Hilbert-Schmidtovi operatori

Basarić, Sanela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sanela Basarić

HILBERT-SCHMIDTOVI OPERATORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Boris Guljaš

Zagreb, travanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Osnovni pojmovi i definicije **3**

2 Hilbert-Schmidtovi operatori **7**

3 Kompaktni i integralni operatori **13**

4 Hadamardova i Carlemanova nejednakost **22**

5 Trag Hilbert-Schmidtovih operatora **32**

Bibliografija **45**

Uvod

Prvu studiju o Hilbert-Schmidtovim operatorima su početkom 20. stoljeća, točnije 1907. godine dali David Hilbert i njegov učenik Erhard Schmidt, te su po njima ti operatori i dobili ime. Dvadeset godina kasnije, 1927. godine John von Neumann dao je općenitu definiciju Hilbert-Schmidtovih operatora na Hilbertovim prostorima. Iako je teorija ideala u Banachovoj algebri na Hilbertovim prostorima potekla od John Wilson Calkina, krajem prve polovice 20. stoljeća, za većinu tih rezultata ipak je zaslužan John von Neumann. Općenitiji pristup Hilbert-Schmidtovim operatorima i ostalim klasama operatora dao je Robert Schatten šezdesetih godina 20. stoljeća.

Hilbert-Schmidtovi operatori, zajedno s nuklearnim operatorima, čine istaknutu klasu kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru. U ovom diplomskom radu definirat ćemo Hilbert-Schmidtove operatore i navesti njihova osnovna svojstva.

Na početku rada, u prvom poglavlju, navodimo nekoliko osnovnih definicija i tvrdnji o vektorskim prostorima i linearnim operatorima na njima koje ćemo koristiti u nastavku rada. U drugom poglavlju definiramo Hilbert-Schmidtove operatore te pokazujemo da definicija ovisi o Hilbertovom prostoru na kojemu se operatori definiraju, ali ne i o izboru baze tog prostora. Odmah po tome definiramo Hilbert-Schmidtovu normu, navodimo nekoliko njezinih svojstava te pokazujemo da je skup Hilbert-Schmidtovih operatora s pripadajućom normom Banachova algebra i obostrani ideal. U sljedećem poglavlju definiramo Hilbert-Schmidtove operatore na prostoru pozitivne mjere, odnosno dolazimo do definicije integralnih Hilbert-Schmidtovih operatora. Zatim pokazujemo da je svaki Hilbert-Schmidtov operator kompaktan operator. U ovom poglavlju još pokazujemo da ukoliko imamo analitičku funkciju f na okolini spektra Hilbert-Schmidtovog operatora A da je onda i f(A) Hilbert-Schmidtov operator, što će nam koristiti u razvoju teorije o tragu Hilbert-Schmidtovih operatora. Prije teorije o tragu Hilbert-Schmidtovih operatora, u četvrtom poglavlju, navodimo dvije nejednakosti koje su nam od izuzetne važnosti za ovaj dio teorije, a to su Hadamardova i Carlemanova nejednakost. U petom poglavlju definiramo trag Hilbert-Schmidtovih operatora te primjećujemo da se, za razliku od nuklearnih operatora, koji su im vrlo bliski i imaju konvergentan trag, trag Hilbert-Schmidtovih operatora definira za par dvaju operatora. Nakon toga pokazujemo da je trag Hilbert-Schmidtovih operatora simetrična bilinearna funkcija, kao i da je trag dvaju kvazi-nilpotentnih Hilbert-Schmidtovih operatora jednak nuli. Na samom kraju pokazujemo odnos traga Hilbert-Schmidtovih operatora definiranih pomoću funkcija koje su analitičke na okolini spektra Hilbert-Schmidtovih operatora i vrijednosti tih funkcija u točkama spektra.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i definicije

Pod oznakom polja $\mathbb{K}$ podrazumijevamo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. X je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$.

Definicija 1.1. *Norma na X je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, za koje vrijedi*

1. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$ *(pozitivnost)* .
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(strogost).*
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \quad \forall x \in X,$ *(pozitivna homogenost).*
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X,$ *(subaditivnost-relacija trokuta).*

Normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ je uređeni par vektorskog prostora i norme na njemu.

Definicija 1.2. *Skalarni produkt na X je preslikavanje $(\cdot \mid \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x \mid y) \mapsto (x \mid y)$ za koje vrijedi*

1. $(x \mid x) \geq 0, \quad \forall x \in X$ *(pozitivnost)* .
2. $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(strogost).*
3. $\forall y \in X$ *je* $x \mapsto (x \mid y)$ *linearan funkcional na* X.

4. $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$, $\forall x, y \in X$ *(hermitska simetrija).*

Unitarni prostor $(X, (\cdot \mid \cdot))$ *je uređen par vektorskog prostora i skalarnog produkta na njemu.*

Teorem 1.3. *(Cauchy-Schwarz-Buniakowsky)*
Neka je $(X, (\cdot \mid \cdot))$ *unitaran prostor. Tada je*

$$|(x \mid y)|^2 \leq (x \mid x)(y \mid y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su x *i* y *linearno zavisni (proporcionalni).*

Definicija 1.4. *Neka su* $(X, \|\cdot\|)$ *i* $(Y, \|\cdot\|)$ *normirani prostori. Linearno preslikavanje* $\varphi : X \to Y$ *takvo da za svaki* $x \in X$ *vrijedi* $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ *nazivamo izometrija. Ako je* φ *bijektivna izometrija onda kažemo da su normirani prostori* X *i* Y *izometrički izomorfni.*

Definicija 1.5. *Normirani prostor* X *je potpun ili Banachov ako je svaki Cauchyev niz u* X *konvergentan.*

Propozicija 1.6. *Konačno dimenzionalan normiran prostor je potpun.*

Definicija 1.7. *Potpun unitaran prostor nazivamo Hilbertov prostor.*

Teorem 1.8. ***Hahn-Banachov teorem***
Neka je X *normiran prostor,* $Y \leq X$ *i* $f \in Y'$*. Postoji* $g \in X'$ *takav da je* $g|_Y = f$ *i* $\|g\| = \|f\|$.

Definicija 1.9. *Normiran prostor je separabilan ako posjeduje gust prebrojiv podskup.*

Definicija 1.10. *Algebra* $\mathcal{A}$ *je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{K}$ *u kojem je definirana operacija* $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ *sa svojstvima:*

1. $a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$, *(asocijativnost),*

2. $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$ *i* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *(kvaziasocijativnost)*

3. $a(b+c) = ab+ac$ *i* $(a+b)c = ac+bc, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$, *(distributivnost)*

Ako $\mathcal{A}$ *sadrži element e sa svojstvom* $ae = ea = a$, $\forall a \in \mathcal{A}$, *onda kažemo da je* $\mathcal{A}$ *algebra s jedinicom.*

Definicija 1.11. *Podskup* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *je podalgebra algebre* $\mathcal{A}$ *ako je i sam algebra s obzirom na operacije u* $\mathcal{A}$. *Podalgebra* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ *je lijevi ideal u algebri* $\mathcal{A}$ *ako je* $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ *ili desni ideal u algebri* $\mathcal{A}$ *ako je* $\mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$. *Kažemo da je* $\mathcal{I}$ *ideal u* $\mathcal{A}$ *ako je i desni i lijevi ideal.*

Definicija 1.12. *Homomorfizam algebri* $\mathcal{A}_1$ *i* $\mathcal{A}_2$ *je linearno preslikavanje* $\varphi : \mathcal{A}_{\rightarrow}\mathcal{A}_2$ *za koje vrijedi* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}_1$. *Ako je* φ *bijekcija onda ga nazivamo izomorfizam algebri.*

Definicija 1.13. $\mathcal{A}$ *je normirana algebra ako vrijedi:*

1. $\mathcal{A}$ *je algebra s jedinicom nad* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2. $\mathcal{A}$ *je normiran prostor.*

3. $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$.

4. $||e|| = 1$

Ako je $\mathcal{A}$ *Banachov prostor onda se* $\mathcal{A}$ *naziva Banachova algebra.*

Svaka normirana algebra se može upotpuniti, kao normiran prostor, do Banachove algebre.

Definicija 1.14. *Neka je* $\mathcal{A}$ *normirana algebra i* $x \in \mathcal{A}$. *Broj*

$$\nu(x) = inf\{||x^n||^{\frac{1}{n}}\,;\ n \in \mathbb{N}\}$$

nazivamo spektralni radijus elementa x.

Definicija 1.15. *Za* $a \in \mathcal{A}$ *skup* $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda e - a \notin G(A)\}$ *nazivamo spektar od a. Skup* $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *nazivamo rezolventni skup od a.*

Teorem 1.16. *Za svaki $a \in \mathcal{A}$ je $\sigma(a)$ neprazan i kompaktan skup i*

$$\nu(a) = max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Neka je do daljnjega X kompleksan Banachov prostor. Tada je $B(X)$ kompleksna Banachova algebra s operatorskom normom $||A|| = \sup\{||Ax||\,;||x|| = 1\}$ i jedinicom I. Za $A \in B(X)$ se spektar operatora definira kao $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A$ nije invertibilan u $B(X)\}$. Nekoliko je mogućih razloga da $\lambda I - A$ ne bude invertibilan. Po tome se točke spektra dijele u nekoliko kategorija.

Definicija 1.17. *Neka je $A \in B(X)$.*

1. *Točkovni spektar operatora A je*
   $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A$ *nije injekcija* $\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ N(\lambda I - A) \neq \{0\}\}$.

2. *Kontinuirani spektar operatora A je*
   $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A$ *je injekcija,* $R(\lambda I - A) \neq X, \overline{R(\lambda I - A)} = X\}$.

3. *Rezidualni spektar operatora A je*
   $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A$ *je injekcija,* $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X\}$.

Definicija 1.18. *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je podskup $S \subseteq X$ relativno kompaktan u X, ako je $\overline{S}$ kompaktan skup u X.*

Skup $S \subseteq X$ je relativno kompaktan u X ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz u X. U slučaju Banachovog prostora X, $S \subseteq X$ je relativno kompaktan u X ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq X$ takav da je $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, \varepsilon) \subseteq X$. Skup $\{x_1, \cdots, x_n\}$ je $\varepsilon-$mreža za S. Svaki relativno kompaktan skup u normiranom prostoru je ograničen.

Definicija 1.19. *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je operator $A : X \to Y$ kompaktan operator ako je skup $\{Ax;\ x \in X,\ ||x|| \leq 1\}$ relativno kompaktan u Y. Skup svih takvih operatora označavamo s $K(X, Y)$.*

Operator $A : X \to Y$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz $(x_n)_n$ u X postoji podniz niza $(Ax_n)_n$ koji je konvergentan u Y.

