SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Bevanda

POISSONOV PROCES S KLASTERIMA

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Bevanda

POISSONOV PROCES S KLASTERIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji.

Sadržaj

Uvod

Točkovni procesi s klasterima jedan su od najvažnijih modela točkovnih procesa i u teoriji i primjenama. Prirodno se nameću u modeliranju lokacija različitih objekata. Ti su objekti primjerice: biljke, molekule, ljudske nastambe, zvijezde, galaksije, epicentri potresa, erupcije vulkana i slično. Nas najviše zanima primjena procesa s klasterima u aktuarstvu, posebno neživotnom osiguranju.
Pretpostavimo da nam je dan jedan točkovni proces. Nazovimo ga procesom centara ili središta. Svaka točka ili atom tog procesa potiče jednu skupinu, nakupinu ili kaster aktivnosti. Mi uvijek pretpostavljamo da su klasteri međusobno nezavisni. U terminima neživotnoga osiguranja, točke procesa centara interpretiramo kao vremena dolazaka zahtjeva za isplatu šteta. Točke klastera interpretiramo kao vremena isplata pripadnoga zahtjeva. Jedan od najvažnijih problema u aktuarstvu svakako je predviđanje budućega broja zahtjeva i ukupnoga iznosa šteta koje treba isplatiti osiguranicima.
Ako su točke procesa centara točke Poissonove slučajne mjere (Poissonovoga procesa), govorimo o Poissonovu procesu s klasterima. To je najvažniji matematički model točkovnih klaster procesa. Posebno nas zanima slučaj u kojem je taj Poissonov proces homogen. Cilj ovog diplomskog rada proučavanje je tog procesa te njegovih osnovnih svojstava kao što su očekivanje, varijanca i kovarijacijska struktura. Za razumijevanje rada predviđeno je poznavanje osnovnih rezultata teorije mjere i teorije vjerojatnosti.
Rad se sastoji od tri poglavlja. Prvo poglavlje sadrži osnovne definicije u teoriji točkovnih procesa. Precizno će biti definiran točkovni proces i uveden najvažniji primjer točkovnih procesa, Poissonov točkovni proces. Bit će definiran i pojam Laplaceova funkcionala koji je ključan alat za razumijevanje razdiobe točkovnih procesa. Ovo poglavlje sadrži i kratak uvod u mjere momenata točkovnih procesa.
U drugom će poglavlju biti matematički definiran općeniti proces s nezavisnim klasterima te Poissonov proces s klasterima. Poglavlje sadrži i primjere Poissonova točkovnog procesa s klasterima koji se koriste u praksi. Neki od primjera sadržavat će i ilustracije koje imaju cilj čitatelju olakšati razumijevanje procesa s klasterima.
Treće poglavlje bavi se primjenama u aktuarstvu. U njemu će biti uvedena dodatna

svojstva procesa koji se koriste u matematici neživotnog osiguranja. Kratko ćemo se osvrnuti na Poissonove procese s Poissonovim klasterima. Vidjet ćemo koje sve pretpostavke treba uvesti ako želimo dosad poznate modele koristiti za previđanje spomenutog broja zahtjeva i iznosa šteta koji pristižu u budućnosti.
Rad se uglavnom bavi procesima s klasterima koji su Poissonovi, no ne treba zanemariti važnost drugih modela u točkovnim procesima s klasterima.

Posebno se želim zahvaliti svome mentoru, prof. dr. sc. Bojanu Basraku na mnogim korisnim savjetima koji su mi jako pomogli u pisanju diplomskoga rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi o točkovnim procesima

Iz teorije vjerojatnosti znamo da je ponekad korisno promatrati vrijednosti slučajnih varijabli, odnosno slučajnih vektora kao slučajno odabrane točke. U ovom ćemo poglavlju definirati nove slučajne elemente čije će realizacije biti slučajne točkovne mjere i zvat ćemo ih točkovnim procesima.
Proučit ćemo najvažnije primjere točkovnih procesa. Dalje ćemo uvesti pojam Laplaceova funkcionala točkovnoga procesa koji jedinstveno određuje distribuciju tog procesa. Na kraju poglavlja reći ćemo i nešto o mjerama momenata točkovnih procesa.

