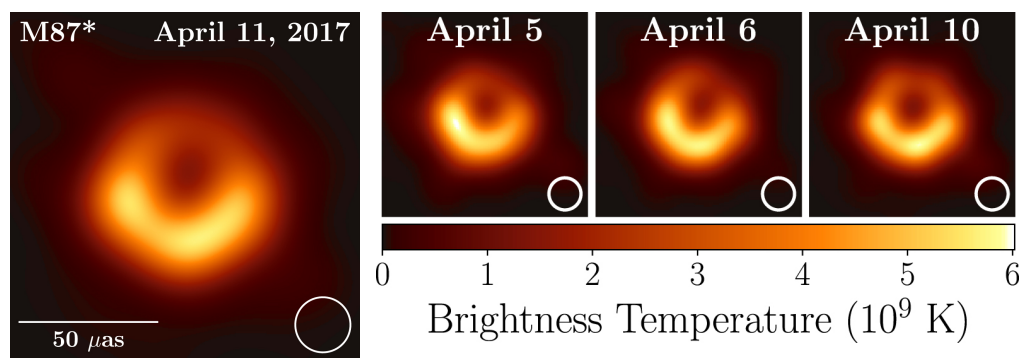
Izrazom za kut  $\alpha_{\text{esc}}$  Synge je odredio svjetlosni "escape cone" za opažača smještenog na radijalnoj koordinati  $r_O$ , odnosno stožac koji definira usmjerenja fotona emitiranih s površine Schwarzschildove crne rupe koji ne ostaju gravitacijski vezani za nju, već mogu otići u beskonačnost [9]. Tako uvedeni koncept od Syngea nadalje poprimio je mnogo imena, evoluirajući pritom preko Bardeena i Lumineta koji je nazivaju "prividnim oblikom" [10] ili "slikom" [11], sve do današnje "sjene" ili "kritične krivulje" [12, 6, 8]. Konceptualna pozadina na koju su svi ti nazivi aludirali nije se mnogo mijenjala: postoji kritični upadni kut za koji svi dolazni fotoni završavaju u fotonskoj sferi i koji tako određuje rub vizualnog profila crne rupe.

Nijedan termin nije strogo vezan za neku postojeću preciznu matematičku definiciju, nego se oslanja na intuiciju i iskustvo kako bi obuhvatio koncept. Takva fleksibilnost, doduše, povremeno uzrokuje nespornice i nesuglasice u literaturi. Stoga će nam biti bitno izabrati neke od termina i precizno ih se pridržavati. Naziv "sjena" koristit ćemo u kontekstu čitave slike, projekcije na područje promatranja, a naziv "kritična krivulja" koristit ćemo za rub sjene, koji ćemo u principu uvijek i tražiti. Govorit ćemo o "veličini" sjene u smislu (maksimalnog) promjera tamne regije. Naziv "slika" koristit ćemo isključivo u praktičnom, promatračkom kontekstu.

## 1.2 Event Horizon Telescope

Sjena crne rupe relevantan je pojam u kontekstu *direktnog* opažanja. Dokazi za postojanje crnih rupa donedavno su bili isključivo indirektni – poput detekcije gravitacijskih valova iz sudara dviju crnih rupa [13], akrecije unutar binarnih sustava u kojima jedna od komponenti, crna rupa, nije vidljiva [14] ili promatranja orbita zvijezda bliskih radio-izvoru Sagittarius A\*, crnoj rupi u središtu Mliječnog puta [15]. Razlog tomu posebno je jasan iz posljednjeg primjera; premda smo mogli direktno promatrati objekte u blizini, odnosno orbiti oko nekih supermasivnih crnih rupa, za direktno promatranje samih centralnih objekata postojala je tehnička prepreka postizanja rezolucije koja odgovara njihovoj očekivanoj veličini. Uz to što se nalaze na velikim astrofizičkim udaljenostima, crne rupe po prirodi su vrlo kompaktne, što znači da su relativno maleni objekti čak i kad su vrlo velikih masa – supermasivna crna rupa M87\*, čija je masa prema najnovijim procjenama reda  $10^{10}$  masa Sunca [2, 16] ima Schwarzschildov polumjer reda tek  $10^2$  Sunčevih polumjera.

Tom je tehničkom izazovu pristupila Event Horizon Telescope (EHT) kolaboracija. Uspostavljanje globalne mreže više nezavisnih radioteleskopa koji zajednički čine virtualni teleskop efektivnog promjera reda veličine Zemlje omogućilo je direktna opažanja, između ostalog, dviju supermasivnih crnih rupa, M87\* [2] i Sagittarius A\* [17]. Njihov prvi rezultat, slika M87\* objavljena 2019. bila je prva direktna slika crne rupe u povijesti (slika 1.4).



Slika 1.4: Slika crne rupe M87\* izabrana kao reprezentativni primjer rezultata promatranja EHT-om iz 2017. godine (lijevo). Manji paneli desno prikazuju slične slike tijekom više dana. Skala u lučnim sekundama prikazana je na slici lijevo; na svim slikama sjever je usmjeren gore, a istok lijevo. Preuzeto iz [2].

Rad EHT-a zasniva se na principu radioteleskopske interferometrije. Više nezavis-

nih radioteleskopa prikuplja podatke o nekom astronomskom izvoru te se informacije o izvoru zaključuju na temelju interferencije zabilježenih signala. Interferometrija je jedan od najvažnijih alata moderne astronomije jer omogućuje povećanje kutne razlučivosti teleskopa formiranjem grupa. Razlučivost teleskopa  $R$  tipično se izražava preko proporcionalnosti  $R \propto \lambda/L$ , gdje je  $\lambda$  valna duljina zračenja koje se promatra, a  $L$  maksimalna udaljenost između teleskopa u grupi. Samo korištenje interferometrije nije bila inovacija koja je omogućila uspjeh EHT-a; mnoge promatračnice koje ga čine i same su interferometri. EHT postiže veliku razlučivost time što kombinira teleskope na značajnim geografskim udaljenostima i promatranje na valnoj duljini od 1.3 mm, manjoj nego u prethodnim usporedivim projektima. U slučaju promatračke kampanje za slikanje crne rupe M87\* osam promatračkih postaja na šest različitih geografskih lokacija tako je efektivno činilo teleskop veličine usporedive s promjerom Zemlje [2, 18].

Promatračnice su individualno prikupljale podatke i bilježile ih s preciznim vremenskim potpisima pomoću atomskih satova sinkroniziranih GPS-om na skali nekoliko desetaka nanosekundi [18]. Digitalizirani podatci zatim su obrađeni u četirima timovima koristeći nekoliko različitih metoda rekonstrukcije slike. Timovi su tek po završetku obrade usporedili rezultate kako bi se maksimalno izbjegao efekt ljudske pristranosti [19]. Glavne značajke dobivenih slika – veličina i približno kružni oblik siluete okružene svijetlim prstenom čija je asimetrija konzistentna s gibanjem plazme oko crne rupe brzinama bliskim brzini svjetlosti – nisu ovisile o konkretnoj metodi rekonstrukcije niti su se razlikovale između timova. Dodatnom kvantitativnom obradom potvrđeno je da su svojstva slike konzistentna s predviđanjima opće teorije relativnosti za rotirajuću (Kerrovu) crnu rupu mase  $(6.5 \pm 0.7) \cdot 10^9$  masa Sunca [2, 16].

Naravno, premda je uzbudljivo što su prvi rezultati u poklapanju s očekivanjima, bitno je osvijestiti da je dosad proizvedena tek nekolicina rekonstrukcija. U budućnosti se možemo nadati većem statističkom značaju. Upravo u tome leži uspjeh EHT-a; postavio je temelje za sasvim novi način prikupljanja podataka o crnim rupama, a time i otvorio put novim, naknadnim testovima opće teorije relativnosti. Možemo očekivati kako će se tehnologija kojom su prednjačili u budućnosti unaprijediti i omogućiti promatranje većeg broja astrofizičkih kandidata za crne rupe, a ne samo supermasivnih objekata u središtima galaksija.



## 2 Određivanje sjene crne rupe

### 2.1 Fizikalna pozadina sjene

Komentirali smo da će svojstva sjene crne rupe jako ovisiti o svojstvima prostorvremena, ali i o svojstvima zračenja koje osvjetljuje crnu rupu te o opažaču. Međutim, postojanje sjene u temeljima je uvjetovano pojavom jako zakrivljenih svjetlosnih geodezika oko vrlo masivnih objekata. Gravitacija mora biti dovoljno jaka da zarobi fotone, odnosno da postoje fotonske orbite. U principu izvor gravitacije ne mora biti crna rupa. Crne rupe karakterizira postojanje horizonta događaja, ali svjetlosne orbite nisu jedinstvena pojava. Svjetlost hipotetski može orbitirati oko ultrakompaktnih objekata bez horizonta, poput bozonskih zvijezda [5]. Međutim, može se pokazati da takvi objekti nisu fizikalno vjerojatni pod pretpostavkom da su se u nekom trenutku u prošlosti formirali kompaktificiranjem materije [3, 4]. Stoga ćemo nadalje proučavati isključivo sjene crnih rupa.

#### 2.1.1 Fundamentalna fotonska orbita i fotonski prsten

Područje oko crne rupe na kojem fotoni mogu ostati u orbiti jest regija u kojoj svjetlosni geodezici postaju sferični – ne leže u ravnini, već opisuju sfere u smislu konstante radijalne koordinate [20]. Takva ekstremna pojava zakretanja svjetlosnih zraka naziva se raznim imenima u literaturi pa su različite upotrebe termina o fotonskim orbitama mogući izvor zabuna. Ponovno, bit će nam važno definirati konkretne termine kako bismo to izbjegli. Sljedeća definicija fundamentalne fotonske orbite preuzeta iz [21] vrijedi za sva stacionarna i osnosimetrična prostorvremena.

**Definicija 2.1.** *Neka je  $\gamma(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow M$  geodezik svjetlosnog tipa parametriziran afinim parametrom  $\lambda$ , a  $M$  mnogostrukost prostorvremena. Geodezik  $\gamma(\lambda)$  jest fundamentalna fotonska orbita ako je ograničen na kompaktno prostorno područje (odnosno, ako odgovara vezanom stanju) i ako postoji neka vrijednost  $T > 0$  za koju vrijedi  $\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda + T)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , do na izometrije.*

Fundamentalna fotonska orbita najopćenitiji je naziv koji ćemo koristiti. U osnosimetričnim koordinatama  $(t, r, \theta, \phi)$  ovakva definicija zahtijeva periodičnost u  $(r, \theta)$  [21]. Specijalno, neke fundamentalne fotonske orbite leže u ravnini. Njih ćemo nazivati

fotonskim prstenovima. U sferno simetričnim prostorvremenima fotonski prstenovi formiraju skupove koje nazivamo fotonskim sferama [1, 20]. S obzirom na to da tada zbog simetrije možemo proizvoljno odabrati bilo koji pojedini prsten bez smanjenja općenitosti, ta se dva termina mogu koristiti naizmjenično.

U literaturi se za fotonski prsten ("photon ring") često susreću i nazivi "svjetlosni prsten" ("light ring") ili "lensing ring" (koji bismo mogli prevesti i kao "optički prsten") [5]. Budući da općenito oko crne rupe, ovisno o svjetlosnom izvoru, mogu nastajati i višestruke slike, neki autori njima dodjeljuju spomenuta imena kako bi ih razlikovali od dominantne slike ili od samog fotonskog prstena. Nesretno, "fotonski prsten" također se ponekad koristi kao naziv za vizualni profil emisije oko crne rupe okružene lokaliziranim izvorima zračenja, odnosno skup slika dobivenih efektom gravitacijske leće blizu crne rupe. U tom smislu fotonski prsten predstavljao bi vizualnu vanjsku granicu sjene, a ne njezin fundamentalni uzrok. Kako bi daljnji tekst bio što jasniji, mi ćemo u tu svrhu koristiti samo opisne termine, a ne neki pojedini naziv i izbjegavat ćemo alternativne nazive fotonskoga prstena.

### 2.1.2 Udarni parametar

Uzmimo općenitu statičnu, sferno simetričnu metriku, odnosno odgovarajući linijski element u sfernim koordinatama [22, 23]:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + D(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

gdje su  $A(r)$ ,  $B(r)$  i  $D(r)$  funkcije pozitivne svugdje izvan horizonta događaja. Pozitivnost čuva signaturu metrike i osigurava da je Killingov vektor<sup>2</sup>  $\partial_t$  vremenskog tipa. Često ćemo koristiti skraćeni zapis pomoću standardne metrike na jediničnoj 2-sferi  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . Ovakav općeniti oblik metrike lako se može dobiti promatranjem nametanjem zahtjeva sferne simetrije na linijski element  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ . Dodamo li i zahtjev statičnosti – neovisnost pojedinih komponenata metrike o  $t$  (stacionarnost, odnosno postojanje Killingova vektorskog polja  $T^a$  koje je barem asimptotski  $\partial_t$ ) i simetrija na obrat vremena,  $t \mapsto -t$  – iščezavaju svi nedijagonalni članovi te preostaje da komponente metrike moraju biti funkcije jedino radijalne koordinate  $r$  [22]. Nama će biti bitno naglasiti da ćemo, ako je  $D(r)$  monotona funkcija, uvijek

---

<sup>2</sup>Dodatak A

moći primijeniti koordinatnu transformaciju:

$$r \mapsto \rho, \quad \rho \equiv D(r), \quad (2.2)$$

birajući radijalnu koordinatu koja čuva formu površine 2-sfere  $4\pi\rho^2$ . Takav će nam izbor koordinata biti pogodan za neke opće zaključke o geometriji pojedinih sustava. Vrijedi primijetiti da su  $r$  i  $\rho$  koordinate, a ne mjere (vlastite) udaljenosti. Udaljenost je potrebno izvrijediti zasebno. Mi ćemo uglavnom govoriti o opažaču smještenom na nekoj radijalnoj koordinati bez govora o udaljenosti jer će nam biti praktično nevažna.

