Stohastički račun u financijskoj matematici

Prpić, Sara Mihaela

Master's thesis / Diplomski rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:082034

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Mihaela Prpić

STOHASTIčKI RAčUN U FINANCIJSKOJ MATEMATICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Marko Radulović

Zagreb, veljača 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Mojoj obitelji i prijateljima, za podršku tijekom cijelog školovanja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Uvod u stohastički račun i financijsku matematiku **2**
1.1 Opcije 2
1.2 Brownovo gibanje 4
1.3 Itôv integral i Itôva formula 7
1.4 Višedimenzionalna Itôva formula 8

2 Black-Scholes-Mertonov model **10**
2.1 Ekvivalentna martingalna mjera 10
2.2 Girsanovljev teorem 11
2.3 Black-Scholes-Mertonova funkcija 12
2.4 Generalizirani Black-Scholesov model 17

3 Parcijalne diferencijalne jednadžbe **20**
3.1 Feynman-Kac teorem 21
3.2 Hull-White model 23

4 Opcije s više osnovnih imovina **25**
4.1 Black-Scholesova funkcija za opcije s više osnovnih imovina 27
4.2 Rainbow opcije 29
4.3 Basket opcije 35
4.4 Quanto opcije 37

Bibliografija **41**

Uvod

Stohastički račun ima široku primjenu u financijskoj matematici te analizi modernih tržišta. U posljednje vrijeme razvijaju se mnogi matematički modeli koji nam omogućavaju razumijevanje kretanja tržišta, vrednovanja financijskih instrumenata, kretanja cijena i upravljanja rizicima. Jedan od najvažnijih modela je Black-Scholes-Mertonov model koji daje temelj za određivanje cijena opcija, te koji je kasnije postao ključan za daljnji razvoj tržišta, a njegova geneneralizacija proširila mu je primjenu na složenije instrumente kao što su dionice s isplatom dividendi.

U prvom poglavlju uvest ćemo osnovne pojmove ključne za razumijevanje daljnjeg rada. Pobliže ćemo se upoznati sa svojstvima pojedinih opcija i opisati najbitnije vrste. Definiramo Brownovo gibanje, te Itôv integral i Itôvu formulu kojima se koristimo kroz cijeli rad kao jednima od najbitnijih rezultata stohastičkog računa. Drugo poglavlje je fokusirano na opis Black-Scholes-Mertonovog modela, te izvod Black-Scholes-Mertonove funkcije. U trećem poglavlju bavimo se vezom između parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i stohastičkih jednadžbi pomoću Feynman-Kacovog teorema. Navodimo i Hull-Whiteov model za modeliranje kamatnih stopa. Posljednje poglavlje bavi se opcijama s više osnovnih imovina, navode se tri vrste takvih opcija, te ćemo proučavati njihove karakteristike i pokušati svesti problem na jednostavniji jednodimenzionalni problem. Ova vrsta opcija ima široku primjenu u financijama jer omogućava složene strategije zaštite od rizika (hedging) i špekulacije, a njihove cijene ćemo opisivati pomoću Black-Scholesove funkcije za opcije s više osnovnih imovina.

Poglavlje 1

Uvod u stohastički račun i financijsku matematiku

U ovom poglavlju uvest ćemo ključne pojmove za daljnji rad. Prvo ćemo obraditi pojam opcija i opisati vrste te njihova najbitnija svojstva. Nakon toga, bavit ćemo se Brownovim gibanjem, procesom koji opisuje kretanje cijena instrumenata, koji će se protezati kroz cijeli rad. Na kraju ovog poglavlja obraditi ćemo pojmove Itôvog integrala i Itôve formule, kako za jednodimezionalni tako i za višedimenzionalni slučaj kojim ćemo se više baviti u zadnjem poglavlju.

1.1 Opcije

Opcije su financijski instrumenti koji daju investitorima mogućnost kupnje ili prodaje imovine po unaprijed dogovorenoj cijeni, u nekom određenom vremenskom periodu. U svijetu financija, opcije igraju ključnu ulogu u upravljanju rizikom, špekulaciji i arbitraži. U ugovoru opcije postoje dva sudionika – prodavatelj (pisac) opcije, osoba koja je izdala opciju, te kupac opcije, koji postaje njezin vlasnik. Razlikujemo dvije vrste opcija obzirom na to da li kupac kupnjom opcije dobiva prava kupnje ili prodaje.

Call opcije daju kupcu pravo da kupi određenu količinu osnovne imovine po unaprijed ugovorenoj cijeni, poznatoj kao izvršna cijena, u određenom vremenskom razdoblju. Investitori često koriste call opcije kada vjeruju da će cijena osnovne imovine rasti.

S druge strane, **put** opcije daju kupcu pravo prodaje osnovne imovine po dogovorenoj cijeni unutar određenog vremenskog okvira. Investitori koriste put opcije kada očekuju da će doći do pada cijene imovine na tržištu. Druga podjela je na **europske** i **američke** opcije, obzirom na mogućnost izvršenja tijekom vremenskog perioda trajanja opcije.

Europske opcije mogu se izvršiti jedino na datum isteka, odnosno na datum dospijeća. Iz tog razloga investitori moraju unaprijed planirati svoje strategije i ne mogu iskoristiti opciju prije unaprijed određenog trenutka. Ova vrsta opcija često se koristi kod dugoročnih investicija.

Američke opcije, s druge strane, nude veću fleksibilnost jer se mogu izvršiti u bilo kojem trenutku prije ili na datum dospijeća. Omogućavaju kupcu da ranije iskoristi opciju i time iskoristi povoljne uvjete na tržištu kad god se pojave. Američke opcije se koriste za zaštitu od neočekivanog pada cijena imovina.

Obje vrste opcija imaju svoje specifične prednosti i mane, a njihova primjena ovisi o strategijama i ciljevima investitora. Europske opcije mogu biti manje rizične u određenim situacijama, dok američke opcije osiguravaju veće mogućnosti prilagodbe strategija u odnosu na tržište.

Kada promatramo opcije uglavnom ćemo se baviti određivanjem njihovih cijena. Sustav cijena na tržištu s $n+1$ financijskom imovinom u trenutku t je vektor $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^n)$, gdje je S_t^i cijena i-te imovine za trenutak t. U ovom slučaju promatramo jednoperiodni model u kojem imamo samo dva vremenska trenutka, $t = 0$ za sadašnjost i $t = 1$ kada opisujemo neko vrijeme u budućnosti. Slijedi da je S_0 vektor cijena za $t = 0$, te nam je on poznat i vrijedi $S_0^i \geq 0$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$. U fiksnom trenutku $t = 1$ vektor cijena S_1 sadrži nenegativne slučajne varijable S_1^i pa je S_1 nenegativni slučajni vektor.

Definicija portfelja u kontekstu financijske matematike odnosi se na zbirku različitih financijskih imovina koju investitor posjeduje. Portfelj može uključivati različite vrste imovine kao što su obveznice, novac, dionice i drugi financijski instrumenti, a cilj je optimizirati odnos između rizika i povrata. Portfelj koji donosi nerizičan profit naziva se arbitraža.

Definicija 1.1.1. *([7], Definicija 2.1.1) Vektor $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots \phi^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ koji sadrži količine različitih imovina s kojima investitor raspolaže u trenutku $t = 0$ nazivamo **portfelj**. Svaka komponenta ϕ^i označava broj jedinica i-te financijske imovine. Vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0, 1$ definiramo kao*

$$V_t(\phi) = \phi \cdot S_t = \sum_{i=0}^{n} \phi^i S_t^i.$$

Definicija 1.1.2. *([7], Definicija 2.1.2) Portfelj ϕ naziva se **arbitraža**, ako vrijedi $\phi \cdot S_0 = 0$, ali je $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbb{P} - g.s.$ te vrijedi $\mathbb{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$.*

Definicija 1.1.3. *([7], Definicija 3.1.1) Za slučajni proces $X = (X_t, t = 0, 1, \ldots, T)$ kažemo da je **adaptiran** u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t = 0, 1, \ldots, T)$ ako vrijedi da je za svaki $t = 0, 1, \ldots, T$ slučajna varijabla X_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.*

S obzirom da za cijenu i-te imovine S_t^i vrijedi da ovisi isključivo o prethodnim događajima, tj. onima koji su se dogodili do trenutka t, slučajni vektor S_t je izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$. Iz Defincije 1.1.3 slijedi da su S^i adaptirani u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$.

1.2 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje prvi je opisao škotski biolog Robert Brown kako bi objasnio model kretanja čestice koja se nalazi u tekućini i neprekidno sudara s molekulama. Brownovo gibanje je stohastički proces, što implicira da njegovo buduće ponašanje nije predvidivo, ali možemo odrediti vjerojatnost različitih budućih ishoda. Predstavlja osnovu za modele financijskog tržišta u neprekidnom vremenu. Za opis Brownovog gibanja potrebno je prvo uvesti pojam skalirane slučajne šetnje.

Definicija 1.2.1. *([8]) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $(X_n : n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $p = \frac{1}{2}$ koje mogu poprimiti samo dvije vrijednosti -1 ili 1. Simetrična slučajna šetnja je slučajni proces $M = (M_n : n \in \mathbb{N}_0)$ definiran s $M_0 = 0$, te za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Kako bismo aproksimirali Brownovo gibanje trebamo smanjiti korak slučajne šetnje i potom ubrzati vrijeme. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$ definiramo skaliranu simetričnu slučajnu šetnju

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

za $t \in T_n := \{t \geq 0 : nt \in \mathbb{Z}\}$. Ako $t \notin T_n$, $W^{(n)}(t)$ linearno interpoliramo između njegovih vrijednosti u najbližim točkama s i u, lijevo i desno od t, za koje su $ns \in \mathbb{Z}$ i $nu \in \mathbb{Z}$. Uočimo da je $W^{(n)}(t)$ definirano za svaki $t \geq 0$, te da je za fiksi $\omega \in \Omega$, $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$ neprekidna funkcija. Slijedi da puštanjem limesa $n \to \infty$ dobivamo Brownovo gibanje.

