Robusnost i višekriterijska optimizacija

Tomašević, Antun

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antun Tomašević

ROBUSNOST I VIŠEKRITERIJSKA OPTIMIZACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, veljača 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svima onima koji su mi pokazali ljepotu otkrivanja!
Posebno zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na bezuvjetnoj podršci u zajedničkom koračanju kroz moj studij.

Sadržaj

Uvod

U suvremenim znanstvenim i inženjerskim disciplinama, koncept robusnosti igra ključnu ulogu u osiguravanju pouzdanih i otpornijih sustava, dok višekriterijska optimizacija omogućuje donošenje kvalitetnih odluka u složenim okruženjima s više ciljeva. Ovaj rad bavi se detaljnom analizom tih pojmova, istražujući njihove temeljne definicije, glavne pristupe te međuodnose.
Kroz razmatranje različitih koncepata robusnosti, istaknuta je njihova važnost u upravljanju nesigurnostima i promjenjivim uvjetima. Nadalje, definirani su ključni modeli i metode koje se koriste za kvantifikaciju robusnosti u optimizacijskim problemima. U kontekstu višekriterijske optimizacije, analizirane su metode za usklađivanje više ciljeva te pristupi koji osiguravaju optimalna rješenja uzimajući u obzir kompromis između različitih kriterija.
U radu su navedeni konkretni primjeri primjene robusnosti i višekriterijske optimizacije u stvarnim sustavima, uključujući operativne procese. Prikazani su glavni rezultati i relacije između različitih koncepata, čime se dodatno pojašnjava njihov značaj u praksi.
Cilj ovog rada je pružiti jasno razumijevanje robusnosti i višekriterijske optimizacije te istaknuti njihovu međusobnu povezanost. Ova analiza doprinosi boljem razumijevanju metodoloških pristupa koji omogućuju izgradnju učinkovitijih i stabilnijih sustava u dinamičnim uvjetima.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Općenito o optimizaciji

Optimizacija je matematička disciplina kojoj je cilj pronalaženjem najboljeg rješenja problema unutar postavljenog skupa ograničenja. Pojam "optimizacija" odnosi se na proces i metodologiju postizanja najefikasnijeg mogućeg rješenja sustava ili odluke najčešće minimiziranjem ili maksimiziranjem određene funkcije. Ta funkcija poznata je kao funkcija cilja. Optimizacijski problemi široko su prisutni u teorijskim istraživanjima, ali i među praktičnim primjenama različitih područja poput ekonomije, logistike, marketinga, menadžmenta itd.
U svojoj osnovi, optimizacija nastoji odrediti vrijednosti varijabli odluke koje će dovesti do najpovoljnijeg ishoda funkcije cilja. To se obično postavlja kao optimizacijski problem, gdje se funkcija cilja $f(x)$ maksimizira ili minimizira, pod uvjetima, tj. ograničenjima $g_i(x) \leq 0$, za $i = 1, 2, \ldots, m$. Opći oblik ove vrste problema može se zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \text{min / max} \\ \text{Pod uvjetom da} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, l \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdje $x \in \mathbb{R}^n$ predstavlja vektor odluke. Rješenja problema optimizacije mogu se razlikovati ovisno o vrsti funkcije cilja (linearna, nelinearna, konveksna, itd.) te prirodi ograničenja. Također, optimizacijski problemi se mogu klasificirati u različite kategorije. To može biti linearno ili nelinearno programiranje, cjelobrojno programiranje, dinamičko programiranje i slično, svaki s vlastitim tehnikama i metodama rješavanja.
Jedan od poznatijih pristupa rješavanju problema u optimizaciji jest primjena uvjeta prvog reda, koji se izvode iz metode Lagrangeovih multiplikatora. Uvođenjem Lagrangeovih multiplikatora λ_i i μ_j za nejednakosti i jednakosti ograničavajućih uvjeta, Lagrangeova

funkcija oblikuje se na sljedeći način:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \tag{1.2}$$

Do rješenja se tada dolazi rješavanjem sustava jednadžbi koji dobivamo parcijalnim derivacijama funkcije $\mathcal{L}$ po x, λ_i, μ_j. Ovaj pristup dopušta transformaciju problema uvjetne optimizacije u nešto jednostavniji problem pristupačniji za analizu i rješenje.
Osim klasičnih metoda, postoje modernije optimizacijske tehnike poput genetskih algoritama, simuliranog pretraživanja optimuma (Monte-Carlo metoda) te optimizacija s pomoću *rojeva čestica*. Ove tehnike su razvijene za rješavanje složenijih problema, a koriste se u slučajevima kada tradicionalne metode nisu primjenjive. Ove tehnike (koje pripadaju skupini metaheurističkih metoda) široko su primijenjene među problemima koji uključuju velike skupove podataka te složene funkcije cilja.

1.2 Primjena optimizacije

Optimizacija nije ograničena samo na apstraktne matematičke probleme, već ima brojne primjene u svakodnevnom životu. U ekonomiji, optimizacija se, primjerice, koristi za modeliranje i rješavanje problema vezanih uz alokaciju resursa, planiranje proizvodnje, maksimizacija korisnosti. Ekonomska teorija izbora potrošača i maksimizacija profita znatno se oslanja na optimizacijske tehnike, gdje potrošači nastoje maksimizirati svoju korisnost unutar proračunskog ograničenja, a tvrtke nastoje maksimizirati profit s obzirom na troškove svoje proizvodnje.
Na akademskoj razini, optimizacijske tehnike često se koriste za rješavanje izazova u različitim područjima istraživanja, od operacijskih istraživanja do umjetne inteligencije te strojnog učenja. To pronalazi svoju primjenu u jednoj od važnijih grana logistike poput optimizacije lanaca opskrbe, gdje tvrtke moraju odrediti najučinkovitiji način upravljanja inventarom, proizvodnjom i distribucijom kako bi minimizirale troškove, istovremeno zadovoljavajući zahtjeve kupaca. Na sličan način, u planiranju transporta, optimizacija se koristi za određivanje najisplativijih ruta i rasporeda za robu i putnike.
U operacijskim istraživanjima, jednoj od grana optimizacije, matematički modeli se koriste za optimiziranje procesa kao što su upravljanje radovima, raspored osoblja i dizajn (izgled) mreža. Primjerice, u zdravstvenom sustavu, optimizacija može pomoći prilikom kreiranja rasporeda osoblja u bolnicama, efikasnoj raspodjeli medicinskih resursa pa čak i u dijagnozi te planiranju liječenja.
Također, optimizacija ima ključnu ulogu u suvremenoj umjetnoj inteligenciji (AI) i strojnom učenju (ML). Tehnike koje tumači optimizacija središnje su u treniranju modela strojnog učenja, gdje je cilj minimizirati funkciju gubitka koja predstavlja razliku između predviđenih i stvarnih vrijednosti. Ovaj proces obično se provodi iterativnim metodama poput

gradijentnog spusta.
U svakodnevnom životu, optimizacija se primjenjuje u raznim situacijama, od planiranja ruta u navigacijskim sustavima poput Google Maps-a, do optimizacije osobnih financija brigom o ravnoteži prihoda i rashoda. Primjerice, prilikom odabira energetski učinkovitih uređaja za kućanstvo, optimizacijske metode mogu pomoći u procjeni i odluci između cijene, učinkovitosti i dugoročnih ušteda. Nadalje, optimizacija se koristi u sportu za kreiranje strategija koje maksimiziraju performanse, bilo da je riječ o rasporedima treninga sportaša ili formiranju sportskih timova.
Zaključno, optimizacija je svestran i snažan alat sa širokim primjenama u teoriji i praksi, od teorijskih studija na akademskoj razini do konkretnog rješavanja problema u svakodnevnom životu. Kontinuiran razvoj novih optimizacijskih tehnika i njihova integracija u postojeća i nova područja poput umjetne inteligencije i analize velikog broja podataka dodatno povećava važnost i potencijal optimizacije za rješavanje stvarnih problema.

1.3 Višekriterijska Optimizacija

U ovom dijelu definiraju se osnovni pojmovi višekriterijske optimizacije i robusnosti, koji predstavljaju temelj za daljnju analizu i razvoj metoda u robusnoj višekriterijskoj optimizaciji.
U stvarnim optimizacijskim problemima ulazni su podaci često podložni nesigurnostima. To može narušiti kvalitetu ili realizaciju optimalnih rješenja. Robusna optimizacija razvijena je s namjerom da omogući pronalazak rješenja koja zadržavaju kvalitetu i izvedivost u prisutnosti nesigurnosti. Dok je koncept robusnosti dobro istražen u kontekstu jednokriterijskih problema, višekriterijska optimizacija s robusnim pristupom nedavno je postala predmet detaljnog istraživanja.
Višekriterijska optimizacija bavi se rješavanjem problema koji uključuju više ciljeva (često međusobno sukobljenih). Problem se matematički formulira na sljedeći način:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix} \to \min, \quad \text{uz uvjet} \quad x \in X, \tag{1.3}$$

gdje je:

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ skup dopustivih točaka,
- $f(x) : X \to \mathbb{R}^k$ vektorska funkcija ciljeva,
- $f_i(x) : X \to \mathbb{R}$ pojedinačna funkcija cilja, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Kroz ovaj rad potrebno je razlikovati sljedeća tri relacijska operatora u definicijama i teoremima. Stoga, neka su z i w k-dimenzionalni vektori. Uvodimo sljedeće tri relacije na $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$:

$$\begin{aligned} &z \leqslant w \quad akko \quad w_i \in [z_i, \infty) \quad \text{za sve } i = 1, \dots, k \\ &z \leq w \quad akko \quad w_i \in [z_i, \infty) \quad \text{za sve } i = 1, \dots, k \quad , \quad z \neq w \\ &z < w \quad akko \quad w_i \in (z_i, \infty) \quad \text{za sve } i = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{1.4}$$