Možemo odrediti pripadni lagranžijan  $\mathcal{L}(x, \dot{x})$  za točkastu česticu [5]:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\phi}^2 \right), \quad (2.4)$$

pri čemu smo se ograničili na ekvatorijalnu ravninu  $\theta = \pi/2$  jer, zbog simetrija prostora i vremena, uvijek možemo tako odabrati koordinatni sustav i gibanje ostaje planarno ( $\dot{\theta} = 0$ ) [22, 24, 1]. Oznaka  $\dot{x}^\mu$  ovdje označava derivaciju  $dx^\mu/d\lambda$ , gdje je  $\lambda$  općenito neki afin parametar.

Dalje iz  $t$  i  $\phi$  komponenti Euler-Langrangeovih jednadžbi:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.5)$$

jednostavno dobivamo konstante gibanja:

$$E \equiv A(r)\dot{t}, \quad L \equiv D(r)\dot{\phi}, \quad (2.6)$$

pri čemu smo odmah uočili da vrijedi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.7)$$

Običaj je pri razmatranju gibanja masivne čestice predstaviti konstante gibanja  $E$  i  $L$  u obliku koji možemo interpretirati kao energiju i angularni moment čestice, respektivno, *po jedinici mase*. Konkretno slučaj čestice u Schwarzschildovu prostorvremenu

redovit je udžbenički primjer, pri čemu se uzima da je  $\lambda = \tau/\mu$ , tako da je  $\tau$  vlastito vrijeme, a  $\mu$  masa čestice. Veličine  $L$  i  $E$  moguće je definirati neovisno o masi, no također je moguće uvesti novu veličinu koja omogućuje jednostavno razmatranje slučaja bezmasene čestice kao limesa  $\mu \rightarrow 0$ . Uvodimo udarni parametar  $b$ :

$$b \equiv \frac{L}{\sqrt{E^2 - \mu^2}} \rightarrow \frac{L}{E} \quad (2.8)$$

ili, alternativno:

$$b \equiv \frac{L/\mu}{E/\mu} = \frac{L}{E}. \quad (2.9)$$

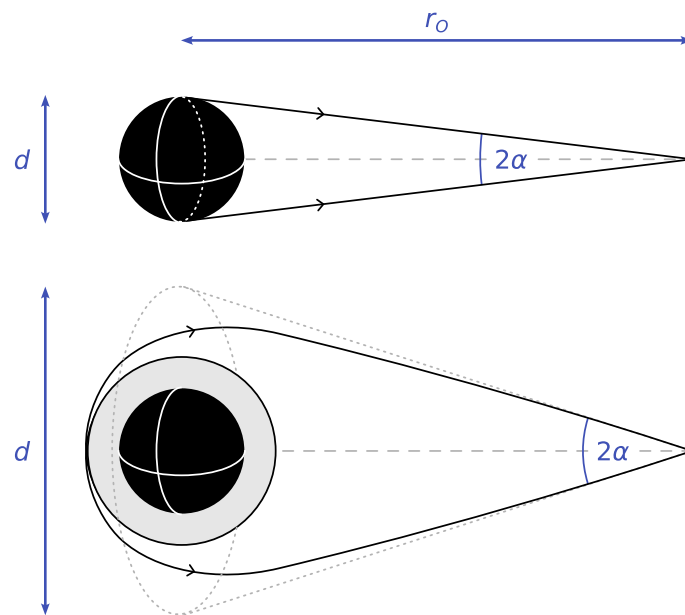
Udarni parametar upadnog fotona nova je konstanta gibanja i bit će od velike važnosti u statičnim, sferno simetričnim sustavima.

## 2.2 Opažać i promatrački važne veličine

Opažać će biti ključna komponenta svih daljnjih rasprava. Položaj, relativno gibanje i veličina opažača – ovisno zamišljamo li ga kao točkastog ili kao ravninu – direktno određuju svojstva sjene. U statičnim prostorvremenima promatrat ćemo isključivo statične opažače. Kao što smo ranije spomenuli, prostorvrijeme poput onog danom metrikom (2.1) statično je u smislu da postoji Killingovo vektorsko polje  $T^a$  [1]. Statični opažać vidi svemir neovisan o vremenu i sam se u njemu ne giba, dakle prostorne mu se koordinate ne mijenjaju, ako putuje po  $t$ -liniji u pripadnom prostorvremenu, odnosno ako mu je vlastita brzina proporcionalna Killingovu vektoru  $\partial_t$  [25]. Za nestatičnog opažača moguće je odrediti efekt gibanja na sjenu, no on postaje zamjetan tek za relativističke brzine [26]. Stoga taj slučaj nećemo promatrati radi jednostavnosti. Dodatno opravdanje jest što deformacija za gibajućeg opažača čuva kružni oblik u slučaju sferno simetričnih prostorvremena [5].

Budući da veličina sjene ovisi o položaju opažača, u pravilu ćemo za bilo kakve zaključke ili prikaze morati specificirati koordinate opažača u relevantnom koordinatnom sustavu. S obzirom na tu ovisnost, stvarni promjer sjene nije vrlo informativna veličina; ne postoji neka apsolutna sjena čiji bismo promjer mogli izmjeriti. Stoga ćemo uglavnom govoriti o kutnim veličinama, odnosno kutnom polumjeru i promjeru, koje se s istom motivacijom koriste u astronomiji. Pritom je bitno primijetiti da je kutni polumjer određen lokalno, dakle da također ovisi o svojstvima prostovre-

mena blizu opažača. Jednu posljedicu toga već smo vidjeli na slici 1.3, no slika 2.1 ilustrira koje ćemo veličine zato razmatrati.



Slika 2.1: Promjer, položaj opažača i kutni promjer u euklidskom (gore) i Schwarzschildovu slučaju (dolje).

U standardnoj upotrebi kutnih veličina u astronomiji obično pretpostavljamo da je prostorvrijeme svugdje ravno i mjerimo kutnu veličinu objekata na nebeskom svodu. Tako objektu stvarnog promjera  $d$  pripisujemo kutni promjer  $2\alpha$  (slika 2.1 gore). Veze između odgovarajućih veličina lako je dobiti trigonometrijski. Jedna slavna posljedica toga jest da Sunce i Mjesec promatrani sa Zemlje poprimaju slične kutne promjere, što omogućuje pojavu potpune pomrčine Sunca. Slučaj na slici 2.1 dolje ne razlikuje se po principu. Opažač na radijalnoj koordinati  $r_o$  lokalno mjeri kutni promjer  $2\alpha$  i mjeri prividnu veličinu (sjenu) stvarnog promjera  $d$ , iako ona ne odgovara nekom fizičkom objektu te veličine.

Ako promatrana slika nije kružno simetrična, nije lako postići univerzalni dogovor oko dimenzija koje ćemo razmatrati. Često se u praksi koristi proširenje na minimalni i maksimalni kutni promjer, analogno maloj i velikoj poluosi elipse. Međutim, uvijek ćemo precizirati o kojim dimenzijama govorimo kod sustava s nižim stupnjem simetrije.

### 3 Sjene u statičnim, sferno simetričnim sustavima

Da bi realna crna rupa bila vidljiva, mora zadovoljiti nekoliko strogih kriterija. Morala bi biti dobro osvijetljena – oko crne rupe morali bi postojati izvori zračenja dovoljnog luminoziteta kako bi ga teleskopi mogli opaziti, a koji bi pritom također morali biti dobro prostorno razmješteni da gravitacijski efekt crne rupe bude vidljiv. Dodamo li tomu činjenicu da zračenje na putu do teleskopa prolazi kroz razne medije koji nisu nužno prozirni za relevantne valne duljine [2], lako je shvatiti koliko je situacija kompleksna i koliko su promatrački vrijedni kandidati rijetki.

Kako bismo razumjeli kompleksnu realnu situaciju, potrebno je prvo razviti dobar osnovni model koji će nam omogućiti da uspostavimo dobru fizikalnu sliku. Stoga ćemo prvo uvesti dva bitna pojednostavljenja:

- promatrat ćemo samo statične, sferno simetrične crne rupe i
- postaviti ćemo ih u idealizirano svjetlo okruženje.

Naravno, takva situacija praktično je nezanimljiva, ali korisna je jer služi kao dobar pedagoški primjer. Ne možemo očekivati da će realni sustavi crnih rupa biti sferno simetrični, no visoki stupanj simetrije uvelike će nam olakšati račun. Svoje idealizirane crne rupe također ćemo okružiti savršenim, uniformnim osvijetljenjem kako bismo sveli čitav problem na traženje svjetlosnih putanja, odnosno geodezika, unutar okvira opće teorije relativnosti. Dobrim poznavanjem tog primjera postavljamo temelje za razne modele zračenja, koje možemo smatrati njegovim specijalizacijama ili jednostavnim nadogradnjama; stoga uniformno osvijetljenje dominira literaturom o sjenama crnih rupa. Svugdje u daljnjem tekstu koristit ćemo sferne koordinate kao u relaciji (2.1).

#### 3.1 Crna rupa ispred uniformne svjetle pozadine

Zamislit ćemo da crnu rupu promatramo ispred savršeno svjetlog nebeskog svoda, odnosno sferne svjetle pozadine sa središtem u  $r = 0$  i polumjera  $r_L$ . Pozadina treba biti takva da obuhvaća i crnu rupu (polumjera horizonta događaja  $r_h$ ) i opažača na radijalnoj koordinati  $r_O$ , konkretno  $r_h < r_O < r_L$ . To će nam omogućiti da bilo koju zraku možemo povezati s nekim točkastim izvorom na pozadini, odnosno da za sve zrake koje dolaze iz "beskonačnosti" postoji izvor. Zato je bitno da je pozadina

sferna; slučaj uniformno svijetle ravne pozadine nešto je drukčiji i diskutirat ćemo ga u cjelini 3.3. Također ćemo pretpostaviti da nigdje nema atenuacije svjetlosti te da ne postoje nikakvi dodatni izvori zračenja.

Ovako odabran postav omogućuje nam jednostavnu primjenu tzv. ray tracing metode. Umjesto da promatramo sve zrake poslane od izvora i pitamo se stižu li do opažača, možemo preokrenuti problem i zamisliti da opažač odašilje prošlo usmjerene zrake od sebe prema predmetu promatranja. Tako za svaku zraku odmah znamo da može stići do opažača te trebamo samo provjeriti možemo li je povezati s nekim izvorom zračenja. S obzirom na to da nema refleksija, ne možemo proučavati značajke površine i ne zanima nas daljnje ponašanje zraka koje nepovratno poniru prema crnoj rupi.

Osnovna metoda [5] pronalaska kritične krivulje koja slijedi može se primijeniti na sva statična, sferno simetrična prostorvremena. Sastoji se od dvaju glavnih koraka:

1. Izvod izraza za trajektoriju općenite svjetlosne zrake (geodezik svjetlosnog tipa) emitirane od opažača u prošlost.
2. Izdvajanje onih zraka, odnosno njima pripadnih kutova emisije, koje asimptotski ulaze u nestabilne kružne orbite.

Zrake koje zadovoljavaju uvjet iz potonjeg koraka jesu one koje ostaju zarobljene i odgovaraju kritičnoj krivulji.

Krenimo ponovno od općenite statične, sferno simetrične metrike (relacija (2.1)). Tražimo geodezike svjetlosnog tipa<sup>3</sup>,  $ds^2 = 0$ :

$$-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.1)$$

Dobivenu jednadžbu možemo preoblikovati tako da dobijemo jednadžbu orbite koristeći identitet  $(dr/d\phi)^2 = \dot{r}^2/\dot{\phi}^2$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{1}{B(r)} \left( A(r) \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - D(r) \right) = \\ &= \frac{D(r)}{B(r)} \left( \frac{A(r)}{D(r)} \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - 1 \right) = \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Dodatak B

$$= \frac{D(r)}{B(r)} \left( \frac{D(r)}{A(r)} \frac{E^2}{L^2} - 1 \right). \quad (3.2)$$

Jedini parametar o kojem jednadžba orbite ovisi jest omjer  $E/L$ , odnosno upravo udarni parametar  $b$  iz izraza (2.9). Fiksiranjem udarnog parametra izabiremo jednu konkretnu orbitu, a svojstva orbita određena su svojstvima prostorstvremena.