Veliki dio teorije točkovnih procesa može se razviti na potpunim separabilnim metričkim prostorima. Budući da su u ovome radu svi primjeri točkovnih procesa vezani za neki konačno-dimenzionalni euklidski prostor $\mathbb{X}$, skup stanja točkovnog procesa kod nas je uvijek Borel izmjeriv podskup od $\mathbb{X}$, a često i sam $\mathbb{X}$.

1.1 Osnovne definicije

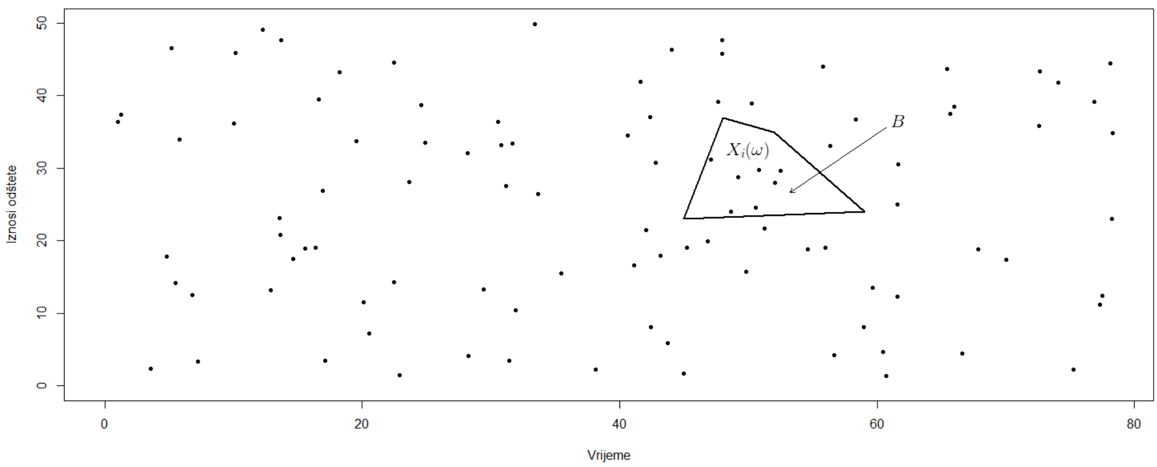
Prije nego što precizno definiramo slučajni element koji zovemo točkovnim procesom, dat ćemo jednu intuitivnu definiciju i ilustraciju kao motivaciju.

Neka je $\mathbb{X}$ neki konačno-dimenzionalan euklidski prostor i $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{X}$. Promatrajmo niz $(X_n : n \in \mathbb{N})$ slučajnih vektora s vrijednostima $E \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Za svaki $B \subset E$ definirajmo

$$N(B) := \operatorname{card}\{n \geqslant 1 : X_n(\omega) \in B\}, \tag{1.1}$$

za $\omega \in \Omega$.

Dakle, $N(B)$ broji koliko se točaka niza $(X_n(\omega),\, n \in \mathbb{N})$ nalazi u skupu B. Ilustracija je dana slikom 1.1. Iz definicije vidimo da $N(B)$ ovisi i o $\omega \in \Omega$, a ne samo o skupu B pa bi pravilnije bilo pisati $N(B, \omega)$ umjesto $N(B)$. Pokazat ćemo da je za dani skup B, $N(B)$ slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\{0, 1, \dots, +\infty\}$. Za fiksni $\omega \in \Omega$, $N(\cdot, \omega)$ definira jednu brojeću mjeru s točkama ili "atomima" $(X_n(\omega),\, n \in \mathbb{N})$.



Slika 1.1: Slučajne točke X_i na $(0, \infty)^2$. Broj točaka koji upadne u skup B modelira slučajna varijabla $N(B)$; u ovom je slučaju $N(B, \omega) = 6$.