Kako bismo skratili tekst, koristimo notaciju $[\cdot / \cdot / \cdot]$. Primjerice, definiramo skupove $\mathbb{R}^k_{\geqslant}$, $\mathbb{R}^k_{\geq}$ i $\mathbb{R}^k_{>}$ na sljedeći način:

$$\mathbb{R}^k_{[\geqslant/\geq/>]} := \{x \in \mathbb{R}^k : x[\geqslant / \geq / >]0\}. \tag{1.5}$$

Dopustivu točku $x^* \in X$ nazivamo *efikasnom*, ako ne postoji točka $x \in X$ takva da $f(x^*) \leq f(x)$.
Analogno tome, dopustiva točka x^* se naziva *slabo* ili *strogo efikasnom*, ako ne postoji točka $x \in X \setminus \{x^*\}$ takva da $f(x^*) \leqslant f(x)$ ili $f(x^*) < f(x)$ redom.
Primijetimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} &x^* \text{ je [slabo / } \cdot \text{ / strogo] efikasno} \iff \\ &f(x^*) - \mathbb{R}^k_{[\geqslant/\geq/>]} \text{ ne sadrži niti jedan } f(x) \text{ za } x \in X. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Da bismo definirali nesiguran (neizvjestan) višekriterijski optimizacijski problem, pretpostavljamo da su nesigurnosti u formulaciji problema dane poput scenarija iz poznatog nam *skupa nesigurnosti* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$. Analogno (jednokriterijskoj) robusnoj optimizaciji možemo pretpostaviti $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$, tj. da scenariji iz $\mathcal{U}$ utječu na vrijednosti funkcije f. Nadalje, pretpostavljamo da skup dopustivih točaka X nije posljedica nesigurnosti i ostaje nepromijenjen u različitim scenarijima. U slučaju suprotnog, jednostavno zamijenimo X skupom dopustivih točaka za svaki scenarij kao što je praksa kod jednokriterijske robusne optimizacije.
Sada se prethodno opisan problem višekriterijske optimizacije $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ definira kao familija $(\mathcal{P}(\xi), \xi \in \mathcal{U})$ parametriziranih problema

$$\mathcal{P}(\xi) \quad \min \quad f(x, \xi), \text{ pod uvjetom } x \in X \tag{1.7}$$

gdje je $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ funkcija cilja, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ skup dopustivih točaka, a $\xi \in \mathcal{U}$ određene vrijednosti za parametre funkcije cilja. Također, ξ nazivamo scenarijem, a $\mathcal{P}(\xi)$ slučajem od $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Poglavlje 2

Robusnost u optimizaciji

Robusnost je važan pojam u matematičkoj optimizaciji i operacijskim istraživanjima. Odnosi se na sposobnost sustava, modela ili algoritma da ostane stabilan i učinkovit usprkos greškama u podacima, izmjenama uvjeta ili sličnim neizvjesnostima. U kontekstu optimizacije, robusnost se najčešće definira kao sposobnost optimizacijskog modela da generira rješenja koja su *dobra* čak i kada postoje odstupanja od pretpostavljenih uvjeta, poput pogrešnih podataka, nepreciznih parametara ili promjena okolnosti.
U osnovi, robusnost u optimizaciji bavi se kreiranjem rješenja koja neće biti pretjerano osjetljiva na izmjene ili nesigurnosti u ulaznim podacima ili u uvjetima u kojima sustav funkcionira. To je posebno važno u situacijama kada su podaci blago nepouzdani, poput prognoza tržišta, financijskih modela, ekoloških istraživanja i slično.

2.1 Matematički okvir robusnosti

Matematički, robusnost se može formalizirati u kontekstu optimizacijskih problema s *nesigurnim* podacima. Na primjer, u klasičnom optimizacijskom problemu s ciljem minimiziranja funkcije $f(x)$ pod uvjetom $x \in X$, gdje X predstavlja skup dopustivih točaka, dodaju se nesigurnosti u obliku varijacija parametara ili ograničenja. Umjesto da se traži optimalno rješenje u idealnom okruženju, traži se rješenje koje minimizira funkciju cilja, dok istovremeno uzima u obzir nesigurnost i promjenjivost podataka.
Jedan od najpoznatijih pristupa robusnosti u optimizaciji je *pristup najgoreg slučaja*. U ovom kontekstu, pretpostavlja se da su ulazni podaci i ograničenja nepoznati te da se mogu kretati unutar određenog skupa nesigurnosti. Matematički, ovakav problem može se for-

mulirati kao:

$$
\begin{aligned}
& f(x,\delta) \to \min \\
\text{Pod uvjetom da} \quad & g_i(x,\delta) \leq 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n \\
& h_j(x,\delta) = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, m
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Gdje δ predstavlja nesigurnost ili varijacije ulaznih podataka. Cilj je pronaći rješenje x koje minimizira $f(x,\delta)$, dok istovremeno zadovoljava ograničenja koja se mogu mijenjati unutar zadanih granica nesigurnosti.

2.2 Primjena robusnosti

Robusnost ima široku primjenu u mnogim industrijama i područjima istraživanja. U financijskom sektoru, robusna optimizacija se koristi za modeliranje portfelja, gdje se ne može precizno predvidjeti kretanje tržišta, ali je potrebno optimizirati strategiju ulaganja tako da bude stabilna unatoč raznim promjenama i nesigurnostima. Također, robusnost igra ključnu ulogu u inženjeringu, preciznije u dizajnu sustava koji moraju raditi u promjenjivim uvjetima. Primjer tome su zrakoplovne komponente koje moraju biti sigurne u različitim uvjetima leta.
U logistici, robusne metode optimizacije pomažu pri planiranju i implementiranju mreže distribucijskih ruta koje moraju biti fleksibilne s obzirom na nepredvidljive faktore poput vremenskih uvjeta, cestovnih zastoja ili neočekivanih promjena u narudžbama. Jednako tako, u proizvodnji, robusna optimizacija koristi u planiranju proizvodnih kapaciteta, gdje nepoznanice u potražnji i resursima mogu značajno utjecati na učinkovitost i troškove proizvodnje (skladištenja).
Robusne optimizacijske metode koriste se i u poljoprivredi za predviđanje prinosima uroda, uzimajući u obzir promjenjive vremenske uvjete, dok u zdravstvu omogućuju optimizaciju rasporeda liječnika i medicinskog osoblja, uzimajući u obzir nepredvidive bolesničke situacije ili izostanke.

2.3 Izazovi i budući smjerovi u robusnoj optimizaciji

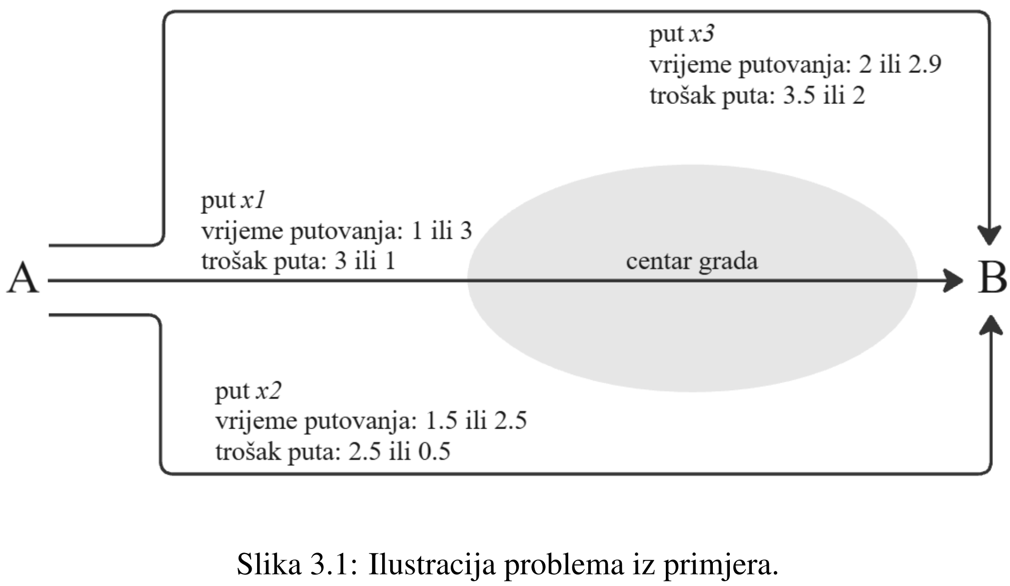
Iako robusnost u optimizaciji ima široku primjenu, suočava se i s nekoliko izazova. Jedan od glavnih izazova je u tome što robusna optimizacija često dovodi do konzervativnijih rješenja. Takva rješenja nisu nužno optimalna u uvjetima kada je nesigurnost minimalna.
Također, složenost robusnih optimizacijskih problema često raste s povećanjem broja potencijalnih nesigurnosti i složenosti modela. Zato razvoj novih tehnika (koje omogućuju učinkovitije rješavanje robusnih optimizacijskih problema, poput naprednih metaheurističkih metoda) predstavlja važan smjer za budući razvoj ove discipline.

U budućnosti, robusnost će sve više postati ključna komponenta u mnogim aplikacijama, posebno u onima gdje nesigurnost i promjenjivost imaju značajnu ulogu. Razvoj algoritama koji će omogućiti brže i preciznije rješavanje robusnih optimizacijskih problema bit će ključan za napredak u područjima kao što su automatsko upravljanje, modeliranje procjena, robotika i mnoge druge industrije koje ovise o optimalnim odlukama u uvjetima nesigurnosti.

Poglavlje 3

Koncepti robusnosti u višekriterijskoj optimizaciji

Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = (\mathcal{P}(\xi), \xi \in \mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te kada je riječ o nesigurnostima govorimo o tome da postoji više različitih *scenarija* koji uvjetuju ishode. U ovom poglavlju bit će predstavljeni različiti koncepti robusnosti za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Ove koncepte ilustriramo sljedećim primjerom za pronalaženje najkraćeg puta.
Primjer s putevima: Uzmimo da želimo putovati od točke A i do točke B. Postoje tri moguća puta x_1, x_2 i x_3. Htjeli bismo imati što kraće vrijeme putovanja i što niže troškove. Međutim, niti cijena niti vrijeme putovanja nisu unaprijed poznati. Oboje ovise o odluci, hoće li se izvjesni festivalski događaj održati ili ne. Imamo sljedeće informacije:



Slika 3.1: Ilustracija problema iz primjera.