Korisno je prepoznati oblik gornje jednadžbe kao gibanje u 1D efektivnom potencijalu:

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0 \quad (3.3)$$

i postaviti uvjet kružne orbite:

$$V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad \frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0. \quad (3.4)$$

S druge strane, ako putanja prilazi crnoj rupi najbliže na nekoj minimalnoj radijalnoj koordinati  $R$  te zatim odlazi u beskonačnost (slika 3.1), možemo postaviti uvjet točke obrata i očitati vezu udarnog parametra  $b$  i minimalne radijalne koordinate  $R$ :

$$V_{\text{eff}}(R) = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{L^2} = \frac{A(R)}{D(R)}. \quad (3.6)$$

Sad možemo uvesti funkciju  $h^{-2}(r)$ :

$$h^{-2}(r) = \frac{D(r)}{A(r)} \quad (3.7)$$

koja predstavlja svojevrsni novi efektivni potencijal. Omogućuje nam nešto providniji zapis jednadžbe (3.2):

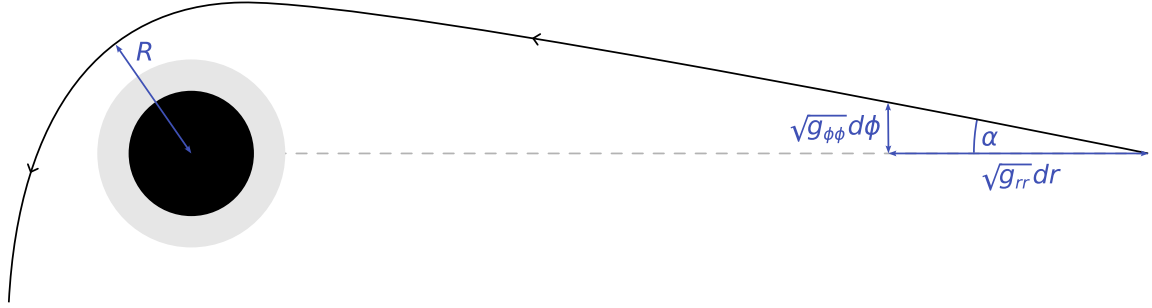
$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{D(r)}{B(r)} \left( \frac{h^{-2}(r)}{h^{-2}(R)} - 1 \right), \quad (3.8)$$

pri čemu smo prepoznali jednostavnu vezu s udarnim parametrom,  $b^2 = h^{-2}(R)$ . Lako je vidljivo da sad polumjer kružne orbite, odnosno fotonske sfere,  $r_{\text{ph}}$  možemo dobiti iz uvjeta:

$$\left. \frac{d}{dr} (h^{-2}(r)) \right|_{r_{\text{ph}}} = 0. \quad (3.9)$$

Sad smo spremni odrediti kutni promjer, odnosno polumjer sjene. Neka opažač





Slika 3.1: Primjer svjetlosne zrake emitirane od opažača pod kutom  $\alpha$  prema Schwarzschildovoj crnoj rupi. Zraka prolazi kraj crne rupe na minimalnoj radijalnoj koordinati  $R$  (periastronu), koja se može povezati s kutom  $\alpha$  poznajući svojstva odgovarajućeg geodezika svjetlosnog tipa. Istaknuti su horizont događaja (crni krug) i fotonska sfera (sivi vijenac) crne rupe. Prilagođeno iz [5, 7].

odašilje neku zraku pod kutom  $\alpha$  (slika 3.1). Tada vrijedi:

$$\text{ctg}^2 \alpha = \frac{g_{rr}}{g_{\phi\phi}} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \quad (3.10)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} \frac{B(r)}{D(r)} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \quad (3.11)$$

$$\stackrel{(3.8)}{=} \frac{h^{-2}(r_O)}{h^{-2}(R)} - 1, \quad (3.12)$$

odnosno, koristeći trigonometrijski identitet  $1 + \text{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ :

$$\sin^2 \alpha = \frac{h^{-2}(R)}{h^{-2}(r_O)}. \quad (3.13)$$

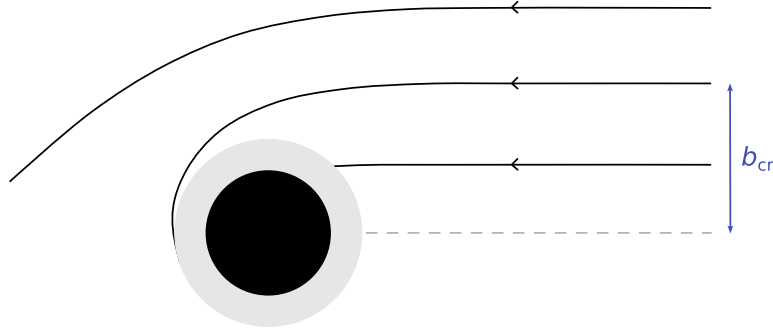
Kritična krivulja (rub sjene) odgovara kutu  $\alpha = \alpha_{\text{sh}}$  za koji se putanja asimptotski približava kružnoj fotonskoj orbiti,  $R \rightarrow r_{\text{ph}}$ :

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{h^{-2}(r_{\text{ph}})}{h^{-2}(r_O)}. \quad (3.14)$$

S obzirom na sfernu simetriju, sjena ovakve crne rupe jest disk čiji je kutni polumjer  $\alpha_{\text{sh}}$ . Možemo uvesti i kritičnu vrijednost udarnog parametra  $b_{\text{cr}}$ :

$$b_{\text{cr}}^2 = h^{-2}(r_{\text{ph}}). \quad (3.15)$$

Sjetimo li se da je udarni parametar omogućavao izbor konkretne orbite u jednadžbi (3.2), možemo shvatiti kritični udarni parametar kao izbor graničnog svjetlosnog geodezika, koji završava u fotonskoj sferi (slika 3.2).



Slika 3.2: Putanje fotona u vakuumu za neke vrijednosti udarnog parametra  $b$ , na primjeru Schwarzschildove crne rupe. Kritični udarni parametar  $b_{cr}$  odgovara putanji koja ponire u fotonsku sferu (sivi vijenac) ili čak horizont događaja (crni krug). Prilagođeno iz [5, 7].

Ovako predstavljena analiza standardna je u literaturi. Međutim, možemo se zapitati što se događa s ostalim zrakama koje su u neposrednoj blizini kritične krivulje. Vratimo li se na sliku 1.2, vidimo da i neke crne zrake, koje ne bivaju zarobljene, ne dolaze do opažača. Kako se približavamo kritičnoj krivulji, zrake će činiti sve veći broj okreta oko crne rupe prije nego krenu u beskonačnost. Neke od njih imat će usmjerenje prema opažaču, a neke ne. Opreznim tretmanom može se pokazati da "tamna" regija u ovom slučaju seže i izvan kritične krivulje, što ćemo komentirati kasnije.

### 3.1.1 Slučaj vrlo udaljenog opažača

U astrofizički relevantnom slučaju opažač je vrlo daleko od crne rupe, što nam omogućuje da izraz (3.14) dodatno pojednostavnimo [5]. Već se iz prethodnih rasprava može naslutiti da za Schwarzschildovo prostorvrijeme – čija ćemo svojstva podrobnije raspraviti kasnije – ključni broj  $3\sqrt{3}M$ , koji odgovara kritičnom udarnom parametru, služi kao svojevrsna pokrata za raspravu o sjeni. Uzmimo pritom dodatan uvjet na prostorvrijeme opisano metrikom danom izrazom (2.1) – pretpostavimo da je asimptotski ravno, odnosno da vrijedi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r), B(r), D(r)/r^2 = 1. \quad (3.16)$$

Kutni polumjer sjene tada možemo aproksimirati koristeći te limese i aproksimaciju malog kuta:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \approx \alpha_{\text{sh}} \quad (3.17)$$

$$= \frac{b_{\text{cr}} \sqrt{A(r_O)}}{\sqrt{D(r_O)}} \rightarrow \frac{b_{\text{cr}}}{r_O}. \quad (3.18)$$

Značaj kritičnog udarnog parametra sada postaje sasvim jasan. Ovakav je rezultat očekivan jer je u skladu s klasičnom interpretacijom udarnog parametra. Bitno je primijetiti da je pretpostavka asimptotske ravnosti ovdje bila ključna. Na slikama 3.1 i 3.2 možemo na konceptualnoj razini vidjeti kako to omogućuje. Na nekoj, dovoljnoj udaljenosti od crne rupe geodezik postaje približno ravan te stoga od te točke nadalje prividna veličina crne rupe ovisi isključivo o udaljenosti opažača, kao i u euklidskom slučaju. Ukoliko prostorvrijeme nije asimptotski ravno, ne možemo jednostavno izvrijedniti limes dalekog opažača. To samo znači da, ako želimo usporediti sjene dviju statičnih, sferno simetričnih crnih rupa čija prostorvremena nisu oba asimptotski ravna, moramo koristiti pune izraze za kutni polumjer sjene, a ne samo usporediti kritične udarne parametre. Međutim, zahtjev asimptotske ravnosti fizikalno je smislen i stoga se često koristi kao provjera fizikalnosti rezultata u općoj teoriji relativnosti ili se čak nameće *a priori*.

### 3.1.2 Slučaj vrlo bliskog opažača

Možemo razmotriti i praktično nevažan, ali konceptualno zanimljiv slučaj neposredne blizine fotonskoj sferi ili čak horizontu događaja. Zamislimo statičnog opažača s pregledom punog prostornog kuta na nekoliko različitih udaljenosti od crne rupe. Evoluciju slike koju vidi upadajući opažač nešto je kompliciranije odrediti jer je potrebno uzeti u obzir i dodatne relativističke efekte [26] te ćemo se stoga zadržati na statičnom slučaju.

S obzirom na sfernu simetriju, i dalje je jedino važno razmotriti kut  $\alpha_{\text{sh}}$  pod kojim opažamo kritičnu krivulju. Promotrimo li izraz (3.14), vidimo da je položaj na samoj fotonskoj sferi,  $r_O = r_{\text{ph}}$ , poseban jer tada, neovisno o konkretnoj geometriji, sjena zauzima točno pola prostornog kuta promatrača. Time vidimo jednu općenito opravdanu paralelu s negravitirajućom crnom kuglom dimenzija fotonske sfere. Definirajuća karakteristika crne rupe jest, doduše, horizont događaja. Kasnije ćemo

na primjeru Schwarzschildova prostorvremena kratko komentirati kako se vizualni profil ponaša između fotonske sfere i horizonta.

## 3.2 Sjene nekih crnih rupa

U nastavku slijedi pregled nekih statičnih, sferno simetričnih prostorvremena za koja možemo egzaktno odrediti kutni polumjer sjene. Odabrani primjeri zadovoljavaju sve dosadašnje pretpostavke, osim ako je drukčije istaknuto.

### 3.2.1 Schwarzschildovo prostorvrijeme

Schwarzschildovo rješenje vakuumsko je rješenje Einsteinovih jednadžbi koje opisuje statične, sferno simetrične, nenabijene crne rupe. Odgovarajući linijski element u sfernim koordinatama glasi [24, 27]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.19)$$

gdje je  $M$  masa sadržana u ishodištu.

Komponente Schwarzschildove metrike singularne su za  $r = 0$  i  $r = 2M$ , čime ukazuju na centralni singularitet i horizont događaja, respektivno. Singularitet na horizontu može se izbjeći izborom koordinatnog sustava, npr. prelaskom u Kruskal-Szekeres koordinate. Ovdje nam je, međutim, povoljno zadržati standardne sferne koordinate jer su za Schwarzschildovo prostorvrijeme one također arealne. Kasnije ćemo vidjeti koji je tomu značaj. Dovoljno je i to što nam područje unutar horizonta  $r < 2M$  nije nam od interesa.

Usporedbom relacija (2.1) i (3.19) prepoznamo funkcije  $A(r)$ ,  $B(r)$  i  $D(r)$  od ranije:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad D(r) = r^2 \quad (3.20)$$

pa prema izrazu (3.7) funkcija  $h^{-2}(r)$  postaje:

$$h^{-2}(r) = \frac{r^2}{1 - 2M/r}. \quad (3.21)$$

Iz uvjeta (3.9) i (3.15) dobivamo, redom, polumjer fotonske sfere  $r_{\text{ph}}$  i kritični udarni

parametar  $b_{\text{cr}}$ :

$$\frac{2r_{\text{ph}} - 6M}{(1 - 2M/r_{\text{ph}})^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow r_{\text{ph}} = 3M, b_{\text{cr}} = 3\sqrt{3}M \quad (3.23)$$

te zatim i izraz za kutni polumjer sjene Schwarzschildove crne rupe iz relacije (3.14):

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{27M^2(1 - 2M/r_O)}{r_O^2}, \quad (3.24)$$

čime smo reproducirali Syngeovu formulu, izraz (1.1). Pritom treba obratiti pozornost na razliku između kuta  $\alpha_{\text{sh}}$  koji smo mi koristili i koji je svojevrsni kut uhvata fotona te Syngeova kuta  $\alpha_{\text{esc}}$ , koji odgovara kutu pod kojim fotoni mogu pobjeći u beskonačnost. Premda se radi o različitim kutovima, slaganje možemo opravdati primjetimo li da su suplementarni. S obzirom na to da je oba kuta smisleno definirati tako da vrijedi  $0 \leq \alpha < \pi$ , jasno je da je pri uzimanju sinusa svejedno koji kut razmatramo. Također možemo primijetiti da stoga vrijedi  $\sin \alpha \geq 0$ , zbog čega bez dodatnih specijalizacija možemo korjenovati gornji izraz:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} = \frac{3\sqrt{3}M\sqrt{1 - 2M/r_O}}{r_O}. \quad (3.25)$$

Zamislimo li ponovno negravitirajuću crnu kuglu polumjera  $R$  u ravnom prostoru-vremenu, trivijalno je dobiti analogni izraz:

$$\sin \alpha_{\text{eu}} = \frac{R}{r_O}. \quad (3.26)$$

Evidentno je da, neovisno o tome shvatimo li horizont događaja ( $R = 2M$ ) ili foton-sku sferu ( $R = 3M$ ) kao "rub" crne rupe, Syngeova formula predviđa veći polumjer, kao što smo i očekivali.

Možemo zamisliti i inverzni problem – koliko se informacija o crnoj rupi može dobiti poznajući svojstva sjene? U slučaju Schwarzschildove crne rupe, jedino je relevantno možemo li dobiti masu  $M$ . Izraz (3.24) trivijalno je preoblikovati u kubnu jednadžbu za masu. Zanimljivije je primijetiti da samo na temelju sjene ne možemo raspoznati razliku između crne rupe ili nekog drugog sferno simetričnog objekta u postavu koji smo dosad razmatrali. U cjelini 5 komentirat ćemo problem degeneracije

sjene kod crnih rupa, no jasno je da iz sjene u slučaju uniformno svijetle pozadine ne možemo zaključiti ni da se radi o crnoj rupi, pa čak ne nužno ni o nekom drukčijem ultrakompaktnom objektu. Izvor tog problema nije u sjeni, već u osvjetljenju, o čemu će biti više riječi kasnije.