Poglavlje 2

Hilbert-Schmidtovi operatori

Definicija 2.1. *Neka su X i Y separabilni Hilbertovi prostori. Operator $A \in L(X, Y)$ je Hilbert-Schmidtov operator, kratko HS-operator, ako je za svaku ortonormiranu bazu $(e_n, n \in \mathbb{N})$ prostora X*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty \tag{2.1}$$

Propozicija 2.2. *Ako za operator $A \in L(X, Y)$ postoji ortonormirana baza (e_n) u X takva da vrijedi* (2.1)*, onda za svaku ortonormiranu bazu (e'_n) u X red $\sum_n \left\|Ae'_n\right\|^2$ konvergira i vrijedi*

$$\sum_n \left\|Ae'_n\right\|^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 \geq \|A\|^2 \tag{2.2}$$

Nadalje za svaku ortonormiranu bazu (f_i) prostora Y vrijedi

$$\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_i \|A^* f_i\|^2 \tag{2.3}$$

Dokaz. Iz $Ae'_n = \sum_i (Ae'_n \mid f_i) f_i$ dobivamo:

$$\sum_n \left\|Ae'_n\right\|^2 = \sum_n \sum_i |(Ae'_n \mid f_i)|^2 = \sum_i \sum_n |(A^* f_i \mid e'_n)^2|$$

$$= \sum_i |\sum_n (A^* f_i \mid e'_n) e'_n|^2 = \sum_i \|A^* f_i\|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_n \left\|Ae'_n\right\|^2 = \sum_i \|A^* f_i\|^2 \tag{2.4}$$

Jednakost (2.4) vrijedi za svaki par ortonormiranih baza (e'_n) u X i (f_i) u Y. Uzmemo li $e'_n = e_n$ u (2.4), nalazimo da red $\sum \left\|A^* f'_i\right\|^2$ konvergira i da vrijedi (2.3). No tada i red $\sum \left\|Ae'_n\right\|^2$ konvergira za svaku ortonormiranu bazu (e'_n). Odavde i iz (2.4) dobivamo jednakost (2.2).

Za $\varepsilon > 0$ postoji jedinični vektor $e \in X$ takav da je $\|A\|^2 < \varepsilon + \|Ae\|^2$. Uzmemo li ortonormiranu bazu (e'_n) u X takvu da je $e'_1 = e$, onda je $\|A\|^2 < \varepsilon + \left\|Ae'_n\right\|^2$. Odavde zbog proizvoljnosti broja ε dobivamo $\|A\|^2 \leq \sum\limits_n \left\|Ae'_n\right\|^2$ $\square$

Definicija 2.3. *Za Hilbert-Schmidtov operator $A \in L(X, Y)$ i ortonormiranu bazu (e_n) prostora X broj*

$$\|A\|_{hs} = (\sum_n \|Ae_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

nazivamo Hilbert-Schmidtova norma ili dvostruka norma operatora A. Sa HS označavamo skup svih HS-operatora $A \in L(X, Y)$, a sa C_2 skup svih HS-operatora $A \in L(X)$.

Korolar 2.4. *Neka je A HS-operator i $(e_n, \ n \in \mathbb{N})$ ortonormirana baza prostora X, tada vrijedi*

$$\|A\|_{hs} = (\sum_{i,j} |(Ae_i \mid e_j)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Teorem 2.5. *1. Ako je $A \in L(X, Y)$ HS-operator, onda je i $A^* \in L(Y, X)$ HS-operator i vrijedi*

$$\|A\| \leq \|A\|_{hs} = \|A^*\|_{hs} \tag{2.6}$$

2.Neka je $A \in HS$ i U unitaran operator. Tada je $U^{-1}AU \in HS$ i $\|A\|_{hs} = \left\|U^{-1}AU\right\|_{hs}$
3. HS je potprostor prostora $L(X, Y)$.

4. HS je Banachov prostor u odnosu na normu (2.5). *C_2 je Hilbertov prostor u odnosu na skalarni produkt*

$$(A \mid B) = \sum_n (Ae_n \mid Be_n), \tag{2.7}$$

gdje je (e_n) bilo koja ortonormirana baza u X.

5. Ako je jedan od operatora $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, W)$ HS-operator, onda je $BA \in L(X, W)$ HS-operator.

6. C_2 je obostran ideal u $L(X)$. Ako je $dim(X) = \infty$, onda $I \notin C_2$ i C_2 je Banachova algebra u odnosu na normu (2.5).

7. Svaki operator $A \in L(X, Y)$ konačnog ranga je HS-operator. Zatvarač u odnosu na normu (2.5) *skupa svih operatora konačnog ranga iz $L(X, Y)$ je HS prostor.*

8. HS je algebra gdje vrijedi

$$\|AB\|_{hs} \leq \|A\|_{hs} \|B\|_{hs}, \ \forall A, B \in HS \tag{2.8}$$

Dokaz. 1. Iz propozicije 2.2 slijedi 1 i

$$\|A\|_{hs} = (\sum_{i,j} |(Ae_i \mid f_j)|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

za svaki par ortonormiranih baza (e_i) u X i (f_j) u Y.

2. Ako je U unitaran operator,tada je $\{Ue_i, \ i \in I\}$ potpun ortonormiran skup, a kako vrijedi $\|x\| = \left\|U^{-1}x\right\|$ imamo:

$$\left\|U^{-1}AU\right\|_{hs}^2 = \sum_i \left\|U^{-1}AUe_i\right\|^2 = \sum_i \|AUe_i\|^2 = \|A\|_{hs}^2$$

3. Za HS operatore $A, B \in L(X, Y)$ imamo:

$$\|A + B\|_{hs} = (\sum_n \|(A + B)e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i,j} |((A + B)e_i \mid f_j)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sum_{i,j} |(Ae_i \mid f_j) + (Be_i \mid f_j)|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (nejednakost trokuta u } \mathcal{L}_2)$$

$$\leq (\sum_{i,j} |(Ae_i \mid f_j)|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i,j} |(Be_i \mid f_j)|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (zbog (2.9))} \; = \|A\|_{hs} + \|B\|_{hs} \, .$$

4. Uzmimo da je (A_n) Cauchyjev niz u HS prostoru s normom (2.5). Tada za $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|A_n - A_m\|_{hs} \leq \varepsilon \tag{2.10}$$

Odavde i 1. nalazimo da je (A_n) Cauchyjev niz i u prostoru $L(X, Y)$. Budući da je taj prostor potpun, postoji $A \in L(X, Y)$ takav da $\|A_n - A\| \to 0$. Neka je $M > 0$ takav broj da je $\|A_n\|_{hs} \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\sum_{i=1}^{k} \|Ae_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|A_n e_i\|^2 \leq M^2 \Rightarrow \sum_i \|Ae_i\|^2 \leq M^2$$

dakle A je HS-operator. Koristeći se sa (2.10) za svako k, nalazimo

$$n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \|(A_n - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{2.11}$$

Iz (2.11) za $n \to \infty$ dobivamo

$$m > n(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

a odavde, zbog proizvoljnosti indeksa k proizlazi

$$m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|(A - A_m)e_i\|^2 \leq \varepsilon^2;$$

onda je $\|A - A_m\|_{hs} \leq \varepsilon$ za svako $m \geq n(\varepsilon)$. Time je potpunost prostora $(HS, \|\cdot\|_{hs})$ dokazana.

Ako je $X = Y$, onda (2.5) pokazuje da norma $A \mapsto \|A\|_{hs}$ zadovoljava relaciju paralelograma, pa je C_2 Hilbertov prostor u odnosu na skalarni produkt (2.7).

5. Ako je $A \in L(X, Y)$ HS-operator i $B \in L(Y, X)$, gdje je W separabilan Hilbertov prostor, onda $\|BAe_n\| \leq \|B\| \cdot \|Ae_n\|$ povlači da je BA HS-operator i da je

$$\|BA\|_{hs} \leq \|B\| \cdot \|A\|_{hs}\,. \tag{2.12}$$

Ako je $A \in L(X, Y)$ i $B \in L(Y, W)$ HS-operator, onda je $B^* \in L(W, Y)$ HS-operator (prema 1) i $A^* \in L(Y, X)$. Prema već dokazanom A^*B^* je HS-operator. No, tada je i $(A^*B^*)^*$ HS-operator; dakle je BA HS-operator.

6. Ako je $X = Y$, onda 5 povlači da je C_2 obostran ideal. Nadalje $A, B \in C_2$, (2.12) i (2.2) povlače

$$\|BA\|_{hs} \leq \|B\|_{hs} \cdot \|A\|_{hs}\,. \tag{2.13}$$

pa je C_2 Banachova algebra u odnosu na normu $A \mapsto \|A\|_{hs}$.

7. Ako je $A \in L(X, Y)$ HS-operator, $dimX = \infty$, onda za svako n zbog konvergencije reda (2.5) postoji prirodni broj $p(n)$ takav da je

$$\sum_{i=p(n)+1}^{\infty} \|Ae_i\|^2 \leq \frac{1}{n^2}. \tag{2.14}$$

Sa A_n označimo linearan operator sa X u Y definiran sa $A_n e_i = Ae_i$ ako je $i \leq p(n)$ i $A_n e_i = 0$ ako je $i > p(n)$. Operator A_n ima konačan rang, pa je on HS-operator. Nadalje (2.14) prelazi u $\|A - A_n\|_{hs}^2 \leq \frac{1}{n^2}$, što pokazuje da je A limes niza (A_n) u odnosu na normu (2.5).

8. Neka je A HS-operator i $T \in L(X, Y)$ bilo koji ograničen linearan operator. Tada je

$$\|TA\|_{hs}^2 = \sum_i \|TAe_i\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_i \|Ae_i\|^2 = \|T\|^2 \, \|A\|_{hs}^2$$

$$||TA||_{hs} = ||(AT)^*||_{hs} = ||T^*A^*||_{hs} \leq ||T||\,||A||_{hs}$$

Posebno, ako je B HS-operator, tada zbog $||B|| \leq ||B||_{hs}$ imamo da je

$$||BA||_{hs} \leq ||B||\,||A||_{hs} \leq ||B||_{hs} \cdot ||A||_{hs}$$

□

Poglavlje 3

Kompaktni i integralni operatori

Označimo sa (S, Σ, μ) prostor pozitivne mjere, a sa $L_2(S, \Sigma, \mu)$ (ili samo L_2) pripadni Hilbertov prostor klasa ekvivalencije kvadratno integrabilnih funkcija $f : S \to \mathbb{C}$ (ili u $\mathbb{R}$) takvih da je

$$\int_S |f(t)|^2 d\mu(t) < \infty$$

Propozicija 3.1. *Neka je $L_2(S, \Sigma, \mu)$ Hilbertov prostor. Ako je $k : S \times S \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija i*

$$\int_{S \times S} |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t) < \infty, \tag{3.1}$$

onda je sa

$$y(s) = \int_S k(s,t) x(t) d\mu(t) \tag{3.2}$$

definiran kompaktan operator A sa $L_2(S, \Sigma, \mu)$ u $L_2(S, \Sigma, \mu)$. Za normu operatora A vrijedi ocjena

$$||A||^2 \leq \int_{S \times S} |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t). \tag{3.3}$$

Operator A^* je dan sa

$$y(s) = \int_S \overline{k(t,s)} x(t) d\mu(t). \tag{3.4}$$

Operator A je hermitski ako i samo ako je

$$k(s,t) = \overline{k(t,s)}$$

za gotovo sve $s, t \in S$

Dokaz. Iz (3.1) izlazi da je za gotovo svako $s \in S$ funkcija $t \mapsto k(s,t)$ u L_2. No, tada je funkcija $t \mapsto k(s,t)x(t)$ u prostoru $L_1(S, \Sigma, \mu)$ za gotovo sve $s \in S$ i za svako $x \in L_2$. Odavde izlazi da integral (3.2) postoji za gotovo sve s i da on definira izmjerivu funkciju. Iz (3.2) dobivamo:

$$|y(s)|^2 \leq \int_S |k(s,t)|^2 d\mu(t) \cdot \int_S |x(t)|^2 d\mu(t)$$

pa integracija po s daje

$$\int_S |y(s)|^2 d\mu(s) \leq \int_{S\times S} |k(s,t)|^2 d\mu(t) d\mu(s) \cdot \int_S |x(t)|^2 d\mu(t)$$

odakle slijedi ograničenost operatora A i ocjena (3.3) za njegovu normu.