Označimo sa $\mathcal{E}$ σ-algebru Borelovih skupova na E. Za točku $x \in E$ definiramo preslikavanje $\delta_x : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ sa

$$\delta_x(B) := \begin{cases} 1 & x \in B, \\ 0 & x \notin B. \end{cases}$$

Lako se pokaže da je δ_x mjera na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$ koju zovemo *Diracovom mjerom u točki* x ili *mjerom koncentriranom u točki* x.

Za dani niz $(x_n, n \in \mathbb{N})$ u E definiramo preslikavanje $m : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ relacijom

$$m(B) := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}(B) = \operatorname{card}\{n \geqslant 1 : x_n \in B\}, \quad B \in \mathcal{E} \tag{1.2}$$

Lako se vidi da je m mjera na $(E, \mathcal{E})$. Zovemo ju *brojećom mjerom* ili *mjerom prebrojavanja.* Ako je još i $m(B) < +\infty$ za sve ograničene $B \in \mathcal{E}$, m nazivamo *točkovnom mjerom.*

Označimo sa $N^{\#}(E)$ prostor svih točkovnih mjera na E te sa $\mathcal{N}^{\#}(E)$ pripadnu σ-algebru koja sadrži skupove oblika

$$\{ m \in N^{\#}(E) : m(B) \in A \} \tag{1.3}$$

za $B \in \mathcal{E}$ i proizvoljan skup $A \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Lako se pokaže da je $\mathcal{N}^{\#}(E)$ najmanja σ-algebra takva da je za svaki $B \in \mathcal{E}$ preslikavanje $m \mapsto m(B)$ izmjerivo.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor.* Točkovni proces N *na* E *izmjerivo je preslikavanje*

$$N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (N^{\#}(E), \mathcal{N}^{\#}(E)). \tag{1.4}$$

Točkovni je proces slučajni element ili slučajna funkcija čije su vrijednosti točkovne mjere. Za svaki $\omega \in \Omega$, funkcija $m(\cdot) = N(\cdot, \omega)$ točkovna je mjera. Posebno je $N(B) < +\infty$ za ograničene skupove $B \in \mathcal{E}$, ali $N(B)$ može poprimiti vrijednost $+\infty$ na neograničenom Borelovom skupu B.

Sljedeća lema opravdava interpretaciju točkovnoga procesa kao skupa $\{N(B)\}_{B \in \mathcal{E}}$ slučajnih varijabli $N(B)$ koje poprimaju vrijednosti iz skupa $\{0, 1, \ldots, \infty\}$.

Lema 1.1.2. *Preslikavanje N sa $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(N^{\#}(E), \mathcal{N}^{\#}(E))$ točkovni je proces na E ako i samo ako je za svaki $B \in \mathcal{E}$, $N(B)$ slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\{0, 1, \ldots, +\infty\}$ te vrijedi da je $N(B) < +\infty$ za ograničene $B \in \mathcal{E}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je N točkovni proces na E. Po definiciji točkovnoga procesa preslikavanje $\omega \mapsto N(\cdot, \omega)$ izmjerivo je sa $(\Omega, \mathcal{F})$ u $(N^{\#}(E), \mathcal{N}^{\#}(E))$. Kako je σ-algebra $\mathcal{N}^{\#}(E)$ generirana skupovima (1.3), preslikavanje $\phi_B : (N^{\#}(E), \mathcal{N}^{\#}(E)) \to ([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ definirano sa $\phi_B(m) := m(B)$ je izmjerivo. Kako je kompozicija izmjerivih preslikavanja izmjeriva, slijedi da je $N(B, \omega) = \phi_B(N(\cdot, \omega))$ izmjerivo sa $(\Omega, \mathcal{F})$ u $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$. Stoga je $N(B, \omega) = N(B)$ slučajna varijabla po definiciji te $N(B) < +\infty$ za sve ograničene $B \in \mathcal{E}$ zbog definicije točkovnoga procesa. Za dokaz obrata pogledajte Resnick [6], Propozicija 3.1. $\square$

Neka je $(X_n : n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih vektora u euklidskom prostoru E čije će slučajne vrijednosti biti točke točkovnoga procesa. Pokazat ćemo da se mnogi točkovni procesi koji nas zanimaju mogu zapisati kao