### Slučaj vrlo udaljenog opažača

Ako je opažač vrlo udaljen, veličina crne rupe ( $\sim M$ ) postaje zanemariva u odnosu na položaj opažača  $r_O$ . Stoga možemo zanemariti drugi član u izrazu (3.25). Iskoristimo li i aproksimaciju malog, dobivamo:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \approx \alpha_{\text{sh}} \approx \frac{3\sqrt{3}M}{r_O}. \quad (3.27)$$

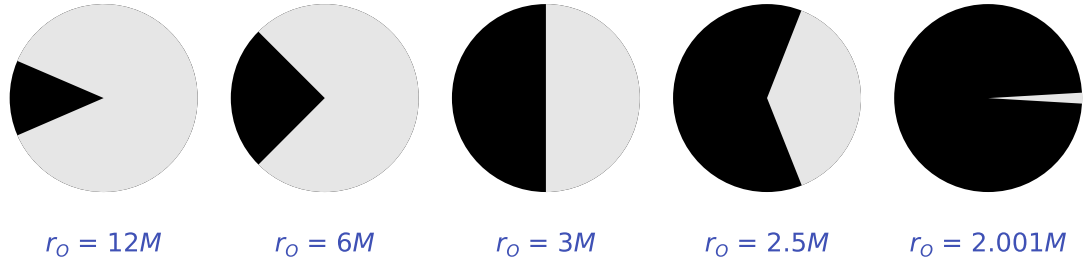
Dobili smo upravo izraz (3.18).

### Slučaj vrlo bliskog opažača

U cjelini 3.1.2 zaključili smo da promatrač na fotonskoj sferi opaža kut  $\alpha_{\text{sh}} = \pi/2$ . Želimo li evaluirati izraz (3.25) za promatrača unutar fotonske sfere, moramo biti oprezni pri uzimanju inverza kako bismo dobili kut. Očekujemo da će zrake emitirane od opažača pod kutom  $\alpha_{\text{sh}}$  završiti na fotonskoj sferi, što znači da će joj u slučaju  $2M < r_O < r_{\text{ph}}$  prilaziti odozdo, odnosno vrijedit će  $\alpha_{\text{sh}} > \pi/2$ . Dakle, pretpostavimo li standardno suženje tako da funkcija arcsin vraća vrijednosti između  $-\pi/2$  i  $\pi/2$ , izraz za kut  $\alpha_{\text{sh}}$  moramo pisati po dijelovima:

$$\alpha_{\text{sh}}(r_O) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}M\sqrt{1-2M/r_O}}{r_O}\right), & r_O \geq 3M \\ \pi - \arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}M\sqrt{1-2M/r_O}}{r_O}\right), & 2M < r_O < 3M. \end{cases} \quad (3.28)$$

Tako dobiveni kutni promjeri za odabrane radijalne koordinate statičnog opažača prikazani su na slici 3.3. Očito je iz izraza (3.28) da u limesu  $r_O \rightarrow 2M$  kut  $\alpha_{\text{sh}}$  teži k  $\pi$ . Dakle, što je bliže horizontu događaja, opažač će vidjeti kako mu sjena sve više popunjava nebesku sferu, sve dok je čitavu ne ispuni.



Slika 3.3: Kutni promjeri sjene Schwarzschildove crne rupe (zamišljene lijevo na slici) za statične opažачe na različitim radijalnim koordinatama  $r_0$ . Kut crnog kružnog isječka odgovara kutnom promjeru sjene crne rupe  $2\alpha_{\text{sh}}$ . Prilagođeno iz [5].

### 3.2.2 Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme

Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme jest jedino sferno simetrično rješenje Einsteinovih jednadžbi s kozmološkom konstantom koje opisuje crnu rupu, a dano je linijskim elementom [5, 28]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.29)$$

gdje je  $\Lambda$  pozitivna kozmološka konstanta. Ovako dana metrika također je poznata kao Kottlerova. Radi jednostavnosti dalje ćemo u tekstu koristiti naziv  $A(r)$  za metričku funkciju, koju prepoznamo usporedbom s izrazom (2.1) kao i ranije. Schwarzschild-de Sitterova metrika za određene vrijednosti kozmološke konstante  $\Lambda$ :

$$0 < \Lambda < \frac{1}{9M^2} \quad (3.30)$$

opisuje crnu rupu s dvama horizontima. Horizonti se nalaze na nultočkama funkcije  $A(r)$ , za koje vrijedi:

$$2M < r_1 < 3M < r_2 < \infty, \quad (3.31)$$

pri čemu je  $r_1$  unutarnji horizont, koji možemo smatrati horizontom događaja crne rupe, a  $r_2$  vanjski, koji se često naziva kozmološkim horizontom. Područje između njih naziva se domenom vanjske komunikacije i jedino je fizikalno relevantno jer su unutar njega bilo koja dva opažачa kauzalno povezana, odnosno nisu razdvojena horizontima. Također, s obzirom na to da je funkcija  $A(r)$  pozitivna između dvaju horizonata, vektor  $\partial_t$  vremenskog je tipa i dozvoljeno je uzeti statičnog opažачa kao i dosad [28]. Za svjetlu pozadinu ovdje je potrebno dodati uvjet da se sastoji od

izvora koji su svi sadržani unutar domene vanjske komunikacije.

Sad možemo odrediti sjenu kao i ranije. Funkcija  $h^{-2}(r)$  poprima oblik:

$$h^{-2}(r) = \frac{r^2}{1 - 2M/r - \Lambda r^2/3}. \quad (3.32)$$

Iz uvjeta (3.9) i (3.15) dobivamo, redom, polumjer fotonske sfere  $r_{\text{ph}}$  i kritični udarni parametar  $b_{\text{cr}}$ :

$$r_{\text{ph}} = 3M, \quad b_{\text{cr}} = \frac{3\sqrt{3}M}{\sqrt{1 - 9\Lambda M^2}}. \quad (3.33)$$

Zatim nalazimo izraz za kutni polumjer sjene iz relacije (3.14):

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{1 - \frac{2M}{r_O} - \frac{\Lambda}{3}r_O^2}{\left(\frac{1}{27M^2} - \frac{\Lambda}{3}\right)r_O^2}. \quad (3.34)$$

Kutni polumjer sjene Schwarzschild-de Sitterove crne rupe  $\alpha_{\text{sh}}$  kreće se od 0, za opažača na kozmološkom horizontu, do  $\pi$ , za opažača na horizontu crne rupe. Također je vidljivo da se za  $\Lambda = 0$  dobiveni izraz – kao i izraz (3.33) za kritični udarni parametar – reducira na izraz (3.24) za Schwarzschildovu crnu rupu, što je i očekivano.

### Slučaj vrlo udaljenog opažača

Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme zanimljivo nam je promotriti jer možemo primijetiti da zbog kvadratnog člana vrijedi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) \neq 1, \quad (3.35)$$

odnosno da Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme nije asimptotski ravno. Možemo sada na njegovu primjeru proučiti granicu vrlo udaljenog opažača. Ako izlučimo kritični udarni parametar  $b_{\text{cr}}$  u izrazu (3.34):

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \left( 1 - \frac{2M}{r_O} - \frac{\Lambda}{3}r_O^2 \right) \frac{b_{\text{cr}}^2}{r_O^2} \quad (3.36)$$

odmah je jasno da za  $r_O \gg M$  ne vrijedi ranija aproksimacija vrlo udaljenog opažača (izraz (3.18)):

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} \neq \frac{b_{\text{cr}}^2}{r_O^2} \quad (3.37)$$



zbog limesa (3.35). Pritom primjećujemo zašto smo ranije postavili uvjet na maksimalnu vrijednost kozmološke konstante  $\Lambda$ ; radijalna koordinata opažača ne može težiti u beskonačnost, već samo u maksimalnu vrijednost  $r_2$ , koja odgovara kozmološkom horizontu. Zato konstanta  $\Lambda$  mora biti dovoljno mala. Jedna manifestacija toga vidljiva je i u izrazu (3.33) za kritični udarni parametar. Zaključno, posljedica činjenice da Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme nije asimptotski ravno jest da ni za vrlo udaljenog opažača ne možemo usporediti veličine sjene u Schwarzschildovu i Schwarzschild-de Sitterovu prostorvremenu bez da odredimo koordinatu opažača.

Međutim, to nas ne sprječava da konkretno za Schwarzschild-de Sitterovo prostorvrijeme odredimo prigodnu granicu vrlo dalekog opažača [28]. Shvatili smo da je postojanje granice  $r_O \gg M$  uvjetovano vrijednošću koordinate kozmološkog horizonta  $r_2$ . S obzirom na to da horizont dobivamo kao nultočku funkcije  $A(r)$ :

$$1 - \frac{2M}{r_2} - \frac{\Lambda}{3}r_2^2 = 0, \quad (3.38)$$

možemo unutar njegove definicijske jednadžbe razmotriti granicu  $r_2 \gg M$  i zanemariti drugi član:

$$1 - \frac{\Lambda}{3}r_2^2 \approx 0 \quad (3.39)$$

$$\Rightarrow r_2^2 \approx \frac{3}{\Lambda}, \quad (3.40)$$

što znači da također mora vrijediti:

$$\Lambda M^2 \ll 1 \quad (3.41)$$

kako bi sama granica bila smisljena. Koristeći taj dodatni uvjet, možemo pojednostavniti izraz (3.34) za vrlo udaljenog opažača  $r_O \gg M$ :

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} \approx \frac{27M^2}{r_O^2} \left( 1 - \frac{\Lambda}{3}r_O^2 \right), \quad (3.42)$$

odnosno, uz aproksimaciju malog kuta:

$$\alpha_{\text{sh}} \approx \frac{3\sqrt{3}M}{r_O} \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{3}r_O^2} \neq \frac{b_{\text{cr}}}{r_O}. \quad (3.43)$$

### 3.2.3 Simpson-Visserovo ("black-bounce") prostorvrijeme

Simpson-Visserova (SV) metrika opisuje familiju prostorvremena; interpolira između Schwarzschildova rješenja (izraz (3.19)) i crvotočine, zbog čega se pripadnu geometriju naziva i "black-bounce" prostorvremenom. Dana je linijskim elementom [29]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right)^{-1} dr^2 + (r^2 + l^2) d\Omega^2, \quad (3.44)$$

gdje je  $l$  neki parametar različit od nule, koji ćemo nadalje nazivati SV parametrom, a koordinata  $r$  ima domenu  $-\infty < r < \infty$ . Sve ostale koordinate imaju standardne domene. Ovisno o vrijednosti SV parametra, SV metrika može opisivati regularnu crnu rupu ili neku od više različitih vrsta crvotočina. Promatrat ćemo slučaj  $0 < l < 2M$ , kada SV metrika opisuje regularnu crnu rupu s horizontom događaja na [29]:

$$r_h = \pm \sqrt{(2M)^2 - l^2}. \quad (3.45)$$

Sama metrika zamišljena je kao "minimalistička *ad hoc* regularizacija" [29, 30] Schwarzschildova rješenja u smislu da za  $l \neq 0$  nije singularna u  $r = 0$ . SV crna rupa vrlo je bliska Schwarzschildovoj u Kruskal-Szekeres koordinatama, no postiže regularnost zamjenom centralnog singulariteta za hiperplohu prostornog tipa koju autori nazivaju "bounce". Premda je regularno i asimptotski ravno, SV prostorvrijeme fizikalno nije osobito primamljivo jer se može pokazati da krši standardni svjetlosni energijski uvjet, a time i sve klasične energijske uvjete na efektivni tenzor energije i impulsa dan Einsteinovom jednažbom [29].

Ponovimo li raniji postupak, iz funkcije  $h^{-2}(r)$ :

$$h^{-2}(r) = \frac{r^2 + l^2}{1 - 2M/\sqrt{r^2 + l^2}} \quad (3.46)$$

dobivamo polumjer fotonske sfere  $r_{\text{ph}}$  i kritični udarni parametar  $b_{\text{cr}}$ :

$$r_{\text{ph}} = \sqrt{(3M)^2 - l^2}, \quad b_{\text{cr}} = 3\sqrt{3}M. \quad (3.47)$$

Ovdje smo dobili jedinstven polumjer  $r_{\text{ph}}$  jer smo se ograničili na dio prostora izvan horizonta događaja,  $r > r_h$ , koji možemo smatrati fizikalno relevantnim. Kutni

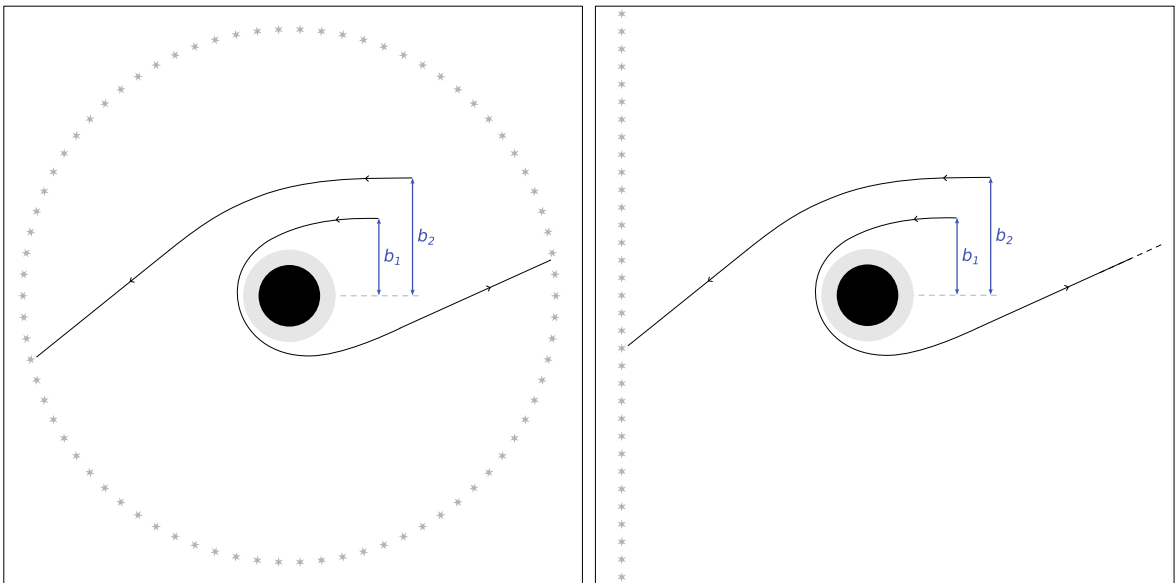
polumjer sjene  $\alpha_{\text{sh}}$  sada glasi:

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{27M^2 \left( 1 - \frac{2M}{\sqrt{r_O^2 + l^2}} \right)}{r_O^2 + l^2}. \quad (3.48)$$

Radijus fotonske sfere i kutni polumjer sjene za  $l = 0$  poklapaju se sa Schwarzschildovim slučajem. Za vrijednosti SV parametra koje promatramo kad  $l \neq 0$  polumjer fotonske sfere poprima jedinstvenu realnu vrijednost jer je  $(3M)^2 > l^2$ . Zanimljivo je da je kritični udarni parametar neovisan o SV parametru  $l$  i točno se poklapa sa Schwarzschildovim. Možemo, dakle, već predvidjeti da udaljeni opažач neće moći razlikovati Schwarzschildovu i SV crnu rupu na temelju jedino sjene, s obzirom na to da je SV metrika očito asimptotski ravna. U cjelini 5 vidjet ćemo da taj zaključak možemo i dodatno produbiti [30].