Ako je $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ ortonormirana baza u L_2, onda funkcije $\varphi_i(s)\overline{\varphi_j(t)}$ čine ortonormiranu bazu u odgovarajućem Hilbertovom prostoru nad $S \times S$. No tada (3.1) povlači da je k element toga prostora, pa je

$$k(s,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \varphi_i(s) \overline{\varphi_j(t)} \tag{3.5}$$

za gotovo sve $s, t \in S$. Iz (3.5) izlazi da je

$$\int_{S\times S} |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2. \tag{3.6}$$

Nadalje je

$$(A\varphi_n)(s) = \int_S k(s,t)\varphi_n(t) d\mu(t) = \int_S \Big(\sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \varphi_i(s) \overline{\varphi_j(t)} \Big) \varphi_n(t) d\mu(t)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \Big(\int_S \varphi_n(t) \overline{\varphi_j(t)} d\mu(t) \Big) \varphi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \varphi_i(s) \Rightarrow$$

$$A\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \varphi_i \ (n \in \mathbb{N}) \tag{3.7}$$

Iz (3.7) slijedi da je $\alpha_{ij} = (A\varphi_j \mid \varphi_i)$ matrica operatora A u bazi (φ_n). Budući da je

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$$

zbog (3.6), operator A je kompaktan. Iz istih razloga je i operator B:

$$y(s) = \int_S \overline{k(t,s)} x(t) d\mu(t)$$

kompaktan na L_2. Budući da (3.5) povlači

$$\overline{k(t,s)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \overline{\alpha_{ij}} \varphi_j(s) \overline{\varphi_i(t)}, \tag{3.8}$$

to je $B\varphi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\alpha_{nj}} \varphi_j$. Odavde je

$$(B\varphi_n \mid \varphi_m) = \overline{\alpha_{nm}} = \overline{(A\varphi_m \mid \varphi_n)} = \overline{(\varphi_m \mid A^*\varphi_n)} = (A^*\varphi_n \mid \varphi_m),$$

pa je $B = A^*$. Ako je $A^* = A$, onda je $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, pa (3.8) prelazi u

$$\overline{k(t,s)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ji} \varphi_j(s) \overline{\varphi_i(t)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \varphi_i(s) \overline{\varphi_j(t)} = k(s,t)$$

zbog (3.5) □

U skladu s definicijom Hilbert-Schmidtovog operatora vidimo da je integralni operator (3.2) s Hilbert-Schmidtovom jezgrom, tj. s jezgrom koja zadovoljava uvjet (3.1) HS-operator na prostoru $L_2(S, \Sigma, \mu)$.

Prije nego li iskažemo sljedeći teorem navest ćemo jednu važnu napomenu koja će nam biti od izrazite važnosti za razumijevanje tvrdnje teorema.

Napomena 3.2. *Ako je* $(\varphi_n,\ n \in \mathbb{N})$ *ortonormirana baza u* L_2*, onda za svaki* $f \in L_2$ *imamo:*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f \mid \varphi_i)\varphi_i, \qquad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(f \mid \varphi_i)|^2$$

s tim da gornji red konvergira u L_2*, tj. red funkcija (reprezentanata) konvergira u srednjem.*

Ako je X *bilo koji separabilan Hilbertov prostor,* $\dim X = \infty$*, i ako je* $(e_n,\ n \in \mathbb{N})$ *ortonormirana baza u* X*, onda je sa*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\varphi_n \qquad (x \in X)$$

dan izometrički izomorfizam prostora X *na prostor* L_2*. Za takav izomorfizam kažemo da je reprezentacija prostora* X *pomoću prostora* L_2*. Za* $A \in L(X)$ *sa* $\hat{A} = \varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$ *definiran je ograničen operator na* L_2*, reprezentacija operatora* A*. Očigledno je* $\left\|\hat{A}\right\| = \|A\|$*, pa je reprezentacija* $A \mapsto \hat{A}$ *izometrički izomorfizam Banachove algebre* $L(X)$ *na Banachovu algebru* $L(L_2(S, \Sigma, \mu))$

Teorem 3.3. *Neka je* X *separabilan Hilbertov prostor,* $\dim X = \infty$*,* (S, Σ, μ) *prostor pozitivne mjere i* $L_2(S, \Sigma, \mu)$ *pripadni Hilbertov prostor.*

Neka je φ *proizvoljna reprezentacija (izometrički izomorfizam) prostora* X *na* $L_2(S, \Sigma, \mu)$*. Za svaki Hilbert-Schmidtov operator* $A \in L(X)$ *postoji izmjeriva funkcija* $k : S \times S \to \mathbb{C}$ *takva da zadovoljava uvjet* (3.1) *i da je operator* $\hat{A} = \varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$ *dan formulom* (3.2)

Dokaz. Neka je (e_n) ortonormiran baza u X i (φ_i) ortonormirana baza u $L_2(S, \Sigma, \mu)$. U bazi (e_n) operatoru A pripada matrica $\alpha_{ij} = (Ae_j \mid e_i)$. Budući da je A HS-operator, vrijedi:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty,$$

pa red (3.5) konvergira u L_2 nad $S \times S$ i definira funkciju k za koju vrijedi (3.6). Integralni operator $\hat{A}$, što ga definira ta funkcija formulom (3.2), kompaktan je i za njega vrijedi: $(\hat{A}\varphi_i \mid \varphi_j) = \alpha_{ij}$. Dakle, $(\hat{A}\varphi_i \mid \varphi_j) = (Ae_i \mid e_j)$, što povlači

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^2 = \int_{S\times S} |k(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t) \tag{3.9}$$

i $\hat{A} = \varphi \circ A \circ \varphi^{-1}$, gdje je preslikavanje $\varphi : X \to L_2$ definirano formulom

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\varphi_n \ (x \in X)$$

□

Teorem 3.4. *Svaki Hilbert-Schmidtov operator je kompaktan i limes je nekog niza operatora sa konačno dimenzionalnim rangom u Hilbert-Schmidtovoj normi.*

Dokaz. Neka je $\{e_i, i \in I\}$ ortonormirana baza za X, a A iz HS.
Budući da vrijedi

$$||A||_{hs}^2 = \sum_{i\in I} ||Ae_i||^2 < \infty$$

onda samo konačno mnogo elemenata $||Ae_i||^2$ može biti različito od nule.
Također, za svaki prirodan broj n postoji konačan podskup $I_n \subseteq I$ takav da je

$$\sum_{i\notin I_n} ||Ae_i||^2 < \frac{1}{n^2}$$

Za svaki n linearan operator A_n je definiran jednadžbom $A_n e_i = Ae$ ako je $i \in I_n$, a $A_n e_i = 0$ ako $i \notin I_n$. Tada je rang od A_n konačno dimenzionalan.
Nadalje, vrijedi

$$||A - A_n||_{hs}^2 = \sum_{i\notin I_n} ||Ae_i||^2 < \frac{1}{n^2}$$

pa imamo

$$\|A - A_n\| \leq \|A - A_n\|_{hs} < \frac{1}{n}$$

Tada vrijedi da je A limes u HS i u uniformnoj operatorskoj topologiji niza $\{A_n\}$. Iz leme VI.5.3 iz [1] slijedi da je A kompaktan. □

Ipak, nije svaki kompaktan operator HS-operator. Operator $A \in L(X)$ definiran u ortonormiranoj bazi (e_n) prostora X formulom

$$Ae_n = \frac{1}{\sqrt{n}} e_n \ (n \in \mathbb{N})$$

je kompaktan, ali nije HS-operator. Dakle, C_2 je pravi podskup skupa C_∞ svih kompaktnih operatora prostora X. Nadalje postoje kompaktni operatori na L_2 koji nisu integralni operatori s Hilbert-Schmidtovom jezgrom.

Ako je (e_n) ortonormirana baza u X i (α_n) niz skalara takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \infty$, onda je sa

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x \mid e_i) e_i \qquad (x \in X)$$

zadan kompaktan operator na X. Operator A nije HS-operator. Da bismo dokazali da je A kompaktan operator, stavimo $M_n = sup\{|\alpha_k| \ : k \geq n\}$ i sa A_n označimo operator definiran formulom

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x \mid e_i) e_i \qquad (x \in X).$$

Sada je

$$\|(A - A_n)x\|^2 = |\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i (x \mid e_i) e_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 |(x \mid e_i)|^2$$
$$\leq M_n^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|A - A_n\| \leq M_n,$$

pa $M_n \to 0$ povlači da je A kao limes operatora konačnog ranga kompaktan.

Teorem 3.5. *Neka je A Hilbert-Schmidtov operator i f analitička funkcija na okolini njegovog spektra koja iščezava u nuli; tada je $f(A)$ Hilbert-Schmidtov operator i preslikavanje $A \to f(A)$ iz HS u samoga sebe je neprekidno. Nadalje, ako je $\{f_n\}$ niz takvih funkcija koje imaju za zajedničku domenu okolinu N od spektra A i ako $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ za svaki λ uniformno na N, tada*

$$f_n(A) \to f(A)$$

u HS.

Dokaz. Ako je Hilbertov prostor X konačno dimenzionalan, tada je rezultat trivijalan, pa možemo pretpostaviti da je X beskonačno dimenzionalan. Viđeno je u teoremu 2.5. da je HS Banachova algebra i algebra u kojoj $\|AB\|_{hs} \leq \|A\|_{hs} \|B\|_{hs}$. Jedinica može biti adjungirana metodom opisanom u sekciji IX.1 u [2], što rezultira Banachovom algebrom koja sadrži sve parove $[\alpha, A]$ sa skalarom α i operatorom A iz HS. Norma u ovoj algebri je $[[\alpha, A]] = |\alpha| + \|A\|$. Algebra dobivena adjungiranjem jedinica iz HS ćemo označavati sa HS^+.

Kako je X beskonačno dimenzionalan, iz teorema 3.4 i IV.3.5. u [1] slijedi da operator identitete nije u HS, te tako HS nema jedinicu.

Za početak, primijetimo da element $[\alpha, A]$ u HS^+ ima inverz ako i samo ako $\alpha I + A$ ima inverz u algebri $B(X)$ ograničenih operatora u X. Ako je $[\beta, B]$, tada je $[1, 0] = [\alpha, A][\beta, B] = [\alpha\beta, \alpha B + \beta A + AB]$ te stoga $\beta = \alpha^{-1}$ i $\alpha B + \beta A + AB = 0$. Jednostavnim računom dobivamo da je $\beta I + B = (\alpha I + A)^{-1}$. Neka je $T = (\alpha I + A)^{-1}$. Kako je A kompaktan i X beskonačno dimenzionalan, ne može vrijediti da je $\alpha = 0$, jer ako je $\alpha = 0$, iz prethodnih tvrdnji slijedi da je identitet $I = TA$ kompaktan, što je u kontradikciji s Teoremom IV.3.5 u [1].