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n}. \tag{1.5}$$

Tada je za svaki $\omega \in \Omega$

$$N(\cdot, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n(\omega)}(\cdot) \tag{1.6}$$

točkovna mjera na $\mathcal{E}$. Kako bismo pokazali da je N definiran u (1.5) točkovni proces po definiciji treba pokazati da je za proizvoljni skup $C \in \mathcal{N}^{\#}(E)$

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n(\omega)}(\cdot) \in C\right\} \in \mathcal{F}.$$

Kako je $\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n(\omega)}(\cdot)$ točkovna mjera na $\mathcal{E}$, po definiciji (1.3) skupa C dovoljno je pokazati da za svaki $B \in \mathcal{E}$ vrijedi

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n(\omega)}(B) \in A\right\} \in \mathcal{F}.$$

za svaki $A \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_B(X_n)$ slučajna je varijabla sa Ω u $[0, +\infty]$ kao limes slučajnih varijabli $\sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_B(X_n)$. (Da je $\sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_B(X_n)$ slučajna varijabla slijedi iz činjenice da je kompozicija i zbroj slučajnih varijabli opet slučajna varijabla.)
Stoga vrijedi

$$\left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n(\omega)}(B) \in B\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_B(X_n(\omega)) \in B\right\} \in \mathcal{F},$$

pa je N definiran sa (1.5) točkovni proces.

Najvažniji primjer točkovnih procesa je Poissonov proces. Njega ćemo definirati u jednom od sljedećih potpoglavlja. Spomenimo sad jedan jednostavni primjer. Neka je X slučajni vektor na E. Tada je za $N = \delta_X$ po upravo dokazanome N točkovni proces. Još puno primjera točkovnih procesa možete pogledati u Mikosch [4].

1.2 Laplaceova transformacija

Laplaceova je *transformacija* integralna transformacija koja se koristi u raznim granama matematike. Nas zanima posebno njena primjena u teoriji vjerojatnosti pa ćemo ovdje dati kratki pregled osnovnih definicija i svojstava vezanih uz tu transformaciju.

Definicija 1.2.1. *Neka je $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funkcija. Ako integral*

$$\mathcal{L}(f)(s) \;=\; F(s) \;:=\; \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

konvergira za funkciju f, onda preslikavanje $\mathcal{L}$ nazivamo Laplaceovom transformacijom funkcije *f.*

Ako je f funkcija gustoće nenegativne slučajne varijable T, Laplaceova transformacija funkcije f jednaka je očekivanju slučajne varijable e^{-sT}, tj. vrijedi

$$\mathbb{E}\left[e^{-sT}\right] \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt =: F(s).$$

Definirajmo i Laplaceovu transformaciju slučajnog vektora.

Definicija 1.2.2. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}_+^n$ nenegativan slučajni vektor.* Laplaceova *je* transformacija vektora *$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ funkcija $F_X : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ definirana relacijom*

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) : = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{-t_i X_i}\right]. \tag{1.7}$$

Napomena 1.2.3.

(a) Laplaceova transformacija slučajnoga vektora jedinstveno određuje njegovu razdiobu, tj. iz Laplaceove se transformacije slučajnoga vektora može dobiti njegova funkcija distribucije. Za dokaz vidjeti Billingsley [2].

(b) Prisjetimo se da su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definirane na istom vjerojatnostnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nezavisne ako i samo ako je

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$$

Dokaz možete pogledati u Sarapa [7], Teorem 11.1., str. 354.

Detaljnije o teoriji Laplaceove transformacije možete pročitati u Mimica [5].