Definicija 1.2.2. *([6], Definicija 4.5) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $W = (W_t, t \geq 0)$ je **Brownovo gibanje** ako vrijedi:*

(i) $W_0 = 0$.

(ii) Putevi $t \to W_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).

(iii) Prirasti

$$W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$$

su nezavisni za sve $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$.

(iv) Za sve $0 \leq s < t$ *prirast* $W_t - W_s$ *je normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom* $t - s$*, tj.* $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

Posebna vrsta Brownovog gibanja je geometrijsko Brownovo gibanje (GBM) koje je stohastički proces te se koristi za modeliranje cijena dionica i financijskih instrumenata u mnogim modelima financijske matematike, uključujući Black-Scholes-Mertonovu formulu za cijenu opcija kojom ćemo se baviti u idućem poglavlju. Pomoću geometrijskog Brownovog gibanja, cijena opcije može se procijeniti s obzirom na volatilnost i srednju stopu povrata tržišta.

Definicija 1.2.3. *([5]) Neka su* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $\sigma > 0$ *konstante. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajni proces* $S = (S_t : t \geq 0)$ *kojeg definiramo na sljedeći način:*

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t}.$$

Ova formula pokazuje kako cijena imovine evoluira u vremenu, uzimajući u obzir kako srednja stopa povrata, volatilnost i slučajni proces W_t utječu na promjene u cijeni. Parametar σ definiramo kao volatilnost ili standardna devijacija, a parametar α nazivamo premija rizika ili srednja stopa povrata. Volatilnost mjeri koliko cijena dionice varira oko svoje srednje vrijednosti. Visoka volatilnost znači da će cijena dionice varirati u velikim rasponima te ona donosi veću nesigurnost, dok niska volatilnost znači veću stabilnost cijene dionice. Ključna je za procjenu cijene opcije, a s obzirom da u većini slučajeva nije konstantna treba ju procijeniti, što ćemo izvesti pomoću geometrijskog Brownovog gibanja.

Koristeći log-povrate dionica kod geometrijskog Brownovog gibanja za vremenske trenutke $T_1 \leq t \leq T_2$, volatilnost procijenjujemo formulom:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} \right)^2.$$

Raspis formule se može pronaći u [5].

Bitno svojstvo Brownovog gibanja je martingalnost pa prvo navodimo definiciju martingala s neprekidnim vremenom.

Definicija 1.2.4. *([8], Definicija 1.9) Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *pridružena filtracija. Slučajni proces* $M = (M_t, t \geq 0)$ *je martingal ako vrijedi:*

(i) *M je $\mathbb{F}$-adaptiran,*

(ii) *za sve $t \geq 0$, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$,*

(iii) *za sve $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ g.s.*

Teorem 1.2.5. *([5], Teorem 3.3.4) Brownovo gibanje je martingal.*

Dokaz. Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\
&= W_s.
\end{aligned}$$

□

U daljnjem radu ćemo promatrati i višedimenzionalne slučajeve pa uvodimo pojam d-dimenzionalnog Brownovog gibanja.

Definicija 1.2.6. *([5], Definicija 4.6.1)) D-dimenzionalnim Brownovim gibanjem nazivamo proces*

$$W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d),$$

za kojeg vrijede sljedeća svojstva:

(i) *Svaki W_t^i je jednodimenzionalno Brownovo gibanje.*

(ii) *Ako $i \neq j$, procesi W_t^i i W_t^j su nezavisni.*

(iii) *(**Akumulacija informacija**) Za $0 \leq s < t$, svaki element u filtraciji $\mathcal{F}_s$ je također i u $\mathcal{F}_t$.*

(iv) *(**Adaptiranost**) Za svaki $t \geqslant 0$, slučajni vektor W_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriv.*

(v) *(**Nezavisnost budućih prirasta**) Za $0 \leq t < u$, vektor prirasta $W_u - W_t$ je nezavisan od $\mathcal{F}_t$.*

1.3 Itôv integral i Itôva formula

Prije definicije Itôvog integrala potrebno je opisati pojam jednostavnog procesa pomoću kojeg ćemo definirati Itôv integral.

Definicija 1.3.1. *([8], Definicija 2.1) Adaptiran slučajni proces $H = (H_t, t \in [0,T])$ zovemo jednostavan proces ako vrijedi sljedeća relacija:*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{1.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ na intervalu [0,T]. Slučajne varijable ϕ_j su omeđene i $\mathcal{F}_{t_j}$ - izmjerive za svaki $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definicija 1.3.2. *([8], Definicija 2.2) Neka je $H = (H_t : t \in [0,T])$ jednostavan slučajni proces definiran s (1.1), te $W = (W_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje. Definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t}).$$

*Proces I zovemo **Itôv integral** za jednostavni proces H u odnosu na Brownovo gibanje i označavamo ga s*

$$I_t = \int_0^t H_s dW_s = (H \cdot W)_t.$$

Definicija 1.3.3. *([2], Definicija 3.4.8) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $W = (W_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija. Slučajni proces $X = (X_t : t \in [0,T])$ je **Itôv proces** ako se može zapisati kao*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

gdje je X_0 $\mathcal{F}_0$-izmjeriv, a K_t i H_t su adaptirani procesi koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$\int_0^T \mid K_s \mid ds < \infty \quad \mathbb{P} - g.s, \tag{1.2}$$

$$\int_0^T \mid H_s \mid^2 ds < \infty \quad \mathbb{P} - g.s \tag{1.3}$$

za sve $0 \leq t \leq T$.

Teorem 1.3.4. *([5], Teorem 4.4.1) (Itôva formula za Brownovo gibanje) Neka je f(t,x) funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ i $f_{xx}(t,x)$ te neka je W_t Brownovo gibanje. Tada za svaki $T \geqslant 0$ vrijedi:*

$$f(T, W_T) = f(0, W_0) + \int_0^T f_t(t, W_t)dt + \int_0^T f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W_t)dt. \tag{1.4}$$

Dokaz se može pronaći u [5].

1.4 Višedimenzionalna Itôva formula

Kod višedimenzionalnih stohastičkih procesa X_t^i, $(i = 1, \ldots, n)$ i nezavisnog standardnog Brownovog gibanja W_t^j, $(j = 1, \ldots, m)$, koristit ćemo višedimenzionalnu Itôvu formulu. Koristeći svojstva nezavisnosti Brownovog gibanja te formule za očekivanje i varijancu slijedi da su diferencijali nezavisnog Brownovog gibanja nezavisni te da vrijede sljedeća svojstva:

$$\mathbb{E}(dW_i) = 0,$$

$$Var(dW_i) = dt,$$

$$Cov(dW_i, dW_j) = 0, \qquad (i \neq j)$$

gdje je kovarijanca dana u sljedećem obliku:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Višedimenzionalni Itôv proces X_t^i zadovoljava sljedeći sustav stohastičkih diferencijalnih jednadžbi:

$$d\begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t^1 \\ \vdots \\ K_t^n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} H_t^{11} & \ldots & H_t^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ H_t^{n1} & \ldots & H_t^{nm} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^m \end{bmatrix},$$

gdje su K_t te H_t^i procesi koji su $\mathcal{F}_t$-izmjerivi, te vrijede uvjeti (1.2) i (1.3).

Propozicija 1.4.1. *([2], Propozicija 3.4.18) Neka su* $(X_t^1, \ldots, X_t^n)$ *Itôvi procesi definirani s*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \, ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t H_s^{i,j} \, dW_s^j.$$

Ako je f funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ *i* $f_{xx}(t,x)$, *tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \ldots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \ldots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \end{aligned} \tag{1.5}$$

gdje su

$$dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^m H_s^{i,j} dW_s^j,$$

$$d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{k=1}^m H_s^{i,k} H_s^{j,k} ds.$$

Napokon, $d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{k=1}^m H_s^{i,k} H_s^{j,k} ds$ *možemo prikazati u matričnom obliku:*

$$\begin{bmatrix} d\langle X^1, X^1 \rangle_s & \ldots & d\langle X^1, X^m \rangle_s \\ \vdots & & \vdots \\ d\langle X^n, X^1 \rangle_s & \ldots & d\langle X^n, X^m \rangle_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_s^{11} & \ldots & H_s^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ H_s^{n1} & \ldots & H_s^{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_s^{11} & \ldots & H_s^{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ H_s^{n1} & \ldots & H_s^{nm} \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 2

Black-Scholes-Mertonov model

2.1 Ekvivalentna martingalna mjera

U drugom poglavlju bavimo se određivanjem cijena izvedenih vrijednosnica u neprekidnom Black-Scholes-Mertonovom modelu, te je prvo potrebno definirati ekvivalentnu martingalnu mjeru koju ćemo primijeniti u modelu. Za to ćemo koristiti Girsanovljev teorem, pomoću kojeg računamo promjenu mjere za Brownovo gibanje.

Prvo promatramo jednostavnu zamjenu mjere pomoću koje možemo promijeniti distrubiciju slučajne varijable. Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiramo nenegativnu slučajnu varijabla Z takvu da je $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \to [0, 1]$ na sljedeći način:

$$\mathbb{P}^* = \mathbb{E}[1_A Z] = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Dobivamo da je $\mathbb{P}^*$ vjerojatnost na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, te da vrijedi ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada slijedi da je i $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Kažemo da je $\mathbb{P}^*$ apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}$, tj. $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$. Tada za slučajnu varijablu X očekivanje možemo računati i s obzirom na novu vjerojatnost $\mathbb{P}^*$, a za očekivanje obzirom na obje vjerojatnosti vrijedi:

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[XZ].$$

Nadalje, uzmimo da vrijedi $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Ako je $\mathbb{P}^*(A) = 0$, zbog pretpostavke da je $Z > 0\ \mathbb{P} - g.s.$ slijedi da je onda i $\mathbb{P}(A) = 0$. Vidimo da vrijedi i obrnuta relacija $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$, pa zaključujemo da su $\mathbb{P}^*$ i $\mathbb{P}$ ekvivalentne mjere. Tada vrijedi relacija:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}^*\left[\frac{X}{Z}\right].$$

Kažemo da je Z Radon-Nikodymova derivacija od $\mathbb{P}^*$ s obzirom na $\mathbb{P}$ i pišemo

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}.$$

2.2 Girsanovljev teorem

Teorem 2.2.1. *([6], Teorem 6.4) (Girsanovljev teorem) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $W = (W_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje definirano na tom prostoru, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptiran slučajni proces $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ definiramo*

$$Z_t = exp\Big\{ - \int_0^t \Theta_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_u^2 du \Big\},$$

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \Theta_u du,$$

te pretpostavimo da vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du \Big] < \infty.$$

Nadalje, uzmimo da vrijedi $Z = Z_T$. Tada je $\mathbb{E}Z = 1$, te je slučajni proces $W^* = (W_t^* : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ koju definiramo formulom (2.1).