Neka je $B = T - \alpha^{-1} I$. Tada je $\alpha^{-1} TA = \alpha^{-1} T(A + \alpha I - \alpha I) = \alpha^{-1}(I - \alpha T) = -B$. Tada je $B = -\alpha^{-1} TA$ i teorem 2.5 pokazuje da je B u HS. To dokazuje da ako $(\alpha I + A)^{-1}$ postoji kao ograničeni operator, tada $[\alpha, A]^{-1}$ postoji u HS^+ i jednako je $[\alpha^{-1}, B]$.

Kako je spektar elementa A iz HS, kada ga se gleda kao element Banachove algebre HS^+, jednak spektru elementa A koji se smatra elementom algebre $B(X)$ svih ograničenih operatora u X. Operacija inverzije je neprekidna u svakoj Banachovoj algebri (IX.1.3 u [2]), pa je preslikavanje $\lambda \to [\lambda, -A]^{-1}$ neprekidno za $\lambda \notin \sigma(A)$. Ako je θ preslikavanje iz HS^+ u $B(X)$ koje šalje $[\alpha, A]$ u $\alpha I + A$, tada je θ neprekidno i $\theta([\lambda, -A]^{-1}) = R(\lambda; A)$.

Kako je $[\lambda, -A]^{-1}$ neprekidna funkcija za λ u komplementu od $\sigma(A)$, slijedi da je integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)[\lambda, -A]^{-1} d\lambda, \qquad [*],$$

gdje je C pozitivno orijentirana Jordanova krivulja s konačnom duljinom sadržana u domeni od f koja sadrži $\sigma(A)$, postoji u normi od HS^+. Ako je integral u $[*]$ element $[\mu, S]$ iz HS^+, tada iz Teorema III.2.19 u [1], viđeno je da

$$\mu I + S = -[\mu, S] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)R(\lambda; A)d\lambda = f(A).$$

Kako bi pokazali da je $\lambda = 0$, neka je η multiplikativni linearni funkcional na HS^+ definiran jednadžbom $\eta\{[\alpha, A]\} = \alpha$. Kako je η homomorfizam, slijedi da vrijedi $\eta([\lambda, A]^{-1}) = \lambda^{-1}$ i kako je η neprekidna, iz Teorema III.2.19(c) [1] slijedi da je

$$\mu = \eta\{[\mu, S]\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)\lambda^{-1} d\lambda = f(0).$$

Iz pretpostavke da je $f(0) = 0$ je $f(A) = S$ pa je u HS.

Ako je $\lim A_n = A$ u normi od HS, slijedi iz Leme VII.6.5 [1] da kontura C iz integrala u $[*]$ sadrži $\sigma(A_n)$ za sve dovoljno velike n-ove. Iz Korolara VII.6.3 [1] smo vidjeli da, u normi od HS^+,

$$\lim_{n\to\infty}[\lambda, -A_n]^{-1} = [\lambda, -A]^{-1},$$

uniformno za $\lambda \in C$. Tako slijedi iz Teorema II.2.19 [1] da

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = \lim_{n\to\infty} \theta\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)[\lambda, -A_n]^{-1} d\lambda\}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)R(\lambda, A)d\lambda = f(A),$$

gdje je limes u normi od HS^+.

Kako bi pokazali zadnji dio ovog teorema, možemo očito pretpostaviti da kontura C iz $(*)$ cijela leži u skupu N. Tada, imamo

$$f(A) = \theta\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)[\lambda, -A]^{-1} d\lambda\} = \lim_{n\to\infty} \theta\{\frac{1}{2\pi i}\int_C f_n(\lambda)[\lambda, -A]^{-1} d\lambda\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

□

Poglavlje 4

Hadamardova i Carlemanova nejednakost

Primijetimo, algebra Hilbert-Schmidtovih operatora je generirana iz algebre operatora s konačno dimenzionalnim rangom i to tako da je uzet zatvarač prema većoj HS normi.

Prirodno je za očekivati da će neka svojstva konačno dimenzionalnih operatora koja se u slučaju linearnih operatora u Hilbertovom prostoru gube, biti očuvana kod Hilbert-Schmidtovih operatora. Kako bismo pokazali da je to uistinu tako, moramo izvesti nekoliko nejednakosti za operatore u konačno dimenzionalnom Hilbertovom prostoru. Najvažnija među njima je dobro poznata "Hadamardova nejednakost determinanti" koja je bila ključna za razumijevanje integralnih operatora. Druga vrlo bitna nejednakost je Carlemanova.

Prije nego li pokažemo Hadamardovu i Carlemanovu nejednakost navedimo nekoliko elementarnih tvrdnji o tragu operatora.

Definicija 4.1. *Neka je X konačno dimenzionalan Hilbertov prostor, $(e_1, \cdots, e_n)$ njegova baza. Neka je A operator na X takav da je*

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Trag operatora A, kojeg označavamo sa tr(A), definiran je kao

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Lema 4.2. *Neka je X konačno dimenzionalan Hilbertov prostor. Trag operatora A iz X ne ovisi o bazi prostora. Nadalje, ako su A i B bilo koja dva operatora iz X, tada je* $tr(AB) = tr(BA)$.

Lema 4.3. *Neka je X konačno dimenzionalan Hilbertov prostor i A operator definiran na X, tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
a) Trag operatora A jednak je negativnom koeficijentu uz λ^{n-1} *u karakterističnom polinomu operatora A.*
b) Trag operatora A jednak je sumi elemenata u spektru operatora ako se svaki element broji u skladu sa svojom kratnošću kao korijen karakterističnog polinoma.
c) Ako je operator A nilpotentan onda je njegov trag nula.

Lema 4.4. *Neka je A linearan operator u konačno dimenzionalnom Hilbertovom prostoru X. Neka je* $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ *i* $m_i = dimE(\lambda_i, A)X, i = 1, \dots, k$ *tada je* $tr(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$

Dokaz. Neka je $\lambda_i \in \sigma(A)$, tada je po Teoremu VII.1.7 [1] operator $A - \lambda_i I$ nilpotentan na $E(\lambda_i; A)X$. Tada vrijedi $AE(\lambda_i; A) = \lambda_i E(\lambda_i; A) + N_i$, gdje je N_i nilpotentan operator na X. Kako vrijedi $I = \sum_{i=1}^{k} E(\lambda_i; A)$ onda slijedi da je

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E(\lambda_i; A) + \sum_{i=1}^{k} N_i.$$

Budući da je trag linearna funkcija i P linearan projektor, uzmemo li bazu za X koja je unija baze za PX i baze za $(I - P)X$, tada slijedi da je $tr(P) = dimPX$. Iz prethodnih tvrdnji i leme 10c) slijedi da je $tr(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i$ □

Napomena 4.5. $dimE(\mu; A)X$ *je kratnost od* μ *kao korijena karakterističnog polinoma od A. Koncept kratnosti je različit od dimenzije mnogostrukosti*

$\{x|x \in X, Ax = \mu x\}$ svojstvenih vektora od A koji odgovaraju vrijednosti μ. Za samo adjungirane ili hermitski simetrične matrice A ta dva koncepta se podudaraju u značenju. Ako je operator A u X, reći ćemo da su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A ponovljene u skladu s kratnošću , ako je svaki λ_i svojstvena vrijednost od A i svaka svojstvena vrijednost μ od A se ponavlja u nizu m puta, gdje je $m = dim(\mu; A)X$.

Teorem 4.6. ***Hadamardova nejednakost***
Ako je (a_{ij}) $n \times n$ matrica kompleksnih brojeva, tada

$$|\det(a_{ij})| \leq \prod_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Primijetimo da ova nejednakost može biti interpretirana na sljedeći način: volumen bilo kojeg n-stranog paralelepipeda nije nikad veći od volumena pravokutnog paralelepipeda sa stranicama jednake duljine.

Dokaz. Nejednakost za $n = 1$ je očita, a za $n = 2$ se lako provjeri. Pretpostaviti ćemo da nejednakost vrijedi za $n - 1$, te nastaviti indukcijom. Ako je (a_{ij}) $n \times n$ matrica, neka je $u_j = [a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}]$, $j = 1, ..., n$, definiran skup od n elemenata n-dimenzionalnog prostora X. Ako je $u_1 = 0$, tada obje strane nejednakosti (4.1) iščezavaju te je rezultat trivijalan. Ako je $|u_1| = \{\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}|^2\}^{\frac{1}{2}} \neq 0$, tada su obje strane nejednakosti (4.1) homogene u u_1, pa možemo pretpostaviti da je $|u_1| = 1$. Neka je $v_1, v_2, ..., v_n$ ortonormirana baza za X sa $v_1 = u_1$ i neka je W unitaran operator definiran jednadžbama $Wv_1 = [1, 0, 0, ..., 0]$, $Wv_2 = [0, 1, 0, ..., 0], ...,$ $Wv_n = [0, 0, ..., 0, 1]$. Kako unitaran operator na X ima determinantu apsolutne vrijednosti jednake jedan, slijedi:

$$|\det(a_{ij})| = |\det(u_1, u_2, ..., u_n)| = |\det(W)\det(u_1, u_2, ..., u_n)|$$

$$= |det(Wu_1, Wu_2, ..., Wu_n)|.$$

Neka su koordinate od Wu_k jednake $[w_{1k}, ..., w_{nk}]$. Tada, kako vrijedi $Wu_1 = [1, 0, 0, ..., 0]$, slijedi da je:

$$\det(Wu_1, Wu_2, ..., Wu_n) = \det \begin{vmatrix} 1 & w_{12} & ... & w_{1n} \\ 0 & w_{22} & ... & w_{2n} \\ ... & & & \\ 0 & w_{n2} & ... & w_{nn} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} w_{22} & ... & w_{2n} \\ ... & & \\ w_{n2} & ... & w_{nn} \end{vmatrix}$$

Koristeći pretpostavku indukcije, imamo:

$$|\det(a_{ij})| \leq \prod_{j=2}^{n} \{\sum_{i=2}^{n} |w_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ali, kako vrijedi

$$\{\sum_{i=2}^{n} |w_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \{\sum_{i=1}^{n} |w_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}} = |Wu_j| = |u_j|, \ j = 1, ..., n$$

te $|u_1| = 1$, pokazana je tvrdnja teorema. □

Hadamardova nejednakost bit će korištena na sljedeći način. Neka je (a_{ij}) matrica operatora A na X u odnosu na ortonormiranu bazu $\delta_1 = [1, 0, ..., 0], ..., \delta_n = [0, ..., 0, 1]$. Neka A_{ij} označava kofaktor elementa a_{ij}, tj. A_{ij} je $(-1)^{i+j}$ pomnožen s determinantom od $(n-1) \times (n-1)$ matrice dobivene brisanje i-tog retka i j-tog stupca u (a_{ij}). Tada je $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ i $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$, ako je $j \neq k$. Pod pretpostavkom da je A 1-1, Cramerovo pravilo za A^{-1} nam govori da je matrica od $\det(A)A^{-1}$, u odnosu na bazu $\delta_1, ..., \delta_n$, transponirana matrica matrice (A_{ij}). Dakle, ako je $x = [\xi_1, ..., \xi_n]$ i $y = [\zeta_1, ..., \zeta_n]$, tada je

$$\det(A)(A^{-1}x \mid y) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\overline{\zeta_j}.$$

S druge strane, razvojem u odnosu na prvi redak i prvi stupac, lako se vidi da je:

$$\det(A)(A^{-1}x \mid y) = -\det \begin{vmatrix} 0 & \overline{\zeta_1} & ... & \overline{\zeta_n} \\ \xi_1 & a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ \xi_n & a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hadamardova nejednakost će biti primijenjena kako bi procjenili ovu determinantu.