1.3 Laplaceov funkcional

Prisjetimo se da su realizacije točkovnoga procesa točkovne mjere. Stoga je *distribucija točkovnoga procesa* N definirana sa

$$\mathbb{P}_N(B) := \mathbb{P}(\, N \in B\,), \quad B \in \mathcal{N}^{\#}(E)$$

Distribuciju točkovnog procesa puno je teže razumjeti od distribucije slučajne varijable. No, ona je jedinstveno određena familijom konačno-dimenzionalnim distribucijama slučajnih vektora

$$(\, N(B_1),\, N(B_2),\, \ldots,\, N(B_k)\,) \tag{1.8}$$

za proizvoljne ograničene skupove $B_1, B_2, \ldots, B_k$ iz $\mathcal{E}$ i za svako $k \in \mathbb{N}$. Skup svih ovih distribucija zovemo *konačno-dimenzionalnim distribucijama točkovnoga procesa*. Distribucije cjelobrojnih k-dimenzionalnih slučajnih vektora u (1.8) u potpunosti su određene vjerojatnostima oblika

$$P_k(B_1, \ldots, B_k; n_1, , \ldots, n_k) = \mathbb{P}\,(\, N(B_1) = n_1,\, \ldots,\, N(B_k) = n_k\,) \tag{1.9}$$

za proizvoljne cjelobrojne $n_1, n_2, \ldots, n_k$ i proizvoljno $k \in \mathbb{N}$. Vjerojatnosti (1.9) su u literaturi poznate i pod nazivom *konačno-dimenzionalne vjerojatnosti.* Očito je puno jednostavnije zamisliti konačno-dimenzionalne distribucije točkovnoga procesa od distribucije samoga procesa.

Rad s funkcijama distribucije slučajnih objekata u teoriji vjerojatnosti katkad je vrlo složen, pa je uobičajeno prijeći na neki analitički aparat. Primjerice, mnoge probleme vezane za funkcije distribucije slučajnih varijabli lakše je bilo riješiti pomoću njihovih karakterističnih funkcija (vidjeti Sarapa [7], str. 442). Posebno, u slučaju cjelobrojnih slučajnih varijabli koristili smo vjerojatnosne funkcije izvodnice. Preko njih se definiraja jedna od transformacija točkovnih procesa, *vjerojatnosni funkcional izvodnica*, koji omogućuje bolje razumijevanje distribucije samoga procesa. Više o vjerojatnosnom funkcionalu izvodnici možete pročitati u Daley i Vere-Jones [3]. Za prikaz distribucije točkovnoga procesa mi ćemo koristiti *Laplaceov funkcional* koji se jednostavno može dobiti iz funkcionala izvodnice.

Definicija 1.3.1. Laplaceov funkcional *točkovnoga procesa N dan je sa*

$$\Psi_N(f) := \mathbb{E}\left[\exp(-\int_E f dN)\right] \tag{1.10}$$

za proizvoljnu nenegativnu, ograničenu i izmjerivu funkciju $f : E \to \mathbb{R}$.

Uočimo da je očekivanje u (1.10) uvijek konačno, točnije ograničeno sa 1 zbog monotonosti očekivanja i definicije eksponencijalne funkcije. Integral $\int_E f dN$ dobro je definiran Lebesgue-Stieltjesov integral, a poznat je i pod nazivom *Poissonov intergral.* Označavamo ga sa $N(f)$.

Napomena 1.3.2. *Pretpostavimo da se za niz slučajnih vektora* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *s vrijednostima u* E *točkovni proces* N *može zapisati kao* $N = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{X_n}$. *Pomoću Lebesgueova teorema o monotonoj konvergenciji lako se pokaže da je*

$$\int\limits_E f dN = \sum_{n=1}^{+\infty} f(X_n). \tag{1.11}$$

Posebno je za $f = \mathbf{1}_B$

$$\int\limits_E f dN = \int\limits_E \mathbf{1}_B dN = \int\limits_B dN = N(B) \tag{1.12}$$

za proizvoljno $B \in \mathcal{E}$.

Teorem 1.3.3. *Laplaceov funkcional* $\Psi_N(f)$ *točkovnoga procesa* N *jedinstveno određuje distribuciju* $\mathbb{P}_N$.