Dokaz se može pronaći u [6].

Teorem 2.2.2. *([1], Teorem 8.3) (Višedimenzionalni Girsanovljev teorem) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $W = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje za fiksni $T < \infty$ gdje je $0 \leq t \leq T$. Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za Brownovo gibanje i $\theta = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$ adaptirani slučajni proces. Neka vrijedi*

$$X_t^i = W_t^i + \int_0^t \theta_s^i ds,$$

te

$$L_t = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t (\theta_s^i)^2 \, ds - \sum_{i=1}^d \int_0^t \theta_s^i \, dW_s^i \right).$$

Nadalje, pretpostavimo da vrijedi Novikovljev uvjet:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_0^T (\theta_t^i)^2\,dt\right)\right] < \infty.$$

Tada je L_t martingal i vrijedi jednakost $\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[L_0] = 1$ za $t \geq 0$. Definiramo novu mjeru $\mathbb{Q}$ kao $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$. Tada je, za $0 \leq t \leq T$, proces $X = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ d-dimenzionalno Brownovo gibanje u odnosu na mjeru $\mathbb{Q}$.

2.3 Black-Scholes-Mertonova funkcija

U ovom poglavlju opisan je neprekidan model tržišta kojeg su razvili Fischer Black, Myron Scholes i Robert C. Merton 1973. godine pod nazivom "The Pricing of Options and Corporate Liabilites". Model se zasniva na stohastičkoj prirodi kretanja cijene osnovne imovine koju opisujemo geometrijskim Brownovim gibanjem, a rješenje dobivamo u obliku parabolične parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Neka je $T > 0$ proizvoljan trenutak u vremenu, $W = (W_t, t \in [0, T])$ Brownovo gibanje definirano na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$ pripadna filtracija. U ovom poglavlju većinom pratimo [5].

Nadalje, pretpostavljamo da u modelu raspolažemo s dva financijska instrumenta: dionicama kao rizičnom imovinom te novcem kao nerizičnom imovinom. Novac kao nerizična imovina donosi siguran prinos te se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t, t \in [0, T])$ koja je $\mathbb{F}$-adaptirani proces. U dionice se ulaže jer se od njih očekuje veći povrat, ali to donosi i veći rizik.

Prije nego što razvijemo model navesti ćemo najvažnije pretpostavke:

1. Cijena dionice se modelira kao slučajni proces $S = (S_t : t \in [0, T])$ koji je definiran kao generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje iz Definicije 1.2.3, te je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe:

   $$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

   gdje su parametri α (srednja stopa povrata na dionicu), te σ (volatilnost dionice) konstantni. Pretpostavljamo da je σ različita od nule.

2. Bezrizična kamatna stopa r je konstantna.

3. Ne isplaćuju se dividende po osnovnoj imovini.
4. Ne postoje troškovi transakcije i porezi.
5. Tržište ne dopušta arbitražu.

Pretpostavimo da investitor posjeduje portfelj vrijednosti $X = (X_t : t \in [0, T])$, te da u svakom trenutku t ima Δ_t dionica. Δ_t može biti slučajna varijabla, ali je nužno da bude adaptirana s obzirom na filtraciju za Brownovo gibanje W_t, za $t \geq 0$. Za računanje diferencijala dX_t koristimo činjenicu da je portfelj sastavljen od prihoda od dionica $\Delta_t dS_t$ i iznosa kojeg posjeduje uz kamatnu stopu r u novcu $r(X_t - \Delta_t S_t)$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} dX_t &= \Delta_t dS_t + r(X_t - \Delta_t S_t)dt \\ &= \Delta_t(\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t) + r(X_t - \Delta_t S_t)dt \\ &= rX_t dt + \Delta_t(\alpha - r)S_t dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Često ćemo promatrati diskontiranu cijenu dionice $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ koju dobivamo množenjem s diskontiranim faktorom e^{-rt}. Diskontiranu vrijednost portfelja analogno definiramo kao $\tilde{X}_t = e^{-rt}X_t$. Prvo ćemo izračunati diferencijale diskontiranih cijena dionica i vrijednosti portfelja.

Lema 2.3.1. *([8], Lema 3.1) Za diskontiranu cijenu dionice $\tilde{S} = (\tilde{S}_t : t \geq 0)$ vrijedi*

$$d\tilde{S}_t = (\alpha - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t,$$

a za diskontiranu vrijednost portfelja $\tilde{X} = (\tilde{X}_t : t \geq 0)$

$$d\tilde{X}_t = \Delta_t d\tilde{S}_t.$$

Dokaz. Primjenjujemo Itôvu formulu (1.4) na geometrijsko Brownovo gibanje S i proces X za funkciju $f(t, x) = e^{-rt}x$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}S_t) &= df(t, S_t) \\ &= f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)dS_t dS_t \\ &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= (\alpha - r)e^{-rt}S_t dt + \sigma e^{-rt}S_t dW_t, \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}X_t) &= df(t, X_t) \\
&= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t \\
&= -re^{-rt}X_t dt + e^{-rt}dX_t \\
&= -re^{-rt}X_t dt + e^{-rt}(rX_t dt + \Delta_t(\alpha - r)S_t dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t) \qquad (2.3) \\
&= \Delta_t(\alpha - r)e^{-rt}S_t dt + \Delta_t \sigma e^{-rt}S_t dW_t \\
&= \Delta_t d(e^{-rt}S_t).
\end{aligned}$$

□

Napomena 2.3.2. *U četvrtoj jednakosti kod (2.3) koristili smo (2.2).*

Računamo diferencijal funkcije $c(t, S_t)$ koristeći Itôvu formulu (1.4):

$$\begin{aligned}
dc(t, S_t) &= c_t(t, S_t)dt + c_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S_t)dS_t dS_t \\
&= c_t(t, S_t)dt + c_x(t, S_t)(\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt \\
&= \left[c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt + \sigma S_t c_x(t, S_t)dW_t.
\end{aligned}$$

Kao i ranije, računamo diskontiranu cijene opcije $e^{-rt}c(t, S_t)$, gdje je funkcija $f(t, x) = e^{-rt}x$. Koristimo Itôvu formulu i prethodni rezultat za diferencijal vrijednosti opcije kako bismo dobili:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}c(t, S_t)) &= df(t, c(t, S_t)) \\
&= f_t(t, c(t, S_t))dt + f_x(t, c(t, S_t))dc(t, S_t) \\
&+ \frac{1}{2}f_{xx}(t, c(t, S_t))dc(t, S_t)dc(t, S_t) \\
&= -re^{-rt}c(t, S_t)dt + e^{-rt}dc(t, S_t) \\
&= e^{-rt}\Big[-rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) \qquad (2.4) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\Big]dt + e^{-rt}\sigma S_t c_x(t, S_t)dW_t.
\end{aligned}$$

Portfelj započinje s početnim kapitalom X_0 te je cilj ulaganja investitora bezrizičan portfelj što znači da su vrijednost portfelja X_t i cijene $c(t, S_t)$ jednake za sve $t \in [0, T]$. To će

vrijediti ako i samo ako isto vrijedi i za diskontirane vrijednosti za sve t, tj. $e^{-rt}X_t = e^{-rt}c(t, S_t)$. Sve navedeno povlači treću jednakost:

$$d(e^{-rt}X_t) = d(e^{-rt}c(t, S_t)) \tag{2.5}$$

i početni uvjet $X_0 = c(0, S_0)$.

Integriramo (2.5) od 0 do t, te za sve $t \in [0, T)$ dobivamo jednakost:

$$e^{-rt}X_t - X_0 = e^{-rt}c(t, S_t) - c(0, S_0).$$

Uz početni uvjet $X_0 = c(0, S_0)$ slijedi da vrijedi jednakost vrijednosti portfelja i cijene opcije.

Sada želimo izračunati funkciju $c(t, S_t)$ za koju vrijedi tražena jednakost. To radimo izjednačavanjem ranije izračunatih jednadžbi (2.3) i (2.4). Nakon množenja obje strane s e^{rt} slijedi

$$\begin{aligned} \Delta_t(\alpha - r)S_t dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t &= \Big[- rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\Big] dt + \sigma S_t c_x(t, S_t) dW_t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da bi ova jednakost vrijedila moramo s obje strane izjednačiti posebno članove uz dW_t i posebno uz dt.

Prvo izjednačavamo članove uz dW_t te dobivamo:

$$\Delta_t = c_x(t, S_t) \tag{2.7}$$

za sve $t \in [0, T)$.

Uvjet (2.7) nazivamo **delta hedging** pravilo.

Definicija 2.3.3. *Delta hedging je strategija upravljanja rizikom koja se koristi u trgovanju izvedenicama kako bi se neutralizirao rizik od promjena cijene dionice. Cilj delta hedginga je postići delta-neutralnu poziciju, što znači da ukupna vrijednost portfelja ostaje stabilna za male promjene cijene dionice, a to se postiže konstantnim rebalansom portfelja.*

Sada izjednačavamo članove uz dt:

$$\Delta_t(\alpha - r)S_t = -rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t).$$

Uvrštavamo (2.7) te s obje strane kratimo izraz $\alpha S_t c_x(t, S_t)$ i dobivamo sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$rc(t, S_t) = c_t(t, S_t) + rS_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t).$$

Dolazimo do **Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe**.

