

# Centri trokuta i glavni centri trokuta

---

**Begić, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:934785>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-09**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
MATEMATIČKI ODSJEK**

Marko Begić

**CENTRI TROKUTA I GLAVNI CENTRI  
TROKUTA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, veljača 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik

2. \_\_\_\_\_, član

3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<a href="#">Sadržaj</a> .....	3
<a href="#">Uvod</a> .....	4
<a href="#">1.Trilinearne koordinate i centri trokuta</a> .....	6
<a href="#">2.Bicentrični parovi točaka i operacije centralizacije</a> .....	18
<a href="#">3.Glavni centri trokuta</a> .....	25
<a href="#">Literatura</a> .....	33
<a href="#">Sažetak</a> .....	34
<a href="#">Summary</a> .....	35

# Uvod

Pojam centra trokuta uveden je kao poopćenje različitih istaknutih točaka u geometriji trokuta, od kojih su neki dobro poznati u klasičnoj elementarnoj planimetriji – težište, ortocentar, središte upisane kružnice, središte opisane kružnice, središte kružnice devet točaka. No, matematičari su uočili i istražili još niz točaka sa zanimljivim svojstvima kao što su Fermatova točka, Brocardove točke, točka sjecišta simedijana i tako dalje, pri čemu i među takvim točkama postoje različite relacije. Neke su kolinearne, a neke leže na posebnim krivuljama 2. i 3. reda.

Zbog velikog obilja točaka s posebnim svojstvima u odnosu na dani trokut pojavila se potreba za sustavnim pristupom i klasifikacijom takvih točaka. Pritom je od bitne koristi primjena tzv. trilinearnih koordinata, koje su znatno pogodnije za ovu svrhu od Kartezijevih koordinata na kakve smo uglavnom naviknuti, jer omogućuju lakše izražavanje svojstava invarijantnih s obzirom na sličnost trokuta. Centar trokuta se onda definira kao točka čije se trilinearne koordinatne mogu zadati pomoću onih funkcija elemenata trokuta koje imaju neka posebna svojstva.

U uvodnom dijelu rada upoznat ćemo se s trilinearnim koordinatama i kao primjer izračunati njihove vrijednosti za najpoznatije centre trokuta. U današnjoj geometriji već je glasovita Enciklopedija centara trokuta Clarka Kimberlinga, koji je početkom 1990-ih godina uveo novi pristup klasifikaciji i u kojoj je popisano preko 7 tisuća takvih centara. Slijedeći neke Kimberlingove radove, izložiti ćemo nadalje još neke pojmove i postupke povezane sa centrima trokuta. Bit će to najprije bicentrični parovi točaka i postupci centralizacije, kojima se od bicentričkog para dobiva jedan centar.

Posebnu klasu centara čine tzv. glavni centri (*major centers* u Kimberlingovoj terminologiji) do kojih se dolazi na temelju ideje da se postupcima konstrukcije centara

trokuta zadanom trokutu pridruži trokut koji će s njim biti perspektivan. Točnije, ako je  $X$  neki centar trokuta  $ABC$ , npr. središte upisane kružnice, pa se na trokute  $XBC$ ,  $XCA$  i  $XAB$  primijeni postupak konstrukcije nekog centra tipa  $Y$ , od nastalog trokuta jednostavno se dobiva novi trokut  $A'B'C'$  koji će u mnogim slučajevima biti perspektivan s trokutom  $ABC$ . Pokazuje se da je za to dovoljno, iako ne i nužno, za centar tipa  $Y$  izabrati bilo koji glavni centar, što znači da je svaka od njegovih trilinearnih koordinata funkcija samo jednog od tri kuta trokuta  $ABC$ , redom.

# Poglavlje 1

## Trilinearne koordinate i centri trokuta

Homogeni koordinatni sustav u matematici predstavlja sistem koordinata koji se koristi u projektivnoj geometriji, kao što se Kartezijev koordinatni sustav koristi u euklidskoj geometriji. Prednost homogenog koordinatnog sustava da se i „točke u beskonačnosti“ mogu prikazati uporabom konačnih vrijednosti koordinata, uz to izrazi umnogome postaju jednostavniji za prikaz i manipulaciju.

U suvremenoj geometriji najčešće se koriste dva tipa homogenih koordinatnih sustava: baricentrični i trilinearni. Mi ćemo se ovdje usredotočiti na trilinearni sustav.

Trilinearni koordinatni sustav opisuje položaj točke u odnosu na dani trokut na taj način da se zadaju orijentirane udaljenosti točke od stranica trokuta.

Prije nego definiramo Centar trokuta trebao se prisjetiti definicija homogenosti i simetričnosti: Funkcija  $f(a, b, c)$  je pozitivno homogena reda  $n$  u  $a, b$  i  $c$  ako za svaku uređenu trojku  $(a, b, c)$  i  $t > 0$  vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c)$$

Funkcija  $f(a, b, c)$  je simetrična u  $b$  i  $c$  ako za svaku uređenu trojku  $(a, b, c)$  vrijedi:

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|$$

**Definicija 1.1:** Centar trokuta  $ABC$  je točka s trilinearnim koordinatama  $x: y: z$  za koje je

$$x = f(a, b, c)$$

$$y = f(b, c, a)$$

$$z = f(c, a, b)$$

za neku pozitivno homogenu funkciju  $f$  sa svojstvom

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|$$

**Definicija 1.2:** Neka je  $p$  površina trokuta  $ABC$ . Centar  $X$  je regularan centar ako postoji funkcija  $f(a, b, c)$  koja ima oblik polinoma u varijablama  $a, b, c, p$  takva da vrijedi

$$X = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b).$$

**Definicija 1.3:** Ako nam je dana stranica  $s$  trokuta  $\Delta ABC$  i točka  $P$ , označimo s  $|P, s|$  (najmanju) udaljenost od  $P$  do pravca koji sadrži  $s$ . Definirajmo usmjerenu udaljenost od  $P$  do  $s$  kao

$$[P, s] = \begin{cases} |P, s| & \text{ako je } P \text{ na istoj strani od } s \text{ kao i trokut} \\ -|P, s| & \text{ako je } P \text{ na suprotnoj strani od } s \text{ kao i trokut} \end{cases}$$

Pomoću usmjerenih udaljenosti svaki trokut tvori koordinatni sustav u kojem točka  $P$  u ravnini ima tri koordinate

$$a = [P, BC], \quad b = [P, AC], \quad c = [P, AB]$$

To zapisujemo kao  $P = [a : b : c]$ .

Treba napomenuti da svaka točka ima svoju trojku realnih brojeva, koji ju jednoznačno određuju, ali ne mora svaka trojka brojeva imati svoju točku. Na primjer za jednakostranični trokut duljine stranica 1 ne postoji točka s koordinatama  $[2:2:2]$ . To ograničenje rješavamo relacijom ekvivalencije.

**Definicija 1.4:** Dva seta trilinearnih koordinata  $[a : b : c]$  i  $[a' : b' : c']$  su ekvivalentni i pišemo  $[a : b : c] \sim [a' : b' : c']$  ako postoji realan broj  $k \neq 0$  takav da

$$a' = ka \quad b' = kb \quad c' = kc$$



Pogledajmo prije spomenuti jednakostranični trokut dužine stranica 1. Jasno je da ne postoji točka koja je za 2 udaljena od svih stranica, ali  $[2:2:2]$  je ekvivalentno  $[\frac{\sqrt{3}}{6}:\frac{\sqrt{3}}{6}:\frac{\sqrt{3}}{6}]$  a postoji točka čija je udaljenost od svake stranice  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (sjecište simetrala kutova).