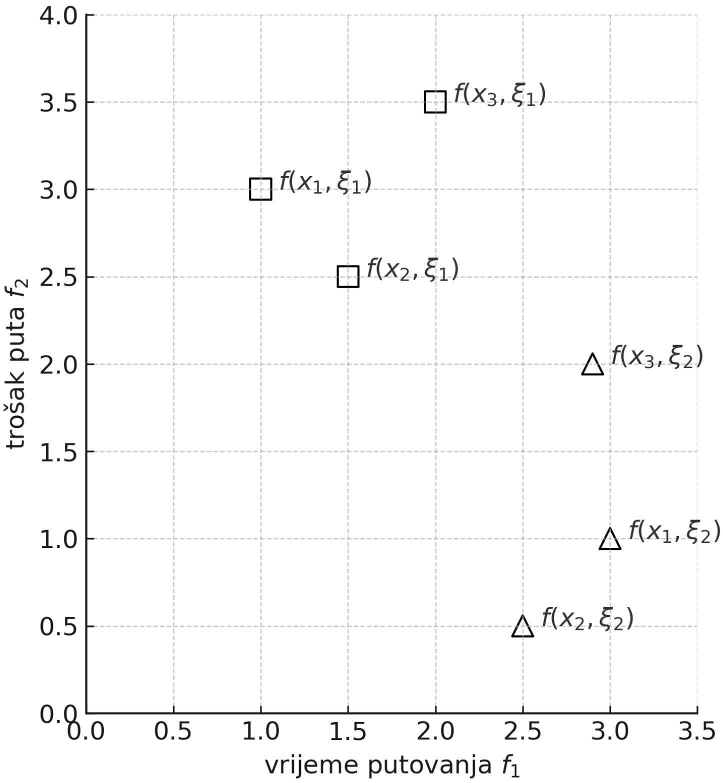
- U slučaju da se festival ne održava (*scenarij 1*), vrijeme putovanja (funkcija cilja f_1) putem x_1 (ide ravno kroz centar) je najkraće, putem x_2 nešto dulje, a putem x_3 je najdulje. Ako se festival ipak održi (*scenarij 2*), sva vremena putovanja se povećavaju. Najdulje vrijeme putovanja tada će biti na putu x_1 (budući da je kroz centar najveća gužva), putem x_3 će biti nešto kraće, a putem x_2 najkraće.

- U slučaju da nema festivala (*scenarij 1*), troškovi putovanja (funkcija cilja f_2) za sva tri puta su slični. Putem x_1 su troškovi nešto viši od x_2 zbog ograničenja cestarine u centru, a put x_3 je najdulji i zato najskuplji. Spomenuta ograničenja ukidaju se u slučaju festivala (*scenarij 2*) kako bi se privukao veći broj posjetitelja, stoga se troškovi smanjuju za iznos 2 na putevima x_1 i x_2 te za iznos 1.5 na putu x_3 (budući da je najudaljeniji od centra).

Tablica 3.1: Tablični prikaz dvodimenzionalne funkcije $f(x, \xi)$

$f(x,\xi)$	x_1	x_2	x_3
ξ_1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$
ξ_2	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gledajući samo ξ_1 (scenarij 1, nema festivala) primijetimo da je put x_3 najgori odabir (najdulje trajanje putovanja s najvišim troškovima), što puteve x_1 i x_2 čini *Pareto-rješenjima* ovog scenarija, tj. ne postoji drugo rješenje koje je *bolje* u barem jednoj komponenti funkcije cilja bez *pogoršanja* barem jedne druge komponente. U slučaju ξ_2 (scenarij 2, festival se održava), samo je put x_2 *Pareto-rješenje* (najkraće trajanje putovanja s najnižim troškovima).



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x, \xi)$ iz primjera

Promotrimo dvije jednostavnije ideje koje svaki scenarij razmatraju zasebno.

3.1 Slabo robusna i snažno robusna efikasnost

Budući da se za svaki fiksni $\xi \in \mathcal{U}$ dobivamo deterministički problem višekriterijske optimizacije $\mathcal{P}(\xi)$, zadaća robusnosti jest definirati dopustivu točku kao *robusno efikasno rješenje* ako je efikasno barem za jedan scenarij.

Definicija 3.1.1. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, dopustiva točka $x \in X$ naziva se **slabo robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako je efikasno za $\mathcal{P}(\xi)$ za barem jedan $\xi \in \mathcal{U}$.

Definicija 3.1.2. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, dopustiva točka $x \in X$ naziva se **snažno robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako je efikasno za $\mathcal{P}(\xi)$ za sve $\xi \in \mathcal{U}$.

Napomena 3.1.1. Neka je $X_{\mathcal{E}}(\xi)$ skup efikasnih rješenja za $\mathcal{P}(\xi), \xi \in \mathcal{U}$. Tada je

- x snažno robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\xi) \iff x \in \bigcap_{\xi \in \mathcal{U}} X_{\mathcal{E}}(\xi)$
- x slabo robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\xi) \iff x \in \bigcup_{\xi \in \mathcal{U}} X_{\mathcal{E}}(\xi)$

Kao direktna posljedica Napomene 3.1.1 slijedi lema:

Lema 3.1.1. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $x \in X$ snažno robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Tada je x i slabo robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.*

Osvrnimo se na primjer s putevima naveden ranije. Kao što je već napomenuto, x_2 je efikasan u oba scenarija, x_1 je efikasan samo u prvom scenariju, dok x_3 nije efikasan niti u jednom. To znači da je x_2 snažno robusno efikasno rješenje, nadalje x_1 je slabo robusno efikasno rješenje, a x_3 nije niti jedno niti drugo. Taj zaključak usmjerava na to da nikada ne bismo trebali odabrati put x_3. Slabo robusna efikasnost daje nam izbor između puteva x_1 i x_2, dok snažno robusna efikasnost ostavlja na izbor samo put x_2.

Napomena 3.1.2. Posebni slučajevi snažno robusne efikasnosti

- Za $|\mathcal{U}| = 1$, snažno robusna efikasnost, slabo robusna efikasnost i (deterministička) efikasnost su ekvivalentne.
- U slučaju kada je $k = 1$ (samo jedna funkcija cilja), rješenje je snažno robusno efikasno ako i samo ako je optimalno za svaki scenarij $\xi \in \mathcal{U}$.

Drugi dio Napomene 3.1.2 tumači da je snažno robusna efikasnost prilično strog zahtjev. Vidimo da postojanje snažno robusnog efikasnog rješenja za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ nije zagarantirano. Međutim, postoji klasa problema u kojima je zajamčeno postojanje takvog rješenja, npr. ako jedan od ciljeva ne sadrži parametre nesigurnosti te ako minimizacija ovog cilja ima jedinstveno optimalno rješenje.

Lema 3.1.2. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima. Neka je $i \in \{1, \ldots, k\}$ indeks funkcije cilja koja nema nesigurnosti, tj. $f_i(x, \xi) = f_i(x)$ za sve $\xi \in \mathcal{U}$ i sve $x \in X$. Nadalje, pretpostavimo da $\min\{f_i(x) : x \in X\}$ ima jedinstveno optimalno rješenje x^*. Tada je x^* snažno robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.*

Dokaz. S obzirom na to da vrijedi $f_i(x^*, \xi) = f_i(x^*) < f_i(x) = f_i(x, \xi)$ za svaki $x \in X$ i $\xi \in \mathcal{U}$ slijedi da ne postoji $x \in X$ koji dominira x^* u bilo kojem scenariju $\xi \in \mathcal{U}$. Stoga, $x^* \in X_{\mathcal{E}}(\xi)$ za sve $\xi \in \mathcal{U}$ pa slijedi da je x^* snažno robusno efikasno rješenje.

□

U posebnom slučaju Leme 3.1.2 postoji barem jedno snažno robusno efikasno rješenje. Međutim, u praksi nije česta pojava imati mnoga snažno robusna efikasna rješenja. S druge strane, realno je očekivati veći broj slabo robusnih efikasnih rješenja.

3.2 Minimax robusna efikasnost

Koncept *minimax robusne efikasnosti* proširuje ideju robusnosti na višekriterijske optimizacijske probleme. Ovaj pristup analizira kako nesigurnosti u parametrima utječu na efikasnost rješenja, s ciljem identifikacije onih rješenja koja su otporna na najgore moguće scenarije.

Minimax robusna optimalnost prvi put je uvedena za jednokriterijske optimizacijske probleme u radu Soystera (1973. godina) te dodatno razvijena od strane Ben-Tala i Nemirovskog (1998. godina). Kod jednokriterijskih optimizacijskih problema, dopustiva točka $x \in X$ se smatra *minimax robusnim optimalnim rješenjem* ako minimizira najgori mogući ishod funkcije cilja:

$$\min_{x \in X} \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f(x, \xi), \tag{3.1}$$

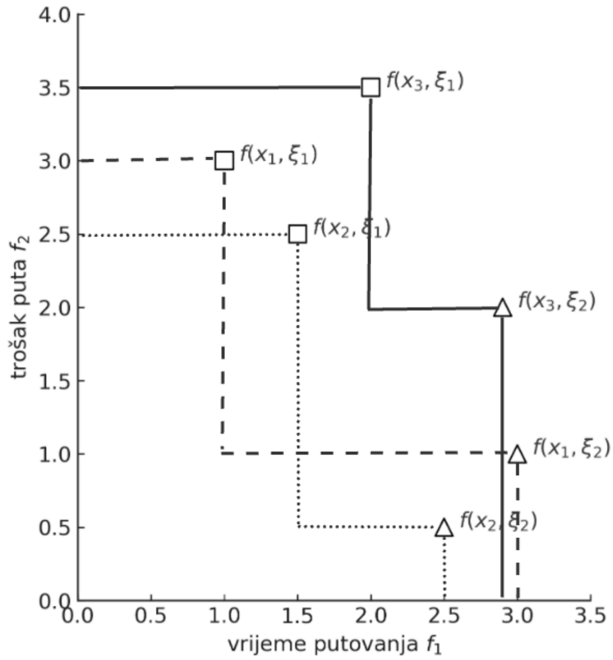
gdje je $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ skup nesigurnosti, dok $\xi \in \mathcal{U}$ predstavlja parametre nesigurnosti.
Proširenje ovog koncepta na višekriterijske optimizacijske probleme je složenije jer "najgori slučaj" za više ciljeva nije jednoznačno definiran. Ovaj problem rezultirao je razvojem različitih pristupa za definiranje minimax robusne efikasnosti u višekriterijskom kontekstu. Upoznajmo tri glavna pristupa za definiranje minimax robusne efikasnosti kod višekriterijskih problema.