Lema 4.7. *Neka je X konačno dimenzionalan Hilbertov prostor, a* (a_{ij}) *matrica 1-1 operatora A u X u odnosu na bazu* $\delta_1 = [1, 0, ..., 0], ..., \delta_n = [0, ..., 0, 1]$. *Tada je Hilbert Schmidtova norma od A dana sa*

$$||A||_{hs} = \{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nadalje, ako su $x = [\xi_1, ..., \xi_n]$ *i* $y = [\zeta_1, ..., \zeta_n]$ *dva vektora u X, tada je*

$$|\det \begin{vmatrix} 0 & \overline{\zeta_1} & ... & \overline{\zeta_n} \\ \xi_1 & a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ \xi_n & a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}| \leq \frac{|x||y| \, ||A||_{hs}^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)/2}}. \tag{4.2}$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz korolara 2.4.
Sada, ako je $x = 0$, nejednakost (4.2) je trivijalna, pa po homogenosti od (4.2) po x dovoljno je promotriti slučaj kada je $|x| = 1$. Kao u dokazu Hadamardove nejednakosti 4.6, postoji unitarni operator W u X takav da $x = W\delta_n$. Iz prethodne diskusije slijedi da je posljednja tvrdnja leme ekvivalentna tvrdnji da

$$|\det(A)(A^{-1}x, y)| \leq |y| \, ||A||_{hs}^{n-1} \, (n-1)^{-(n-1)/2}.$$

Sada, kako je W unitaran, $\det(A) = \det(W^{-1}AW)$ i

$$(A^{-1}x, y) = (A^{-1}W\delta_n, y) = (W^{-1}A^{-1}W\delta_n, W^{-1}y).$$

Stavimo li $B = W^{-1}AW$ imamo da je $B^{-1} = W^{-1}A^{-1}W$ i slijedi iz 2.5. da je $||B||_{hs} = ||A||_{hs}$. Također, kako je W unitaran, vektor $z = W^{-1}y$ ima normu $|z| = |y|$. Tvrdnju koju dokazujemo možemo zapisati kao

$$|\det(B)(B^{-1}\delta_n, z)| \leq |z|\,||B||_{hs}^{n-1}\,(n-1)^{-(n-1)/2}.$$

Izrazimo li ovu tvrdnju u terminima determinanti, vidimo da je dovoljno dokazati lemu u posebnom slučaju kada je $0 = \xi_1 = ... = \xi_{n-1}$ i $1 = \xi_n$. Tako je determinanta koju moramo odrediti, sljedeća:

$$\det\begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & ... & \overline{\zeta_n} \\ a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{n-1,1} & ... & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \overline{\zeta_1} & a_{11} & ... & a_{n-1,1} \\ ... & & & \\ \overline{\xi_n} & a_{1n} & ... & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Neka D označava apsolutnu vrijednost ove determinante. Tada Hadarmardova nejednakost pokazuje da

$$D \leq |y| \prod_{i=1}^{n-1} \{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3}$$

Kako je geometrijska sredina konačnog skupa pozitivnih brojeva najviše jednaka njihovoj aritmetičkoj sredini, slijedi da

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leq [\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2]^{n-1} \leq [\frac{||A||_{hs}^2}{n-1}]^{n-1}.$$

Uzimajući kvadratni korijen obje strane ove nejednakosti i kombinirajući sa 4.3 dobivamo da vrijedi:

$$D \leq \frac{|y|\,||A||_{hs}^{n-1}}{(n-1)^{(n-1)/2}},$$

što je traženi rezultat. $\square$

Lema 4.8. *Neka je A operator u n-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru X takav da je* $tr(A) = 0$. *Tada postoji ortonormirana baza* $(e_1, \cdots, e_n)$ *za X takva da je* $(Ae_i \mid e_i)$*=0,* $1 \leq i \leq n$.

Dokaz. Ako je $n = 1$, kako je $tr(A) = 0$, $A = 0$ i tvrdnja je očita. Sljedeće, pokazujemo indukcijom da postoji ne-nul vektor $e \in X$ takav da $(Ae, e) = 0$. Kako bi ovo pokazali, prvo promatramo slučaj $n = 2$ i pretpotavljamo da je odabrana ortonormirana baza takva da matrica A ima subdijagonalnu formu

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Neka je $e = [1, z]$, tako da vrijedi $(Ae, e) = a(1 - |z|^2) + b\bar{z}$. Ako je $a = 0$, stavimo $z = 0$. Ako je $a \neq 0$, neka je $z = re^{i\theta}$, gdje je θ odabran tako da je $c = ba^{-1}e^{-i\theta}$ realan i gdje je r pozitivan korijen jednadžbe $r^2 - cr - 1 = 0$. U oba slučaja lako vidimo da je $(Ae, e) = 0$.

Sljedeće, pretpostavimo da je $n > 2$ i da je tvrdnja koju želimo pokazati neistinita. Tada je

$$\min_{|e|=1} |(Ae, e)| > 0.$$

Kako je jedinična sfera u X kompaktna, minimum se dostiže za neki jedinični vektor e_1. Neka je $m = (Ae_1, e_1)$. Nakon odabira ortonormirane baze $\{e_1, ..., e_n\}$ imamo, po pretpostavci,

$$tr(A) = m + \sum_{i=2}^{n} (Ae_i, e_i) = 0,$$

Ova jednakost se može zapisati u obliku

$$\sum_{i=2}^{n} (E(A + \frac{m}{n-1} I)e_i, e_i) = 0,$$

gdje je E hermitska projekcija od X na potprostor S razapet sa $e_2, ..., e_n$. Operator $E(A + \frac{m}{n-1} I)$ očito preslikava S u samoga sebe. Slijedi po pretpostavci indukcije da postoji jedinični vektor $e \in S$ takav da

$$(E(A + \frac{m}{n-1} I)e, e) = 0.$$

Dakle, kako je $Ee = e$,

$$(Ae, e) = -\frac{m}{n-1}.$$

Tako, imamo

$$|(Ae, e)| = \frac{m}{n-1} < |(Ae_1, e_1)|$$

što je u kontradikciji s definicijom od e_1. Dakle, imamo $(Ae_1, e_1) = 0$.

Sada možemo indukcijom dovršiti dokaz ove leme. Neka je e vektor jedinične norme takav da je $(Ae, e) = 0$. Neka je S_0 ortogonalni komplement jednodimenzionalnog protora razapetog sa e, te E_0 ortogonalna projekcija od X na S_0. Pokazano je da je lema točna u slučaju kada je $n = 1$ i sada pretpostavljamo da je točna za $n-1$ dimenzionalni prostor. Tada, po pretpostavci indukcije, pokazuje se da postoji ortonormirana baza $\{f_2, ..., f_n\}$, koja razapinje potprostor S_0 i takva da $(E_0Af_i, f_i) = (Af_i, f_i) = 0,\ 2 \le i \le n$. Tada je $\{e, f_2, ..., f_n\}$ tražena baza za X. □

Teorem 4.9. ***Carlemanova nejednakost***
Neka je A operator na X, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ njegove svojstvene vrijednosti ponovljene u skladu sa svojom kratnošću, ako je $\lambda \neq 0$ kompleksni broj koji nije u spektru od A. Tada je

$$|\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda})e^{\lambda_i/\lambda}(\lambda I - A)^{-1}| \le |\lambda|\{\exp\frac{1}{2}(1 + \frac{\|A\|^2}{|\lambda|^2})\}.$$

Dokaz. Neka je $B = A/\lambda$, tada imamo $\sigma(B) = \{\lambda_1/\lambda, ..., \lambda_n/\lambda\}$ [1] i $E(\lambda_i/\lambda; B) = E(\lambda_i; A)$[1]. Također, $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i/\lambda = tr(A)/\lambda$. Neka je N prirodni broj takav da je $N > |tr(B)|$. Za svaki takav N definiramo operator B_N u $X \oplus X$ jednadžbom $B_N[x, y] = [Bx, (-1/N)tr(B)y]$. Evidentno je iz definicije 4.1 da je $tr(B_N) = 0$, i da su svojstvene vrijednosti od $I - B_N$ jednake

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}, ..., 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}, \quad 1 + \frac{tr(B)}{N}, ..., 1 + \frac{tr(B)}{N}.$$

Dakle, $\det(I - B_N)$ je numerički jednaka produktu ovih brojeva, tj.,

$$|\det(I - B_N)| = |(1 + \frac{tr(B)}{N})^N \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda})| \tag{4.4}$$

Kako je $(1/N)|tr(B)| < 1$ i $\lambda \neq \lambda_k$, inverzni operator $(I - B_N)^{-1}$ postoji i lako se pokaže da vrijedi

$$(I - B_N)^{-1}[x, y] = [(I - B)^{-1}x, (1 + \frac{1}{N}tr(B))^{-1}y].$$

Dakle, imamo $|(I - B)|^{-1} \leq |(I - B_N)^{-1}|$, i tako je

$$|\det(I - B_N)||(I - B)^{-1}| \leq |\det(I - B_N)||(I - B_N)^{-1}| \tag{4.5}$$

Iz leme 4.7 slijedi da

$$|\det(I - B_N)||(I - B_N)^{-1}| \leq \frac{||I - B_N||^{N+n-1}}{(N + n - 1)^{(N+n-1)/2}}. \tag{4.6}$$

Sada po lemi 4.8, kako je $tr(B_N) = 0$, postoji ortonormirana baza $z_1, ..., z_{n+N}$ u $X \oplus X$ takva da vrijedi $(B_N z_k, z_k) = 0$. Relativno u odnosu na bazu $z_1, ..., z_{n+N}$ matrica operatora $I - B_N$ ima 1 duž glavne dijelagonale i negativne koeficijente u matrici od B_N inače. Stoga,

$$||I - B_N||^2 = N + n + ||B_N||^2 = N + n + N^{-1}|tr(B)|^2 + ||B||^2. \tag{4.7}$$

Kombinirajući formule (4.4)-(4.7), vidimo da vrijedi

$$|(1 + \frac{tr(B)}{N})^N \prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda})(I - B)^{-1}| \leq \frac{(N + n + N^{-1}|tr(B)|^2 + ||B||^2)^{(N+n-1)/2}}{(N + n - 1)^{(N+n-1)/2}} =$$

$$\frac{(1 + \frac{|tr(B)|^2}{N(N+n)} + \frac{||B||^2}{N+n})^{(N+n-1)/2}}{(1 - \frac{1}{N+n})^{(N+n-1)/2}}$$

Nejednakost vrijedi za sve dovoljno velike N-ove, i stoga, pustimo li $N \to \infty$, vidimo da vrijedi

$$|e^{tr(B)} \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda})(I - B)^{-1}| \leq \exp(\frac{1}{2}(1 + \|B\|^2)).$$

Prisjetimo li se da $B = A/\lambda$ i da je $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda}$, zaključak ovog teorema slijedi odmah. $\square$

Poglavlje 5

Trag Hilbert-Schmidtovih operatora

Nakon što smo pokazali preliminarne teoreme za konačno dimenzionalne prostore, vraćamo se proučavanju Hilbertovog prostora. Poželjno je generalizirati koncept traga određenih operatora na Hilbertovom prostoru, te se na prvi pogled čini kao da je ovaj koncept odmah poznat i dostupan za Hilber-Schmidtove operatore. Međutim, to nije točno, kako sljedeći primjer pokazuje.