Dokaz. Promatramo nenegativne i ograničene funkcije $f_z : E \to \mathbb{R}$ oblika

$$f_z = z_1 \mathbf{1}_{B_1} + z_2 \mathbf{1}_{B_2} + \ldots z_k \mathbf{1}_{B_k},$$

pri čemu su $z_i \geqslant 0$, $B_i \in \mathcal{E}$ za sve $i = 1, 2, \ldots k$ te $k \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\Psi_N(f_z) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_E f_z\, dN\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_E (z_1 \mathbf{1}_{B_1} + z_2 \mathbf{1}_{B_2} + \ldots + z_k \mathbf{1}_{B_k})\, dN\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-(z_1 \int_E \mathbf{1}_{B_1} dN + z_2 \int_E \mathbf{1}_{B_2} dN + \ldots + z_k \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}_{B_k} dN)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-(z_1 N(B_1) + z_2 N(B_2) + \ldots z_k N(B_k))\right)\right]
\end{aligned}$$

što je Laplaceova transformacija slučajnoga vektora $(N(B_1), \ldots, N(B_k))$. Znamo da ona jedinstveno određuje razdiobu tog slučajnog vektora. Stoga, skup svih $\Psi_N(f_z)$ za $z_i \geqslant 0$ i sve $i = 1, 2, \ldots, k$ određuje konačno-dimenzionalne distribucije točkovnoga procesa N. Kako smo već komentirali, one određuju distribuciju $\mathbb{P}_N$ promatranoga procesa N. □

1.4 Mjere momenata

Pretpostavimo da je *k-ti moment* točkovnoga procesa N konačan, tj. da vrijedi $\mu_k = \mathbb{E}\left[N(\mathbb{X})^k\right] < \infty$ za neko $k = 1, 2, \ldots$. Tada, za svaki Borelov skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ definiramo

$$M_k(A^k) = \mathbb{E}\left[N(A)^k\right],$$

gdje je $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k\text{-puta}} \in \mathcal{B}^k(\mathbb{X})$ što je σ-algebra produktnoga prostora $\mathbb{X}^k = \underbrace{\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{k\text{-puta}}$.

Neka je $\mu_1 = \mathbb{E}\left[N(\mathbb{X})\right] < \infty$. Definiramo *mjeru očekivanja* M sa

$$M(A) := M_1(A) = \mathbb{E}\left[N(A)\right], \quad \text{za svaki} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}).$$

Iz Fubinijeva se teorema lako vidi da M nasljeđuje svojstvo σ-aditivnosti od N te je stoga M mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Za $k > 1$ možemo proširiti definiciju M_k na proizvoljne pravokutnike oblika

$$A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r},$$

pri čemu je $\{k_1, k_2, \ldots k_r\}$ particija broja k (tj. $k_r \geqslant 1$, a $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = k$), a A_i su disjunktni skupovi iz $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Vrijedi

$$M_k\left(A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}\right) = \mathbb{E}\left[N(A_1)^{k_1} N(A_2)^{k_2} \cdots N(A_r)^{k_r}\right]. \tag{1.13}$$

Lako se pokaže da je M σ-aditivna na skupu ovakvih pravokutnika pa se stoga definicija može proširiti do mjere na Borelovim skupovima iz $\mathcal{B}(\mathbb{X})$. Funkciju M_k možemo smatrati mjerom očekivanja točkovnoga procesa na $\mathbb{X}^k$. Takav se proces sastoji od k-dimenzionalnih nizova (u kojima su dopuštena ponavljanja) točaka originalnoga procesa, tj. N^k produkt je k kopija procesa N. Stoga, M_k predstavlja očekivani broj takvih k-dimenzionalnih nizova u proizvoljnom skupu iz $\mathcal{B}^k(\mathbb{X})$. Mjeru M_k zovemo *mjerom k-tog momenta procesa N*.

Na sličan način uvest ćemo i *mjeru k-tog faktorijel momenta*, no prisjetimo se prije toga jednoga poznatoga pojma. Za $r = 0, 1, \ldots$, *r-tu (padajuću) faktorijel potenciju broja n* definiramo sa:

$$n^{[r]} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-r+1) & r = 0, 1, \ldots, n, \\ 0 & r > n. \end{cases}$$

To je motivacija za sljedeću definiciju.