### 3.3 Sjena ispred ravne uniformne pozadine

Svi zaključci koje smo dosad izvodili temeljili su se na pretpostavci da svaku zraku koja ne završava u orbiti oko crne rupe, odnosno koja odlazi u beskonačnost, možemo povezati s nekim svjetlosnim izvorom. Međutim, u stvarnome svijetu prirodnije je zamisliti slučaj siluete ispred ravne svijetle pozadine. Naravno, nijednu od tih situacija ne bismo očekivali susresti u svemiru, no zanimljivo je promotriti kako se razlikuju.



Slika 3.4: Usporedba slučaja sferne (lijevo) i ravne (desno) uniformne svijetle pozadine.

Usporedba je ilustrirana na slici 3.4. Vidimo primjer dviju zraka, koje odgovaraju udarnim parametrima  $b_1$  i  $b_2$ ,  $b_1 < b_2$ . Zraka koja odgovara udarnom parametru  $b_1$  prebriše puno veći kut jer je bliže kritičnoj vrijednosti udarnog parametra. Budući da odlazi proizvoljno daleko od crne rupe, odgovarat će svjetlom dijelu opažačeve slike u slučaju sferne pozadine jer svugdje u prostoru može naići na izvor zračenja. S druge strane, u slučaju ravne pozadine odlaskom u beskonačnost zraka udarnog parametra  $b_1$  nikad ne pogađa izvor. Ako je pozadina beskonačna ravnina, lako je vidjeti da će zrake udariti u nju ako i samo ako  $b > b_{\text{cr}}$  i:

$$n \in \langle j + 1/4, j + 3/4 \rangle, j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.49)$$

gdje je  $n$  broj (parcijalnih) učinjenih orbita oko crne rupe [8]. Ostatak nebeskog svoda opažać će vidjeti kao taman. Po našoj definiciji to ne mijenja izgled sjene, već možemo zamisliti da sjenu okružuju višestruki tamni prstenovi. Oni se fundamentalno razlikuju od sjene jer su zapravo slike tamnih dijelova nebeskog svoda.

Izraz (3.2) možemo izvrijedniti za Schwarzschildovu crnu rupu i pritom uvrstiti definiciju udarnog parametra (2.9):

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \left( \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{r^2}{b^2} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Dobivenu jednadžbu možemo zapisati u nešto providnijem obliku:

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{1}{b^2} \quad (3.51)$$

i jednostavno uvesti supstituciju  $u \equiv 1/r$ :

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}. \quad (3.52)$$

Ovo je polazni oblik jednadžbe orbite u [11] i [27]. Ponašanje je određeno desnom stranom jednadžbe (RHS), čija svojstva ovise o izboru udarnog parametra  $b$ . Konkretno, možemo raspoznati tri klase gibanja – koje jasno korespondiraju s našim ranijim razmatranjima – određene nultočkama polinoma RHS:

1.  $b > b_{\text{cr}}$ , RHS ima tri realne nultočke  $u_i$ , takve da  $u_1 \leq 0 < u_2 < u_3$ ,
2.  $b = b_{\text{cr}}$ , RHS ima jednu negativnu realnu nultočku i jednu dvostruku pozitivnu

realnu nultočku,  $u_1 = -1/6M$  i  $u_2 = u_3 = 1/3M$ ,

3.  $b < b_{\text{cr}}$ , RHS ima nepozitivnu realnu nultočku  $u_1 \leq 0$  i dvije konjugirane kompleksne nultočke.

Postojanje takvih klasa jednostavno je naslutiti s obzirom na to da nultočke moraju zadovoljavati Vièteove formule [27]:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M}, \quad u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{2Mb^2}. \quad (3.53)$$

Dvostruka nultočka na  $u = 1/3M$ , kada  $du/d\phi$ , jasno, iščezava, u skladu je s ranijim rezultatima za fotonski prsten. Nas, međutim, zanima slučaj  $b > b_{\text{cr}}$ , kada će upadne zrake općenito prolaziti kraj crne rupe kao na slici 3.1. Nadalje ćemo radijalnu koordinatu najbližeg prolaska, periastron, nazivati  $P$ . Uzmimo:

$$u_1 = \frac{P - 2M - Q}{4MP}, \quad u_1 < 0 \quad (3.54)$$

$$u_2 = \frac{1}{P} \quad (3.55)$$

$$u_3 = \frac{P - 2M + Q}{4MP}, \quad (3.56)$$

pri čemu smo uveli  $Q^2 \equiv (P - 2M)(P + 6M)$ . Uvrstimo li tako odabrane izraze u faktorizirani polinom  $2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ , dobivamo:

$$b^2 = \frac{8MP^3}{Q^2 - (P - 2M)^2} = \frac{P^3}{P - 2M}, \quad (3.57)$$

odnosno direktnu vezu periastrona i udarnog parametra. Spremni smo uvesti supstituciju:

$$u - \frac{1}{P} = \frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 + \cos x) \quad (3.58)$$

koja nam omogućuje da diferencijalnu jednadžbu (3.52) svedemo na sljedeći oblik:

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{Q}{P} \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{x}{2}\right), \quad (3.59)$$

gdje je:

$$k^2 \equiv \frac{Q - P + 6M}{2Q}. \quad (3.60)$$

Navedeni oblik dobivamo tako da izraz (3.58) deriviramo po  $\phi$  kako bismo dobili i

supstituciju za derivaciju  $du/d\phi$ :

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{Q - P + 6M}{8MP} (-\sin x) \frac{dx}{d\phi} \quad (3.61)$$

te uz malo muke provedemo potrebne algebarske manipulacije nakon uvrštavanja  $u$  i  $du/d\phi$  u diferencijalnu jednađzbu (3.52). Rješenje  $\phi(r)$  sada se može iskazati u obliku klasičnog Jacobijeva integrala:

$$\phi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} (K(k) - F(x/2, k)), \quad (3.62)$$

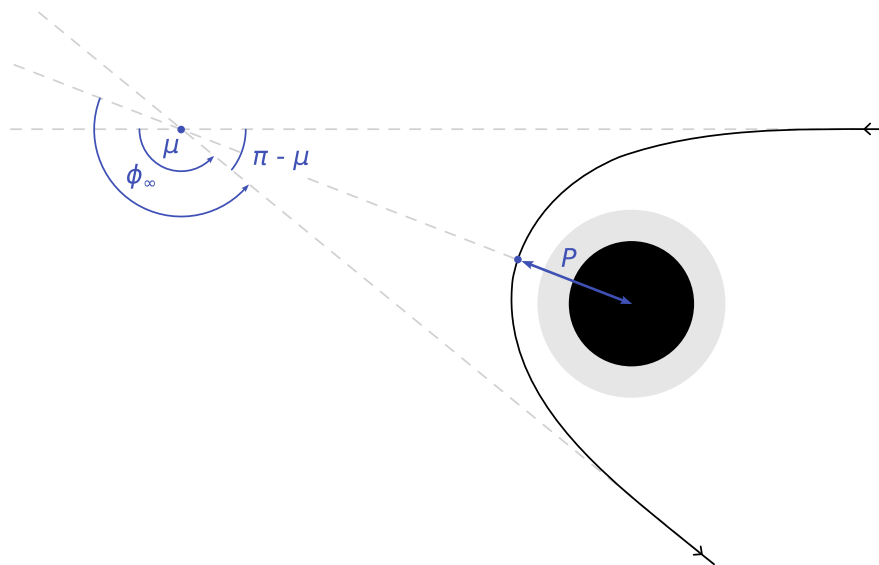
gdje je  $K(k)$  potpuni eliptički integral modula  $k$ , a  $F(x/2, k)$  eliptički integral modula  $k$  i argumenta  $x/2$ . Asimptotska vrijednost integrala  $\phi_\infty$  kada  $r \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$  (slika 3.5) jest oblika:

$$\phi_\infty = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} (K(k) - F(x_\infty/2, k)), \quad (3.63)$$

pri čemu vrijedi:

$$\sin^2 \frac{x_\infty}{2} = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} \quad (3.64)$$

prema izvornoj supstituciji. Primijetimo da je također  $u = 1/P$  za  $x = \pi$  [27]. Takav je izbor supstitucije zato bio povoljan. Rezultat je lako provjeriti i pomoću tablice eliptičkih integrala [31].



Slika 3.5: Periastron  $P$ , kut otklona  $\mu$  i kut trajektorije nakon prolaska kraj crne rupe  $\phi_\infty$  za proizvoljnu svjetlosnu zraku. Prilagođeno iz [11].

Ukupni kut otklona svjetlosne zrake  $\mu$  dan je relacijom  $\phi_\infty + (\pi - \mu)/2 = \pi$  (slika 3.5). Alternativno, ali ekvivalentno možemo pisati:

$$\phi_\infty = \pi/2 - \mu/2. \quad (3.65)$$

Promotrimo li granicu  $P \rightarrow 3M$ , odnosno  $b \rightarrow b_{\text{cr}}$ , možemo doći do korisne aproksimacije razvojem eliptičkih integrala blizu  $b_{\text{cr}}$ . Dobivamo [11, 27]:

$$\phi_\infty \approx \frac{1}{2} \ln C_+ - \frac{1}{2} \ln(b - b_{\text{cr}}), \quad (3.66)$$

odnosno, invertiranjem i uvrštavanjem relacije (3.65):

$$b - b_{\text{cr}} \approx C_+ e^{-\pi} e^{-\mu} \approx 3.4823M e^{-\mu}, \quad (3.67)$$

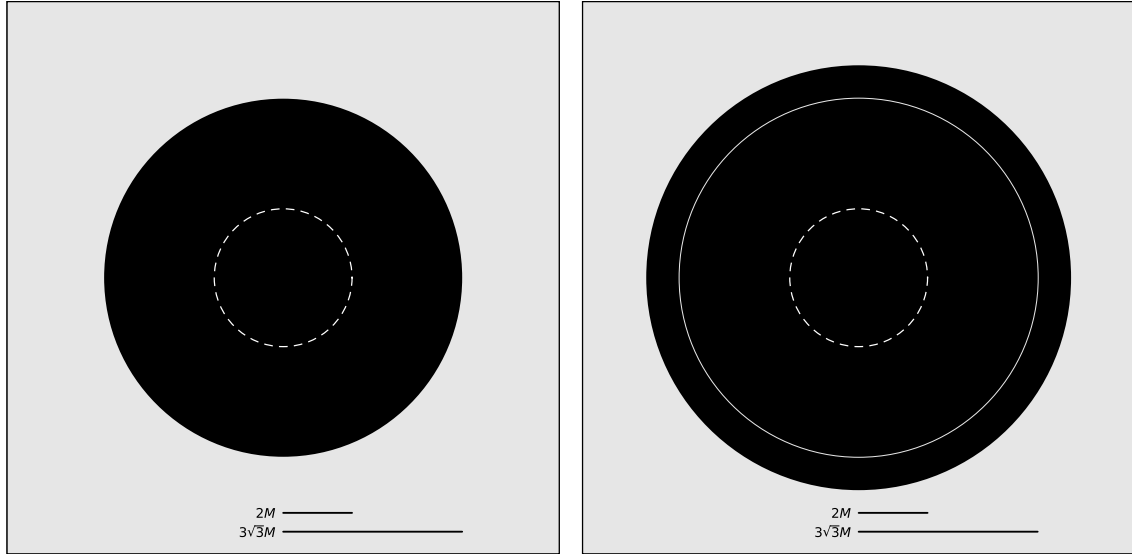
pri čemu je konstanta  $C_+$  dana kao:

$$\frac{C_+}{M} = 648\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2 \approx 80.6. \quad (3.68)$$

S obzirom na to da je za ovaj zaključak jedino bila važna granica  $r \rightarrow \infty$ , putanje koje prije odlaska u asimptotsko područje naprave dodatne pune orbite oko crne rupe, odnosno one koje odgovaraju  $\mu + 2n\pi$ , imaju ista svojstva kao ona za koju je  $n = 0$ .

Jasno je već sa slika 3.4 i 3.5 da će glavna svijetla regija koja okružuje sjenu odgovarati zrakama s otklonom manjim od  $\pi/2$ . Taj uvjet bit će zadovoljen za zrake s udarnim parametrom  $b > 6.17M$  (što se, napominjemo, ne može izvrijediti u logaritamskoj aproksimaciji) [8]. Dakle, glavna tamna regija u slučaju beskonačne ravne pozadine bit će veća nego u slučaju sferne, gdje jedina tamna regija jest sjena ograničena kritičnom krivuljom, odnosno svijetla regija odgovara udarnim parametrima  $b > b_{\text{cr}}$ ,  $b_{\text{cr}} = 3\sqrt{3}M \approx 5.1962M$ . Usporedba je prikazana na slici 3.6.