Sada preostaje naći funkciju $c(x, t)$ koja za sve $t \in [0, T)$ i $x \geq 0$ zadovoljava jednadžbu:

$$c_t(t, x) + rxc_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx}(t, x) = rc(t, x), \tag{2.8}$$

te ako gledamo europske call opcije, za rubni uvjet vrijedi:

$$c(T, x) = (x - K)^+. \tag{2.9}$$

Ako investitor na početku uloži $X_0 = c(0, S_0)$ i koristi delta hedging $\Delta_t = c_x(t, S_t)$, tada jednakost (2.6) vrijedi za sve $t \in [0, T)$, iz čega slijedi $X_t = c(t, S_t)$.

S obzirom da su obje funkcije neprekidne, možemo pustiti $t \to T$ pa slijedi da je $X(T) = c(T, S_T) = (S_T - K)^+$.

Preostaje još napisati rješenje Black-Scholes-Mertonove jednadžbe. Za to moramo prvo definirati granične uvjete za $x = 0$ i $x = \infty$. Za $x = 0$ uvjet dobivamo uvrštvanjem u (2.8) te dobivamo:

$$c_t(t, 0) = rc(t, 0).$$

Kao rješenje ove diferencijalne jednadžbe dobivamo funkciju $c(t, 0)$ čije je rješenje:

$$c(t, 0) = e^{rt} c(0, 0).$$

Supstitucijom $t = T$ i koristeći da je $c(T, 0) = (0 - K)^+ = 0$, vidimo da vrijedi $c(0, 0) = 0$ te za sve $t \in [0, T]$ slijedi:

$$c(t, 0) = 0.$$

Za drugi uvjet koristimo činjenicu da funkcija $c(t, x)$ neograničeno raste za $x \to \infty$. Jedan način definiranja graničnog uvjeta za $x \to \infty$ za europske call opcije je :

$$\lim_{x \to \infty} [c(t, x) - (x - e^{-r(T-t)} K)] = 0.$$

Uz ovako određene terminalne uvjete i (2.9) slijedi da rješenje jednadžbe zapisujemo kao:

$$BSM(\tau; x; K; \sigma) = xN(d_+(\tau, x)) - Ke^{-rt} N(d_-(\tau, X)),$$

te nazivamo **Black-Scholes-Mertonova funkcija**.

Pri tome vrijedi:

$$d_{\pm}(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[log\frac{x}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau\right],$$

te je N funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

2.4 Generalizirani Black-Scholesov model

U ovom poglavlju bavimo se generaliziranim Black-Scholesovim modelom s isplatama dividendi te koristimo [3]. Model opisujemo s modificiranim pretpostavkama prvotnog modela:

1. Cijenu temeljne imovine zapisujemo kao stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

   $$dS_t = \alpha(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t,$$

   gdje su $\alpha = \alpha(t)$ (srednja stopa povrata), te $\sigma = \sigma(t)$ (volatilnost) funkcije ovisne o vremenu t.

2. Bezrizična kamatna stopa $r = r(t)$ nije konstantna.

3. Postoji kontinuirana isplata dividendi na osnovnu imovinu po stopi $q = q(t)$.

4. Ne postoje troškovi transakcije i porezi.

5. Tržište ne dopušta arbitražu.

Postupak je sličan gornjem primjeru pa ćemo navesti samo najbitnije korake. Koristimo ponovno *delta hedging* tehniku:

$$\Delta_t = c_x(t, S_t), \tag{2.10}$$

te dobivamo količinu imovine potrebnu da konstruiramo nerizičan portfelj Π na intervalu $[t, t + dt]$:

$$\Pi = X - \Delta S.$$

Očekivani povrat portfelja dan je s

$$\Pi_{t+dt} - \Pi_t = r\Pi_t dt.$$

Uzimajući u obzir isplatu dividendi, vrijednost portfelja u vremenu $t + dt$ je

$$\Pi_{t+dt} = X_{t+dt} - \Delta_t S_t q_t dt - \Delta_t S_{t+dt}.$$

Izjednačavanjem gornje dvije jednadžbe dobivamo:

$$dX_t = r_t \Pi_t dt + \Delta_t S_t q_t dt + \Delta_t dS_t.$$

Korištenjem Itôve formule i uvrštavanjem (2.10) dobivamo formulu:

$$\left(c_t(t, S_t) + \frac{\sigma^2(t)}{2} S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right) dt = r(t)(c(t, S_t) - S_t c_x(t, S_t))dt + q(t) S_t c_x(t, S_t) dt.$$

Dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $c(t, S_t)$ u sljedećem obliku:

$$c_t(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) x^2 c_{xx}(t, x) + (r(t) - q(t)) x c_x(t, x) - r(t) c(t, x) = 0.$$

Gornja jednadžba naziva se **Black-Scholesova jednadžba za cijenu opcije s isplatom dividendi.**

Za *europsku call opciju* navesti ćemo *Black-Scholesovu formulu* za funkciju $c(t, x)$. Formulu navodimo bez dokaza, a on se može naći u [3].

Cijenu opcije u generaliziranom modelu definiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} c(t, x) &= e^{-\beta(t)}[x e^{\alpha(t)} N(d_1) - K N(d_2)] \\ &= x e^{-\int_t^T q(\tau) d\tau} N(d_1) - K e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} N(d_2), \end{aligned}$$

gdje su

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln\frac{x}{K} + \int_t^T [r(\tau) - q(\tau) + \frac{\sigma^2(\tau)}{2}] d\tau}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau}}, \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

Napokon, koeficijente $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ definiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \int_t^T [r(\tau) - q(\tau)]d\tau, \\ \beta(t) &= \int_t^T r(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Poglavlje 3

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) igraju ključnu ulogu u financijskoj matematici jer pomoću njih modeliramo i rješavamo različite probleme. Izrazito su važne u teoriji vrednovanja financijskih instrumenata, gdje se opisuje kako se kroz vrijeme mijenja cijena izvedenica uz neke određene uvjete.

U ovom ćemo poglavlju istražiti kako se Feynman-Kacov teorem koristi za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u financijskoj matematici i kako Hull-Whiteov model koristi takve tehnike za izračunavanje kamatnih proizvoda i opcija.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) opisuju relacije između nepoznate funkcije $u(x)$ i njezinih parcijalnih derivacija. Za funkciju $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$, parcijalne derivacije definiramo kao:

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$$

Definicija 3.0.1. *([4], Definicija 1.1) Ako funkcija u ima neprekidne parcijalne derivacije reda k na Ω kažemo da je klase C^k na Ω, i pišemo $u \in C^k(\Omega)$.*

Definicija 3.0.2. *([4], Definicija 1.2) Parcijalna diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika*

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nepoznata funkcija u nezavisnim varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Parcijalne jednadžbe ćemo uglavnom promatrati na otvorenom povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Red parcijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi.

Definicija 3.0.3. *Parcijalnu jednadžbu reda k definiramo kao funkciju*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

gdje je

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R},$$

a funkcija

$$u : U \to \mathbb{R}$$

je nepoznata.

3.1 Feynman-Kac teorem

Feynman-Kacov teorem ključan je teorem u teoriji stohastičkih procesa jer povezuje stohastične diferencijalne jednadžbe i parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ). Razvijen je 1960-ih godina od strane fizičara Richarda Feynmana i matematičara Marka Kaca, koji su nezavisno jedan od drugog razvili svoje teorije. Od iznimne je važnosti u financijskoj matematici jer daje vezu između dvije metode određivanja cijena opcija čime se i bavimo u ovome radu. Jedna metoda se temelji na Black-Scholes–Mertonovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi koju smo obradili u potpoglavlju 2.3 i druga je metoda martingala. Preko Feynman-Kac teorema, rješenja određenih tipova parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, poput Black-Scholes–Mertonove jednadžbe, mogu se izvesti kao očekivane vrijednosti stohastičnih procesa, kao što je Brownovo gibanje.

Teorem 3.1.1. *([1], Teorem 13.1)* ***(Feynman-Kac)*** *Neka su $F, \mu, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije od t i x, te neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija od x. Razmotrimo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu*

$$\begin{cases} F_t(t,x) + \mu(t,x)F_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)F_{xx}(t,x) = 0, & 0 < t < T, \\ F(T,x) = h(x). \end{cases}$$

Ako stohastički proces X_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{3.1}$$

vrijedi

$$F(t,x) = \mathbb{E}[h(X_T)|\mathcal{F}_t]\Big|_{X_t=x} = \mathbb{E}[h(X_T)|X_t = x].$$

Dokaz. Koristeći Itôvu formulu i (3.1) slijedi:

$$\begin{aligned}
F(T, X_T) - F(t, X_t) &= \int_t^T \left(F_s(s, X_s)ds + F_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}F_{xx}(s, X_s)dX_s dX_s \right) \\
&= \int_t^T \Big(F_s(s, X_s) + \mu(s, X_s)F_x(s, X_s) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2(s, X_s)F_{xx}(s, X_s) \Big) ds + \int_t^T \sigma(s, X_s)F_x(s, X_s)dW_s \\
&= \int_t^T \sigma(s, X_s)F_x(s, X_s)dW_s.
\end{aligned}$$

Primjenjujemo uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ s obje strane gornje jednadžbe i koristimo činjenicu da Itôv integral ima očekivanje 0, te dobivamo

$$\mathbb{E}[F(T, X_T)|\mathcal{F}_t] - F(t, X_t) = 0.$$

Dakle, vrijedi tražena jednakost

$$F(t, X_t) = \mathbb{E}[F(T, X_T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[h(X_T)|\mathcal{F}_t].$$

□

Važna primjena Feynman-Kac teorema je poseban slučaj gdje se opisuje veza između geometrijskog Brownovog gibanja i Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Primjer 3.1.2. *([1], Primjer 13.4) (Geometrijsko Brownovo gibanje) Definiramo stohastičku diferencijalnu jednadžbu za geometrijsko Brownovo gibanje:*

$$dS_t = \mu_0 S_t dt + \sigma_0 S_t dW_t,$$

gdje su $\mu(t, x) = \mu_0 x$ *i* $\sigma(t, x) = \sigma_0 x$.