Definicija 1.4.1. *Za $r = 0, 1, \ldots$, r-ti faktorijel moment $m_{[k]}$ nenegativne cjelobrojne slučajne varijable X je $m_{[k]} =: \mathbb{E}\left[X^{[r]}\right]$.*

Ako je zakon razdiobe slučajne varijable X dan sa $\mathbb{P}_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = p_n$, za $n \in \mathbb{N}_0$, vrijedi

$$m_{[r]} = \sum_{n=0}^{\infty} n^{[r]} p_n.$$

Ako je distribucija slučajne varijable X koncentrirana na konačnom skupu $\{0, \ldots, n_0\}$, svi su faktorijel momenti veći od n_0 po definiciji jednaki nuli. Kako pretvoriti faktorijel momente u obične i obrnuto može se pročitati u Daley i Vere-Jones [3], str. 114. Sad smo spremni za definiciju *mjere k-tog faktorijel momenta* u oznaci $M_{[k]}$. Vrijedi, naravno, da je $M_1 = M_{[1]} = M$. Za $k > 1$ samo zamijenimo obične potencije faktorijel potencijama u (1.13) te imamo

$$M_{[k]}(A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}) = \mathbb{E}\left[N(A_1)^{[k_1]} N(A_2)^{[k_2]} \cdots N(A_r)^{[k_r]}\right]. \qquad (1.14)$$

Mjera $M_{[k]}$ može se također interpretirati kao mjera očekivanja određenoga točkovnoga procesa na $\mathbb{X}^k$. U ovom se slučaju realizacije novoga slučajnoga procesa sastoje od svih k-dimenzionalnih nizova različitih točaka originalnoga procesa. Ako točkovni proces ima višestruke točke, njih treba prebrojati u skladu s njihovim multiplicitetima. Primjerice, ako N ima duplu točku, smatramo ju dvjema točkama s istim koordinatama pri konstrukciji k-dimenzionalnih nizova.

1.5 Poissonov točkovni proces

Poissonov točkovni proces ili *Poissonova slučajna mjera* najvažniji je primjer točkovnih procesa. Ona se pojavljuje kao limes „binomnih točkovnih procesa", tj. točkovnih procesa čije su točke nezavisne. Primijetimo sličnost s Poissonovim graničnim teoremom koji kaže da je Poissonova slučajna varijabla limes po distribuciji niza binomnih slučajnih varijabli.
U ovom ćemo poglavlju definirati Poissonov točkovni proces, dati jedan primjer i pokazati jedan od načina konstrukcije novoga Poissonova točkovnoga procesa iz postojećega.

Poissonova slučajna mjera

Definicija 1.5.1. *Neka je μ Radonova mjera na prostoru stanja. Točkovni proces N naziva se* Poissonovim procesom *ili* Poissonovom slučajnom mjerom s mjerom intenziteta *μ (pišemo PRM(μ)) ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:*

(1) Za $A \in \mathcal{E}$ i $k \geqslant 0$

$$\mathbb{P}(\, N(A) \,=\, k \,) \,=\, \begin{cases} e^{-\mu(A)} \dfrac{(\mu(A))^k}{k!}, & \textit{ako je} \quad \mu(A) \,<\, \infty \\ 0, & \textit{ako je} \quad \mu(A) \,=\, +\infty \,. \end{cases} \tag{1.15}$$

(2) Ako su za proizvoljno $m \geqslant 1$, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ međusobno disjunktni podskupovi iz $\mathcal{E}$, onda su $N(A_1), N(A_2), \ldots N(A_m)$ međusobno nezavisne slučajne varijable.

Napomena 1.5.2.

(a) Kako je $\mathbb{E}[\, N(A)\,] \,=\, \mu(A)$, naziv mjera intenziteta opravdan je.

(b) Iz definicije (1.15) *vidimo da μ određuje razdiobu točkovnoga procesa N slično kao što parametar λ određuje razdiobu Poissonove slučajne varijable.*

(c) Prisjetimo se da je μ Radonova mjera ako je $\mu(A) \,<\, \infty$ za kompaktne skupove $A \subset E$. Iz toga slijedi da je za kompaktne skupove A, $\mathbb{E}[\, N(A)\,] \,=\, \mu(A) \,<\, \infty$ (g.s.), tj. N je po definiciji točkovni proces.