Unutar velike tamne regije za slučaj ravne pozadine nalazi se savršeno tamna sjena čija su svojstva ista kao ranije, a oko nje beskonačno mnogo tankih svijetlih prstenova raznih polumjera i debljina. Svi se nalaze vrlo blizu kritične krivulje pa možemo iskoristiti logaritamsku aproksimaciju kako bismo napisali uvjet koji ih određuje [8] i koji odgovara uvjetu (3.49) od ranije (pri čemu izuzimamo slučaj



Slika 3.6: Usporedba vizualnog profila Schwarzschildove crne rupe u slučaju sferne (lijevo) i ravne (desno) uniformne svijetle pozadine. Iscrtkana linija označava veličinu horizonta događaja. Svijetli prsten izvan sjene na slici desno sadrži još beskonačno mnogo tanjih prstenova. Prilagođeno iz [8].

$j = 0$ , koji smo već obuhvatili vanjskom svijetlom regijom):

$$\frac{b - b_{\text{cr}}}{C_+} \in \langle e^{-2\pi(j+3/4)}, e^{-2\pi(j+1/4)} \rangle, j = 1, 2, 3... \quad (3.69)$$

Prstenovi konvergiraju ka kritičnoj krivulji i postaju sve tanji. Najveći od njih, koji je dovoljno širok da bude vidljiv na slici 3.6, odgovara rasponu  $b \in \langle 5.1975M, 5.2274M \rangle$ . Dakle, debljine je samo  $0.03M$  i nalazi se odmah izvan kritične krivulje [8].



## 4 Sjena rotirajuće (Kerrove) crne rupe

S obzirom na to da su fotonski prstenovi granični slučaj koji definira kritičnu krivulju za danu crnu rupu (odnosno, geodezici koji asimptotski teže u njih), jasno je da je glavno pitanje kojim se ova analiza može proširiti na slučaj rotirajuće – konkretno Kerrove – crne rupe upravo pitanje promjene fotonskih orbita dodatkom rotacije. Kao što se može očekivati, izvod je zamjetno kompliciraniji nego u sferno simetričnom slučaju; detalji su izloženi u [5] i [32], a ovdje ćemo pružiti kratak pregled njihovih rezultata.

Kerrova metrika u Boyer-Lindquistovim koordinatama  $(t, r, \theta, \phi)$  glasi:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\Sigma(r, \theta)} \right) dt^2 - \frac{4aM \sin^2 \theta}{\Sigma(r, \theta)} dt d\phi + \frac{\Sigma(r, \theta)}{\Delta(r)} dr^2 + \Sigma(r, \theta) d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma(r, \theta)} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

pri čemu vrijedi:

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (\equiv \Sigma) \quad (4.2)$$

$$\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2Mr \quad (\equiv \Delta). \quad (4.3)$$

Konstanta  $a = J/m$  predstavlja angularni moment po jedinici mase, a  $M$  je ADM masa. Za postojanje horizonta događaja u Kerrovoj metrici nužno je  $a^2 \leq M^2$ ; jednakost  $a = M$  vrijedi za crne rupe koje nazivamo ekstremalnim, a  $a^2 > M^2$  odgovara golom singularitetu, što nećemo promatrati. Nadalje ćemo uvijek pretpostavljati da također vrijedi  $a > 0$ , što možemo napraviti bez smanjenja općenitosti jer uvijek možemo napraviti koordinatnu transformaciju  $\phi \rightarrow -\phi$ .

### 4.1 Sjena ispred uniformne svijetle pozadine

Podsjećamo, Kerrovo prostorvrijeme ima raznovrsnije fundamentalne fotonske orbite pa umjesto "fotonskog prstena" govorimo o "fotonskim regijama" ili "ljuskama". Može se pokazati da za ekvatorijalne svjetlosne zrake Kerrova crna rupa ima dvije fotonske sfere, jednu korotirajuću i jednu kontrarotirajuću [5]. U neekvatorijalnom slučaju javljaju se fotonske regije ispunjene sferičnim svjetlosnim geodezicima. Pos-

tupak pronalaska fotonske regije može se provesti sasvim analitički i principom ne odstupa od koraka koje smo uveli ranije – potrebno je odrediti relevantne konstante gibanja i riješiti jednadžbu za (sferične) geodezike svjetlosnog tipa – iako zahtijeva nešto muke.

Za Kerrovo prostorvrijeme možemo pronaći konstante gibanja, od kojih su dvije analogne konstantama  $E$  i  $L$  (relacije (2.6)) asociiranim s Killingovim vektorima  $\partial_t$  i  $\partial_\phi$  koje smo imali u sferno simetričnom prostorvremenu:

$$E = -g_{\phi t}\dot{\phi} - g_{tt}\dot{t}, \quad L_z = g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{\phi t}\dot{t}. \quad (4.4)$$

Bitna je razlika da ovdje imamo  $L \rightarrow L_z$ , očuvanje konkretno  $z$ -komponente angularnog momenta, zbog osne simetrije. Za geodezike svjetlosnog tipa dobivamo četiri jednadžbe gibanja [32], od kojih su nam najvažnije one za  $\dot{\theta}$  i  $\dot{r}$ :

$$\Sigma^2\dot{\theta}^2 = K - \frac{(E\chi - L_z)^2}{\sin^2\theta}, \quad (4.5)$$

$$\Sigma^2\dot{r}^2 = ((\Sigma + a\chi)E - aL_z)^2 - \Delta K, \quad (4.6)$$

pri čemu smo uveli skraćeni zapis  $\chi \equiv \chi(\theta) = a \sin^2\theta$ . Oznaka  $K$  odnosi se na Cartrovu konstantu, posebnu očuvanu veličinu koja proizlazi iz separabilnosti Hamilton-Jacobi jednadžbe za geodezike u Kerrovu prostorvremenu [5, 32]. Nametanjem uvjeta gibanja po sferi konstantne radijalne koordinate  $r$ , odnosno  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , dobivamo:

$$K_E \stackrel{!}{=} \frac{((\Sigma + a\chi) - aL_E)^2}{\Delta}, \quad (4.7)$$

$$K_E \stackrel{!}{=} \frac{2r((\Sigma + a\chi) - aL_E)}{r - m}, \quad (4.8)$$

uz  $K_E \equiv K/E^2$  i  $L_E \equiv L_z/E$ . Rješavanjem sustava za konstante  $K_E$  i  $L_E$  dobivamo sljedeće izraze za sferične geodezike:

$$K_E(r) = \frac{4r^2\Delta(r)}{(r - m)^2}, \quad (4.9)$$

$$aL_E(r) = (\Sigma + a\chi) - \frac{2r\Delta}{r - m}. \quad (4.10)$$

Ako se ponovno ograničimo na slučaj (sferne) uniformne svijetle pozadine, po

pronalasku fotonskih regija konstrukcija sjene također se ne razlikuje mnogo od postupka koji smo ranije prošli za slučaj sferne simetrije. Postavljamo opažača na fiksnu poziciju u relevantnim koordinatama, za gornju metriku  $(r_O, \theta_O)$ , i promatramo svjetlosne geodezike koji kreću od njega "u prošlost". Zbog simetrija metrike položaj opažača tako je jedinstveno određen. Nešto tehnički kompliciranijom analizom dobivaju se izrazi koji određuju kritičnu krivulju, odnosno sjenu Kerrove crne rupe:

$$\sin \psi(r_p) = \frac{L_E(r_p) - a^2 \sin \theta_O}{\sqrt{K_E(r_p)} \sin \theta_O}, \quad (4.11)$$

$$\sin \theta(r_p) = \frac{\sqrt{\Delta(r_O)} \sqrt{K_E(r_p)}}{r_O^2 - aL_E(r_p) + a^2}, \quad (4.12)$$

gdje je  $r_p$  radijalna koordinatna graničnog sferičnog geodezika i stoga parametar svjetlosne krivulje,  $\psi$  azimutalni kut (standardno definiran za Kerrovo prostorvrijeme [32]), a  $K_E = K_E(r_p)$  i  $L_E = L_E(r_p)$  konstante gibanja svjetlosne zrake na  $r_p$ :

$$K_E(r_p) = \frac{4r_p^2 \Delta(r_p)}{(r_p - m)^2}, \quad (4.13)$$

$$aL_E(r_p) = \frac{-r_p^2(r_p - 3m) - r_p a^2 - a^2 m}{r_p - m}. \quad (4.14)$$

Parametar  $r_p$  potrebno je pustiti da prebriše sve moguće vrijednosti, tako da se  $\sin \psi(r_p)$  kreće od  $-1$  do  $1$ . Tako dobivamo krivulju  $(\psi(r_p), \theta(r_p))$ , parametriziranu s  $r_p$ , koja opisuje rub sjene. Krivulja se može prikazati koristeći stereografsku projekciju [5, 32]:

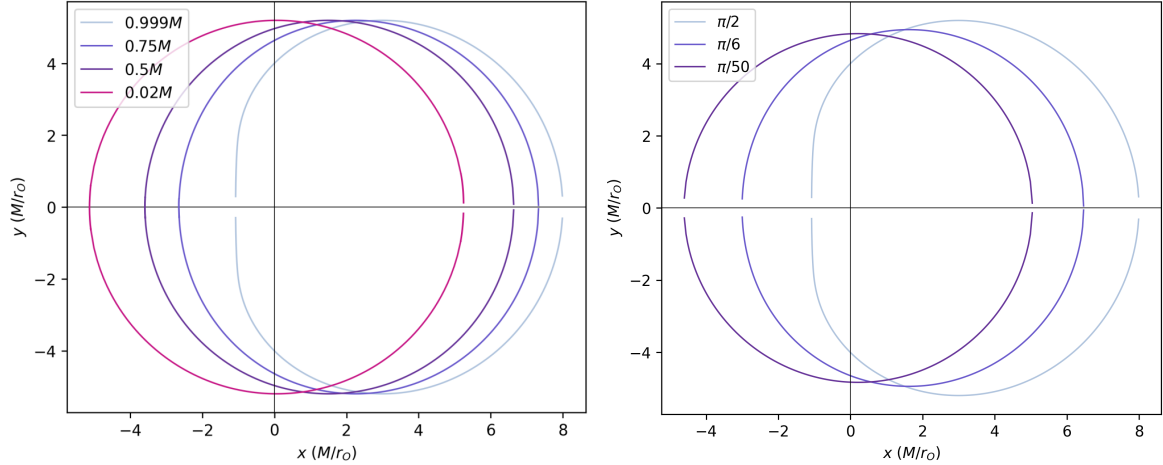
$$x(r_p) = -2 \operatorname{tg} \left( \frac{\theta(r_p)}{2} \right) \sin(\psi(r_p)), \quad y(r_p) = -2 \operatorname{tg} \left( \frac{\theta(r_p)}{2} \right) \cos(\psi(r_p)). \quad (4.15)$$

Ovako dobiveni rezultati mogu se proširiti dodatkom akrecijskog diska ili neprozirne okoline [6, 8]. Event Horizon Telescope predstavio je rezultat u izrazito dobrom slaganju s predviđanjima o sjeni Kerrove crne rupe, barem na dostupnoj rezoluciji [5, 2, 17]. Jednostavno je također promotriti granicu vrlo udaljenog opažača. U granici  $r_O \gg M$  izrazi (4.15) svode se na [5]:

$$x(r_p) = \frac{a \sin^2 \theta_O - L_E(r_p)}{r_O \sin \theta_O}, \quad y(r_p) = \pm \frac{1}{r_O} \sqrt{K_E(r_p) - \frac{(L_E(r_p) - a \sin^2 \theta_O)^2}{\sin^2 \theta_O}}. \quad (4.16)$$

Jedino svojstvo sjene sferno simetrične crne rupe koje smo diskutirali jest njezin

kutni polumjer, odnosno veličina. Za Kerrovu crnu rupu imamo mnogo raznolikiju familiju sjena. Oblik sjene Kerrove crne rupe više nije općenito disk, već ovisi o položaju opažača i parametrima crne rupe, konkretno ADM masi  $M$  i angularnom momentu  $a$  ili, zajednički, njihovu omjeru. Primjeri nekoliko sjena u ovisnosti o tim parametrima mogu se vidjeti projicirani na ravninu na slici 4.1.



Slika 4.1: Kritične krivulje Kerrove crne rupe u granici vrlo udaljenog opažača za različite angularne momente  $a$  pri čemu je opažač u ekvatorijalnoj ravnini  $\theta_O = \pi/2$  (lijevo) te različite polarne kutove  $\theta_O$  i fiksirani angularni moment  $a = 0.999M$  (desno). Krivulje su određene prema izrazu (4.16) za  $y > 0$  i zatim zrcaljene. Do odstupanja od  $x$ -osi dolazi zbog ograničenja računalne preciznosti. Pripremljeno prema [5].

Dodatkom angularnog momenta sjena postaje deformirana (spljoštena s jedne strane) duž horizontalne osi, ali je simetrična na refleksiju oko te iste osi. Drugim riječima, dio krivulje koji odgovara  $\pi/2 < \psi(r_p) \leq 3\pi/2$  jest zrcalna slika dijela  $-\pi/2 < \psi(r_p) \leq \pi/2$ . To se očituje iz parametrizacije krivulje, ali nije evidentno iz same metrike te stoga predstavlja zanimljiv rezultat. Deformacija nije vidljiva za polarnog opažača, što je i očekivano. Za fiksni angularni moment  $a$ , deformacija je maksimalna za ekvatorijalnog opažača. Primjetno je da deformacija postaje izražena tek za vrlo velike vrijednosti angularnog momenta  $a$ .

## 5 Jedinственost sjene

S obzirom na mogućnost direktnog opažanja sjena crnih rupa, prirodno je pitati se koliko su njihove značajke svojstvene konkretnim prostorvremenima, odnosno jesu li i kada su jedinstvene. Ključno je znati može li sjena služiti kao dodatna razlikovna karakteristika pri uspoređivanju previđanja različitih modela crnih rupa. U nastavku slijedi pregled glavnih ideja opisanih u [30] i, manjim dijelom, [4], kojim ćemo obuhvatiti pitanje jedinstvenosti sjene.