Skupovno temeljena minimax robusna efikasnost

Definicija 3.2.1. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, dopustiva točka $x \in X$ naziva se **skupovno temeljenim minimax robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga točka $x' \in X \setminus x$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq f_{\mathcal{U}}(x) - \mathbb{R}^k_{\geq}. \tag{3.2}$$

Definicija je uvedena od strane matematičara Matthiasa Ehrgotta i sur. 2013. godine [2]. Također je važno spomenuti da se uz definiciju skupovno temeljne minimax robusne efikasnosti, navodi i *stroga* skupovno temeljna minimax robusna efikasnost te *blaga* skupovno temeljna minimax robusna efikasnost. Označavamo ih na način da umjesto oznake $\mathbb{R}^k_{\geq}$ pišemo $\mathbb{R}^k_{\geqslant}$ i $\mathbb{R}^k_{>}$ redom.
Vratimo se ponovno na primjer s putevima te uzmimo da su X, $\mathcal{U}$ i f zadane kao u tom primjeru. Kako bismo lakše razumjeli u čemu se radi promotrimo sliku 3.3.



Slika 3.3: $f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkana linija), $f_{\mathcal{U}}(x_2) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (točkasta linija), $f_{\mathcal{U}}(x_3) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (puna linija); linija je rub promatranog skupa, a skup je zona *ispod i lijevo* od nje - ishodište je sadržano

Kao što možemo vidjeti $f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkana linija) ne sadrži niti $f_{\mathcal{U}}(x_2)$ niti $f_{\mathcal{U}}(x_3)$, prema tome x_1 je skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje. Nadalje, $f_{\mathcal{U}}(x_2) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (točkasta linija) ne sadrži niti $f_{\mathcal{U}}(x_1)$ niti $f_{\mathcal{U}}(x_3)$, prema tome x_2 je također skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje. Na koncu, $f_{\mathcal{U}}(x_3) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (puna linija) sadrži $f_{\mathcal{U}}(x_2)$ pa x_3 nije skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje.

Napomena 3.2.1. Posebni slučajevi skupovno temeljene minimax robusne efikasnosti

- Za $|\mathcal{U}| = 1$, skupovno temeljena minimax robusna efikasnost i (deterministička) efikasnost su ekvivalentne.

- U slučaju kada je $k = 1$ (samo jedna funkcija cilja), rješenje je skupovno temeljeno minimax robusno efikasno ako i samo ako je minimax robusno optimalno za odgovarajući jednokriterijski problem s nesigurnostima.

Konveksno temeljena minimax robusna efikasnost

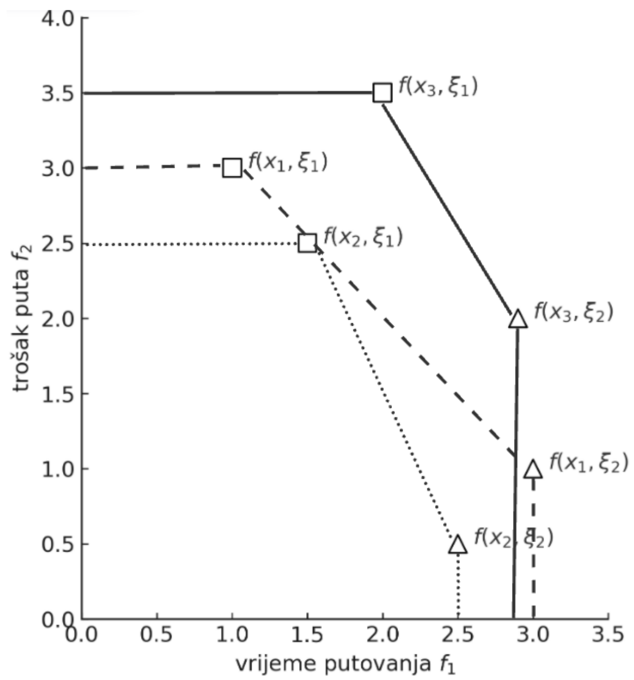
Definirajmo najprije pojam konveksne ljuske u prostoru $\mathbb{R}^k$ za $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.2.2. Neka je $S \subset \mathbb{R}^k$. Presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S naziva se *konveksnom ljuskom skupa S* te označava s $\text{conv}(S)$.

Definicija 3.2.3. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, dopustiva točka $x \in X$ naziva se **konveksno temeljenim minimax robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga točka $x' \in X \setminus \{x\}$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq \text{conv}(f_{\mathcal{U}}(x)) - \mathbb{R}^k_{\geq}. \tag{3.3}$$

Definicija je uvedena od strane matematičara Rasmusa Bokrantza i Albina Fredrikssona 2013. godine. Kako bismo stekli jasniji dojam, osvrnimo se na primjer s putevima te uzmimo da su X, $\mathcal{U}$ i f zadane kao u tom primjeru.



Slika 3.4: $\text{conv}(f_{\mathcal{U}}(x_1)) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkana linija), $\text{conv}(f_{\mathcal{U}}(x_2)) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (točkasta linija), $\text{conv}(f_{\mathcal{U}}(x_3)) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (puna linija); linija je rub promatranog skupa, a skup je zona *ispod i lijevo* od nje - ishodište je sadržano

Analizirajući graf sa slike 3.4 primijetimo da je x_2 jedino konveksno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje budući da $f_{\mathcal{U}}(x_2) \subseteq \text{conv}(f_{\mathcal{U}}(x_1)) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ pa x_1 nije konveksno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje te $f_{\mathcal{U}}(x_2) \subseteq \mathrm{conv}(f_{\mathcal{U}}(x_1)) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ pa niti x_3 nije konveksno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje.

Točkovno temeljena minimax robusna efikasnost

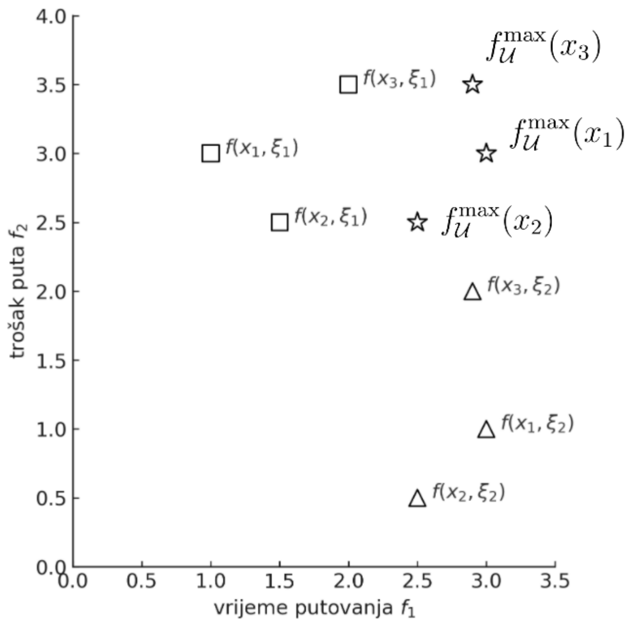
Definicija 3.2.4. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, dopustiva točka $x \in X$ naziva se **točkovno temeljenim minimax robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako je efikasno za:

$$\min_{x \in X} f_{\mathcal{U}}^{\max}(x), \tag{3.4}$$

gdje je

$$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x) := \begin{pmatrix} \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f_1(x,\xi) \\ \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f_2(x,\xi) \\ \vdots \\ \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f_k(x,\xi) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Ovaj pristup usmjeren je na supremum svakog cilja posebno stvarajući, na taj način, deterministički optimizacijski problem.
Osvrnimo se još jednom na primjer s putevima te uzmimo da su X, $\mathcal{U}$ i f zadane kao u tom primjeru.



Slika 3.5: Prikaz funkcije $f_{\mathcal{U}}^{\max}(x)$ (zvjezdice)

Prema slici 3.5 vidimo kako $f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_2)$ dominira $f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_1)$ i $f^{\max}_{\mathcal{U}}(x_3)$, prema tome samo x_2 je točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje, što je bilo za očekivati.
Primjeri pokazuju razlike među pristupima:

- Skupovno temeljeni pristup je najopćenitiji i omogućuje identifikaciju većeg broja robusno efikasnih rješenja.
- Konveksno temeljeni pristup daje uži skup efikasnih rješenja, budući da koristi konveksnu ljusku u relaciji dominacije.
- Točkovno temeljeni pristup pojednostavljuje izračun, ali može propustiti neka robusno efikasna rješenja koja identificiraju druga dva pristupa.

Minimax robusna efikasnost pruža bogat teorijski okvir za analizu višekriterijskih optimizacijskih problema s pojedinim nesigurnostima. Svaki od tri pristupa nudi jedinstvene prednosti i ograničenja, što omogućuje njihovu primjenu u različitim praktičnim scenarijima, ovisno o zahtjevima problema.