Neka je $\{e_n\}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora X i neka je A linearni operator definiran jednadžbama $Ae_n = \frac{1}{n}e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

kovergentan, tako da je A Hilbert-Schmidtov operator, dok red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n \mid e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

za kojega bi se mogli ponadati da će biti koristan u definiranju traga od A, divergira.

Tako, trag ne možemo definirati na ovaj način za svaki operator klase HS. Pokazat ćemo da, ako je $A = UV$, gdje U, V pripadaju klasi HS, tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n \mid e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ve_n \mid U^* e_n)$$

konvergira, i definira koristan koncept ”traga”. Sa ovom malom promjenom u pristupu u odnosu na konačno dimenzionalni slučaj, dovoljnu količinu te teorije možemo prenijeti kako bi generalizirali Carlemanovu nejednakost 4.9 za proizvoljne Hibert-Schmidtove operatore.

Lema 5.1. *Ako su A i B Hilbert-Schmidtovi operatori na Hilbertovom prostoru X i ako je* $\{e_n\}$ *ortonormirana baza za X, tada red* $\sum_n (Ae_n, B^* e_n)$ *apsolutno konvergira limesu koji je neovisan o bazi.*

Dokaz. Neka su (e_i) i (f_i) bilo koje dvije ortonormirane baze za X. Po Schwartzovoj nejednakosti i Teoremu IV.4.13 [1], slijedi

$$\sum_{i,j} |(Ae_i \mid f_j)\overline{(B^*e_i \mid f_j)}| \leq \Big(\sum_{i,j} |(Ae_i \mid f_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i,j} |(B^*e_i \mid f_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\sum_{i} |Ae_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i} |B^*e_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_{hs}\, \|B^*\|_{hs}$$

Tada dvostruki red

$$\sum_{i,j} (Ae_i \mid f_j)\overline{(B^*e_i \mid f_j)} \tag{5.1}$$

konvergira apsolutno, stoga odgovarajući iterativni redovi postoje i jednaki su.

Po Teoremu IV.4.13, [1]

$$\sum_j (Ae_i \mid B^*e_i) = \sum_i \sum_j (Ae_i \mid f_j)\overline{(B^*e_i \mid f_j)} = \sum_j \sum_i (f_j \mid e_i)\overline{(A^*f_j \mid e_i)}$$

$$= \sum_j (Bf_j \mid A^* f_j) \tag{5.2}$$

Egzistencija jednakosti iterativnih limesa koji odgovaraju (5.1) implicira postojanje i jednakost gore napisanih jednostrukih limesa. Zamijenimo li (f_j) s (e_i) dobijemo $\sum_i (Ae_i \mid B^*e_i) = \sum_i (Be_i \mid A^*e_i)$, simetričnost po A i B. Primijenimo li još jednom (5.2) dobit ćemo neovisnost o bazi. $\square$

Definicija 5.2. *Neka su A i B Hilbert-Schmidtovi operatori na Hilbertovom prostoru X, tada se trag para operatora A i B definira kao*

$$tr(A, B) = \sum_i (Ae_i \mid B^* e_i),$$

gdje je $\{e_n\}$ bilo koja ortonormirana baza za X.

Napomena 5.3. *Trag Hilbert-Schmidtovog operatora definira se kao trag para dvaju operatora.*
Kompaktni operatori s konvergentnim tragom su nuklearni operatori:
Trag nuklearnog operatora $A \in L(X)$, pri čemu je X separabilan Hilbertov prostor i (e_n) ortonormirana baza u X, definira se kao

$$tr(A) = \sum (Ae_n \mid e_n).$$

Nešto više detalja o nuklearnim operatorima, kao i sama definicija nuklearnih operatora može se pronaći u [3].

Teorem 5.4. *Funkcija traga je simetrična bilinearna funkcija definirana na produktu HS sa samim sobom. Dodatno, ako su A i B iz HS, tada vrijedi*

$$|tr(A, B)| \leq \|A\|_{hs} \ \|B\|_{hs}, \qquad tr(B \mid B^*) = \|B\|_{hs}^2 .$$

Dokaz. Simetrija funkcije traga i nejednakost $|tr(A, B)| \leq \|A\|_{hs} \|B\|_{hs}$ su pokazani tijekom dokaza prethodne leme. Bilinearnost i činjenica da vrijedi $tr(B, B^*) = \|B\|_{hs}^2$ slijede direktno iz Definicija 5.2 i 2.3 □

Korolar 5.5. *Funkcija $tr(A, B)$ je neprekidna kao preslikavanje $HS \oplus HS$ u polje skalara.*

Označimo s $\mathcal{F}(A)$ skup funkcija koje su analitičke na nekoj okolini od $\sigma(A)$. Analitička funkcija $f(A)$ iz skupa $\mathcal{F}(A)$ definirana je na sljedeći način:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

Lema 5.6. *Neka je A linearan operator na Hilbertovom prostoru X koji ima konačno-dimenzionalni rang. Neka je $\mathcal{N}$ jezgra od A, i neka je E ortogonalna projekcija na konačno-dimenzionalan potprostor od X koji sadrži $\mathcal{N}^{\perp}$. Tada je:*

1. *Spektri operatora A i EA su jednaki*
2. *Neka je f analitička funkcija klase $\mathcal{F}(A)$ takva da je $f(0) = 0$. Tada je $f(EA) = Ef(A)$, $f(A) = f(A)E$, $tr(f(A), A) = tr(f(EA), EA)$, i $tr(f(EA), EA)$ se podudara s tragom restrikcije operatora $EAf(A)$ na konačno dimenzionalni prostor EX.*

Dokaz. 1. Ako je X beskonačno dimenzionalan, ishodište pripada spektru od A i EA. Pretpostavimo da $\lambda \neq 0$ pripada spektru od A. Kako je A kompaktan, teorem VII.4.5 [1] pokazuje da je λ svojstvena vrijednost i tako za ne-nul element x iz X vrijedi $Ax = \lambda x$, te stoga, kako je $A = AE$, imamo $(EA)(Ex) = \lambda Ex$. Stoga λ pripada spektru od EA. Suprotno, pretpostavimo da ne-nul skalar λ pripada spektru od EA. Tada, za neki ne-nul element x iz EX vrijedi $EAx = \lambda x$. Tada je $Ax = \lambda x + y$, gdje y pripada potprostoru $(I - E)X$, te zbog toga i jezgri od A. Neka je $u = \lambda^{-1} y$. Tada je $A(x + u) = \lambda(x + u)$, pa je λ svojstvena vrijednost od A.

2. Pretpostavimo da je λ u rezolventnom skupu od A. Iz identiteta

$$\lambda I - A = (\lambda I - EA)\lambda^{-1}(I - E)(\lambda I - A) + (\lambda I - EA)E,$$

koji se lako provjeri raspišemo li desnu stranu u monome i koristeći identitet $A = AE$, dobivamo množenjem sa $(\lambda I - EA)^{-1}$ slijeva i sa $(\lambda I - A)^{-1}$ zdesna

$$(\lambda I - EA)^{-1} = \lambda^{-1}(I - E) + E(\lambda I - A)^{-1}. \tag{5.3}$$

Pretpostavimo da je analitička funkcija f u klasi $\mathcal{F}(A)$, te je stoga, po (1), u klasi $\mathcal{F}(EA)$, i vrijedi $f(0) = 0$. Koristeći (5.3), uzmemo li odgovarajuću konturu integracije C te koristeći definiciju od $f(A)$, pokazuje se da vrijedi

$$f(EA) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda I - EA)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\{\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda\}(I-E) + \frac{1}{2\pi i} E \int_C f(\lambda)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda =$$
$$= f(0)(I-E) + Ef(A) = Ef(A)$$

Na vrlo sličan način može se pokazati da je $f(A)E = f(AE)$, budući da je $A = AE$, pokazuje da vrijedi $f(A)E = f(A)$.

Neka je $\{e_i, i \in I\}$ ortonormirana baza za X. Kako je EX konačno dimenzionalan, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji konačni podskup J od I takav da je $\{e_i, i \in J\}$ ortonormirana baza za EX, te $\{e_i, i \in I - J\}$ ortonormirana baza za $(I-E)X$. Tada, zbog $A = AE$, imamo $A^* = EA^*$ i vrijedi

$$tr(f(EA), EA) = tr(Ef(A), EA) = \sum_{i \in I} (Ef(A)e_i, (EA)^* e_i) =$$

$$= \sum_{i \in J} (f(A)e_i, A^* e_i) = \sum_{i \in J} (EAf(A)e_i, e_i) = tr(EAf(A) \mid EX). \tag{5.4}$$

Kako vrijedi $f(A)E = f(A)$, slijedi $f(A)(I-E) = 0$, $f(A)e_i = 0$ za $e_i \in I-J$, te iz (5.4) imamo

$$tr(f(A), A) = \sum_{i \in I} (f(A)e_i, A^* e_i) = \sum_{i \in J} (f(A)e_i, A^* e_i) = tr(f(EA), EA),$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Lema 5.7. *Neka je A linearni operator u konačno dimenzionalnom Hilbertovom prostoru X, i neka su $\lambda_1, ..., \lambda_n$ njegove svojstvene vrijednosti ponovljene u odnosu na njihovu kratnost. Tada postoji ortonormirana baza $\{e_i\}$ za X za koju vrijedi*

$$(Ae_i, e_i) = \lambda_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Dokaz. Pokazat ćemo da postoji ortonormirana baza $\{e_i\}$ za X u čijim terminima matrica (a_{ij}) od A ima "subdijagonalnu formu", tj., $a_{ij} = 0$, $j > i$. Ovo će biti pokazano indukcijom po n. Ako je $n = 1$, rezultat je očit. Nadalje, neka je $n > 1$, i neka je λ svojstvena vrijednost od A. Tada $A - \widehat{\lambda I}$ preslikava X u odgovarajući potprostor S_0. Neka je S $n-1$ dimenzionalan potprostor od X takav da vrijedi $S \supseteq S_0$. Tada, budući da je S nužno invarijantan za A, po pretpostavci indukcije postoji ortonormirana baza $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ za S takva da $((A - \widehat{\lambda I})e_i, e_i) = 0$, za $j > i$. Neka je e_n ortogonalan na S i ima jediničnu normu tako da je $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormirana baza za X. Tada je matrica od $A - \widehat{\lambda I}$ u terminima od $\{e_1, ..., e_n\}$ upravo $((A - \widehat{\lambda I})e_i, e_j)$ i vrijedi $((A - \widehat{\lambda I})e_i, e_j) = 0$ za $j > i$. Ovime završavamo konstrukciju tražene ortonormirane baze.