**Definicija 1.5:** Trilinearne koordinate točke  $P$  u odnosu na trokut  $\Delta ABC$  su klasa ekvivalencije trojke  $[ka:kb:kc]$  ( $k \neq 0$ ) gdje je

$$a = [P, BC] \quad b = [P, AC] \quad c = [P, AB]$$

Koordinate koje odgovaraju stvarnim orijentiranim udaljenostima kada je  $k = 1$  nazivaju se egzaktnim trilinearnim koordinatama od  $P$ .

Budući je svaka koordinata klasa ekvivalencija postoji jasna i korisna veza između trilinearnih koordinata sličnih trokuta. Pretpostavimo da su  $\Delta ABC$  i  $\Delta A'B'C'$  slični s koeficijentom sličnosti  $k$  takvim da

$$|A'B'| = k|AB| \quad |B'C'| = k|BC| \quad |C'A'| = k|CA|$$

Pretpostavimo da su točke  $P$  i  $P'$  postavljene slično u odnosu na te trokute (takvi da je  $|A'P'| = k|AP|$ ,  $|B'P'| = k|BP|$  i  $|C'P'| = k|CP|$ ). Tada su koordinate od  $P$  određene s  $\Delta ABC$  ekvivalentne koordinatama od  $P'$  određenim s  $\Delta A'B'C'$ .

Vratimo se na pitanje da li svaka klasa ekvivalencije od tri realna broja određuje točku. Vidimo da koordinate  $[0:0:0]$  ne određuju niti jednu točku, ali to je iznimka.

**Teorem 1.6:** Raspon trilineara

Ako imamo  $\Delta ABC$  i ako su  $x, y, z$  realni brojevi od kojih bar jedan  $\neq 0$  tada postoji točka čije su trilinearne koordinate upravo  $[x:y:z]$  u odnosu na  $\Delta ABC$ .

**Dokaz:** U osnovi imamo 2 slučaja: gdje su  $x, y$  i  $z$  istog predznaka i onaj gdje nisu. Umjesto da tražimo  $P$  unutar  $\Delta ABC$  početi ćemo s točkom  $P$  i „izgraditi“  $\Delta abc$  oko nje.

Taj trokut će biti:

1. sličan originalnom  $\Delta ABC$  i
2. biti postavljen tako da su trilinearne koordinate od  $P$  u odnosu na  $\Delta abc$   $[x: y: z]$

Tada će slično postavljena točka u  $\Delta ABC$  imati iste koordinate u odnosu na  $\Delta ABC$

1. Slučaj  $[+: +: +] \sim [-: -: -]$

Pogledajmo situaciju gdje su  $x, y, z \geq 0$  (ne mogu svi biti jednaki 0 jer točka ne može biti na sve tri strane trokuta). Ovo rješava i slučaj gdje su sve tri koordinate negativne, jer  $[x: y: z] \sim [-x: -y: -z]$ . Označimo s  $F_x$  točku koja je na udaljenosti  $x$  od  $P$ . Na suprotnim stranama polupravca  $\overrightarrow{PF_x}$  nacrtamo još dva polupravca pod kutevima  $\pi - (\angle B)$  i  $\pi - (\angle C)$  na prvom polupravcu označimo  $F_z$  (udaljenost  $z$  od  $P$ ) na drugom označimo  $F_y$  (udaljenost  $y$  od  $P$ ). Neka je

$l_x$  pravac kroz  $F_x$  okomit na  $PF_x$

$l_y$  pravac kroz  $F_y$  okomit na  $PF_y$

$l_z$  pravac kroz  $F_z$  okomit na  $PF_z$

Označimo njihove točke presjeka

$$a = l_y \cap l_z \quad b = l_x \cap l_z \quad c = l_x \cap l_y$$

Očito su  $[x: y: z]$  trilinearne koordinate točke  $P$  u odnosu na  $\Delta abc$ . Da bi vidjeli da su  $\Delta abc$  i  $\Delta ABC$  slični usporedit ćemo njihove unutarnje kuteve. Četverokut  $PF_x b F_z$  ima prave kuteve u vrhovima  $F_x$  i  $F_z$  i kut  $\pi - (\angle B)$  u vrhu  $P$ . Budući je suma kuteva četverokuta  $2\pi$  to znači da je  $(\angle b) = (\angle B)$  pa su kongruentni. Na isti način su i kutevi  $\angle c$  i  $\angle C$  također kongruentni pa su po KK poučku  $\Delta abc$  i  $\Delta ABC$  slični.

2. Slučaj  $[+: -: -] \sim [-: +: +]$

Ovaj slučaj, uz male izmjene pokriva i slučajeve  $[-: +: -]$ ,  $[+: -: +]$ ,  $[-: -: +]$  i  $[+: +: -]$

Konstrukcija je ista uz jednu razliku, umjesto

$$(\angle F_z P F_x) = \pi - (\angle B) \text{ i } (\angle F_y P F_x) = \pi - (\angle C)$$

uzimamo

$$(\angle F_z P F_x) = (\angle B) \text{ i } (\angle F_y P F_x) = (\angle C)$$

pa dobivamo  $\Delta abc$  koji je sličan  $\Delta ABC$ , samo što točka  $P$  leži izvan njega. Ovisno o položaju točke u odnosu na pravac  $l_x$  orijentirane udaljenosti od  $P$  do  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  su ili  $x, y, z$  ili  $-x, -y, -z$ . U svakom slučaju, budući su  $[x: y: z]$  i  $[-x: -y: -z]$  ekvivalentni  $P$  ima egzaktno koordinate  $[x: y: z]$ .

## Trilinearne koordinate klasičnih centara

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako pronaći trilinearne koordinate najčešće spominjanih centara trokuta. Najlakši od svih je središte upisane kružnice, budući je jednako udaljen od svih stranica trokuta njegove trilinearne koordinate su  $[1: 1: 1]$  (Ograničili smo se na šiljaste trokute).

### Trilinearne koordinate središta opisane kružnice

Trilinearne koordinate središta opisane kružnice  $\Delta ABC$  su

$$[\cos A : \cos B : \cos C]$$

Dokaz: Označimo središte opisane kružnice sa  $P$ . Prisjetimo se da je središte opisane kružnice sjecište simetrala stranica. Pogledajmo simetralu stranice  $BC$ . Siječe  $BC$  u polovištu  $-X$ . Sada možemo izračunati prvu trilinearnu koordinatu

$$[P, BC] = |PX| = |PB| \cos(\angle BPX) = |PB| \cos(\angle BAC)$$

1. Minimalna udaljenost od  $P$  do  $BC$  je duž okomice pa vrijedi  $[P, BC] = |PX|$ .  
 Pretpostavili smo da je  $\Delta ABC$  šiljasti pa se  $P$  nalazi unutar trokuta, na istoj strani dužine  $BC$  kao i  $A$  što znači da je udaljenost  $[P, BC]$  pozitivna stoga vrijedi

$$[P, BC] = |P, BC| = |PX|$$

2. Pogledajmo kut  $\angle BPX$  u  $\Delta BPX$ :

$$\cos(\angle BPX) = \frac{|PX|}{|PB|} \Rightarrow |PX| = |PB| \cos(\angle BPX)$$