Tada vrijedi

$$S_T = S_t \exp\left(\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2 \right)(T - t) + \sigma_0 W_{T-t} \right).$$

Uzmimo parcijalnu jednadžbu uz funkcije $\mu(t, x)$ *i* $\sigma(t, x)$*:*

$$F_t + \mu_0 x F_x + \frac{1}{2}\sigma_0^2 x^2 F_{xx} = 0.$$

Feynman–Kac teorem 3.1.1 sada povlači da za funkciju $F(t,x)$ vrijedi

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left[F(T, X_T) \,\middle|\, X_t = x\right],$$

te stoga dobivamo:

$$F(t,x) = \mathbb{E}\left[F\left(T, x\exp\left(\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\sigma_0^2\right)(T-t) + \sigma_0 W_{T-t}\right)\right)\right].$$

3.2 Hull-White model

Hull-White model jedan je od najpoznatijih stohastičkih modela koji opisuje kretanje kamatnih stopa. Razvijen je kako bi unaprijedio prethodne modele poput Vasicekovog modela, s ciljem da bolje odgovara trenutnim tržišnim uvjetima i terminskoj strukturi kamatnih stopa.

Naziva se i prošireni Vasicekov model jer koeficijenti u modelu nisu konstante već su ovisni o vremenu. Njegova ključna značajka je fleksibilnost jer omogućuje vremenski ovisnu srednju vrijednost kamatnih stopa, čime bolje opisuje stvarne tržišne uvjete. Model se temelji na stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi koja obuhvaća vraćanje na srednju vrijednost, volatilnost i prilagodbu trenutačnih tržišnih uvjeta. Zbog ove prilagodljivosti, Hull-White model se koristi za vrednovanje kamatnih izvedenica, obveznica i upravljanje rizicima. Neka je $W = (W_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje uz mjeru neutralnu na rizik $\tilde{\mathbb{P}}$. Hull-Whiteov model dan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom:

$$dR(u) = (a(u) - b(u)R(u))du + \sigma(u)d\tilde{W}(u),$$

gdje su $a(u)$, $b(u)$ i $\sigma(u)$ pozitivne neslučajne funkcije ovisne o vremenu u. Potrebno je pokazati da postoji rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe. Uzimamo r kao pomoćnu varijablu umjesto x te definiramo $\beta(u,r) = a(u) - b(u)r$, $\gamma(u,r) = \sigma(u)$. Za početni uvjet uzimamo $R(t) = r$. Jednadžbu ćemo riješiti koristeći prvo stohastičku diferencijalnu jednadžbu za formulu:

$$\begin{aligned} d(e^{\int_0^v b(v)dv}R(u)) &= e^{\int_0^v b(v)dv}(b(u)R(u)du + dR(u)) \\ &= e^{\int_0^v b(v)dv}(\alpha(u)du + \sigma(u)d\tilde{W}(u)). \end{aligned}$$

Integriranjem s obje strane od t do T, dobivamo formulu:

$$e^{\int_0^T b(v)dv}R(T) - e^{\int_0^t b(v)dv}R(t) = \int_t^T (e^{\int_0^u b(v)dv}(\alpha(u)du + \sigma(u)d\tilde{W}(u))).$$

Koristeći početni uvjet $R(t) = r$ i integral zbroja slijedi:

$$e^{\int_0^T b(v)dv} R(T) = re^{\int_0^t b(v)dv} + \int_t^T e^{\int_0^u b(v)dv} \alpha(u)du + \int_t^T e^{\int_0^u b(v)dv} \sigma(u)d\tilde{W}(u). \tag{3.2}$$

Sada iz (3.2) računamo eksplicitnu formulu za $R(T)$:

$$R(T) = re^{-\int_t^T b(v)dv} + \int_t^T e^{-\int_u^T b(v)dv} \alpha(u)du + \int_t^T e^{-\int_u^T b(v)dv} \sigma(u)d\tilde{W}(u).$$

Prije nego što odredimo distribuciju od R navest ćemo iskaz pomoćnog teorema koji nam daje neke dovoljne uvjete za koje R ima log-normalnu razdiobu. Dodatni detalji i dokaz mogu se naći u [5].

Teorem 3.2.1. *([5], Teorem 4.4.9) (Itôv integral za deterministički integrand) Neka je $W = (W_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je f neslučajna funkcija vremena. Definiramo $I_t = \int_0^t f(s)dW_s$. Tada je za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla I_t normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t f^2(s)ds$.*

Prema Teoremu 3.2.1 znamo da je Itôv integral $\int_t^T e^{-\int_u^T b(v)dv} \sigma(u)d\tilde{W}(u)$ normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom danom sa $\int_t^T e^{-2\int_u^T b(v)dv} \sigma^2(u)du$.

Ostali članovi koji se pojavljuju u gornjoj formuli za $R(T)$ nisu slučajni. Stoga, uz mjeru neutralnu na rizik $\tilde{\mathbb{P}}$, $R(T)$ je normalno distribuiran s očekivanjem:

$$re^{-\int_t^T b(v)dv} + \int_t^T e^{-\int_u^T b(v)dv} \alpha(u)du$$

i varijancom

$$\int_t^T e^{-2\int_u^T b(v)dv} \sigma^2(u)du.$$

Posebno, postoji pozitivna vjerojatnost da je $R(T)$ negativna i to je jedan od glavnih prigovora vezano uz Hull-White model.

Poglavlje 4

Opcije s više osnovnih imovina

U ovom poglavlju bavit ćemo se isključivo europskim opcijama s više imovina. Za svaku kategoriju takvih opcija, objasnit ćemo njeno financijsko značenje, precizirati funkciju isplate (eng. payoff) na dospijeću te izvesti formulu za određivanje cijene opcije. Posebno ćemo istražiti može li se problem pojednostaviti na jednodimenzionalni oblik. U ovom poglavlju obraditi ćemo tri vrste europskih opcija s više imovina: *rainbow, basket i quanto opcije*. Kretanje cijena dvaju ili više rizičnih sredstava može se modelirati pomoću sustava stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Opcije koje se temelje na više osnovnih rizičnih imovina nazivaju se opcijama s više imovina (*multi-asset*). Njihova cijena zadovoljava višedimenzionalnu paraboličnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, pri čemu se različite vrste takvih opcija definiraju prema specifičnim funkcijama isplate. Problem određivanja cijena opcija s više imovina može se stoga formulirati kao problem granične vrijednosti za višedimenzionalnu paraboličnu jednadžbu s odgovarajućim terminalnim uvjetom. Obzirom da dimenzija parcijalne diferencijalne jednadžbe ovisi o broju osnovnih imovina, koji može biti poprilično velik, rješenje može biti teško pronaći. Stoga se postavlja pitanje na koje ćemo dati odgovor u ovom poglavlju: može li se višedimenzionalan problem svesti na jednodimenzionalan?

Kroz cijelo ovo poglavlje slijedimo [3].

Kako bismo odredili cijenu opcija s više imovina, prvo moramo uspostaviti model kretanja cijena osnovnih imovina. Neka je S_i cijena i-te rizične imovine ($i = 1, \ldots, n$). Pretpostavimo da S_i zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu sljedećeg oblika:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dW_i$$

gdje su dW_i standardna Brownova gibanja koja zadovoljavaju:

$$\mathbb{E}(dW_i) = 0, \tag{4.1}$$

$$Var(dW_i) = dt,$$

$$Cov(dW_i, dW_j) = \rho_{ij}dt. \quad (i \neq j)$$

$Cov(\cdot,\cdot)$ je kovarijanca koju raspisujemo po definiciji i koristimo (4.1) kako bismo dobili:

$$\begin{aligned} Cov(dW_i, dW_j) &= \mathbb{E}([dW_i - \mathbb{E}(dW_i)][dW_j - \mathbb{E}(dW_j)]) \\ &= \mathbb{E}(dW_i dW_j). \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

Ako za jednodimenzionalna Brownova gibanja vrijede sljedeća svojstva:

$$\mathbb{E}(dW_i) = 0,$$

$$Var(dW_i) = dt,$$

$$Cov(dW_i, dW_j) = 0, \quad (i \neq j)$$

cijene opcija s više imovina možemo pisati kao:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \alpha_i dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} dW_j. \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

Relaciju (4.2) možemo zapisati u formi vektora:

$$d\vec{S} = \vec{a}dt + [\sigma]d\vec{W}_t,$$

gdje su

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 S_1 \\ \vdots \\ \alpha_n S_n \end{bmatrix}, \vec{W}_t = \begin{bmatrix} W_{1t} \\ \vdots \\ W_{mt} \end{bmatrix},$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}S_1 & \ldots & \sigma_{1m}S_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}S_n & \ldots & \sigma_{nm}S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \ldots & \sigma_{nm} \end{bmatrix}.$$

4.1 Black-Scholesova funkcija za opcije s više osnovnih imovina

Ovdje ćemo izvesti Black-Scholesovu formulu za opcije s više dijelova osnovne imovine. Neka je $S_1, \ldots, S_n$ n rizičnih imovina (npr. dionice, kamatne stope,...) koje zadovoljavaju geometrijsko Brownovo gibanje definirano u (4.2). Neka je $V = V(t, S_1, \ldots, S_n)$ cijena opcije izvedene iz imovina $S_1, \ldots, S_n$. Zapisujemo je kao funkciju s $n+1$ varijabli, t i n varijabli $S_1, \ldots, S_n$:

$$V = V(t, S_1, \ldots, S_n).$$

Kao i kod opcija izvedenih iz jedne imovine, koristimo $\Delta-$*hedging* tako da biramo količinu temeljne imovine Δ_i kako bi konstruirali portfelj:

$$\Pi = V(t, S_1, \ldots, S_n) - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i, \tag{4.3}$$

za kojeg vrijedi da je nerizičan u vremenskom intervalu $(t, t+dt)$.