### 5.1 Statična, sferno simetrična prostorvremena

Razmotrimo ponovno općenitu statičnu, sferno simetričnu metriku danu linijskim elementom (2.1), uza specijalniji, sugestivniji izbor funkcija  $A(r)$  i  $B(r)$ :

$$A(r) = V(r)\tilde{A}(r), \quad B(r) = \frac{1}{V(r)\tilde{B}(r)}, \quad (5.1)$$

gdje je  $V(r) = 1 - 2m/r$  Schwarzschildova funkcija, ali  $m$  nije nužno ADM masa  $M$ , već je izabrana tako da fiksira horizont događaja na  $2m$ . Time smo osigurali da objekt koji razmatramo ima singularno ponašanje na horizontu, ali ne i izvan. Također, možemo neformalno reći da je objekt koji razmatramo crna rupa, a ne neki ultrakompaktni objekt bez horizonta. Schwarzschildovo prostorvrijeme služiti će nam kao referentno jer je od posebne važnosti – jedinstveno je sferno simetrično vakuumsko rješenje Einsteinovih jednažbi prema Birkhoffovu teoremu [1].

Uvodimo i nekoliko specijalnih zahtjeva:

1.  $D(r) = r^2$ .
2. Prostorvrijeme je asimptotski ravno, odnosno vrijedi uvjet (3.16), ali sad za funkcije  $\tilde{A}(r)$  i  $\tilde{B}(r)$ .
3. Funkcije  $\tilde{A}(r)$  i  $\tilde{B}(r)$  svugdje su pozitivne izvan horizonta i barem su  $C^1$ .

Svi su ti zahtjevi fizikalno smisleni i već smo ih ranije uvodili u drugim kontekstima. Napominjemo ponovno da je izbor funkcija  $D(r)$  opravdan i zbog mogućnosti koordinatne transformacije. Drugim riječima, koordinata  $r$  ovdje je arealna.

Efektivni potencijal  $h(r)$  – pri čemu smo uzeli recipročni korijen u odnosu na raniji račun, odnosno izraz (3.7) – poprima oblik:

$$h(r) = \frac{\sqrt{\tilde{A}(r)V(r)}}{r}. \quad (5.2)$$

Primijetimo da je  $h(r) > 0$  izvan horizonta zbog svojstava funkcija  $\tilde{A}(r)$  i  $V(r)$ . Odmah je vidljivo i da je kritični udarni parametar oblika:

$$b_{\text{cr}} = \frac{r_{\text{ph}}}{\sqrt{\tilde{A}(r_{\text{ph}})V(r_{\text{ph}})}}. \quad (5.3)$$

Ranije smo zaključili da je kut  $\alpha$  koji opažatelj na udaljenosti  $r_O$  povezuje sa zrakom karakteriziranom točkom obrata  $R$  dan relacijom (3.13). Primijetimo da se ta relacija može preoblikovati tako da se odmah istakne značaj udarnog parametra  $b$ :

$$\sin \alpha = b h(r_O), \quad (5.4)$$

odnosno, prema relacijama (3.14) i (3.15):

$$\sin \alpha_{\text{sh}} = b_{\text{cr}} h(r_O), \quad (5.5)$$

pri čemu smo ponovno uzeli recipročni korijen efektivnog potencijala.

Možemo tvrditi da je sjena degenerirana ako se kut opažanja  $\alpha_{\text{sh}}$  za neku statičnu sferno simetričnu metriku, danu izrazom (2.1) uza spomenute specijalizacije, točno poklapa sa Schwarzschildovim slučajem. Uvjet degeneracije glasi:

$$\sin \alpha_{\text{sh}} \stackrel{!}{=} \sin \alpha_{\text{sh}}^{(\text{Schw})}, \quad (5.6)$$

gdje je  $\alpha_{\text{sh}}^{(\text{Schw})}$  kut opažanja za Schwarzschildovu crnu rupu. Jednostavnim uvrštavanjem možemo dobiti uvjet na kritični udarni parametar u općenitom prostorvremenu:

$$b_{\text{cr}} \frac{\sqrt{\tilde{A}(r_O)V(r_O)}}{r_O} = b_{\text{cr}}^{(\text{Schw})} \frac{\sqrt{1 \cdot V(r_O)}}{r_O} \quad (5.7)$$

$$b_{\text{cr}} \stackrel{(3.23)}{=} \frac{3\sqrt{3}M}{\sqrt{\tilde{A}(r_O)}}. \quad (5.8)$$

S obzirom na to da je fizikalno opravdano pretpostaviti da je radijalna koordinata opažača  $r_O$  izvan horizonta događaja, nemamo problema s izlučivanjem i kraćenjem Schwarzschildove funkcije  $V(r_O)$  u jednakosti (5.7), zbog čega nam je bilo bitno fiksirati položaj horizonta događaja na početku.

### 5.1.1 Degeneracija klase I

Iz oblika uvjeta (5.8) odmah se nameće jedna klasa prostorvremena koja, ako opisuju crnu rupu, imaju sjenu nerazpoznatljivu od Schwarzschildove. Za ta prostorvremena vrijedi jednostavan zahtjev:

$$\tilde{A}(r) = 1, \quad (5.9)$$

koji je pritom i dovoljan, ako razmatramo degeneraciju za *bilo kojeg* opažača.

Očigledno zanimljivo svojstvo tog zahtjeva jest da nikako ne ograničava izbor funkcije  $\tilde{B}(r)$ . To znači da degeneraciju sjene klase I možemo naći kod čitave familije prostorvremena koja nisu potpuno izometrična Schwarzschildovu, ali imaju izometrične hiperplohe konstantne radijalne koordinate – pa tako i  $r = \text{konst.}$  geodezike – zbog čega i dobivamo degeneraciju. Za taj je zaključak ključno da je koordinata  $r$  arealna radijalna koordinata.

U ovoj klasi degeneracije također vrijedi  $m = M$ , što slijedi iz  $\tilde{A}' = 0$  odredimo li polumjer fotonske sfere  $r_{\text{ph}}$  iz relacije (3.9), kao i ranije.

Primijetimo da Simpson-Visserovo prostorvrijeme pripada ovoj klasi [30]. Radijalna koordinata  $r$  u metrici danoj izrazom (3.44) odabrana je tako da demonstrira kako je metrika regularna u  $r = 0$ . Međutim, za  $l \neq 0$  nije arealna radijalna koordinata, što čini druga svojstva metrike manje očitima. Možemo uvesti novu radijalnu koordinatu  $\rho^2 \equiv r^2 + l^2$  i dobiti novi oblik linijskog elementa:

$$ds^2 = -V(\rho)dt^2 + \frac{1}{V(\rho)\tilde{B}_{\text{SV}}(\rho)} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.10)$$

Pritom smo koristili zapis relevantan za ovu cjelinu i uveli funkciju  $\tilde{B}_{\text{SV}}$ :

$$\tilde{B}_{\text{SV}}(\rho) = 1 - \frac{l^2}{\rho^2}. \quad (5.11)$$

U ovakvom zapisu postaje očito da SV metrika opisuje prostorvrijeme s degeneracijom sjene klase I za statičnog opažača jer vrijedi  $\tilde{A}(\rho) = 1$ . Uistinu, primijenimo li

koordinatnu transformaciju i na ranije rezultate relevantne za sjenu SV crne rupe, poglavito izraze (3.47) i (3.48), vidimo da se poklapaju sa Schwarzschildovim slučajem.

### 5.1.2 Degeneracija klase II

Ako  $\tilde{A}(r) \neq 1$ , ključno je primijetiti da ne možemo samo odbaciti mogućnost degeneracije jer funkcija  $h(r)$  može voditi na više fotonskih sfera. Pitanje jedinstvenosti u tom je slučaju nepotpuno; prvo je potrebno odrediti koja od višestrukih fotonskih sfera definira rub sjene. Primijetimo neka svojstva funkcije  $h(r)$ :

- Na fotonskoj sferi funkcija  $h(r_{\text{ph}})$  poprima tim veću vrijednost što je odgovarajući udarni parametar *manji*. To dogovara većoj potencijalnoj barijeri. Konkretno, duž geodezika mora biti zadovoljeno  $1/b \geq h(r)$ .
- Radijalno gibanje jedino može imati točku obrata kad  $1/b = h(r)$ .
- Funkcija  $h(r)$  iščezava na horizontu jer smo fiksirali horizont u nultočki Schwarzschildove funkcije  $V(r)$ .

Prva dva zaključka u [30] slijede iz oblika hamiltonijana sustava, no lako je vidjeti da ih naši raniji rezultati, poglavito jednakosti (3.2), (3.8) i (3.15), također impliciraju. Konkretno za prvu točku, iz jednadžbe (3.8) vidimo da desna strana mora biti nenegativna. Kako bi ta nejednakost bila zadovoljena, izraz u zagradama također mora biti nenegativan jer su funkcije  $D(r)$  i  $B(r)$  pozitivne svugdje izvan horizonta. Izraz u zagradama možemo faktorizirati po uzoru na [30]:

$$\left(\frac{h^{-1}(r)}{b} - 1\right) \left(\frac{h^{-1}(r)}{b} + 1\right) \geq 0 \quad (5.12)$$

te prvo svojstvo funkcije  $h(r)$  navedeno gore odmah slijedi<sup>4</sup>.

Uzevši to u obzir, zajedno s činjenicom da kritični geodezici odgovaraju lokalnom maksimumu  $h(r)$ , možemo zaključiti da će dominantna fotonska sfera biti ona za koju je potencijalna barijera najveća, odnosno ona koja ima najmanji udarni parametar  $b$ .

Kombinacijom uvjeta degeneracije danog izrazom (5.8) te uvjeta iz prve točke ovog dijela,  $1/b \geq h(r)$  dobivamo nužan i dovoljan uvjet za  $\tilde{A}(r)$  da bismo dobili istu

---

<sup>4</sup>Kako bismo mogli slobodno napisati izraz točno u obliku  $1/b \geq h(r)$  potrebne su dodatne, "prešutne" pretpostavke o funkciji  $h(r)$  i udarnom parametru  $b$ , no one slijede iz svojstava metričkih funkcija i ograničenja na područje izvan horizonta događaja.



sjenu kao u Schwarzschildovu slučaju:

$$\tilde{A}(r) \leq \frac{r^3}{r - 2m} \left( \frac{\tilde{A}(r_O)}{27M^2} \right), \quad (5.13)$$

pri čemu jednakost mora vrijediti bar jednom izvan horizonta za neki  $r_{\text{ph}}^{\text{dom}} < r_O$ , na kojem je garantirano da vrijedi i jednakost (5.8). Jasno, pretpostavka je da se opažač nalazi izvan horizonta  $i$  izvan fotonske sfere.

Ovim smo uvjetom definirali degeneraciju sjene klase II kod statičnih, sferno simetričnih prostorvremena, čiji je jedan slučaj,  $\tilde{A}(r) = 1$ , zapravo klasa I od ranije.

Fotonske sfere koje nisu dominantne ne ostvaruju uvjete za rub sjene crne rupe, ali mogu imati ulogu u efektu gravitacijske leće. Dosad smo komentirali isključivo oblik, odnosno veličinu sjene. Međutim, nismo ništa tvrdili o efektu leće oko razmatranih crnih rupa; vrijedi naglasiti da degeneracije sjene *ne* povlači degeneraciju uzorka leće.

Za još točniji tretman morali bismo uzeti u obzir činjenicu da fotoni mogu međudjelovati s materijom, što smo dosad u potpunosti zanemarivali. Put svjetlosti nije određen samo geometrijom prostorvremena, već i optičkim svojstvima sredstava kroz koja putuje. Realna crna rupa u svojoj neposrednoj blizini može imati vrlo optički guste medije. Na astrofizičkim udaljenostima možemo očekivati još raznolikije i brojnije interferencije. Budući da osvjetljenje može biti raznih vrsta, gustoća i prostornih raspodjela, saznanja dobivena iz idealiziranih modela očito ne mogu biti direktno primjenjiva na zaključke o jedinstvenosti.

## 6 Zaključak

Proučavanjem sjena crnih rupa dobivamo novi alat za ispitivanje njihovih svojstava, pa tako i testiranje predviđanja Einsteinove opće teorije relativnosti. Postignuća Event Horizon Telescope kolaboracije omogućila su direktno opažanje crnih rupa, odnosno njihovih sjena, čime se ovaj teorijski okvir smjestio u prvi plan promatračke astrofizike.

Sjena je velikim dijelom proizvod zračenja u odnosu na koje se ističe, no fundamentalno je posljedica velike zakrivljenosti prostorvremena u blizini crnih rupa. Posebnu smo pozornost uputili razlikovanju čestih termina bliskih sjeni kako bismo razdvojili nju samu od okolnih optičkih efekata te, najbitnije, fotonskog prstena, koji smo shvatili kao fizikalnu pozadinu pojave sjene.

Ovdje smo se osvrnuli na neke aktualne, poglavito analitičke rezultate u teoriji sjena crnih rupa. Poznavanjem geodezika svjetlosnog tipa, za danog opažača moguće je odrediti sjenu crne rupe za široku klasu prostorvremena slijedeći nekoliko osnovnih načela. Rješavanjem jednadžbe geodezika za odgovarajuću metriku možemo pronaći fundamentalne fotonske orbite. Tada možemo za odabranog fizikalnog opažača, smještenog izvan horizonta događaja, zamisliti zrake emitirane "u prošlost", prema crnoj rupi, i promotriti njihovo zakretanje pod utjecajem gravitacije. Konačno možemo pronaći one zrake koje asimptotski prilaze fotonskoj orbiti i stoga ne mogu polaziti od izvora zračenja, ocrtavajući kritičnu krivulju – rub sjene.