3. Dužina  $PX$  raspolavlja  $\Delta BPC$  u dva dijela koji su kongruentni po SKS poučku.  $\overline{PX}$  dijeli  $\angle BPC$  u dva kongruentna dijela pa  $(\angle BPX) = \frac{1}{2}(\angle BPC)$ . Znamo da opisana kružnica prolazi kroz sva tri vrha. U odnosu na tu kružnicu  $\angle BAC$  je obodni kut, a  $\angle BPC$  je središnji kut, pa nam Talesov teorem kaže da je

$$(\angle BAC) = \frac{1}{2}(\angle BPC) \Rightarrow (\angle BPX) = (\angle BAC)$$

Na isti način možemo naći udaljenosti od druge dvije stranice

$$[P, AC] = |PC| \cos(\angle ABC) \text{ \& } [P, AB] = |PA| \cos(\angle BCA)$$

pa imamo egzaktno trilinearne koordinate središta upisane kružnice

$$P = [|PB| \cos(\angle A) : |PC| \cos(\angle B) : |PA| \cos(\angle C)]$$

Na kraju još primijetimo da su  $PA = PB = PC$  (jednake duljine) – radijus upisane kružnice pa budući je to konstanta možemo ju izbaciti iz gornje jednadžbe i zapisati jednostavnije

$$P = [\cos(\angle A) : \cos(\angle B) : \cos(\angle C)]$$

### Trilinearne koordinate ortocentra

Trilinearne koordinate ortocentra  $\Delta ABC$  su:

$$[\cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B]$$

Dokaz: Označimo ortocentar sa  $Q$ . Prisjetimo se da je on sjecište triju visina trokuta.

Označimo nožišta tih visina:

$F_A$  – nožište visine kroz  $A$

$F_B$  – nožište visine kroz  $B$

$F_C$  – nožište visine kroz  $C$

Sada primijetimo da su one simetrale stranica većeg trokuta  $\Delta abc$  gdje

$bc$  prolazi kroz  $A$  i paralelan je sa  $BC$

$ac$  prolazi kroz  $B$  i paralelan je sa  $AC$

$ab$  prolazi kroz  $C$  i paralelan je sa  $AB$

$$\begin{aligned}[Q, BC] &= |Q, F_A| = |QB| \cos(\angle F_A QB) \\ &= |QB| \cos(\angle C) = |Qa| \cos(\angle aQB) \cos(\angle C) = |Qa| \cos(\angle B) \cos(\angle C)\end{aligned}$$

1. Udaljenost  $Q$  do  $BC$  se mjeri duž simetrale pa je  $|Q, BC| = |Q, F_A|$  ali budući smo pretpostavili da je trokut šiljasti  $Q$  će biti unutar  $\Delta ABC$  pa je usmjerena udaljenost  $[Q, BC]$  pozitivna. Stoga je

$$[Q, BC] = |Q, BC| = |Q, F_A|$$

2. Pogledajmo trokut  $\Delta F_A QB$ . U njemu je  $\cos(\angle F_A QB) = \frac{|QF_A|}{|QB|}$  to povlači

$$|Q, F_A| = |QB| \cos(\angle F_A QB)$$

3. Po KK poučku  $\Delta F_A QB \sim \Delta F_A CB$  (dijele kut  $B$  i imaju pravi kut). Stoga

$$\angle F_A QB \simeq \angle F_B CB$$

4. Pogledajmo trokut  $\Delta aQB$  u njemu  $\cos(\angle aQB) = \frac{|QB|}{|Qa|}$  što povlači

$$|QB| = |Qa| \cos(\angle F_A QB)$$

5. Ortocentar  $Q\Delta ABC$  je ustvari središte opisane kružnice većeg trokuta  $\Delta abc$ . Kut  $\angle abc$  je obodni kut opisanoj kružnici čiji je središnji kut  $\angle aQc$  – Thalesov teorem nam daje  $(\angle abc) = \frac{1}{2}(\angle aQc)$ . Segment  $QB$  raspolavlja  $\angle aQc$  pa  $(\angle aQB) =$

$\frac{1}{2}(\angle aQc)$  to znači  $\angle aQB \simeq \angle abc$  koji je kongruentan  $\angle B$  u prošlom trokutu. Na sličan način dobijemo

$$[Q, AC] = |Qb| \cos(\angle A) \cos(\angle C)$$

$$[Q, AB] = |Qc| \cos(\angle A) \cos(\angle B)$$

Time dobivamo trilinearne koordinate ortocentra:

$$Q = [|Qa| \cos(\angle B) \cos(\angle C) : |Qb| \cos(\angle A) \cos(\angle C) : |Qc| \cos(\angle A) \cos(\angle B)]$$

$Qa, Qb, Qc$  su jednake duljine budući da su radijusi kružnice opisane  $\Delta abc$ , njihovim izbacivanjem dobijemo:

$$Q = [\cos(\angle B) \cos(\angle C) : \cos(\angle A) \cos(\angle C) : \cos(\angle A) \cos(\angle B)]$$

### Trilinearne koordinate sjecišta simedijana (Lemoineova točka)

**Definicija 1.7:** Svaki trokut ima tri simedijane. Dobijemo ih tako da zrcalimo težišnicu iz jednog vrha preko simetrane pripadnog kuta. Možemo reći da su simedijane izogonalne težišnicama.

Pokazuje se da su simedijane konkurentne pa se uvodi naziv:

**Definicija 1.8:** Točka u kojoj se sijeku tri simedijane trokuta naziva se Lemoineova točka.

To je točka s vrlo jednostavnim trilinearnim koordinatama  $(a : b : c)$ . Sa slike se vidi da je

$$BS : SC = c : b$$

$$DS : SD' = AD : AD'$$

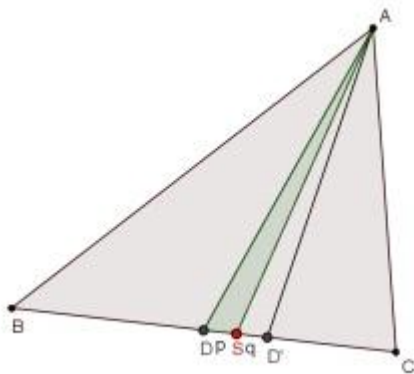
Omjer udaljenosti točke  $D'$  do stranica  $b$  i  $c$  iznosi  $y : z = b : c$ .

Analogno za ostale simedijane vrijedi:

$$x : y = a : b, \quad x : z = a : c$$

Odatle slijedi

$$(x:y:z) = \left(\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1\right) = (a:b:c)$$



Slika 1.1 Lemoineova točka

### Trilinearne koordinate središta kružnice 9 točaka

**Definicija 1.9:** Svakom trokutu se može konstruirati kružnica koja prolazi kroz sva njegova polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužine koja spaja svaki vrh s ortocentrom. Takvu kružnicu zovemo Kružnica 9 točaka (ili Feuerbachova, Eulerova, Terquemova kružnica)

Kako bismo odredili trilinearne koordinate točke  $N$  trebamo izračunati obične koordinate točaka  $A, A_1, Q$  i  $D$  preko radijvektora iz bilo kojeg ishodišta; npr. Ako je  $D$  polovište  $\overline{BC}$ , onda  $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$  pa  $(x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}, \frac{z_B+z_C}{2}\right)$ .

Pomoću formule za računanje površine trokuta pomoću poluopsega i radijusa upisane kružnice odnosno zadane duljine stranice i visine na istu  $P = s \cdot r$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$  dobijemo vezu između trilinearnih i običnih koordinata  $t = \frac{2P}{ax+by+cz}$ .