Koristeći Itôvu formulu za multivarijantni stohastički proces (1.5) slijedi:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i q_i dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j}\right) dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial S_i} dS_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i dS_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i q_i dt, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje je q_i stopa dividende imovine S_i te imamo:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}\sigma_{jk}, \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

odnosno u matričnom zapisu,

$$A = [a_{ij}] = \sigma_0 \sigma_0^T.$$

Da bi portfelj bio nerizičan u vremenskom intervalu $(t, t+dt)$ treba vrijediti:

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Uvrštavanjem (4.3) slijedi

$$d\Pi = r(V - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S_i)dt. \tag{4.5}$$

Kod nerizičnog portfelja za količinu Δ_i kao i u slučaju s jednom imovinom (2.7) koristimo **delta hedging**:

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i}. \tag{4.6}$$

Uvrštavanjem (4.6) u (4.5) i (4.4) te njihovim izjednačavanjem i eliminacijom dt dobivamo formulu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^{n}(r - q_i) S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 \tag{4.7}$$

Gornja jednadžba naziva se **Black-Scholesova jednadžba za opcije s više imovina.**

Ostaje još izvesti Black-Scholesovu formulu za višedimenzionalni slučaj. Prvo ćemo definirati funkciju isplate na datum dospijeća $t = T$ s $P(S_1, \ldots, S_n)$, pa problem postaje rješavanje jednadžbe (4.7) s terminalnim uvjetom:

$$V(T, S_1, \ldots, S_n) = P(S_1, \ldots, S_n).$$

Rješenje jednadžbe (4.7) dano je kao:

$$\begin{aligned} V(t, S) &= \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-r(T-t)}}{|\det A|^{\frac{1}{2}}} \\ &\cdot \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{P(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{\eta_1, \ldots, \eta_n} \exp\left[-\frac{\vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha}}{2(T-t)}\right] d\eta_1 \ldots d\eta_n, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gdje je

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

i

$$\alpha_i = \ln \frac{S_i}{\eta_i} + (r - q_i - \frac{a_{ii}}{2})(T - t). \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Jednadžba (4.8) naziva se **Black-Scholesova formula za europske opcije s više imovina**. Raspis formule i više detalja uz temu može se pronaći u [3].

4.2 Rainbow opcije

Prva vrsta europskih opcija s više osnovnih imovina koju ćemo proučavati su rainbow opcije. Naziv "rainbow" dolazi od njihove sposobnosti da obuhvate različite imovinske klase, poput različitih boja unutar duge. Ove opcije se često koriste na financijskim tržištima, posebno u situacijama kada je potrebno zaštititi portfelje ili špekulirati na relativna kretanja cijena imovina. Primjerice, rainbow opcije mogu biti korisne na tržištima valuta, gdje se istovremeno uzimaju u obzir rizici više faktora. Vrijednost rainbow opcije ovisi o izvedbi osnovne imovine. Prema strukturi isplate, rainbow opcije imaju sljedeće oblike:

(A) **Better-of opcije**

Vlasnik better-of opcije ostvaruje isplatu temeljenu na izvedbi osnovne imovine koja je ostvarila bolji rezultat. Na primjer, ako investitor razmatra ulaganje u dionicu A ili dionicu B, ali nije siguran koja će donijeti veći prinos kupuje better-of opciju, te tako osigurava pravo na ostvarenje većeg prinosa prema dionici koja na dan dospijeća ima bolje performanse.

Razlikujemo dva tipa ovih opcija:

(1) Obzirom na cijenu imovine:

$$C = max(\alpha_1 S_1(T), \ldots, \alpha_n S_n(T)),$$

gdje je $S_i(T)$ cijena i-te rizične imovine za $t = T$, a koeficijenti α_i osiguravaju da su cijene svih rizičnih imovina na istoj razini.

(2) Obzirom na stopu rasta cijene,

$$C = max(\hat{S}_1(T), \ldots, \hat{S}_n(T)),$$

gdje je $\hat{S}_i(T)$ stopa rasta cijene i-te rizične imovine u trenutku $t = T$. Budući da za stopu rasta vrijedi

$$\hat{S}_i(T) = \frac{S_i(T) - S_i(0)}{S_i(0)} = \frac{S_i(T)}{S_i(0)} - 1,$$

slijedi da

$$max(\hat{S}_1(T), \ldots, \hat{S}_n(T)) = max(\alpha_1 S_1(T), \ldots, \alpha_n S_n(T)) - 1,$$

gdje je

$$\alpha_i = \frac{1}{S_i(0)}. \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Općenito, funkcija isplate europske better-of opcije može se zapisati kao

$$C = max(S_1(T), \ldots, S_n(T)),$$

gdje $S_i(t)$ može biti ili apsolutna razina cijene ili stopa rasta i-te rizične imovine.

Nadalje, u modelu želimo naći rješenje Black-Scholesove jednadžbe (4.7) s terminalnim uvjetom:

$$V(T, S_1, \ldots, S_n) = max\{S_1, \ldots, S_n\}.$$

Rješenje je dano Black-Scholesovom formulom s više jedinica osnovnih imovina:

$$\begin{aligned} V(t, S_1, \ldots, S_n) &= \left[\frac{1}{2\pi(T-t)}\right]^{\frac{n}{2}} e^{-r(T-t)} det|A|^{-\frac{1}{2}} \\ &\cdot \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{max(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{\eta_1, \ldots, \eta_n} exp\left\{-\frac{\vec{\alpha}^T A^{-1} \vec{\alpha}}{2(T-t)}\right\} d\eta_1 \ldots d\eta_n, \end{aligned}$$

gdje je $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

i

$$\alpha_i = ln\frac{S_i}{\eta_i} + (r - q_i - \frac{a_{ii}}{2})(T - t).$$

Napomena 4.2.1. Blisko povezana s better–of opcijom, druga vrsta rainbow opcije je worst–of opcija. Njezina isplata pri izvršenju je:

$$C = min(S_1(T), \ldots, S_n(T)).$$

(B) **Out-performance opcije**

Out-performance opcije razmatraju odnos između dvije imovine tako da se isplata temelji na razlici performansi dviju imovina. Na primjer, investitor koji posjeduje rizičnu imovinu A, ali nije siguran hoće li ona imati bolje rezultate od imovine B, može kupiti out-performance opciju. Tako osigurava da prinos opcije ovisi o razlici u slučaju da imovina B ostvari bolje rezultate od imovine A. Prinos opcije određujemo formulom $max(S_B(T) - S_A(T), 0)$, pri čemu $S_A(T)$ i $S_B(T)$ mogu predstavljati ili apsolutnu razinu cijene ili stopu rasta cijene rizičnih imovina A i B.

Kao i kod better-of opcija, rješavamo (4.7) s terminalnim uvjetom:

$$V(T, S_1, S_2) = max(S_2 - S_1, 0). \tag{4.9}$$

Napomena 4.2.2. Europska opcija better-of (worse-of) između dvije imovine može se rastaviti na rizičnu imovinu i opciju za zamjenu jedne imovine drugom. Budući da je određivanje cijene europskih opcija linearni problem, funkcija prinosa opcije better-of (worse-of) može se zapisati kao:

$$max(S_1(T), S_2(T)) = S_1(T) + max(S_2(T) - S_1(T), 0)$$

i

$$min(S_1(T), S_2(T)) = S_2(T) + max(S_2(T) - S_1(T), 0).$$

(C) **Maksimum i minimum call opcije**

Ovisno želimo li opcijom na kraju osigurati maksimalni ili minimalni prinos koristimo maksimum ili minimum opcije. Prvo ćemo se baviti call opcijama. Kod maksimum call opcija vlasnik ima n izbora, koliki je i broj imovina. Može kupiti imovinu S_i po izvršnoj cijeni K_i, gdje je $i = 1, \ldots, n$. Vlasnik odabire imovinu kojom na datum dospijeća maksimizira isplatu. Isplata na datum dospijeća jednaka je :

$$C = max\{(S_1(T) - K_1)^+, \ldots, (S_n(T) - K_n)^+\}.$$

Model za maksimum call opciju dobivamo rješavanjem jednadžbe (4.7) s terminalnim uvjetom:

$$V(T, S_1, \ldots, S_n) = max\{(S_1 - K_1)^+, \ldots, (S_n - K_n)^+\}.$$

Napomena 4.2.3. Ako za maksimum call opciju vrijedi:

$$K_1 = \cdots = K_n = K,$$

granični uvjet se reducira na:

$$\begin{aligned} V(T, S_1, \ldots, S_n) &= max\{(S_1 - K), \ldots, (S_n - K), 0\} \\ &= (max\{S_1, \ldots, S_n\} - K)^+. \end{aligned}$$

Napomena 4.2.4. Uz maksimum (minimum) call opcije imamo i odgovarajuće maksimum (minimum) put opcije. Terminalni uvjet za maksimum put opcije postaje:

$$V(T, S_1, \ldots, S_n) = max\{(K_1 - S_1)^+, \ldots, (K_n - S_n)^+\},$$

dok za minimum call opciju vrijedi:

$$V(T, S_1, \ldots, S_n) = min\{(K_1 - S_1)^+, \ldots, (K_n - S_n)^+\}.$$

Posebno, kada za cijene izvršenja vrijedi $K_1 = \cdots = K_n = K$, isplate za maksimum put opciju su:

$$C = (K - max(S_1, \ldots, S_n))^+.$$

Isto vrijedi i za minimum put opciju koristeći funkciju *min*.