3.3 Ostali skupovno temeljeni koncepti robusne efikasnosti

U ovom dijelu analiziraju se dodatni koncepti robusnosti koji se temelje na usporedbi skupova vrijednosti funkcija ciljeva pod nesigurnim parametrima. Ključni pristup je definiranje odgovarajućih relacija poretka za skupove ciljeva, koje omogućuju usporedbu i identifikaciju robusnih rješenja.
U konceptu robusnosti temeljenom na skupovima (set-based robustness), skupovi

$$f_{\mathcal{U}}(x) = \{f(x,\xi) : \xi \in \mathcal{U}\}, \quad \forall x \in X \tag{3.6}$$

se međusobno uspoređuju uz upotrebu određenih relacija. Preciznije, $f_{\mathcal{U}}(x)$ dominira $f_{\mathcal{U}}(x')$ ako vrijedi:

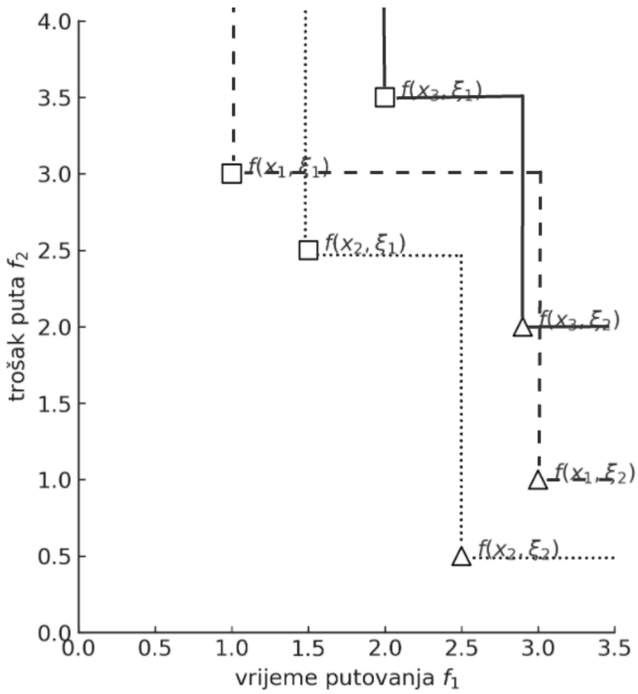
$$f_{\mathcal{U}}(x) \subseteq f_{\mathcal{U}}(x') - \mathbb{R}^k_{\geq}, \tag{3.7}$$

gdje je $f_{\mathcal{U}}(x) = \{f(x,\xi) : \xi \in \mathcal{U}\}$ skup svih mogućih vrijednosti funkcija ciljeva za rješenje x i sve scenarije ξ iz skupa nesigurnosti $\mathcal{U}$.

Definicija 3.3.1. Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima. Za dopustivu točku $x \in X$ kažemo da je **odozdo skupovno efikasna** (*lower set less ordered efficient*) za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga dopustiva točka $x' \in X \setminus \{x\}$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}(x') + \mathbb{R}^k_{\geq} \supseteq f_{\mathcal{U}}(x). \tag{3.8}$$

Osvrnimo se ponovno na primjer s putevima uz odgovarajući prikaz na slici 3.6.



Slika 3.6: $f_{\mathcal{U}}(x_1) + \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkana linija), $f_{\mathcal{U}}(x_2) + \mathbb{R}^2_{\geq}$ (točkasta linija), $f_{\mathcal{U}}(x_3) + \mathbb{R}^2_{\geq}$ (puna linija); linija je rub promatranog skupa, a skup je zona *iznad i desno* od nje - ishodište nije sadržano

Vidimo da su dopustive točke x_1 i x_2 odozdo skupovno efikasne točke, a dopustiva točka x_3 nije jer vrijedi da je $f_{\mathcal{U}}(x_2) + \mathbb{R}^k_{\geq} \supseteq f_{\mathcal{U}}(x_3)$. Možemo primijetiti da je odozdo skupovna efikasnost koncept koji je usmjeren ka optimizaciji najboljih umjesto najgorih slučajeva te je stoga prikladan za donošenje odluka koje se suočavaju s rizikom te žele maksimizirati najbolji mogući ishod.

Definicija 3.3.2. Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima. Za dopustivu točku $x \in X$ kažemo da je **skupovno efikasna** (*set less ordered efficiency*) za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga dopustiva točka $x' \in X \setminus \{x\}$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq f_{\mathcal{U}}(x) - \mathbb{R}^k_{\geq} \quad \text{i} \quad f_{\mathcal{U}}(x') + \mathbb{R}^k_{\geq} \supseteq f_{\mathcal{U}}(x). \tag{3.9}$$

Definicija 3.3.3. Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima. Za dopustivu točku $x \in X$ kažemo da je **alternativno skupovno efikasna** (*alternative set less ordered efficiency*) za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga dopustiva točka $x' \in X \setminus \{x\}$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq f_{\mathcal{U}}(x) - \mathbb{R}^k_{\geq} \quad \text{ili} \quad f_{\mathcal{U}}(x') + \mathbb{R}^k_{\geq} \supseteq f_{\mathcal{U}}(x). \tag{3.10}$$

Primijetimo da je uvjet alternativne skupovne efikasnosti *presjek* uvjeta skupovno temeljene minimax robusne efikasnosti i odozdo skupovne efikasnosti.

Definicija 3.3.4. Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima. Za dopustivu točku $x \in X$ kažemo da je **odozdo sigurno efikasna** (*certainly less ordered efficiency*) za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ako ne postoji druga dopustiva točka $x' \in X \setminus \{x\}$ takva da vrijedi:

$$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x') \in f_{\mathcal{U}}^{\min}(x) - \mathbb{R}^k_{\geq}, \tag{3.11}$$

gdje su

$$f_{\mathcal{U}}^{\max}(x) := \left(\sup_{\xi \in \mathcal{U}} f_1(x, \xi), \ldots, \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f_k(x, \xi)\right), \tag{3.12}$$

$$f_{\mathcal{U}}^{\min}(x) := \left(\inf_{\xi \in \mathcal{U}} f_1(x, \xi), \ldots, \inf_{\xi \in \mathcal{U}} f_k(x, \xi)\right). \tag{3.13}$$

Ova definicija usmjerena je na usporedbu ekstremnih vrijednosti funkcija ciljeva.
Navedeni koncepti omogućuju različite pristupe definiranja robusnih rješenja kod višekriterijskih optimizacijskih problema. Relacije temeljene na skupovima pružaju okvir za fleksibilno modeliranje preferencija i nesigurnosti u optimizacijskim zadaćama.

3.4 Blago robusna efikasnost

Koncept *blago robusne efikasnosti* uveden je kako bi se smanjila konzervativnost standardnih metoda robusne optimizacije poput minimax robusnosti. U ovom pristupu uvodi se nominalni scenarij $\hat{\xi}$, koji predstavlja referentni scenarij (najčešće očekivani ili "normalni" uvjeti). To može biti najizgledniji ili najvažniji scenarij. Kao primjer tome razmotrimo vremenske uvjete, preciznije temperaturu zraka. Obično, temperatura zraka nije niti ekstremno niska niti ekstremno visoka, ali se oba "scenarija" mogu ostvariti. Nominalni scenarij ovdje bi mogao biti prosječna temperatura zraka unutar godine dana.
Veliki nedostatak minimax robusnosti je pretjerana konzervativnost. Zaštita od svih scenarija iz skupa nesigurnosti obično uzrokuje drastični pad kvaliteta u nominalnom scenariju. Ovaj koncept osigurava nekonzervativnost rješenja te nastoji zaštititi od najgoreg scenarija. Uzmimo primjer slaganja voznog reda vlakova, suvišna konzervativnost bi dovelo do niže funkcionalnog rasporeda za putnika. Umjesto toga, blago robusna efikasnost nastoji udovoljiti nominalnim uvjetima te traga za takvim rješenjem, uz istovremeno održavanje ravnoteže između nominalnog i najgoreg slučaja. Osnovna ideja ovog koncepta je osigurati da rješenje bude dovoljno dobro za nominalni scenarij, dok se istovremeno smanjuje osjetljivost na najgore slučajeve.

Definicija 3.4.1. Za jednokriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, uzmimo da je $\hat{x}$ optimalna dopustiva točka problema $\mathcal{P}(\hat{\xi})$ za $\hat{\xi}$ nominalni scenarij. Tada dopustivu točku $x \in X$ nazivamo **blago robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na $\epsilon \geq 0$, ako je optimalno rješenje za

$$\begin{aligned} & \min \sup_{\xi \in \mathcal{U}} f(x, \xi) \\ \text{uz uvjet} \quad & f(x, \hat{\xi}) \leq f(\hat{x}, \hat{\xi}) + \epsilon \\ & x \in X \end{aligned} \tag{3.14}$$

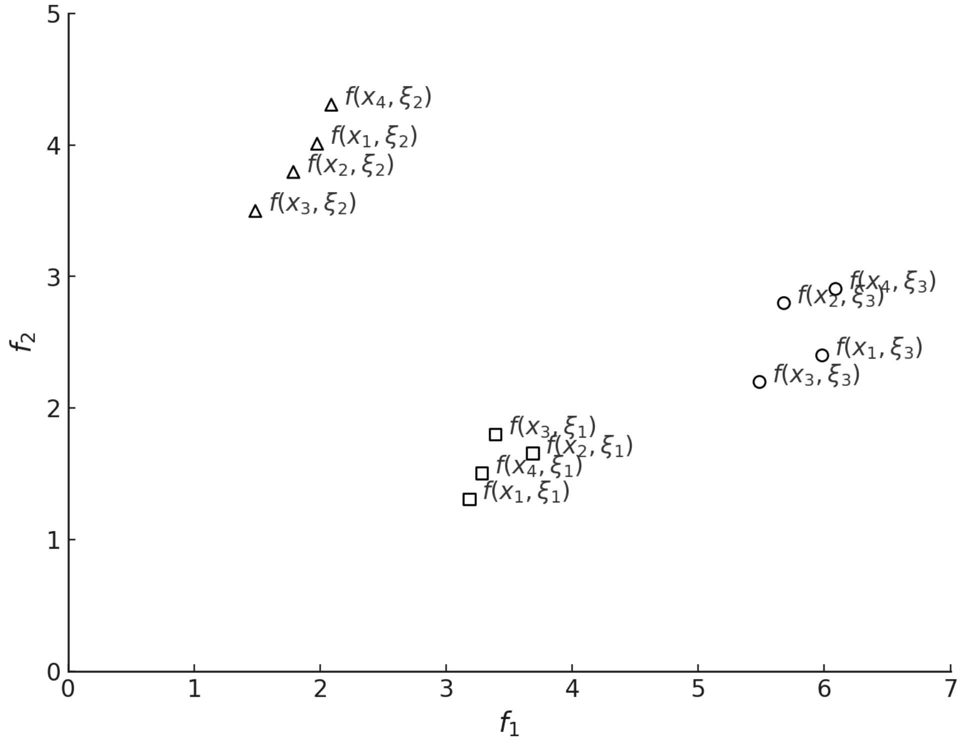
gdje je $\epsilon \geq 0$ dopušteno odstupanja od optimalnog rješenja u nominalnom scenariju.