Dakle za trilinearne koordinate  $(x:y:z)$ , odgovarajuće koordinate su

$$\left(\frac{2P}{ax+by+cz}x, \frac{2P}{ax+by+cz}y, \frac{2P}{ax+by+cz}z\right)$$

$$A(1:0:0) = A(v_a, 0, 0) = \left(\frac{2P}{a}, 0, 0\right)$$

$$B(0:1:0) = A(0, v_b, 0) = \left(0, \frac{2P}{b}, 0\right)$$

$$C(0:0:1) = A(0, 0, v_c) = \left(0, 0, \frac{2P}{c}\right)$$

Ortocentar  $Q$ :

$$Q\left(\frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma}\right)$$

Označimo:

$$m = \frac{2P}{\frac{a}{\cos \alpha} + \frac{b}{\cos \beta} + \frac{c}{\cos \gamma}}$$

sada

$$Q\left(\frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}, \frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \beta}, \frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \gamma}\right)$$

pa polovište  $K$  dužine  $\overline{AQ}$ :

$$x_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{P}{a} + \frac{P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$y_K = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \frac{P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \beta}$$

$$z_K = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{P}{m} \cdot \frac{1}{\cos \gamma}$$

za polovište  $N$  od  $\overline{KD}$  dobijemo:



$$x_N = \frac{1}{2}(x_K + x_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{m \cos \alpha}\right)$$

$$y_N = \frac{1}{2}(y_K + y_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{m \cos \beta}\right)$$

$$z_N = \frac{1}{2}(z_K + z_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{m \cos \gamma}\right)$$

$$(x_N : y_N : z_N) = \left( \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{m \cos \alpha} \right) : \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{m \cos \beta} \right) : \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{m \cos \gamma} \right) \right)$$

Računamo

$$\frac{m \cos \alpha + a}{a m \cos \alpha} = \frac{m}{a} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{m}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\frac{b}{a}}{\cos \alpha} + \frac{\frac{c}{a}}{\cos \gamma}$$

$$\frac{m}{a} + \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta \cos \gamma}$$

$$= \frac{2 \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$= \frac{2 \cos \beta \cos \gamma - \cos(\beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

Izlučimo nazivnik

$$= 2 \cos \beta \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

$$= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta - \gamma)$$

Analogno za ostale koordinate od  $N$

$$N = (\cos(\beta - \gamma) : \cos(\gamma - \alpha) : \cos(\alpha - \beta))$$

## Poglavlje 2

# Bicentrični parovi točaka i operacije centralizacije

**Definicija 2.1:** Neka je  $P$  točka s trilinearnim koordinatama

$$f(a, b, c): f(b, c, a): f(c, a, b)$$

pri čemu je  $f$  homogena funkcija u  $a, b, c$ , ali nije ispunjen uvjet

$$|f(a, c, b)| = |f(a, b, c)| \quad (2.1)$$

Tada točka  $P$  nije centar, a za točke

$$F_{ab} = f(a, b, c): f(b, c, a): f(c, a, b)$$

$$F_{ac} = f(a, c, b): f(b, a, c): f(c, b, a) \quad (2.2)$$

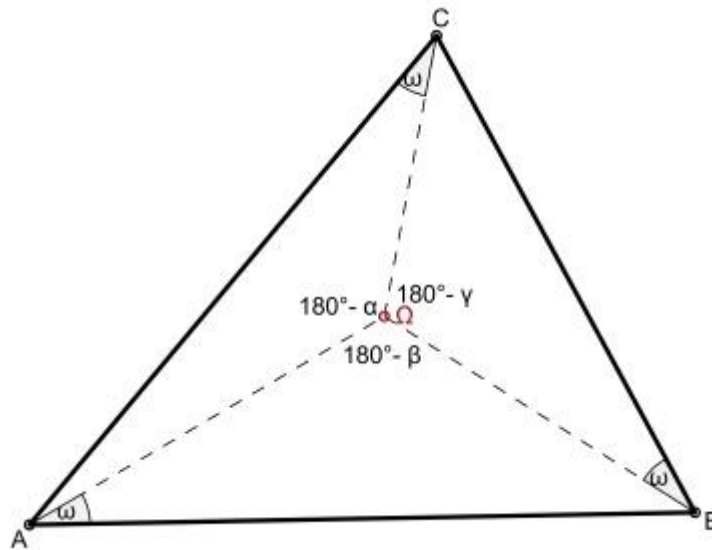
kažemo da tvore bicentričan par.

Primjer za to su Brocardove točke.

**Definicija 2.1:** Točku  $\Omega$  trokuta  $ABC$  takvu da vrijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \omega$$

zovemo prva Brocardova točka. Kut  $\omega$  zovemo Brocardov kut.



Slika 2.1 Konstrukcija prve Brocardove točke

Sada ćemo naći trilinearne koordinate prve Brocardove točke. Iz prve Brocardove točke  $\Omega$  povučemo okomice na stranice trokuta  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  i nožišta označimo s  $D$ ,  $E$  i  $F$ .

Prema definiciji trilinearnih koordinata

$$t_1 = d(\Omega, \overline{BC}) = |\Omega D|$$

$$t_2 = d(\Omega, \overline{CA}) = |\Omega E|$$

$$t_3 = d(\Omega, \overline{AB}) = |\Omega F|$$

U pravokutnim trokutima  $AF\Omega$ ,  $BD\Omega$ ,  $CE\Omega$  vrijedi

$$\cos \omega = \frac{t_3}{|A\Omega|}, \cos \omega = \frac{t_1}{|B\Omega|}, \cos \omega = \frac{t_2}{|C\Omega|}$$

U trokutu  $BC\Omega$  kut  $\angle B\Omega C$  jednak je  $180^\circ - \gamma$ . Izrazimo površinu trokuta  $BC\Omega$ :

$$P(\Delta BC\Omega) = \frac{1}{2} |B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} at_1$$

odatle dobivamo

$$|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin \gamma = at_1 \quad 2.3$$

u trokutu  $AB\Omega$  imamo

$$P(\Delta AB\Omega) = \frac{1}{2} |A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} ct_3$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin \beta = ct_3 \quad 2.4$$

u trokutu  $AC\Omega$  imamo

$$P(\Delta AC\Omega) = \frac{1}{2} |A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} bt_2$$

$$|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin \alpha = bt_2 \quad 2.5$$

dijeljenjem objiju strana u (2.4) i (2.5) jednakosti dobijemo

$$\frac{|B\Omega| \sin \beta}{|C\Omega| \sin \alpha} = \frac{ct_3}{bt_2}$$

primjenom sinusovog teorema dobijemo

$$t_3 = \frac{b^2}{ac} t_1.$$

dijeljenjem objiju strana u (2.3) i (2.4) jednakosti dobijemo

$$\frac{|C\Omega| \sin \gamma}{|A\Omega| \sin \beta} = \frac{at_1}{ct_3}$$

Primjenom sinusovog teorema dobijemo

$$t_2 = \frac{ab}{c^2} t_1.$$

Zato je

$$t_1 : t_2 : t_3 = t_1 : \frac{ab}{c^2} t_1 : \frac{b^2}{ac} t_1$$

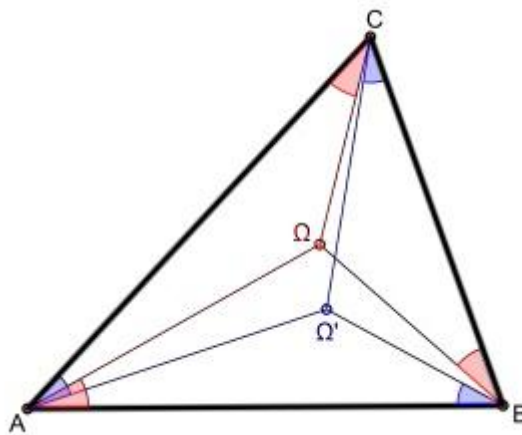
$$t_1 : t_2 : t_3 = 1 : \frac{ab}{c^2} : \frac{b^2}{ac}$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$$

Time smo dobili trilinearne koordinate prve Brocardove točke.