Tako je determinanta $\det(\lambda I - A)$ jednaka

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - (Ae_1, e_1))...(\lambda - (Ae_n, e_n)).$$

Dakle, iz napomene 4.5 slijedi da je (Ae_i, e_i), $i = 1, ..., n$ niz svojstvenih vrijednosti od A ponovljenih u skladu sa svojom kratnošću. □

Napomena 5.8. *Koristeći red potencija za eksponencijalnu funkciju operatora, lako se vidi da, ako je A operator u X čija je matrica u odnosu na bazu $\{e_1, ..., e_n\}$ subdijagonalna i ima dijagonalne elemente $\lambda_1, ..., \lambda_n$, tada je matrica e^A u odnosu na istu bazu također subdijagonalna i ima dijagonalne elemente $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$, te ima determinantu*

$$e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)} = e^{tr(A)}.$$

Dakle, vrijedi $\det e^A = e^{tr(A)}$. Po dokazu prethodne leme znamo da vrijedi da se svaka matrica može staviti u subdijagonalnu formu u odnosu na neku bazu za X, pa ovaj identitet općenito vrijedi. Neka je A operator na X takav da postoji A^{-1}, takav da možemo definirati $log(A)$. Sada gornji identitet možemo zapisati kao

$$\det(A) = \det e^{\log(A)} = e^{tr(\log(A))}.$$

Ovaj će nam identitet biti koristan u daljnjem radu. Sada ćemo navesti nekoliko tehničkih tvrdnji koje su nam potrebne kako bismo rezultate za konačno dimenzionalan slučaj prenijeli na beskonačno dimenzionalan.

Lema 5.9. *Neka su λ, z kompleksni brojevi takvi da je $\lambda z \neq 1$ te neka je*

$$f(\lambda, z) = z^{-1}[\log(1 - \lambda z) + \lambda z].$$

Nadalje, $\{e_i, \quad i \in I\}$ je ortonormirana baza za Hilbertov prostor X, a A je Hilbert-Schmidtov operator čiji spektar ne uključuje broj λ^{-1}. Tada za svaki konačni podskup J od I vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\exp[tr(f(\lambda, A), A)] \leq$$
$$\exp\{\frac{1}{2}\sum_{i \notin J} |\lambda A e_i|^2\} \; [\exp\{\frac{1}{2}\sum_{i \in J} \mathcal{R}(\lambda A e_i, e_i)\}] \; \prod_{i \in J}(1 - 2\mathcal{R}(\lambda A e_i, e_i) + |\lambda A e_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Korolar 5.10. *Za svaki pozitivni ε imamo*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{\varepsilon |\lambda|^2} |\exp(tr(f(\lambda, A), A)]| = 0.$$

Sada smo u mogućnosti ključne rezultate sa konačno dimenzionalnih slučajeva prenijeti na beskonačno dimenzionalne. Prije nego li krenemo s dokazivanjem ključnih teorema za beskonačno dimenzionalne slučajeve navedimo još jednu važnu napomenu:

Napomena 5.11. *Operator N u Hilbertovom prostoru je kvazi-nilpotentan ako vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} ||N^n||^{\frac{1}{n}} = 0$$

što je ekvivalentno uvjetu

$$\sigma(N) = \{0\}$$

Sada bez dokaza navodimo poznatu nejednakost Caratheodory-a koja nam je neophodna u dokazu slijedećeg teorema.

Lema 5.12. ***Carathéodory***
Neka je f analitička funkcija u krugu $|z| \leq R$ kompleksne ravnine, i neka je $f(0) = 0$. Tada, ako je $\mathcal{R}f(z) \leq M$ za $|z| = R$, imamo $|f(z)| \leq 2M$ za $|z| \leq \frac{1}{2}R$.

Teorem 5.13. *Neka je N kvazi-nilpotentan Hilbert-Schmidtov operator. Tada je $tr(N, N) = 0$.*

Dokaz. Kako je $\sigma(N) = \{0\}$, funkcija $f(\lambda, N)$ iz leme 5.9 je definirana za sve kompleksne λ, te po teoremu 3.5 ima kao svoju vrijednost Hilbert-Schmidtov operator. Kako vrijedi

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f(\lambda + \Delta\lambda, z) - f(\lambda, z)}{\Delta\lambda} = \frac{\partial f(\lambda, z)}{\partial \lambda}$$

za svaki λ, uniformno za z u nekoj okolini $z = 0$, po teoremu 3.5 slijedi da

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f(\lambda + \Delta\lambda, N) - f(\lambda, N)}{\Delta\lambda}$$

postoji u normi od HS i jednak je $\dfrac{\partial f(\lambda, N)}{\partial \lambda}$ (∂ općenito označava parcijalnu derivaciju). Dakle, funkcija $f(\lambda, N)$ je analitička s vrijednostima u HS. Iz korolara 5.5 slijedi da je funkcija g definirana jednadžbom

$$g(\lambda) = tr(f(\lambda, N), N)$$

analitička za sve λ. Također je očito iz definicije od $f(\lambda, N)$ da vrijedi $g(0) = 0$. Prethodna lema pokazuje da vrijedi $|\exp(g(\lambda))| = o(e^{\varepsilon|\lambda|^2})$ kako $\lambda \to \infty$ za svaki pozitivni ε. Stoga,

$$\limsup_{|\lambda| \to \infty} \mathcal{R}(g(\lambda)) - \varepsilon|\lambda|^2 \leq 0 \tag{5.5}$$

za svaki $\varepsilon > 0$.

Iz nejednakost Carathéodory-a (lema5.12) i iz prethodne nejednakosti zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{|g(\lambda)|}{|\lambda|^2} = 0.$$

Stoga, funkcija $g(\lambda)/\lambda^2$ je analitička i iščezava u $\lambda = \infty$. Odatle slijedi da g ima Laurentov razvoj jednak

$$g(\lambda) = a\lambda + b + \frac{c}{\lambda} + ...$$

u okolini od $\lambda = \infty$. Posljedično, analitička funkcija $g(\lambda) - a\lambda$ je analitička za sve konačne i beskonačne λ i iščezava u $\lambda = 0$. Po Liouvilleovom Teoremu (vidi [6]), slijedi da je $g(\lambda) - a\lambda = 0$, tj. $g(\lambda) = a\lambda$.

Sada, kako je $f(\lambda, z) = z^{-1}[\log(1 - \lambda z) + \lambda z]$, očito je da vrijedi

$$f(\lambda, z) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{k-1}}{k},$$

red konvergira u normi od HS za sve dovoljno malene λ i z. Dakle, iz teorema 3.5 slijedi da

$$f(\lambda, N) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k N^{k-1}}{k},$$

red konvergira u normi od HS za dovoljno malene λ. Tako, po korolaru 5.5, slijedi

$$a\lambda = g(\lambda) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k} tr(N^{k-1}, N).$$

Iz čega slijedi da je $tr(N, N) = 0$. □

Teorem 5.14. *Neka je A Hilbert-Schmidtov operator, i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ njegove ne-nul svojstvene vrijednosti, svaka ponovljena u odnosu na svoju kratnost. Ako su f i g funkcije koje su analitičke u okolini spektra od A te iščezavaju u ishodištu, tada su $f(A)$ i $g(A)$ Hilbert-Schmidtovi operatori, te vrijedi*

$$tr(f(A), g(A)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i) g(\lambda_i),$$

gdje je red na desnoj strani jednakosti apsolutno konvergentan.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(\lambda_i)|^2 < \infty. \tag{5.6}$$

Iz teorema 3.5 i teorema o spektralnom preslikavanju (VII.3.19[1]) vidimo da je dovoljno promotriti slučaj $f(z) = z$, i dokazati da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty. \tag{5.7}$$

Neka je $E(\lambda_i; A)$ projekcija definirana u Sekciji VII.3[1] i neka je A_n restrikcija operatora A na potprostor

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} E(\lambda_i; A)X.$$

Očito su svojstvene vrijednosti od A_n u X_n i jednake su $\lambda_1, \lambda_2, ...$ Nadalje imamo $||A_n||_{hs} \leq ||A||_{hs}$, te kako iz leme 5.7 i korolara 2.4 imamo

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq ||A_n||_{hs}^2 ,$$

zaključak (5.7) odmah slijedi.

Apsolutna konvergencija niza $\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)g(\lambda_i)$ tako slijedi iz (5.6) i Schwartzove nejednakosti. Neka je X' zatvarač potprostora $\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i; A)X$, i neka je X'' ortogonalni komplement od X'. Neka je $\{e_n\}$ ortonormirana baza za X' izabrana tako da je $\{e_1, \cdots, e_{n_1}\}$ baza za X_1, $e_1, \cdots, e_{n_2}$ baza za X_2 itd.

Neka je $\{f_j\}$ ortonormirana baza za X''. Tada iz definicije 5.2 slijedi

$$tr(f(A), g(A)) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(A)e_i, g(A)^* e_i) + \sum_{j} (f(A)f_j, g(A)^* f_j).$$

Imamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f(A)e_i \mid g(A)^* f_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} (f(A)e_i \mid g(A)^* e_i) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} tr(gf(A)(X_k)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(\lambda_i) f(\lambda_i)$$

po Teoremu VII.3.20[1], Teoremu VII.3.19[1] i 4.3. Dokaz ovog teorema će biti dovršen kada pokažemo da vrijedi $\sum_\alpha (f(A)f_j \mid g(A)^* f_j) = 0$.

Kako vrijedi $(f(A)f_j \mid g(A)^* f_j) = (g(A)f_j \mid f(A)^* f_j)$, istinitost tražene jednadžbe je očita posljedica istinitosti sljedeće tri jednadžbe

$$\begin{aligned} \sum_j (f(A)f_j \mid f(A)^* f_j) &= 0, \\ \sum_j (g(A)f_j \mid g(A)^* f_j) &= 0, \\ \sum_j ((f+g)(A)f_j \mid (f+g)(A)^* f_j) &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Kako sve jednadžbe imaju istu formu, dovoljno je pokazati prvu od njih. Po Teoremu VII.3.20[1], X' je preslikan na samog sebe sa $f(A)$. Tako je i X'' je preslikan na samog sebe sa $f(A)^*$. Neka je $f(A)^*|X'' = S$. Tada, po teoremu 3.5, lemi 2.5 i definiciji 2.1, S je Hilbert-Schmidtov operator. Vrijedi

$$(Pf(A)x \mid y) = (f(A)x \mid y) = (x \mid f(A)^* y), \qquad x, y \in X'',$$

gdje P označava ortogonalnu projekciju od X na X''. Tada imamo $Pf(A)|X'' = S^*$. Dakle, (5.8) je ekvivalentno tvrdnji

$$tr(S, S) = 0. \tag{5.9}$$

Iz teorema 5.13 slijedi da kako bi dokazali (5.9), dovoljno je pokazati da je S kvazi-nilpotentan. Da nije tako, po Teoremu VII.4.5[1], postojao bi ne-nul kompleksan broj μ i ne-nul vektor $x \in X''$ takav da vrijedi $Sx = \mu x$. Dakle, opet po Teoremu VII.4.5[1], imamo $E(\mu; f(A)^* X'' \neq \{0\}$. Iz paragrafa koji je slijedio nakon Definicije VII.3.17[1], Leme VI.2.10[1] i Definicije VII.3.9[1], vidimo da vrijedi

$$E(\mu; f(A)^*) = E(\overline{\mu}; f(A))^*.$$

Sada, po Teoremu VII.3.20[1], postoji ne-nul kompleksan broj ν takav da vrijedi $E(\nu; A)^* X'' \neq 0$. Međutim, kako vrijedi $(X'', E(\nu; A)X) = 0$ za svaki ne-nul kompleksni broj v po definiciji, imamo kontradikciju koja pokazuje istinitost ove leme. □

Teorem 5.15. *Neka je A Hilbert-Schmidtov operator sa ne-nul svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, ...$ ponovljenim u skladu sa svojim kratnostima. Tada beskonačni produkt*

$$\varphi_\lambda(A) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda})e^{\frac{\lambda_i}{\lambda}}$$

konvergira i definira analitičku funkciju za $\lambda \neq 0$. Za svaki fiksni $\lambda \neq 0$, $\varphi_\lambda(A)$ je neprekidna funkcija s kompleksnim vrijednostima na Banachovom prostoru svih Hilbert-Schmidtovih operatora.