Uzmimo da je $\hat{\xi}$ nominalni scenarij iz $\mathcal{U}$, neka je tada $X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$ skup efikasnih rješenja za $\mathcal{P}(\hat{\xi})$.
Za svako efikasno rješenje $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$ od $\mathcal{P}(\hat{\xi})$ i dani vektor $\epsilon \geq 0$ takav da $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ definiramo višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U}) := (\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \xi), \xi \in \mathcal{U})$ kao familiju parametriziranih, determinističkih višekriterijskih optimizacijskih problema

$$\begin{aligned} \mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \xi) \quad & \min f(x, \xi) \\ \text{uz uvjet} \quad & f_(x, \hat{\xi}) \leq f_i(\hat{x}, \hat{\xi}) + \epsilon_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\} \\ & x \in X \end{aligned} \tag{3.15}$$

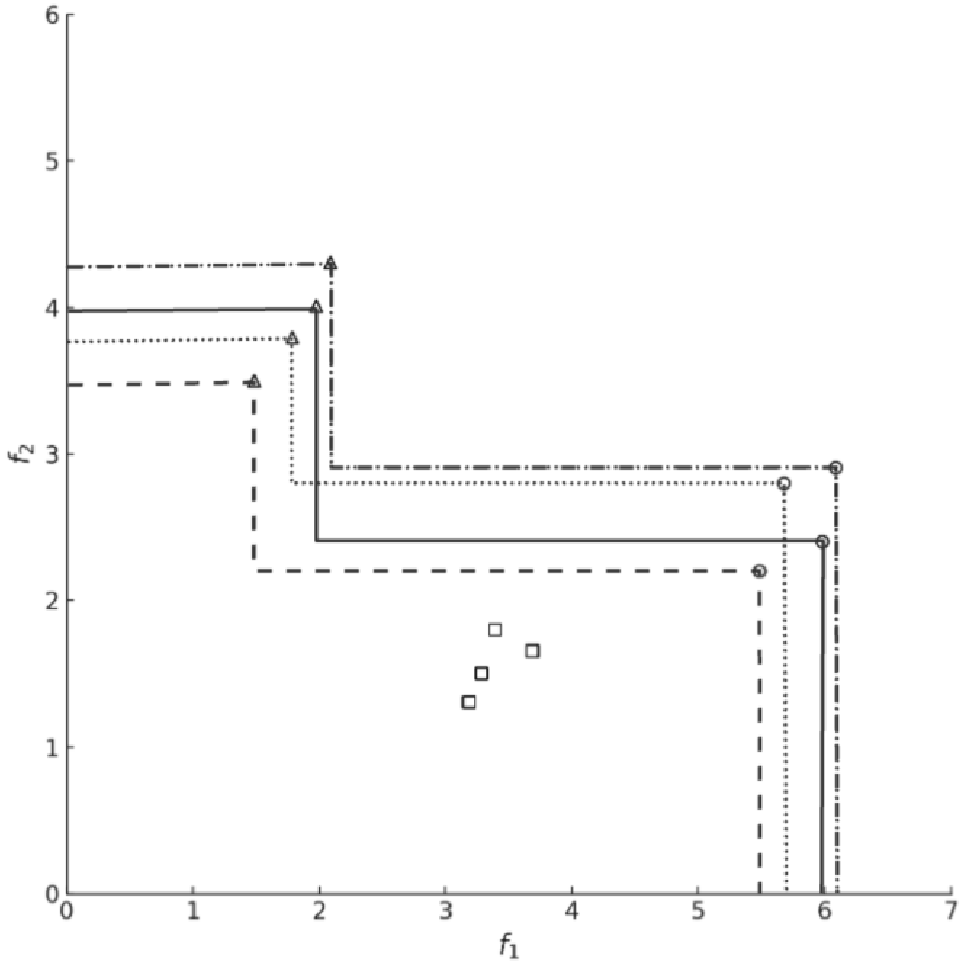
Definicija 3.4.2. Za višekriterijski optimizacijski problem $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ s nesigurnostima, nominalni scenarij $\hat{\xi} \in \mathcal{U}$ i vektor $\epsilon \in \mathbb{R}^k_{\geq}$, dopustivu točku $x \in X$ nazivamo **blago robusnim efikasnim rješenjem** za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ ako je skupovno temeljeno minimax robusno efikasno za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$ te za neki $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$.

Kako bi značenje koncepta blago robusne efikasnosti bilo jasnije, proširimo primjer s putevima na tri moguća scenarija $\mathcal{U} := \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, gdje je ξ_1 nominalni scenarij i na četiri moguća puta $X := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ te im pridružimo nove vrijednosti. Definiramo funkciju $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ kako je prikazano na slici 3.7.



Slika 3.7: Graf funkcije $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$

U nominalnom scenariju ξ_1, samo je točka x_1 efikasno rješenje, stoga je za dani $\epsilon \geq 0$ svako blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ ujedno i skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon, \mathcal{U})$.



Slika 3.8: $f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (puna linija), $f_{\mathcal{U}}(x_2) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (točkasta linija), $f_{\mathcal{U}}(x_3) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkana linija), $f_{\mathcal{U}}(x_4) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ (iscrtkano-točkasta linija); linija je rub promatranog skupa, a skup je zona *ispod i lijevo* od nje - ishodište je sadržano

Prema slici 3.8 označeni su skupovi $f_{\mathcal{U}}(x_i) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sada promotrimo dopustive točke za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon, \mathcal{U})$ uz odabir različitih vrijednosti za $\epsilon \in \mathbb{R}^k$.
Uzmimo $\epsilon' := (0, 0)$, tada je jedina dopustiva točka za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon', \mathcal{U})$ upravo x_1. Prema tome, to je jedino blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na $\epsilon' = (0, 0)$.
Nadalje, uzmimo $\epsilon'' := (f_i(x_2, \xi_1) - f_i(x_1, \xi_1))_{i=\{1,2\}}$, tada su x_1, x_2 i x_4 dopustive točke za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon'', \mathcal{U})$, a x_3 nije. Na grafičkom prikazu sa slike 3.8 vidimo da $f_{\mathcal{U}}(x_1) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ ne sadrži $f_{\mathcal{U}}(x_2)$ ni $f_{\mathcal{U}}(x_4)$ te da $f_{\mathcal{U}}(x_2) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ ne sadrži $f_{\mathcal{U}}(x_1)$ ni $f_{\mathcal{U}}(x_4)$. Prema tome, x_1 i x_2 su blago robusno efikasna rješenja za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ''.
Primijetimo da je x_3 jedino skupovno temeljeno minimax robusno rješenje.
Prema tome, u slučaju kada ϵ izaberemo prema kriteriju $f(x_3, \xi_3) \leq f(x_1, \xi_1) + \epsilon$, primjerice

$\epsilon''' := (f_i(x_3, \xi_1) - f_i(x_1, \xi_1))_{i=\{1,2\}}$, tada će x_3 biti dopustiva točka za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon, \mathcal{U})$, a kako je jedino skupovno temeljeno minimax robusno rješenje za $\mathcal{LR}(x_1, \epsilon, \mathcal{U})$, bit će i jedino blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ. Drugim riječima, x_3 će biti jedino blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ za sve $\epsilon \geq \epsilon'''$.

Napomena 3.4.1. Posebni slučajevi blago robusne efikasnosti

- Za $|\mathcal{U}| = 1$, blago robusna efikasnost ekvivalentna je determinističkoj efikasnosti.
- U slučaju kada je $k = 1$ (samo jedna funkcija cilja), rješenje je blago robusno učinkovito ako i samo ako je blago robusno optimalno za odgovarajući jednokriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima.