**Definicija 2.2:** Druga Brocardova točka trokuta  $ABC$  je točka  $\Omega'$  takva da vrijedi

$$\angle \Omega'BA = \angle \Omega'CB = \angle \Omega'AC = \omega'$$



Slika 2.2 Prva i druga Brocardova točka

Druga Brocardova točka se konstruira na isti način kao i prva Brocardova točka stoga vrijede ista svojstva.

Ako trokutu  $ABC$  s prvom Brocardovom točkom  $\Omega$  opišemo kružnicu  $k_0$  i vrhove trokuta  $ABC$  spojimo s točkom  $\Omega$  i te spojnice produžimo tako da sijeku kružnicu  $k_0$  redom u točkama  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.3:** Trokut  $A'B'C'$  je sukladan trokutu  $ABC$ , a prva Brocardova točka trokuta  $ABC$  je druga Brocardova točka trokuta  $A'B'C'$ .

**Dokaz:** Točka  $\Omega$  je prva Brocardova točka trokuta  $ABC$  pa vrijedi

$$\angle \Omega CA = \angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \omega$$

Kutovi  $\Omega CA$  i  $C'A'A$  su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom  $\overline{AC'}$ . Na isti način zaključujemo  $\angle \Omega AB = \angle A'B'B$  i  $\angle \Omega BC = \angle B'C'C$  (obodni kutovi nad tetivom  $\overline{B'C'}$ ).

Dakle,

$$\angle \Omega B'C' = \angle \Omega A'C' = \angle \Omega C'B' = \omega$$

tj.  $\Omega$  je druga Brocardova točka trokuta  $A'B'C'$ .

## Druge centralizirajuće operacije

Postoji niz računskih operacija koje od bicentričnih parova točaka daju centar trokuta.

Npr. prije spomenuti par točaka  $F_{ab}, F_{ac}$ . Točke

$$F_{ab} \oplus F_{ac} := (f_{ab} + f_{ac}) : (f_{bc} + f_{ba}) : (f_{ca} + f_{cb}) \quad (2.6)$$

$$F_{ab} \ominus F_{ac} := (f_{ab} - f_{ac}) : (f_{bc} - f_{ba}) : (f_{ca} - f_{cb}) \quad (2.7)$$

su centri trokuta.

Pretpostavimo da točke  $F_{ab}$  i  $F_{ac}$  ne leže na neizmjereno dalekom pravcu  $L^\infty$  i

pogledajmo normirane trilinearne koordinate u obliku:

$$F'_{ab} = (k_{ab}f_{ab}, k_{ab}f_{bc}, k_{ab}f_{ca}), F_{ac} = (k_{ac}f_{ac}, k_{ac}f_{ba}, k_{ac}f_{cb}) \quad (2.8)$$

gdje je

$$k_{ab} = \frac{2\sigma}{af_{ab} + bf_{bc} + cf_{ca}}, k_{ac} = \frac{2\sigma}{af_{ac} + bf_{ba} + cf_{cb}}$$

a  $\sigma$  je površina trokuta  $ABC$ .

Stoga možemo zapisati

$$F'_{ab} \oplus F_{ac} = (k_{ab}f_{ab} + k_{ac}f_{ac}) : (k_{ab}f_{bc} + k_{ac}f_{ba}) : (k_{ab}f_{ca} + k_{ac}f_{cb}). \quad (2.9)$$

Ova točka  $f(a, b, c)$  bit će različita od  $F_{ab} \oplus F_{ac}$  uz prikladan izbor funkcije.

U svakom slučaju (2.9) daje središnju točku bicentričnog para točaka  $F_{ab}, F_{ac}$  a točka koja je njoj harmonički konjugirana s obzirom na točke (2.2) je sjecište pravca  $F_{ab}F_{ac}$  s neizmjenno dalekim  $L^\infty$ .

Pogledajmo sada još jednu centralizirajuću operaciju na paru točaka  $F_{ab}, F_{ac}$ . Njihova spojnica je pravac zadan jednačinom:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f_{ab} & f_{bc} & f_{ca} \\ f_{ac} & f_{ba} & f_{cb} \end{vmatrix} = 0$$

ito je centralni pravac. Njegov trilinearni pol  $P$ , i izogonalni konjugat pola  $P$  dan koordinatama:

$$(f_{bc}f_{cb} - f_{ca}f_{ba}) : (f_{ca}f_{ac} - f_{ab}f_{cb}) : (f_{ab}f_{ba} - f_{bc}f_{ac})$$

također su centri trokuta.

Ako je

$$X = x : y : z = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

centar trokuta različit od  $X_1$  tada su točke

$$Y = y : z : x \text{ i } Z = z : x : y$$

očigledno bicentrične. Primjenom gore spomenutih operacija na  $\{Y, Z\}$  dobivamo sljedeće centre:

- Trilinearni produkt
- $Y \oplus Z = (y + z) : (z + x) : (x + y)$
- $Y \ominus Z = (y - z) : (z - x) : (x - y)$

Točke  $Z/Y$  i  $Y/Z$  su bicentrične i također daju centre.



Sada ćemo pokazati da se primjenom operacije trilinearnog produkta na dvije bicentrične točke ( $X$  i  $U$ ) doista dobiva centar. Neka je

$$X = x : y : z = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

$$U = u : v : w = f(a, c, b) : f(b, a, c) : f(c, b, a)$$

Trilinearni produkt je:

$$xu : yv : zw$$

Stoga je prva trilinearna koordinata za trilinearni produkt točaka  $X$  i  $U$  dana s

$$g(a, b, c) = f(a, b, c) \cdot f(a, c, b)$$

Treba provjeriti simetričnost i homogenost funkcije  $g$ . Prema pretpostavkama  $f$  je pozitivno homogena reda  $n$ . Tada je

$$\begin{aligned} g(ta, tb, tc) &= f(ta, tb, tc) \cdot f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c) \cdot t^n f(a, c, b) \\ &= t^{2n} f(a, b, c) \cdot f(a, c, b) = t^{2n} g(a, b, c), \end{aligned}$$

tj.  $g$  je pozitivno homogena reda  $2n$ . Osim toga vrijedi

$$g(a, c, b) = f(a, c, b) \cdot f(a, b, c) = g(a, b, c),$$

tj.  $g$  je simetrična u drugoj i trećoj varijabli. Dakle  $g$ , generira centar trokuta.

# Poglavlje 3

## Glavni centri trokuta

Uz dosadašnje centre trokuta uvodimo pojam glavnih centara trokuta koji za razliku od „običnih“ nisu točke već funkcije kutova ili udaljenosti od stranica.