Nadalje, razmatrat ćemo kako se neke vrste rainbow opcija s dvije rizične imovine mogu reducirati na jednodimenzionalni problem ako definiramo novu varijablu. Cilj je problem svesti na jednostavniji slučaj jedne dimenzije i izračunati rješenje Black-Scholesove formule, te kasnije zamjenom varijabli dobiti višedimenzionalno rješenje za početni problem. Kod tih opcija ako uvedemo drugu varijablu koja je kombinacija početnih, rubni uvjeti i domena novog problema ovisit će samo o novoj varijabli pa dobivamo jednodimenzionalni slučaj samo s jednom novom varijablom. Takav slučaj analizirati ćemo za out-performance i better-of (worst-of) opcije.
Prvo ćemo pokazati jednodimenzionalni problem za out-performance opcije. Promatramo rubni uvjet (4.9) na domeni $\Sigma : \{(S_1, S_2, t) \mid 0 \leq S_1 < \infty, 0 \leq S_2 < \infty, 0 \leq t \leq T\}$.

Rješavamo Black-Scholesovu jednadžbu (4.7) za opcije s dvije različite imovine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\left[a_{11}S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2a_{12}S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + a_{22}S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right]\\ &+ (r-q_1)S_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + (r-q_2)S_2\frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0,\end{aligned} \tag{4.10}$$

uz uvjet:

$$V(T, S_1, S_2) = \max(S_2 - S_1, 0). \tag{4.11}$$

Definiramo novu varijablu koja je kombinacija početnih S_1 i S_2:

$$\xi = \frac{S_1}{S_2}, \tag{4.12}$$

i funkciju:

$$u(t,\xi) = \frac{V(t, S_1, S_2)}{S_2}. \tag{4.13}$$

Želimo u jednadžbi (4.10) dobiti ovisnost samo o $u(t,\xi)$ pa računamo prve i druge derivacije funkcije $V(t, S_1, S_2) = u(t,\xi)S_2$ i uvrštavamo u gornju jednadžbu. Derivacije po S_1 i S_2 su dane u sljedećom obliku:

$$\frac{\partial V}{\partial S_1} = S_2\frac{\partial \xi}{\partial S_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} = S_2\cdot\frac{1}{S_2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial V}{\partial S_2} = u + S_2\frac{\partial \xi}{\partial S_2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = u + S_2\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) = u - \xi\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} = \frac{\partial \xi}{\partial S_1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{1}{S_2}\right) = -\frac{\xi}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} - \xi\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial S_2} = \frac{\xi^2}{S_2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Uvrštavanjem u (4.10) slijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[a_{11} - 2a_{12} + a_{22}\right]\xi^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (q_2 - q_1)\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - q_2 u = 0. \tag{4.14}$$

Rubni uvjet (4.11) nakon zamjene postaje:

$$u(T,\xi) = \frac{1}{S_2}V(T, S_1, S_2) = \frac{1}{S_2}\max(S_2 - S_1, 0) = (1-\xi)^+,$$

dok je domena sada dana u sljedećem obliku:

$$\{0 \leq \xi < \infty, 0 \leq t \leq T\}.$$

Koristeći Black-Scholesovu formulu, dobivamo rješenje reduciranog problema za europsku put opciju uz nove varijable (t, ξ) u sljedećem obliku:

$$u(t,\xi) = -e^{-q_1(T-t)}\xi N(-\tilde{d}_1) + e^{-q_2(T-t)}N(-\tilde{d}_2), \tag{4.15}$$

gdje su

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\xi + \left[q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}},$$

$$\tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}.$$

Vraćanjem originalnih varijabli (t, S_1, S_2) dobivamo traženo rješenje Black-Scholesove formule funkcije $V(t, S_1, S_2)$.

$$V(t, S_1, S_2) = S_2 e^{-q_2(T-t)}N(-\hat{d}_2) - S_1 e^{-q_1(T-t)}N(-\hat{d}_1),$$

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S_1}{S_2} + \left[q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}.$$

Isti postupak ponavljamo za better-of opcije s dvije rizične imovine. Ponovno tražimo rješenje jednadžbe (4.10) sada s terminalnim uvjetom za $t = T$:

$$V(T, S_1, S_2) = \max(S_1, S_2).$$

Koristimo prethodnu transformaciju (4.12) i (4.13) i domenu $\{0 \leq \xi < \infty, 0 \leq t \leq T\}$. Funkcija u zadovoljava jednadžbu (4.14) uz terminalni uvjet:

$$u(T,\xi) = \frac{1}{S_2}V(T, S_1, S_2) = \max(\xi, 1) = (1-\xi)^+ + \xi. \tag{4.16}$$

Primjećujemo da se funkcija $u(t,\xi)$ zapisuje kao suma funkcije (4.15) i $\xi e^{-q_1(T-t)}$ što odgovara drugom članu u jednadžbi (4.16):

$$\begin{aligned} u(t,\xi) &= -e^{-q_1(T-t)}\xi N(-\tilde{d}_1) + e^{-q_2(T-t)}N(-\tilde{d}_2) + \xi e^{-q_1(T-t)} \\ &= \xi e^{-q_1(T-t)}(1 - N(-\tilde{d}_1)) + e^{-q_2(T-t)}N(-\tilde{d}_2). \end{aligned}$$

Vraćenjem početnih varijabli (t, S_1, S_2), dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} V(t, S_1, S_2) &= S_2 \left[\frac{S_1}{S_2}(1 - N(-\hat{d}_1))e^{-q_1(T-t)} + e^{-q_2(T-t)}N(-\hat{d}_2) \right] \\ &= S_1 e^{-q_1(T-t)}N(d_{1,2}) + S_2 e^{-q_2(T-t)}N(d_{2,1}), \end{aligned}$$

gdje su

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_1}{S_2} + \left[q_2 - q_1 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) \right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}},$$

$$d_{2,1} = \frac{\ln \frac{S_2}{S_1} + \left[q_1 - q_2 + \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{12} + a_{22}) \right](T-t)}{\sqrt{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})(T-t)}}.$$

4.3 Basket opcije

Basket ili portfelj opcijama nazivamo opcije koje su napisane na basketima (košarama) i portfeljima rizičnih imovina. Košaru definiramo kao

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i S_i, \tag{4.17}$$

gdje je S_i cijena i-te imovine, a μ_i udio investicije u i-tu imovinu, te za udjele vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

Basket opcije mogu biti napisane na bilo koji porfelj, ali se u struci najviše koriste opcije na valute i robu. Ove opcije su najviše ušle u upotrebu nakon valutne krize Europskog tečajnog mehanizma 1993. godine jer su investitori htjeli zaštititi određenu valutu u odnosu na neku drugu.

Za razliku od rainbow opcija koje isplaćuju obzirom na određene karakteristike imovina, kao što su maksimum i minimum, basket opcije uzimaju u obzir sve imovine i tako se diversifikacijom smanjuje rizik ovih opcija. Isplata se računa kao težinski prosjek dobitka cijele košare definirane s (4.17):

$$C_{bskt} = max(\omega(S - K), 0),$$

gdje je ω binarni operator (1 za call opciju i -1 za put opciju).

Kao i kod rainbow opcije, želimo vidjeti da li je moguće problem računanja cijene opcije

s više rizičnih imovina svesti na jednodimenzionalan problem. Kod basket opcija odgovor je negativan jer se cijena tih opcija bazira na aritmetičkoj sredini n cijena imovina, gdje su cijene svake od imovina geometrijska Brownova gibanja. Međutim, problem bismo mogli svesti na jednodimenzionalni ako isplatu gledamo kao geometrijsku sredinu cijena umjesto aritmetičke. Cijenu tada zapisujemo na sljedeći način:

$$C = (\prod_{i=1}^{n} S_i^{\mu_i} - K)^+,$$

Prvo radimo transformaciju:

$$x_i = \ln S_i.$$

Jednadžba (4.7) sada postaje

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(r - q_i - \frac{a_{ii}}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x_i} - rV = 0, \tag{4.18}$$

a isplata je dana sa:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S_i^{\mu_i} - K\right)^+ = \left(\exp\{\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i\} - K\right)^+.$$

Uvedimo sada novu varijablu

$$\xi = \sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i.$$

Kao i u prethodnom slučaju, računamo parcijalne derivacije funkcije $V(t,\xi)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\mu_i,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \mu_i\mu_j\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2},$$

te (4.18) postaje

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \left(r - \hat{q} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)\frac{\partial V}{\partial \xi} - rV = 0,$$

gdje smo uveli koeficijente

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mu_i\mu_j,$$

$$\hat{q} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(q_i + \frac{a_{ii}}{2} \right) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}.$$

Rubni uvjet postaje

$$V(t, \xi) = (e^{\xi} - K)^+.$$

Izvodimo Black-Scholesovu formulu za običnu (vanilla) europsku call opciju, te dobivamo rješenje za $V(t, \xi)$. Vraćanjem na početne varijable $(t, S_1, \ldots, S_n)$ dobivamo rješenje

$$V = e^{-\hat{q}(T-t)} S_1^{\mu_1} \ldots S_n^{\mu_n} N(\hat{d}_1) - e^{-r(T-t)} K N(\hat{d}_2),$$

gdje je:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_1^{\mu_1} \ldots S_n^{\mu_n}}{K} + \left[r - \hat{q} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right] (T - t)}{\hat{\sigma} \sqrt{T - t}},$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \hat{\sigma} \sqrt{T - t}.$$

4.4 Quanto opcije

U zadnjem poglavlju analizirat ćemo još jednu vrstu opcija s više osnovnih imovina, quanto opcije.