Poglavlje 4

Analiza i usporedba navedenih koncepata robusnosti

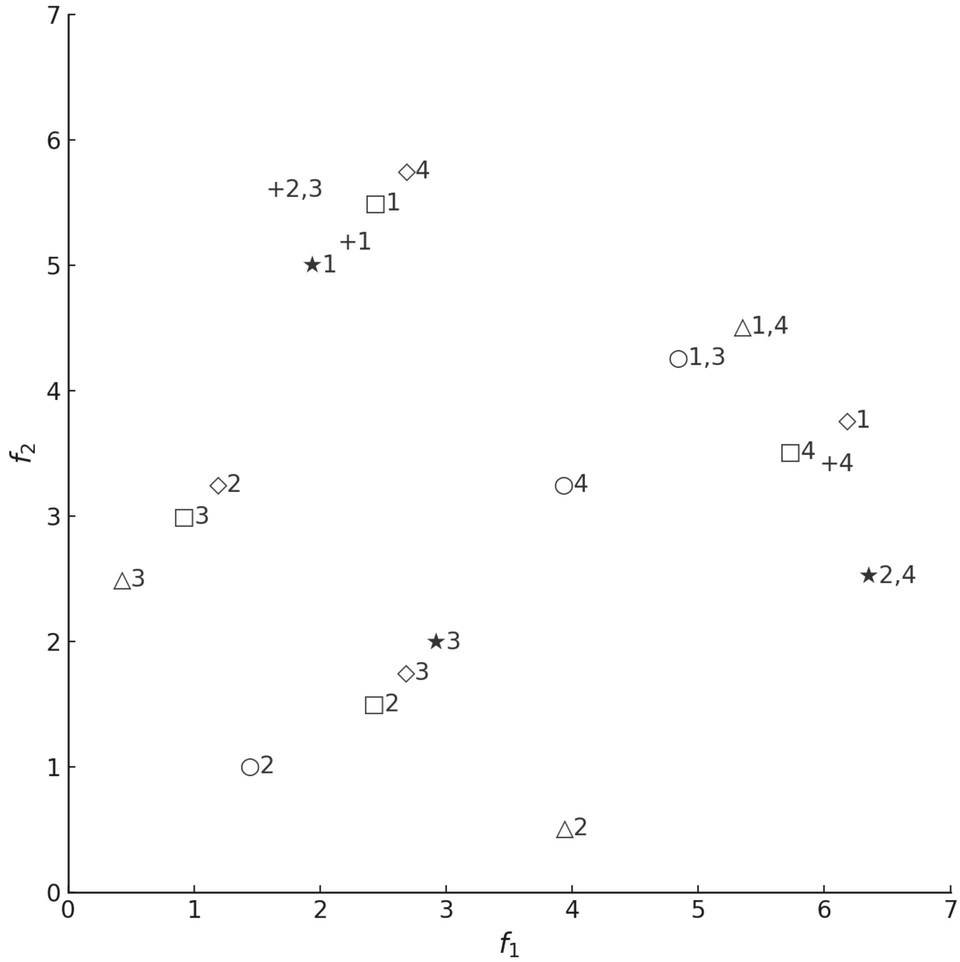
Kroz primjer s putevima analizirani su odnosi između koncepata robusnosti te prikazani sljedećom tablicom.

Tablica 4.1: Tablični prikaz odnosa između koncepata robusnosti za primjer s putevima

	x_1	x_2	x_3
Snažno robusna efikasnost	-	+	-
Slabo robusna efikasnost	+	+	-
Skupovno temeljena minimax robusna efikasnost	+	+	-
Konveksno temeljena minimax robusna efikasnost	-	+	-
Točkovno temeljena minimax robusna efikasnost	-	+	-
Blago robusna efikasnost $\forall\epsilon$	+	+	-
Odozdo skupovna efikasnost	+	+	-
Skupovna efikasnost	+	+	-
Alternativna skupovna efikasnost	+	+	-
Odozdo sigurna efikasnost	+	+	+

U ovom poglavlju bit će prikazani razni odnosi među deset nabrojanih koncepata robusnosti koje smo do sada upoznali. Imajmo na umu da blago robusno efikasna rješenja x ovise o izboru ϵ. Zbog toga u ovoj analizi razlikujemo je li dopustiva točka x blago robusno efikasna za sve $\epsilon \geq 0$ ili postoji $\epsilon \geq 0$ takav da je točka x blago robusno efikasna.
Na početku promotrimo protuprimjer koji pokazuje implikacije koje ne vrijede općenito.

Primjer 1. Neka je $\mathcal{U} := \{1, 2, 3, 4\}$, skup nesigurnosti gdje je $\hat{\xi} = 1$ nominalni scenarij te $X := \{\Diamond, +, o, \bigstar, \square, \triangle\}$ skup dopustivih točaka. Nadalje, neka je funkcija $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija cilja prikazana grafički na slici 4.1.



Slika 4.1: Grafički prikaz vektorske funkcije cilja f iz primjera 1.

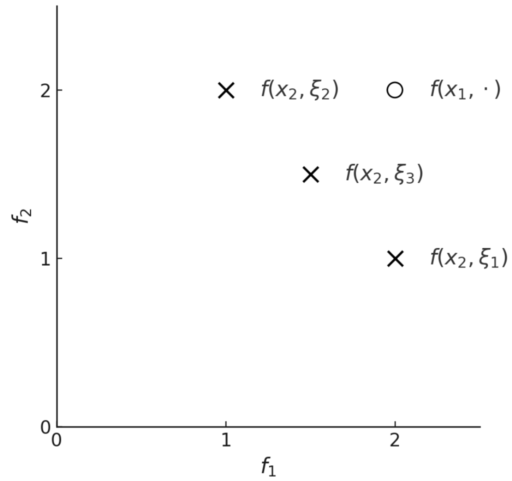
Primijetimo da su u ovom primjeru različite dopustive točke označene simbolima, a različiti scenariji (elementi skupa nesigurnosti) brojevima.
Lako vidimo da je točka $\bigstar$ blago robusno efikasno rješenje u odnosu na svaki $\epsilon \geq 0$ jer je efikasno za nominalni scenarij i ne postoji druga točka $x \in X$ takva da $f_{\mathcal{U}}(x) \subseteq f_{\mathcal{U}}(\bigstar) - \mathbb{R}^2_{\geq}$.
Također $\bigstar$ nije odozdo skupovno efikasna dopustiva točka jer ju dominira točka o, nije snažno robusno efikasno rješenje jer ga dominira $\Diamond$ u scenariju 3, niti je točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje jer ga dominiraju o i $\triangle$.
Nadalje, dopustiva točka $\triangle$ jest odozdo skupovno efikasna, ali nije blago robusno efikasno

rješenje u odnosu niti na jedan $\epsilon \geq 0$ jer ga uvijek dominira točka o koje je dopustiva točka za bilo koji $\mathcal{LR}(x, \epsilon, \mathcal{U})$ kada je $\triangle$ dopustiva točka).
Točka $\square$ je alternativno skupovno efikasno rješenje te konveksno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje, ali nije točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje jer ga dominira o niti je slabo robusno efikasno rješenje jer ga dominiraju točka $\bigstar$ u scenariju 1, o u scenariju 2 i scenariju 4 te $\triangle$ u scenariju 3.
Dopustiva točka $\lozenge$ je snažno robusno efikasno rješenje, ali nije točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje niti je skupovno efikasno jer ga u oba koncepta dominira točka $\square$.
Točka $+$ je konveksno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje, ali nije slabo robusno efikasno rješenje jer ga dominira $\bigstar$ u scenariju 1, $\lozenge$ u scenariju 2, $\triangle$ u scenariju 3 te o u scenariju 4. Također, nije odozdo skupovno efikasno jer ga dominira o niti je točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje je ga dominira $\square$.
Zbog preglednosti slijedi tablični prikaz rezultata:

Tablica 4.2: Tablični prikaz odnosa između koncepata robusnosti u primjeru 1.

	$\bigstar$	$\triangle$	$\square$	$\lozenge$	$+$	o
Snažno robusna efikasnost	-	-	-	+	-	-
Slabo robusna efikasnost	+	+	-	-	+	-
Skupovno temeljena minimax robusna efikasnost	+	-	-	-	-	-
Konveksno temeljena minimax robusna efikasnost	+	+	-	-	+	+
Točkovno temeljena minimax robusna efikasnost	-	-	-	-	-	-
Blago robusna efikasnost $\forall\epsilon$	+	+	+	+	+	+
Odozdo skupovno efikasno	-	-	+	+	+	-
Skupovna efikasnost	+	+	+	+	+	+
Alternativna skupovna efikasnost	-	-	+	-	+	+
Odozdo sigurna efikasnost	+	+	+	+	+	+

Slijedi primjer iz kojeg je moguće zaključiti da točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje ne mora nužno biti slabo robusno efikasno rješenja, blago robusno efikasno rješenje u odnosu na neki $\epsilon \geq 0$ ili skupovno efikasno.
Primjer 2. Neka je $\mathcal{U} := \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, skup nesigurnosti gdje je $\hat{\xi} = \xi_1$ nominalni scenarij te $X := \{x_1, x_2\}$ skup dopustivih točaka. Nadalje, neka je funkcija $f : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ vektorska funkcija cilja prikazana grafički na slici 4.2.



Slika 4.2: Grafički prikaz vektorske funkcije cilja f iz primjera 2.

Iz grafičkog prikaza funkcije f jasno vidimo da x_1 nije slabo robusno efikasno rješenja, blago robusno efikasno rješenje u odnosu na neki $\epsilon \geq 0$ niti skupovno efikasno. U svakom konceptu ga dominira x_2, međutim obje točke su točkovno temeljena minimax robusno efikasna jer niti jedna ne dominira u tom konceptu robusnosti.
Analizirajmo na početku vezu između točkovno temeljene minimax robusne efikasnosti i odozdo sigurne efikasnosti.

Lema 4.0.1. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $x \in X$ točkovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Tada je točka x odozdo sigurno efikasno za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.*

Dokaz. Dokaz ove leme slijedi izravno iz definicija. Naime, općenito vrijedi $f_{\mathcal{U}}^{\min}(x') - \mathbb{R}^k_{\geq} \subseteq f_{\mathcal{U}}^{\max}(x') - \mathbb{R}^k_{\geq}$ za svaki $x' \in X$

□

Promotrimo sada vezu blago robusne efikasnosti i skupovno temeljene minimax robusne efikasnosti. Preciznije, sljedeći rezultat pokazuje da je svako skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje ujedno i blago robusni efikasno rješenje u odnosu na neki $\epsilon \geq 0$.

Lema 4.0.2. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $x \in X$ skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Tada postoji $\epsilon \geq 0$ takav da je točka x blago robusno efikasno za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ.*

Dokaz. Na početku napomenimo da je skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje $x \in X$ za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ujedno i blago robusno efikasno za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ ako i samo ako je dopustiva točka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$ za neko efikasno rješenje $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$ nominalnog

problema $\mathcal{P}(\hat{\xi})$ gdje je $\hat{\xi}$ nominalni scenarij. S obzirom na to da je skup dopustivih točaka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$ podskup od X za svaki $\epsilon \geq 0$ te, vrijedi da je rješenje x skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$ ujedno i skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.
Sada za svaki $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$, x je dopustiva točka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon', \mathcal{U})$ u odnosu na ϵ za sve

$$\epsilon \geq \epsilon' := (\max\{0, f_i(x, \hat{\xi}) - f_i(\hat{x}, \hat{\xi})\})_{i=1,\dots,k}.$$

Zaključujemo da je x blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na ϵ'.