**Definicija 3.1:** Centar trokuta  $P$  je glavni centar trokuta ako se trilinearne koordinate od  $P$  mogu izraziti u obliku  $f(A):f(B):f(C)$  gdje je  $f(A)$  funkcija kuta uz vrh  $A$  i ne ovisi o drugim kutovima ili duljinama stranica (analogno za  $f(B)$  i  $f(C)$ ).

Neka  $x(ABC)$  označava postupak za konstrukciju nekog centra  $X$   $\Delta ABC$ , npr.  $I$  - središta upisane kružnice, a s  $y(ABC)$  označimo postupak za pronalaženje drugog (možda i istog) centra  $Y$  trokuta  $ABC$  npr. težišta  $G$ . Za dani  $X$  možemo formirati tri trokuta  $XBC, XCA, XAB$  i na svaki primijeniti funkciju  $y$  kako bi našli njihove centre:

$$y(\Delta XBC) = Y_A, \quad y(\Delta AXC) = Y_B, \quad y(\Delta ABX) = Y_C$$

Neka je

$$A' = XY_A \cap BC, \quad B' = XY_B \cap CA, \quad C' = XY_C \cap AB$$

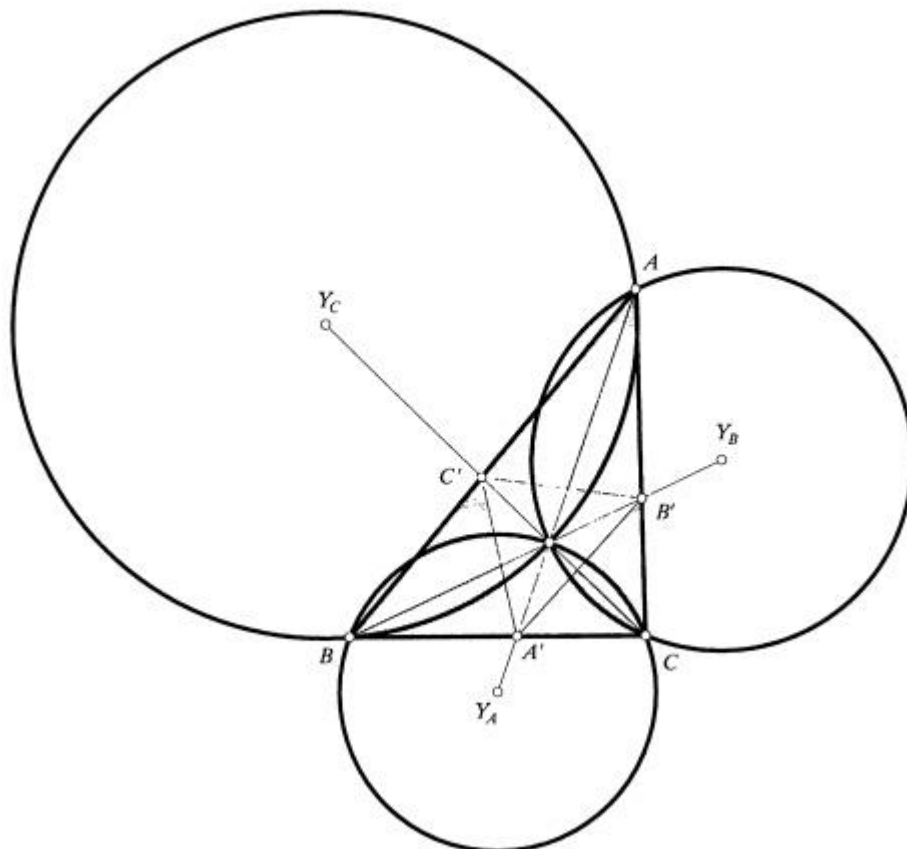
Daljnje istraživanje bit će motivirano sljedećim pitanjem: Za danu funkciju  $x$ , koje funkcije daju  $A'B'C'$  koji je perspektivan trokutu  $ABC$  tj. takav trokut da pravci  $AA', BB', CC'$  prolaze jednom točkom  $Z$ ?

**Napomena 3.2:** Jedan od najvažnijih teorema projektivne geometrije, Desarguesov teorem, govori da su dva trokuta  $ABC$  i  $A'B'C'$  centralno perspektivni (tj. da se pravci

$AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  sijeku u jednoj točki) ako i samo ako su osno perspektivni (što znači da sjecišta pravaca  $AB$  i  $A'B'$ ,  $BC$  i  $B'C'$  te  $CA$  i  $C'A'$  leže na jednom pravcu). Stoga je dovoljno govoriti jednostavno o perspektivnosti dva trokuta, budući da je postojanje centra perspektiviteta ekvivalentno postojanju osi perspektiviteta.

Lako se geometrijski vidi da ako  $x$  konstruira središte upisane kružnice, a  $y$  konstruira težište tada je dobiveni trokut  $A'B'C'$  perspektivan trokutu  $ABC$  i  $Z$  je težište trokuta  $ABC$ .

Sada ćemo koristeći trilinearne koordinate i standardnu definiciju centra geometrijski postupak prevesti u analitički postupak.



Slika 3.1 Dva perspektivna trokuta

Tri točke  $P_i = \alpha_i : \beta_i : \gamma_i$  su kolinearne ako i samo ako

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Ako  $\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$  (3.1) zamijenimo varijabilnom točkom  $\alpha:\beta:\gamma$  dobijemo jednadžbu pravca  $P_2P_3$ . Svojstvo dualno kolinearnosti točaka koje je izraženo pomoću (3.1), jest svojstvo konkurentnosti pravaca (tj. da tri pravca prolaze kroz jednu točku)

$$\alpha\alpha_i + \beta\beta_i + \gamma\gamma_i = 0, i = 1, 2, 3.$$

Primjenom dualnosti, sjecište drugog i trećeg pravca je točka s koordinatama

$$\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 : \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 : \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3. \quad (3.2)$$

Kada trilinearne koordinate točke izražavamo pomoću kutova  $A, B, C$  u trokutu, točke se mogu gledati kao funkcije varijabli  $A, B, C$ . Podsjetimo se da za točku  $P$  koja je centar trokuta u smislu Definicije 1.1. vrijedi sljedeće.  $P$  ima trilinearne koordinate

$$f(A, B, C) : g(A, B, C) : h(A, B, C)$$

koji zadovoljavaju uvjete

- $g(A, B, C) = f(B, C, A)$  i  $h(A, B, C) = f(C, A, B)$ ;
- $f(A, C, B) = f(A, B, C)$ ;
- Ako  $P$  zapišemo kao  $u(a, b, c) : u(b, c, a) : u(c, a, b)$  gdje su  $a, b, c$  stranice trokuta  $ABC$ , tada je  $u$  homogen varijablama  $a, b, c$ .

Označimo li sa  $F$  skup svih centara trokuta  $ABC$ , početni primjer nam može poslužiti za postavljanje općenitog pitanja:

**Problem A:** ako je zadana točka  $X$  kao središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ , pronaći sve  $Y \in F$  za koje je trokut  $A'B'C'$  perspektivan trokutu  $ABC$ .

Da bi pronašli  $Y$  u tri trokuta formirat ćemo trilinearne koordinate za  $Y_A$  u odnosu na trokut  $XBC$ ,  $Y_B$  u odnosu na trokut  $AXC$  i  $Y_C$  u odnosu na trokut  $ABX$  i transformirati ih u koordinate u odnosu na trokut  $ABC$ .