Ovisno o raspodjeli zračenja, ti se osnovni koraci mogu primijeniti sasvim analitički ili, po potrebi, numerički. Najjednostavnija demonstracija određivanja sjene jest idealni primjer uniformno svijetle sferne pozadine. Za statična, sferno simetrična prostorvremena taj je postupak računski osobito jednostavan. Rezultirajući vizualni profil oblika je tamnog diska, čija je veličina određena svojstvima prostorvremena. Vidjeli smo na primjeru Schwarzschildove crne rupe ispred beskonačne *ravne* pozadine da dobiveni uzorak može biti kompliciraniji jer se oko sjene, koja je tamna *unatoč* osvjetljenju, nalaze optički (tzv. "lensing") prstenovi *zbog* postojanja mračnog dijela svemira. Takve slike tamnih regija definicijski razlikujemo od sjene. Promotрили smo u kojoj je mjeri veličina sjene u idealiziranom slučaju uniformne sferne pozadine razlikovna karakteristika i ustanovili da sjene mogu biti degenerirane, iako okolni uzorak proizveden efektom leće u pravilu nije. Na primjeru Kerrove crne rupe vidjeli smo

kako se na izgledu sjene očituju efekti povlačenja koji se javljaju dodatkom angularnog momenta.

Iako je već dosad učinjen veliki napredak, još uvijek postoje mnogi izazovi, posebice pri proučavanju i modeliranju toka akrecije, gibanja i optičkih svojstava okolnih medija te njihovih efekata na promatranu sjenu. Kako se promatračke tehnike poboljšavaju i razlučivost raste, a simulacije postaju sve sofisticiranije, otvaraju se nova vrata statistički značajnim promatračkim rezultatima. Pripremamo se otkriti još više o crnim rupama kao fascinantnim kozmičkim objektima i potencijalno dodatno osvijetliti temeljne zakone prirode.

# Dodatci

## Dodatak A Kauzalna struktura i izometrije prostorvremena

Sve nadalje preuzeto je iz [1] i [33]. Prostorvrijeme neformalno definiramo kao uređen par  $(M, g_{\mu\nu})$  mnogostrukosti Lorentzova tipa  $M$  i pripadne metrike  $g_{\mu\nu}$ .

**Definicija A.1.** Neka je  $M$  glatka mnogostrukost i  $T_pM$  prostor tangenitnih vektora u točki  $p \in M$ . Tangentni vektori  $v \in T_pM$  mogu biti:

- vremenskog tipa ako je  $g(v, v) < 0$ ,
- svjetlosnog tipa ako je  $g(v, v) = 0$  i
- prostornog tipa ako je  $g(v, v) > 0$ ,

pri čemu je  $g(x, y) \equiv g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ . Vektore vremenskog i svjetlosnog tipa nazivamo kauzalnima.

**Definicija A.2.** Za mnogostrukost  $M$  kažemo da je vremenski orijentabilna ako posjeduje neprekidno polje tangenitnih vektora  $t^\mu$  vremenskog tipa. Tada kauzalne vektore  $v \in T_pM$  možemo podijeliti na prošlo usmjerene ( $g(t(p), v) > 0$ ) i buduće usmjerene ( $g(t(p), v) < 0$ ).

**Definicija A.3.** Neka je  $\gamma$  krivulja na mnogostrukosti  $M$ . Ako je tangenitni vektor krivulje  $\gamma$  u svakoj točki svjetlosnog tipa, onda je i krivulja  $\gamma$  svjetlosnog tipa. Krivulje vremenskog i prostornog tipa jednako se definiraju.

**Definicija A.4.** Za vektorsko polje  $K^a$  kažemo da je Killingovo vektorsko polje ako zadovoljava Killingovu jednadžbu:

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = \nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0 \quad (\text{A.1})$$

**Propozicija A.1.** Neka je  $K^a$  Killingovo vektorsko polje i  $\gamma$  geodezik s tangenitnim vektorom  $u^a$ . Tada je veličina  $K_a u^a$  konstantna duž geodezika.

*Dokaz.* Imamo:

$$u^b \nabla_b (K_a u^a) = u^b u^a \nabla_b K_a + K_a u^b \nabla_b u^a = 0. \quad (\text{A.2})$$

Prvi član iščezava po Killingovoj jednadžbi, odnosno zbog kontrakcije simetričnog tenzora  $u^b u^a$  s antisimetričnim tenzorom  $\nabla_b K_a$ . Drugi član iščezava po jednadžbi geodezika  $u^a \nabla_a u^b = 0$ .  $\square$

Sada vidimo zašto možemo smatrati Killingova vektorska polja infinitezimalnim generatorima izometrija prostorvremena. S obzirom na to da kauzalni geodezici predstavljaju putanje u općoj teoriji relativnosti, Killingov vektor implicira postojanje očuvanih veličina duž geodezika. U stacionarnom prostorvremenu postoji Killingov vektor  $\partial/\partial t \equiv \partial_t$  koji predstavlja vremenske translacije.

## Dodatak B Jednadžbe gibanja iz jednadžbe geodezika

**Definicija B.1.** Za krivulju  $x^\mu(\lambda)$  kažemo da je geodezik ako zadovoljava jednadžbu geodezika:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.1})$$

gdje je  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  Christoffelov simbol:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \quad (\text{B.2})$$

Geodezici su generalizacija euklidske ravne linije, odnosno "najmanje moguće zakrivljene" krivulje. U općoj teoriji relativnosti slobodne čestice gibaju se po geodezicima. Krucijalno je da tip geodezika određen prema definiciji A.3 ostaje sačuvan. Drugim riječima, norma tangentnog vektora jest očuvana veličina. Konkretno imamo, prema jednadžbi geodezika i kompatibilnosti kovarijantne derivacije s metrikom:

$$-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \epsilon, \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (\text{B.3})$$

pri čemu je  $\epsilon = 0$  za geodezike svjetlosnog tipa. Iz tog izraza jednostavno je odrediti jednadžbe gibanja [1].

U Schwarzschildovu prostorvremenu (metrika (3.19)) moguće je analitički analizirati svjetlosne geodezike, no za kvalitativnu analizu korisna je i numerička integra-

cija. Krenemo li od izraza (B.3) za Schwarzschildovu metriku dobivamo:

$$\frac{E^2}{1 - 2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - \frac{L^2}{r^4} = 0, \quad (\text{B.4})$$

pri čemu smo uvrstili jednakosti (2.6) za očuvane veličine  $E$  i  $L$ . Diferenciramo li još jednom, dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda za  $r$ :

$$\ddot{r} = \frac{L^2(r - 3M)}{r^4} \quad (\text{B.5})$$

koja se lako može riješiti numerički kao sustav vezanih diferencijalnih jednadžbi:

$$\dot{r} = v \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{v} = \frac{L^2(r - 3M)}{r^4} \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (\text{B.8})$$

primjerice korištenjem funkcije `odeint` iz `scipy.integrate` paketa u Pythonu. Pri tom smo uveli varijablu  $v$  kako bismo sve jednadžbe sveli na prvi red. Naravno, potrebno je specificirati i početne uvjete. Kako bismo dobili krivulje prikazane na slici 1.2, s obzirom na to da pretpostavljamo za sve ulazne zrake da imaju horizontalnu brzinu istog iznosa, potrebno je odrediti početne koordinate:  $x$ -koordinatu  $x_0$  i udarni parametar  $b$  (jer biramo koordinatni sustav tako da je  $b = y_0$ ). Radi jednostavnosti možemo postaviti  $\dot{t} = 1$ . Ostali uvjeti jednostavno slijede:

$$r_0 = \sqrt{x_0 + b^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\phi_0 = \arccos(x_0/r) \quad (\text{B.10})$$

$$v_0 = \cos \phi \quad (\text{B.11})$$

$$\left(\dot{\phi}\right)_0 = -\frac{\sqrt{1 - v_0^2}}{r_0}, \quad (\text{B.12})$$

prema čemu je onda konstanta gibanja  $L$  dana kao:

$$L = r_0^2 \left(\dot{\phi}\right)_0. \quad (\text{B.13})$$

## Literatura

- [1] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [2] Event Horizon Telescope Collaboration i dr. „First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole”. *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, L1 (2019.), str. L1. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0ec7. arXiv: 1906.11238.
- [3] Vitor Cardoso i dr. „Light rings as observational evidence for event horizons: Long-lived modes, ergoregions and nonlinear instabilities of ultracompact objects”. *Physical Review D* 90.4 (2014.). DOI: 10.1103/physrevd.90.044069. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.044069>.
- [4] Pedro V. P. Cunha, Emanuele Berti i Carlos A. R. Herdeiro. „Light-Ring Stability for Ultracompact Objects”. *Physical Review Letters* 119.25 (2017.). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.119.251102. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251102>.
- [5] Volker Perlick i Oleg Yu. Tsupko. „Calculating black hole shadows: Review of analytical studies”. *Physics Reports* 947 (2022.), str. 1–39. ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.10.004. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.004>.
- [6] Thomas Bronzwaer i Heino Falcke. „The Nature of Black Hole Shadows”. *The Astrophysical Journal* 920.2 (2021.). DOI: 10.3847/1538-4357/ac1738. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ac1738>.
- [7] G. S. Bisnovatyi-Kogan, O. Yu. Tsupko i V. Perlick. *Shadow of black holes at local and cosmological distances*. 2019. arXiv: 1910.10514 [gr-qc].
- [8] Samuel E. Gralla, Daniel E. Holz i Robert M. Wald. „Black hole shadows, photon rings, and lensing rings”. *Phys. Rev. D* 100 (2 2019.), str. 024018. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.024018.
- [9] J. L. Synge. „The escape of photons from gravitationally intense stars”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 131 (1966.), str. 463–466.

- [10] J. M. Bardeen. „Timelike and null geodesics in the Kerr metric.” *Black Holes (Les Astres Occlus)*. Ur. C. Dewitt i B. S. Dewitt. 1973., str. 215–239.
- [11] J.-P. Luminet. „Image of a spherical black hole with thin accretion disk”. *Astronomy and Astrophysics* 75.1-2 (1979.).
- [12] Heino Falcke, Fulvio Melia i Eric Agol. „Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center”. *The Astrophysical Journal* 528.1 (1999.).
- [13] LIGO Scientific Collaboration i Virgo Collaboration. „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. *Physical Review Letters* 116.6, 061102 (2016.), str. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].
- [14] B. Louise Webster i Paul Murdin. „Cygnus X-1-a Spectroscopic Binary with a Heavy Companion ?”: *Nature* 235.5332 (1972.), str. 37–38. DOI: 10.1038/235037a0.
- [15] A. M. Ghez i dr. „High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A\*: Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy”. *The Astrophysical Journal Letters* 509.2 (1998.), str. 678–686. DOI: 10.1086/306528. arXiv: astro-ph/9807210 [astro-ph].
- [16] Event Horizon Telescope Collaboration i dr. „First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole”. *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, L6 (2019.), str. L6. DOI: 10.3847/2041-8213/ab1141. arXiv: 1906.11243 [astro-ph.GA].
- [17] Event Horizon Telescope Collaboration i dr. „First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way”. *The Astrophysical Journal Letters* 930.2, L12 (2022.), str. L12. DOI: 10.3847/2041-8213/ac6674.
- [18] Event Horizon Telescope Collaboration i dr. „First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation”. *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, L2 (2019.), str. L2. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0c96. arXiv: 1906.11239 [astro-ph.IM].



- [19] Event Horizon Telescope Collaboration i dr. „First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration”. *The Astrophysical Journal Letters* 875.1, L3 (2019.), str. L3. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0c57. arXiv: 1906.11240 [astro-ph.GA].
- [20] Arne Grenzebach. *The Shadow of Black Holes: An Analytic Description*. Springer, 2016.
- [21] Pedro V. P. Cunha, Carlos A. R. Herdeiro i Eugen Radu. „Fundamental photon orbits: Black hole shadows and spacetime instabilities”. *Physical Review D* 96.2 (2017.). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.96.024039. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.024039>.
- [22] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity (Second Edition)*. Cambridge University Press, 2009.
- [23] Wolfgang Hasse i Volker Perlick. „Gravitational Lensing in Spherically Symmetric Static Spacetimes with Centrifugal Force Reversal”. *General Relativity and Gravitation* 34.3 (2002.), str. 415–433. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1023/a:1015384604371. URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1015384604371>.
- [24] C. W. Misner, K. S. Thorne i J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, Sand Francisco, 1973.
- [25] F. Dahia i P. J. Felix da Silva. „Static observers in curved spaces and non-inertial frames in Minkowski spacetime”. *General Relativity and Gravitation* 43.1 (2010.), str. 269–292. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-010-1086-1. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-1086-1>.
- [26] Arne Grenzebach. „Aberrational Effects for Shadows of Black Holes”. *Equations of Motion in Relativistic Gravity*. Springer International Publishing, 2015., str. 823–832. ISBN: 9783319183350. DOI: 10.1007/978-3-319-18335-0\_25. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-18335-0\\_25](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-18335-0_25).
- [27] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Clarendon Press, 1983.
- [28] Volker Perlick, Oleg Yu. Tsupko i Gennady S. Bisnovatyi-Kogan. „Black hole shadow in an expanding universe with a cosmological constant”. *Phys. Rev. D*

- 97 (10 2018.), str. 104062. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.104062. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.104062>.
- [29] Alex Simpson i Matt Visser. „Black-bounce to traversable wormhole”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.02 (2019.), str. 042–042. ISSN: 1475-7516. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/02/042. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/042>.
- [30] Haroldo C. D. Lima Junior i dr. „Can different black holes cast the same shadow?": *Physical Review D* 103.8 (2021.). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.103.084040. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.084040>.
- [31] Paul F. Byrd i Morris D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. 2. izdanje. Springer-Verlag, 1971.
- [32] Arne Grenzebach, Volker Perlick i Claus Lämmerzahl. „Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant”. *Physical Review D* 89.12 (2014.). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.89.124004. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.124004>.
- [33] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.