Dokaz. Prvo primijetimo ako je ζ kompleksan broj sa $|\zeta| < 1$, tada

$$\log e^{\zeta}(1 - \zeta) = \zeta - (\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + ...) = O(|\zeta^2|), \tag{5.10}$$

kako $\zeta \to 0$. Neka je $f(\zeta) = \zeta^{-1}\log\{e^{\zeta}(1 - \zeta)\}$ i $g(\zeta) = \zeta$, tako da su f i g analitičke funkcije osim za $\zeta = 1$ i iščezavaju za $\zeta = 0$. Ako je A Hilbert-Schmidtov operator sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, ...$ koje su sve različite od 1 i ako je $\lambda \neq 0$, tada po VII.3.11[1], A/λ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda, ...$ Primijenimo li teorem 5.14, vidimo da vrijedi

$$tr(f(\frac{A}{\lambda}), \frac{A}{\lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty}\log\{e^{\frac{\lambda_k}{\lambda}}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda})\},$$

i da red konvergira apsolutno uz uvjet da $\lambda_k \neq \lambda$ za svaki k.

Usprkos činjenici da $\lambda_k \to 0$, iz aproksimacije u (5.10) slijedi da red

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\{e^{\frac{\lambda_k}{\lambda}}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda})\}$$

konvergira uniformno i apsolutno za svaki kompaktan skup brojeva λ koji ne sadrži 0 niti bilo koji od elemenata λ_k. Dakle, uzimajući eksponencijale, slijedi da produkt

$$\varphi_\lambda(A) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k/\lambda}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda})$$

konvergira uniformno za svaki takav kompaktan skup od λ. Kako ovaj produkt očito konvergira nuli za $\lambda = \lambda_k$ lako se pokaže da je funkcija $\varphi_\lambda(A)$ analitička za $\lambda \neq 0$ i iščezava samo za λ iz $\sigma(A)$.

Preostaje pokazati da ako je $\lambda \neq 0$, tada je $\varphi_\alpha(A)$ neprekidna u A u odnosu na Hilbert-Schmidtovu normu u HS. Kako bi ovo napravili, neka je $\{A_n\}$ niz u HS takav da $\|A_n - A\|_{hs} \to 0$. Tada, ako je C kompaktan skup u $\rho(A)$, iz činjenice da vrijedi $|A_n - A| \leq \|A_n - A\|_{hs}$ i Leme VII.6.3[1] slijedi da je $C \subseteq \rho(A_n)$ za dovoljno velike n-ove. Ako je f funkcija koju smo uveli na početku dokaza, tada su za dovoljno velike n-ove operatori $f(A_n/\lambda)$ definirani za sve λ u C i po teoremu 3.5 oni su iz HS. Iz teorema 3.5 vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(\frac{A_n}{\lambda}) - f(\frac{A}{\lambda}) \right\|_{hs} = 0$$

uniformno za λ iz kompaktnog skupa C. Tako, iz teorema 4.8, se vidi da

$$tr(f(\frac{A}{\lambda}), \frac{A}{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} tr(f(\frac{A_n}{\lambda}), \frac{A_n}{\lambda}),$$

pri čemu je limes uniforman za sve λ iz C.

Sada, kako vrijedi $\varphi_\lambda(A) = \exp\{tr(f(A/\lambda, A/\lambda)\}$ za sve λ iz $\rho(A)$, slijedi da

$$\varphi_\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\lambda(A_n)$$

uniformno za sve λ iz C. Ali, za svaki n funkcija $\varphi_\lambda(A_n)$ je analitička za $\lambda \neq 0$. Dakle, ako je C kontura unutar koje nije nula, uniformna konvergencija od $\{\varphi_\lambda(A_n)\}$ na C i princip maksimalnog modula impliciraju da je konvergencija uniformna unutar C, čak i u slučaju da se unutar C nalaze točke iz $\sigma(A)$. Dakle, $\varphi_\lambda(A_n) \to \varphi_\lambda(A)$ za sve $\lambda \neq 0$, što pokazuje da je preslikavanje $A \to \varphi_\lambda(A)$ neprekidno na HS. $\square$

Bibliografija

[1] Dunford-Schwartz, Linear operators, part 1, Interscience Publishers, 1958

[2] Dunford-Schwartz, Linear operators, part 2, Interscience Publishers, 1963

[3] Svetozar Kurepa, Funkcionalna analiza, Školska knjiga, 1981

[4] Hrvoje Kraljević, Kompaktni operatori, skripta, PMF-MO

[5] Boris Guljaš, Normirani prostori i operatori, skripta, PMF-MO

[6] Šime Ungar, Kompleksna analiza, skripta, PMF-MO

[7] Theodore W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of *Algebras, Volume 2, Cambridge University Press, 1994

Sažetak

David Hilbert i Erhard Schmidt početkom 20. stoljeća, odnosno 1907. godine, dali su prvu studiju o Hilbert-Schmidtovim operatorima te su po njima ti operatori i dobili ime. Za teoriju Hilbert-Schmidtovih operatora vrlo značajan je John von Neumann, iako se većina njegovih rezultata pripisuje John Wilson Calkinu.
U ovom diplomskom radu dan je pregled teorije Hilbert-Schmidtovih operatora koji s nuklearnim operatorima čine istaknutu klasu kompaktnih operatora. Na samom početku dali smo osnovnu definiciju Hilbert-Schmitovih operatora na Hilbertovom prostoru, koju smo kasnije proširili do definicije integralnih Hilbert-Schmidtovih operatora na prostoru pozitivne mjere. Pokazali smo da definicija Hilbert-Schmitovih operatora ovisi samo o prostoru na kojemu se definiraju, ali ne i o bazi tog prostora. Dali smo definiciju Hilbert-Schmidtove norme te pokazali da je skup Hilbert-Schmidtovih operatora zajedno s Hilbert-Schmidtovom normom Banachova algebra te obostrani ideal. Nakon što smo definirali integralne Hilbert-Schmitove operatore pokazali smo da je svaki Hilbert-Schmitov operator kompaktan operator. Vrlo zanimljiva je teorija o tragu Hilbert-Schmitovih operatora, no prije nego li smo krenuli s tim dijelom teorije morali smo iskazati dvije značajne nejednakosti koje su nam prijeko potrebne za ovaj dio teorije, a to su Hadamardova i Carlemanova nejednakost. Hilbert-Schmidtovi operatori su specifični po svome tragu; za razliku od nuklearnih operatora koji imaju konvergentan trag, trag Hilbert-Schmidtovih operatora definira se za par dvaju operatora. Za funkciju traga Hilbert-Schmidtovih operatora pokazali smo da je to simetrična bilinearna funkcija definirana na produktu skupa

Hilbert-Schmidtovih operatora sa samim sobom. Također smo pokazali da je trag dvaju kvazi-nilpotentnih Hilbert-Schmidtovih operatora jednak nuli. Osim traga Hilbert-Schmidtovih operatora, ono što je vrlo zanmljivo u ovom radu je odnos Hilbert-Schmidtovog operatora i analitičke funkcije na okolini njegovog spektra. Pokazali smo da za Hilbert-Schmidtov operator A i funkciju f koja je analitička na okolini njegovog spektra vrijedi da je $f(A)$ Hilbert-Schmidtov operator, a zatim smo pokazali zanimljiv odnos traga ovako definiranih Hilbert-Schmidtovih operatora s jedne strane i vrijednosti analitičkih funkcija u točkama spektra s druge strane.

Summary

The first study regarding Hilbert-Schmidt operators was given in the early 20th century by David Hilbert and Erhard Schmidt, after whom the operators were also named.
This thesis presents a theoretical overview of Hilbert-Schmidt operators, which together with nuclear operators form a distinct class of compact operators. At the beginning of the thesis a basic definition of Hilbert-Schmidt operators on a Hilbert space was given. Afterwards, that definition was extended to define Hilbert-Schmidt integral operators on a positive measure space. Furthermore, the definition of Hilbert-Schmidt operators was shown to depend only on the space it was defined on, and not on the choice of the base of that space. The Hilbert-Schmidt norm was defined, the set of all Hilbert-Schmidt operators was proved to be a Banach algebra, as well as a two-sided ideal. After defining Hilbert-Schmidt integral operators, each Hilbert-Schmidt operator was shown to be compact. The theory regarding the trace of Hilbert-Schmidt operators yielded some very interesting results, however before going into the details of that theory, it was necessary to define and prove Hadamard's and Carleman's inequalities. Hilbert-Schmidt operators have a distinct trace; unlike nuclear operators which have a convergent trace, their trace is defined for a pair of operators. The trace function of Hilbert-Schmidt operators was shown to be a symmetric bilinear function defined on the product of the set of Hilbert-Schmidt operators with itself. Furthermore, the trace of two quasi-nilpotent Hilbert-Schmidt operators was proved to be zero. Besides the results regarding the trace of Hilbert-Schmidt operators, an interesting relation between a Hilbert-Schmidt opera-

tor and a function which is analytic in a neighborhood of the operators spectrum was also established. Given an operator A, and a function f, analytic in a neighborhood of the operators spectrum, $f(A)$ was shown to be a Hilbert-Schmidt operator. Finally, an interesting relation between the trace of said Hilbert-Schmidt operators on one hand and the values of analytic functions in the points of the spectrum was also established.

Životopis

Rođena sam 3. siječnja 1988. godine u Požegi. Završila sam osnovnu školu fra Kaje Adžića-Pleterničanina u Pleternici te Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Požegi. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na brojnim općinskim i županijskim natjecanjima iz matematike, fizike i geografije. 2007. godine sam upisala preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Odmah po završetku preddiplomskog studija, 2011. godine, upisala sam diplomski studij Primijenjene matematike. Iste godine stupila sam u brak sa svojim suprugom Sinišom Mirkovićem te smo dobili sina Leonarda. Godinu dana kasnije, 2012. godine, počela sam se baviti procjenama mjerne nesigurnosti ispitnih i umjernih laboratorija u skladu s europskim normama. Pored procjena mjernih nesigurnosti aktivno sam počela sudjelovati u radu jednog umjernog laboratorija u kojem sam napravila kompletan sustav kvalitete laboratorija za potrebu akreditacije od strane Hrvatske akreditacijske agencije. Osim vođenja sustava kvalitete i procjena mjerne nesigurnosti aktivno sudjelujem u svim segmentima rada laboratorija što uključuje razna umjeravanja i ispitivanja. Slobodno vrijeme posvećujem svome trogodišnjem sinu i suprugu.