## Koordinatne transformacije

Bilo koje tri nekolinearne točke

$$P_i = f_i(a, b, c): g_i(a, b, c): h_i(a, b, c): \quad i = 1, 2, 3,$$

određuju trokut s vrhovima  $P_1, P_2, P_3$ . Trokut se može prikazati matricom

$$M = \begin{pmatrix} f_1(a, b, c) & g_1(a, b, c) & h_1(a, b, c) \\ f_2(a, b, c) & g_2(a, b, c) & h_2(a, b, c) \\ f_3(a, b, c) & g_3(a, b, c) & h_3(a, b, c) \end{pmatrix}$$

Neka  $F_i, G_i, H_i$  označavaju funkcije koje zadovoljavaju

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} F_1(a, b, c) & G_1(a, b, c) & H_1(a, b, c) \\ F_2(a, b, c) & G_2(a, b, c) & H_2(a, b, c) \\ F_3(a, b, c) & G_3(a, b, c) & H_3(a, b, c) \end{pmatrix}$$

pri čemu je  $|M| = \det M$ .

Neka su  $\alpha' : \beta' : \gamma'$  trilinearne koordinate točke  $Y$  u odnosu na  $M$ . Tada matrična jednadžba

$$(\alpha \quad \beta \quad \gamma) = (\alpha' \quad \beta' \quad \gamma')DM \tag{3.3}$$

daje trilinearne koordinate u odnosu na trokut  $ABC$  za točku  $Y$  gdje

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 D_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 D_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 D_3 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3 \cos A - 2F_3F_1 \cos B - 2F_1F_2 \cos C}$$

$$D_2 = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_2G_3 \cos A - 2G_3G_1 \cos B - 2G_1G_2 \cos C}$$

$$D_3 = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 2H_2H_3 \cos A - 2H_3H_1 \cos B - 2H_1H_2 \cos C}$$

i  $\delta_i = \pm 1$  za  $i = 1, 2, 3$  ovisno o položaju točke u odnosu na stranice trokuta.

Podsjetimo: da bi mogli reći kada je  $\delta_i = -1$ , a kada  $+1$  prvo moramo definirati pozitivnu stranu stranice trokuta kao skup točaka ravnine koja leži na istoj strani stranice kao i vrh koji već nije na stranici. Druga strana je negativna, a usmjerena udaljenost pozitivna ili negativna ovisno o položaju točke. Usmjerena udaljenost od  $Y$  do stranice  $P_2P_3$  je  $\frac{\delta_1 h_1}{D_1}$  gdje je  $h_1 = \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3$  a  $\delta_1$  je određena ovako: ako se  $Y$  nalazi s pozitivne strane  $P_2P_3$  i  $h_1 < 0$  tada je  $\delta_1 = -1$ ; ako  $Y$  leži na negativnoj strani  $P_2P_3$  i  $h_1 > 0$ ,  $\delta_1 = -1$ ; inače  $\delta_1 = 1$ .  $\delta_2$  i  $\delta_3$  su određeni analogno. Ovdje ne navodimo cijeli, vrlo složeni postupak izračunavanja  $(\alpha: \beta: \gamma)$  i  $(\alpha': \beta': \gamma')$  (vidi članak [\[4\]](#))

Općenito možemo dozvoliti da  $X$  bude i neka druga točka, ne samo središte upisane kružnice, pa pišemo  $X = x: y: z$ . Relevantne matrice su tada

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } M^{-1} = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 1 & -y & -z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Transformacija (3.3) može zapisati u obliku

$$\alpha: \beta: \gamma = (x\delta_1 D_1 \alpha'): (y\delta_1 D_1 \alpha' + \delta_2 D_2 \beta'): (z\delta_1 D_1 \alpha' + \delta_3 D_3 \gamma') \quad (3.4)$$

Ova jednadžba pokazuje kako se mogu zapisati trilinearne koordinate  $\alpha: \beta: \gamma$  za  $Y_A$  u odnosu na trokut  $ABC$  u izražen pomoću trilinearnih koordinata  $\alpha': \beta': \gamma'$  za  $Y_A$  u odnosu na trokut  $XBC$ . Pritom  $\alpha': \beta': \gamma'$  treba biti zadano preko duljina stranica trokuta  $XBC$  koje naravno ovise o izboru točke  $X$ .

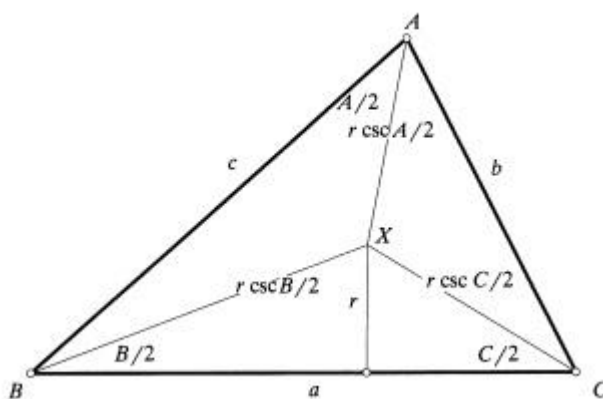
## Glavni centri kao rješenje problema A

Za problem A gdje je  $X$  centar upisane kružnice imamo  $X = 1:1:1$  i  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$  u jednadžbi (3.4), duljine stranica trokuta  $XBC$  izražene u donjoj slici pa iz jednadžbe (3.4) imamo relaciju

$$\alpha:\beta:\gamma = \alpha' : \alpha' + 2\beta' \cos\left(\frac{C}{2}\right) : \alpha' + 2\gamma' \cos\left(\frac{B}{2}\right)$$

Sada se može izračunati sjecište  $A'$  pravaca  $XY_A$  i  $BC$

$$A' = 0:\beta \sec\left(\frac{B}{2}\right) : \gamma' \sec\left(\frac{C}{2}\right)$$



Analogno treba učiniti za druga dva unutarnja trokuta  $AXC$  i  $ABX$ , dakle naći točke  $B'$  i  $C'$ , zatim odrediti jednadžbe za tri pravca  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , i na kraju naći nužan i dovoljan uvjet da ta tri pravca prolaze kroz jednu točku. Zapišimo  $Y_A = \alpha'_1:\beta'_1:\gamma'_1$ ,  $Y_B = \alpha'_2:\beta'_2:\gamma'_2$ ,  $Y_C = \alpha'_3:\beta'_3:\gamma'_3$

$$AA' : \left(\frac{-1}{\beta'_1}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \beta + \left(\frac{1}{\gamma'_1}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \gamma = 0 \quad (3.5)$$

$$BB' : \left(\frac{1}{\alpha'_2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \alpha + \left(\frac{-1}{\gamma'_2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \gamma = 0 \quad (3.6)$$

$$CC' : \left(\frac{1}{\alpha'_3}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \alpha + \left(\frac{-1}{\beta'_2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \beta = 0 \quad (3.7)$$