□

Uz dodatne pretpostavke možemo pokazati da vrijedi i suprotan smjer.

Lema 4.0.3. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $\hat{\xi}$ nominalni scenarij. Nadalje, neka je x blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na svaki $\epsilon \geq 0$, tada je x skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje. Štoviše, x je efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\hat{\xi})$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na svaki $\epsilon \geq 0$. Za početak promotrimo skupove dopustivih točaka za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ i $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$ gdje je $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$. Skup dopustivih točaka za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ je X, dok je skup dopustivih točaka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$:

$$X^{\mathcal{LR}}(\hat{x}, \epsilon) := \{\overline{x} \in X : f_i(\overline{x}, \hat{\xi}) \leq f_i(\hat{x}, \hat{\xi}) + \epsilon_i\}.$$

Očito je $X^{\mathcal{LR}}(\hat{x}, \epsilon) \subset X$ pa je x dopustiva točka za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Pretpostavimo sada da x nije skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Tada postoji rješenje $x' \in X$ takvo da $f_{\mathcal{U}}(x') \subseteq f_{\mathcal{U}}(x) - \mathbb{R}^k_{\geq}$. Također za

$$\epsilon' := (\max\{0, f_i(x', \hat{\xi}) - f_i(\hat{x}, \hat{\xi})\})_{i=1,\dots,k},$$

imamo $f_i(x', \hat{\xi}) \leq f_i(\hat{x}, \hat{\xi}) + \epsilon'_i$ te slijedi da je x' dopustiva točka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$. Međutim, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je x skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{LR}(\hat{x}, \epsilon, \mathcal{U})$.
Primijetimo sada da postoji neki $\hat{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$ takav da je x skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje za $\mathcal{LR}(\hat{x}, 0, \mathcal{U})$. Tada je x dopustiva točka za $\mathcal{LR}(\hat{x}, 0, \mathcal{U})$ pa je efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\hat{\xi})$, što dokazuje tvrdnju.

□

Napomena 4.0.1. Skupovno temeljeno minimax robusno efikasno rješenje $x \in X$ za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ koje je efikasno za $\mathcal{P}(\hat{\xi})$ je ujedno i blago robusno efikasno za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na svaki $\epsilon \geq 0$ jer je tada dopustiva točka za $\mathcal{LR}(x, \epsilon, \mathcal{U})$ za svaki $\epsilon \geq 0$.

Lema 4.0.4. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $\hat{\xi}$ nominalni scenarij. Nadalje, neka je x snažno robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, tada je x blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na neki $\epsilon \geq 0$.*

Dokaz. Izaberimo $\epsilon_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$. S obzirom na to da je x snažno robusno efikasno rješenje, tada je efikasno i za nominalni scenarij, tj. ne postoji $x' \in X \setminus \{x\}$ takav da $f_i(x', \hat{\xi}) \leq f_i(x, \hat{\xi})$ za svaki i. Zaključujemo da je x jedina dopustiva točka za $\mathcal{LR}(x, \epsilon_0, \mathcal{U})$, stoga je minimax robusno efikasno za $\mathcal{LR}(x, \epsilon_0, \mathcal{U})$ i blago robusno efikasno u odnosu na ϵ_0 za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

□

Poglavlje će biti zaključeno navodom rezultata koji otkriva jasnu vezu između slabo robusne efikasnosti ili blago robusne efikasnosti te odozdo sigurne efikasnosti.

Lema 4.0.5. *Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ višekriterijski optimizacijski problem s nesigurnostima te neka je $\hat{\xi}$ nominalni scenarij. Nadalje, neka je x slabo robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ili blago robusno efikasno rješenje za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ u odnosu na neki $\epsilon \geq 0$, tada je x odozdo sigurno efikasno za $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da x nije odozdo sigurno efikasno, prema definiciji, tada postoji $x' \in X \setminus \{x\}$ takav da

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \forall \eta \in \mathcal{U}, \quad f(x', \xi) \leq f(x, \eta). \tag{4.1}$$

Iz toga direktno slijedi da x nije slabo robusno efikasno rješenje. Nadalje,

$$f(x', \hat{\xi}) \leq f(x, \hat{\xi}).$$

Stoga, ako je x dopustiva točka za neki $\mathcal{LR}(\overline{x}, \epsilon, \xi)$ gdje je $\overline{x} \in X_{\mathcal{E}}(\hat{\xi})$, $\epsilon \geq 0$ i $\xi \in \mathcal{U}$, onda je i x' dopustiva točka. Međutim, iz odnosa (4.1) slijedi

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \exists \eta \in \mathcal{U}, \quad \text{uz uvjet}, \quad f(x', \xi) \leq f(x, \eta)$$

odnosno, $f(x, \mathcal{U}) \subseteq f(x', \mathcal{U}) - \mathbb{R}^k_{\geq}$, x nije blago robusno efikasno rješenje u odnosu na bilo koji $\epsilon \geq 0$ jer ga x' uvijek dominira. Time je tvrdnja dokazana.

□

Poglavlje 5

Zaključak

U ovom radu istraženi su ključni aspekti robusnosti i višekriterijske optimizacije te njihove primjene u različitim područjima. Detaljnom analizom prikazani su teorijski temelji oba koncepta, uz identifikaciju njihovih međusobnih povezanosti i praktičnih izazova koji proizlaze iz primjene u stvarnim sustavima.
Robusnost i višekriterijska optimizacija predstavljaju ključne koncepte u analizi i modeliranju složenih sustava. Robusnost osigurava otpornost na vanjske utjecaje, neizvjesnosti i promjene u uvjetima rada, dok višekriterijska optimizacija omogućuje donošenje odluka u kontekstu više ciljeva, često s međusobno konfliktnim zahtjevima.
Analizom različitih vrsta robusnosti i njihovih relacija uočeno je da primjena odgovarajućih metoda može značajno poboljšati performanse sustava te povećati njegovu stabilnost. Uspješna implementacija ovih metoda omogućuje prilagodljivost sustava u promjenjivim uvjetima, smanjujući osjetljivost na neočekivane varijacije i osiguravajući dugoročnu održivost.
Integracija robusnosti i višekriterijske optimizacije pruža moćan alat za rješavanje složenih problema u raznim domenama, od industrijskih procesa i financijskih sustava do tehnoloških inovacija i upravljanja resursima. Unatoč mnogim izazovima, kao što su povećana složenost modela i potreba za računalno intenzivnim simulacijama, prednosti ovakvog pristupa jasno nadmašuju njegove nedostatke.

Bibliografija

[1] J. Ide, A. Schöbel, *Robustness for uncertain multi-objective optimization: a survey and analysis of different concepts*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.

[2] M. Ehrgott, J. Ide, A. Schöbel, *Minmax Robustness for Multi-objective Optimization Problems*, Georg-August-Universität Göttingen, 2013.

[3] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[4] Y. Zhou-Kangas, K. Miettinen, *Decision making in multiobjective optimization problems under uncertainty: balancing between robustness and quality*, Springer, 2018.

Sažetak

Ovaj rad istražuje koncepte robusnosti i višekriterijske optimizacije, analizirajući njihove teorijske osnove, međusobne relacije te primjenu u stvarnim sustavima. Robusnost omogućuje otpornost na nesigurnosti i promjene u sustavima, dok višekriterijska optimizacija omogućuje donošenje odluka uzimajući u obzir više ciljeva. Kroz definirane koncepte robusnosti naglašena je važnost otpornosti sustava na neizvjesnosti i promjene, dok su višekriterijske metode omogućile učinkovito rješavanje složenih problema s više ciljeva, često pod međusobno sukobljenim zahtjevima. Kombinacija ovih pristupa pokazala se kao ključna u postizanju stabilnih i optimalnih rješenja koja su prilagođena različitim uvjetima i ograničenjima. Kroz analizu različitih pristupa i primjera iz prakse, prikazane su prednosti i izazovi integracije ovih metoda. Dobiveni rezultati potvrđuju važnost balansiranja robusnosti i optimizacije za postizanje stabilnih i učinkovitih rješenja u dinamičnim okruženjima.

Summary

This paper explores the concepts of robustness and multi-objective optimization, analyzing their theoretical foundations, interrelations, and applications in real-world systems. Robustness ensures resilience against uncertainties and changes in systems, while multi-objective optimization enables decision-making by considering multiple objectives. Through the defined concepts of robustness, the importance of system resilience to uncertainties and variations is emphasized, while multi-objective methods provide effective solutions to complex problems involving multiple, often conflicting, objectives. The combination of these approaches has proven to be crucial in achieving stable and optimal solutions tailored to various conditions and constraints. Through the analysis of different approaches and practical examples, the advantages and challenges of integrating these methods are highlighted. The obtained results confirm the importance of balancing robustness and optimization to achieve stable and efficient solutions in dynamic environments.

Životopis

Rođen sam 6. siječnja 1999. godine u Dubrovniku. Pohađao sam dubrovačku osnovnu školu Marina Držića. Nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, svoje školovanje nastavljam u Gimnaziji Dubrovnik u kojoj upisujem prirodoslovno-matematički smjer. Kroz osnovnu i dio srednje škole bavio sam se sportom, točnije džudom. U drugom razredu srednje škole odlučujem upisati glazbenu školu, radi se o umjetničkoj školi Luke Sorkočevića u Dubrovniku. U toj školi pohađam dvije godine pripremnog obrazovanja u smjeru solo pjevač.

Nakon kraja srednje škole, 2017. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Odmah po završetku tog studija, 2020. godine, upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.