Transakcije s izvedenicama za strana vlasnička ulaganja uvijek uključuju valutne rizike, a upravo su quanto opcije dizajnirane da rješavaju takve probleme. Quanto opcija, poznata i kao "quanto", drugi je naziv za "opciju s prilagodbom količine" ili "opciju sa zajamčenim tečajem". Ove se opcije zbog svojih svojstava najčešće koriste na tržištima povezanima s valutama, gdje se cijena jednog osnovnog sredstva po nekom fiksnom tečaju konvertira u drugo sredstvo. One funkcioniraju na način da cijena osnovnog sredstva ostaje izražena u jednoj valuti, dok se isplata vrši u drugoj valuti po unaprijed određenom fiksnom tečaju. Na primjer, japanski uvoznik nafte koji se suočava s neizvjesnostima u vezi s cijenom nafte izraženom u američkim dolarima i tečajem dolar-jen može jednostavno kupiti quanto call opciju kako bi zaključao cijenu nafte uz fiksni tečaj dolar-jen te tako otklonio valutni rizik. Pokazali se da quanto put opcije osiguravaju bolju zaštitu od standardnih (vanilla) put opcija jer u obzir uzimaju i učinke korelacije između deviznog tečaja i stranog sredstva. Standardne opcije na strana sredstva ili devizne tečajeve su relativno neučinkovite pa su stoga i skuplje. Ove opcije ubrajaju se među nekoliko najpoznatijih egzotičnih opcija kojima se trguje, ne samo na otvorenim tržištima (OTC), nego i na organiziranim burzama, a

američka burza uvela je trgovanje quanto opcijama 1992. godine. [9]

Promatrat ćemo dvije rizične imovine, cijenu S_1 imovine izražene u eurima, koju ćemo u ovom slučaju gledati kao stranu valutu, te dolar-euro valutni tečaj S_2.

Na datum dospijeća tečaj možemo definirati na jedan od dva načina:

1. spot tečaj $S_2(t)$,
2. spot tečaj S_2 koji će biti veći od garantiranog valutnog tečaja S_2^0.

Isplatu na datum dospijeća T definiramo kao:

$$C_q = S_2(T)(S_1(T) - K)^+,$$

ili ako koristimo garantirani valutni tečaj S_2^0:

$$\begin{aligned} C_q &= max(S_2(T), S_2^0)(S_1(T) - K)^+ \\ &= (S_2(T) - S_2^0)^+(S_1(T) - K)^+ + S_2^0(S_1(T) - K)^+. \end{aligned}$$

Definiramo stohastičke diferencijalne jednadžbe za quanto opciju u domaćoj valuti:

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1,$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2.$$

Pretpostavljamo da za Brownova gibanja W_1 i W_2 vrijede sljedeći uvjeti:

$$E(dW_i) = 0, \quad Var(dW_i) = dt,$$

$$Cov(dW_1, dW_2) = \rho dt. \quad (|\rho| < 1)$$

Neka je cijena opcije izražena u dolarima:

$$V = V(t, S_1, S_2).$$

Pomoću Δ-hedging tehnike odabiremo Δ_1 i Δ_2 tako da je konstruirani portfelj Π

$$\Pi = V - \Delta_1 S_2 S_1 - \Delta_2 S_2 \tag{4.19}$$

nerizičan, odosno da vrijedi:

$$d\Pi = r_1 \Pi dt. \tag{4.20}$$

Deriviranjem (4.19) dobivamo jednakost:

$$d\Pi = dV - \Delta_1 d(S_1 S_2) - \Delta_2 dS_2 - \Delta_1 S_2 S_1 q dt - \Delta_2 S_2 r_2 dt, \tag{4.21}$$

gdje su koeficijenti r_1 nerizična stopa u domaćoj zemlji, te r_2 nerizična stopa u stranoj zemlji, dok q definiramo kao stopu dividende rizične imovine S_1. Koristeći višedimenzionalnu Itôvu formulu (1.5) slijedi:

$$\begin{aligned} dV &= \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\right.\right. \\ &+ \left.\left. \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right]\right\} dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$d(S_1 S_2) = S_1 dS_2 + S_2 dS_1 + \sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \rho\, dt. \tag{4.23}$$

Uvrštavanjem (4.19) i (4.20) u (4.21) dobivamo:

$$r_1(V - \Delta_1 S_1 S_2 - \Delta_2 S_2)dt = dV - \Delta_1 d(S_1 S_2) - \Delta_2 dS_2 - \Delta_1 S_2 S_1 q dt - \Delta_2 S_2 r_2 dt.$$

Nadalje, uvrštavamo (4.22) i (4.23) te slijedi:

$$\begin{aligned} r_1(V - \Delta_1 S_1 S_2 - \Delta_2 S_2)dt &= \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\right.\right. \\ &+ \left.\left. \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right]\right\} dt - \Delta_1\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \rho\, dt \\ &- \Delta_1 S_1 S_2 q dt - \Delta_2 S_2 r_2 dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 S_2\right) dS_1 \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_1 S_1 - \Delta_2\right) dS_2. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Uz $\Delta-$hedging tehniku imamo::

$$\Delta_1 = \frac{1}{S_2}\frac{\partial V}{\partial S_1}, \tag{4.25}$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2} - \frac{S_1}{S_2}\frac{\partial V}{\partial S_1}. \tag{4.26}$$

Uvrštavamo (4.25) i (4.26) u (4.24) te dobivamo parcijalnu jednadžbu cijene opcije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &+ \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right] \\ &+ (r_1 - \hat{q}_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + (r_1 - \hat{q}_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - r_1 V = 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

gdje je

$$\hat{q}_1 = r_1 - r_2 + q + \sigma_1\sigma_2\rho,$$

$$\hat{q}_2 = r_2.$$

Na dautm dospijeća funkcija V, u ovisnosti o tome koristimo li spot ili garantirani tečaj, jednaka je

$$V(T, S_1, S_2) = S_2(S_1 - K)^+, \tag{4.28}$$

ili

$$V(T, S_1, S_2) = \max(S_2, S_2^0)(S_1 - K)^+. \tag{4.29}$$

Vidimo da je cijena quanto opcija opisana kao dvodimenzionalna parcijalna diferencijalna jednadžba (4.27) s terminalnim uvjetima (4.28) i (4.29). Na kraju ovog rada navesti ćemo eksplicitni izraz za cijenu quanto opcije, koju računamo Black-Scholesovom formulom (4.7). Kao primjer uzmimo da u $t = T$ imamo uvjet (4.28):

$$\begin{aligned} V(t, S_1, S_2) &= \frac{1}{2\pi(T-t)} e^{-r_1(T-t)} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\eta_1 - K)^+}{\eta_1} \exp\left[-\frac{\sigma_2^2\alpha_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\alpha_1\alpha_2 + \sigma_1^2\alpha_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)(T-t)}\right] d\eta_1 d\eta_2, \end{aligned}$$

gdje su koeficijenti:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \ln\frac{S_1}{\eta_1} + \left(r_2 - q - \sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t), \\ \alpha_2 &= \ln\frac{S_2}{\eta_2} + \left(r_1 - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t). \end{aligned}$$

Bibliografija

[1] Geon Ho Choe, *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Springer, 2016.

[2] D. Lamberton i B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 2008.

[3] L. Jiang, *Mathematical modeling and methods of option pricing*, World Scientific Publishing Company, 2005.

[4] Saša Krešić-Jurić, *Parcijalne diferencijalne jednadžbe, Skripta-radna verzija*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2018.

[5] S.E. Shreve, *Stohastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

[6] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 2*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm18-predavanja.html`, 2017, datum zadnjeg pristupanja: veljača 2025.

[7] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1*, PMF Zagreb, 2022.

[8] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2*, PMF Zagreb, 2022.

[9] Peter G. Zhang, *Exotic Options: A Guide To Second Generation Options*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1997.

Sažetak

U ovom radu objasnili smo veliku važnost stohastičkog računa u financijskoj matematici, te pokazali neke od njegovih najbitnijih upotreba i utjecaj na razvoj tržišta. U prvom smo poglavlju dali kratak uvod u svijet opcija i portfelja, te se upoznali s ključnim pojmovima koji su nam potrebni kroz cijeli rad, kao što su Brownovo gibanje te Itôv integral i njegova formula. Oni nam daju osnovu za uvođenje jednog od najvažnijih modela za vrednovanje financijske imovine, a to je Black-Scholes-Mertonov model kojeg promatramo u drugom poglavlju. Prije samog izvoda modela definiramo pojmove ekvivalentne martingalne mjere i navodimo Girsanovljev teorem koji omogućuje promjenu mjere, kako za jednodimenzionalni tako i za višedimenzionalni slučaj. U trećem poglavlju analiziramo povezanost stohastičkih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi pomoću Feynman-Kac teorema i uvodimo Hull-White model. Na kraju, proučavamo opcije koje se sastoje od više osnovnih imovina te se na početku poglavlja upoznajemo s višedimenzionalnom Black-Scholesovom funkcijom pomoću koje u ostatku poglavlja računamo cijene tih opcija. Opisujemo tri opcije s više osnovnih imovina, a to su rainbow, basket i quanto opcije, a one igraju ključnu ulogu u smislu upravljanja rizicima, te diverzifikaciji i optimizaciji portfelja.

Summary

This thesis explains the great importance of stochastic calculus in financial mathematics, and shows some of its most important applications and its influence on market development. In the first chapter, we gave a brief introduction to the world of options and portfolios, and got acquainted with the key concepts necessary throughout the paper, such as Brownian motion and Itô integral along with its formula. They give us the foundation for introducing one of the most important models for the valuation of financial assets, the Black-Scholes-Merton model, which we analyze in the second chapter. Before deriving the model itself, we define the terms of equivalent martingale measure and state Girsanov's theorem, which allows a measure change, both for the one-dimensional and for the multidimensional case. In the third chapter, we analyze the connection between stochastic and partial differential equations using the Feynman-Kac theorem and introduce the Hull-White model. Finally, we study options that consist of several underlying assets, and at the beginning of the chapter we are introduced to the multidimensional Black-Scholes function, which we use to calculate the prices of these options in the rest of the chapter. We describe three types of multi-asset options: rainbow, basket and quanto options, which play a key role in terms of risk management, porfolio diversification and optimization.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 14. svibnja 1999. godine, gdje sam završila osnovnu školu Nikola Tesla i srednju školu XI. gimnaziju. U akademskoj godini 2018./2019. upisujem prvu godinu preddiplomskog sveučilišnog studija matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2021. godine i stječem titulu prvostupnika matematike. Po završetku, iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.