Koristeći jednadžbu (3.1) tj. izjednačavanjem odgovarajuće determinante s 0 zaključujemo da se pravci sijeku ako i samo ako

$$\alpha'_3 \beta'_1 \gamma'_2 = \alpha'_2 \beta'_3 \gamma'_1 \quad (3.8)$$

gdje

$$\alpha'_1 = \alpha' \left( a, r \csc \left( \frac{C}{2} \right), r \csc \left( \frac{B}{2} \right) \right), \beta'_1 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{C}{2} \right), r \csc \left( \frac{B}{2} \right), a \right),$$

$$\gamma'_1 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{B}{2} \right), a, r \csc \left( \frac{C}{2} \right) \right)$$

$$\alpha'_2 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{C}{2} \right), b, r \csc \left( \frac{A}{2} \right) \right), \beta'_2 = \alpha' \left( b, r \csc \left( \frac{A}{2} \right), r \csc \left( \frac{C}{2} \right) \right),$$

$$\gamma'_2 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{A}{2} \right), r \csc \left( \frac{C}{2} \right), b \right)$$

$$\alpha'_3 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{B}{2} \right), r \csc \left( \frac{A}{2} \right), c \right), \beta'_3 = \alpha' \left( r \csc \left( \frac{A}{2} \right), c, r \csc \left( \frac{B}{2} \right) \right),$$

$$\gamma'_3 = \alpha' \left( c, r \csc \left( \frac{B}{2} \right), r \csc \left( \frac{A}{2} \right) \right)$$

$r$  označava radijus upisane kružnice trokuta  $ABC$ . Dobiveni uvjeti općenito poprimaju vrlo složeni oblik pa ih je teško provjeriti, no ispunjeni su, primjerice, u posebnom slučaju kada je  $Y$  takav centar za koji postoje trilinearne koordinate  $\alpha: \beta: \gamma$  sa svojstvom da je  $\alpha = f(A)$  i analogno za  $\beta = f(B)$  i  $\gamma = f(C)$ . Sljedeći teorem pokazuje da je za neki centar dovoljno da bude glavni centar kako bi pripadao skupu rješenja Problema A.

**Teorem 3.3:** Svaki glavni centar  $Y$  rješava problem A. Ako  $Y = f(A): f(B): f(C)$  onda je sjecište triju pravaca (centar perspektiviteta) glavni centar zadan sa

$$f \left( \frac{A}{2} \right) \sec \left( \frac{A}{2} \right) : f \left( \frac{B}{2} \right) \sec \left( \frac{B}{2} \right) : f \left( \frac{C}{2} \right) \sec \left( \frac{C}{2} \right) \quad (3.9)$$

**Dokaz:** Za zadani  $Y = f(A): f(B): f(C)$ , dobiva se da su  $Y_A, Y_B, Y_C$  dani s



$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 \\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(\frac{(\pi-A)}{2}\right) & f\left(\frac{B}{2}\right) & f\left(\frac{C}{2}\right) \\ f\left(\frac{A}{2}\right) & f\left(\frac{(\pi-B)}{2}\right) & f\left(\frac{C}{2}\right) \\ f\left(\frac{A}{2}\right) & f\left(\frac{B}{2}\right) & f\left(\frac{(\pi-C)}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Jednadžba (3.8) tada vrijedi, a jednadžbe (3.5) do (3.7) skupa sa (3.2) impliciraju

$$BB' \cap CC' = -\frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\gamma'_2\beta'_3} : -\frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\gamma'_2\alpha'_3} : -\frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\alpha'_2\beta'_3}$$

tako da (3.10) vodi do (3.9).

Na primjer, ako je  $Y = \sin A : \sin B : \sin C$  (sjecište simedijana ili Lemoineova točka) tada

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 \\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{A}{2}\right) & \sin\left(\frac{B}{2}\right) & \sin\left(\frac{C}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{A}{2}\right) & \cos\left(\frac{B}{2}\right) & \sin\left(\frac{C}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{A}{2}\right) & \sin\left(\frac{B}{2}\right) & \cos\left(\frac{C}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{i } BB' \cap CC' = -\frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)} \text{ pa je točka presjeka } \tan\left(\frac{A}{2}\right) : \tan\left(\frac{B}{2}\right) : \tan\left(\frac{C}{2}\right).$$

**Napomena 3.4** Pokazuje se da glavni centri nisu jedini centri koji su rješenje Problema A primjerice centar tzv. Kiepertove hiperbole zadan  $s\alpha = \sin A \sin^2(B - C)$  nije glavni centar, ali predstavlja rješenje.

# Literatura

[1] Clark Kimberling: Bicentric pairs of points and related triangle centers,

Forum Geometricum vol. 3 (2003) 35-47.

<http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200303.pdf>

[2] Clark Kimberling: Major centers of triangles,

American Math. Monthly vol. 104(5) (May, 1997) 431-438.

<http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/jyt/linkistor/compass%20only/Major%20Centers%20of%20Triangles.pdf>

[3] Clark Kimberling: Encyclopedia of triangle centers

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

[4] Clark Kimberling: Triangle centers as functions,

Rocky Mountain J. Math. 23(1993) 1269-1286.

[5] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

[6] Bernarda Topalović, Bicentrični parovi točaka trokuta, diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2015.

[7] Tamara Zdjelar, Kiepertove konike. Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2014.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu izloženi su neki pojmovi i rezultati iz područja geometrije trokuta povezani s konceptom centra trokuta kao poopćenja klasičnih karakterističnih točaka trokuta. Rezultati ovog smjera istraživanja u posljednjih tridesetak godina naročito je vidljiv u „Enciklopediji centara trokuta“ Clarka Kimberlinga.

Za definiranje i proučavanje centara trokuta najpogodnije su homogene koordinate, a ovdje se služimo posebnim tipom takvih koordinata koje se nazivaju trilinearne koordinate. U prvom dijelu rada upoznajemo se s tim koordinatnim sustavom i primjenjujemo ga na klasične centre trokuta, primjerice centri upisane i opisane kružnice, ortocentar.

Zatim se općenito definira centre trokuta kao točke čije se trilinearne koordinate mogu izraziti kao funkcije kutova i duljina stranica. Nadalje, uočavaju se tzv. bicentrični parovi točaka kakve su npr. Brocardove točke i operacije s kojima se od bicentričnog para dobiva centar.

Poseban je naglasak na glavnim centrima trokuta koji se uvode s motivom da se poznatim postupkom dobije novi trokut koji je perspektivan polaznom.

Složenost problema ne dopušta jednostavno eksplicitno rješenje, no svaki glavni centar, a to je centar čije se trilinearne koordinate mogu izraziti u obliku  $f(A):f(B):f(C)$  pripada skupu rješenja.

# Summary

In this master's thesis we showed some terms and results from field of triangle geometry that are linked with the concept of triangle center as generalization of classic characteristic points of triangle. Results of this field's research can be seen in "Encyclopedia of triangle centers" by Clark Kimberling.

To define and study centers of triangles we find homogeneous coordinates to be the most suitable. Here we used special kind of those coordinates that are called trilinear coordinates. In first part of the thesis we get to know around that coordinate system and apply it to classic triangle centers like incenter, centroid and orthocenter.

Then we defined triangle centers as points whose trilinear coordinates can be expressed as functions of angles and side lengths. Furthermore, we noticed, so called, bicentric pairs of points such as Brocard points and operations that make center from bicentric pair.

We will also saw major triangle centers which were introduced to show how can we get a new triangle which is perspective to the first one.

Complexity of the problem does not allow simple explicit solution, but every major center, and that is center whose trilinear coordinates can be expressed in terms  $f(A):f(B):f(C)$ , is part of the set of solution

# Životopis

Rođen sam u Zagrebu 13. kolovoza 1985. Nakon završene osnovne škole upisujem Zrakoplovno tehničku školu Rudolfa Perešina. Maturirao sam 2004. godine, te upisao tadašnji, predbolonjski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2007. godine morao sam se prebaciti na nastavnički smjer koji završavam 2011. godine te upisujem diplomski studij Matematičke statistike.