Više o PRM možete pročitati u Resnick [6], str. 132.

Primjer 1.5.3. *(Homogeni Poissonov proces)*
Neka je N PRM(μ) *na konačno-dimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{X}$ i $|\cdot|$ Lebesgueova mjera na $\mathbb{X}$. Neka je μ višekratnik Lebesgueove mjere na $\mathbb{X}$, u smislu da postoji parametar $\lambda > 0$ takav da je N* PRM($\lambda\,|\cdot|$). *Vrijedi dakle, $N(A) \sim P(\lambda\,|A|)$, za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Takav proces nazivamo* homogena Poissonova slučajna mjera *ili* homogeni PRM s intenzitetom λ. *Ovako definiran proces prirodno je proširenje homogenog Poissonova procesa na $[0, +\infty)$ u oznaci $\widetilde{N}(t) := N([0,t])$ koji je poznat kao brojći proces koji kreće iz nule (možete pogledati Vondraček [8]).*

Slijedi teorem o Laplaceovom funkcionalu PRM-a te konačnosti i nenegativnosti Poissonovih integrala. On će nam biti od koristi pri proučavanju Poissonova procesa s klasterima.

Teorem 1.5.4. *Laplaceov funkcional točkovnoga procesa N koji je* PRM(μ) *na prostoru stanja $E \subset \mathbb{X}$ dan je sa*

(1)

$$\Psi_N(f) = \exp\left(-\int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-f(x)})\, \mu(dx) \right) \tag{1.16}$$

za proizvoljnu (ne nužno ograničenu) izmjerivu funkciju $f \geqslant 0$.

(2) Neka je f *nenegativna izmjeriva funkcija na* E. *Integral* $\int_E f dN$ *konačan je (g.s.) ako i samo ako vrijedi*

$$\int_E \min(f(x), 1)\, \mu(dx) < \infty. \tag{1.17}$$

Uvjet (1.17) ekvivalentan je konačnosti Laplaceova funkcionala (1.16). Dokaz te tvrdnje kao i dokaz samoga teorema možete pročitati u Mikosch [4], str. 233.

Navest ćemo i nekoliko lema o nekim od svojstava Poissonova integrala koje će nam trebati kasnije. Leme navodimo bez dokaza, a detaljnije o njima može se pročitati u Mikosch [4] str. 237 - 241.

Lema 1.5.5. *Neka je* N PRM(μ) *na prostoru stanja* $E \subset \mathbb{X}$ *i* $f : E \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija. Inetegral* $\int_E f\, dN$ *postoji i konačan je (g.s.) ako i samo ako je* $\int_E \min(|f(x)|, 1)\, \mu(dx) < \infty$.

Poissonovi integrali $\int_E f_i\, dN$, $i = 1, 2, \ldots$ imaju korisno svojstvo: nezavisni su ako fukncije f_i imaju *disjunktne nosače.* Preciznije, vrijedi sljedeća lema:

Lema 1.5.6. *(Nezavisnost Poissonovih integrala s disjunktnim nosačima) Neka je* N PRM(μ) *na prostoru stanja* $E \subset \mathbb{X}$ *i* $f_i : E \to \mathbb{R}$ *za* $i = 1, 2, \ldots, k$ *izmjerive funkcije s disjunktnim nosačima. Pretpostavimo da integrali* $\int_E f_i\, dN$ *postoje i da su konačni (g.s.). Tada su slučajne varijable* $\int_E f_i\, dN$ *međusobno nezavisne.*

Lema 1.5.7. *(Očekivanje, varijanca i kovarijanca općenitih Poissonovih integrala) Neka je* PRM(μ) *na prostoru stanja* $E \subset \mathbb{X}$ *i* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *izmjerive funkcije.*

(1) Pretpostavimo da je $\int_E |f(x)|\, \mu(dx) < \infty$. *Tada je*

$$\mathbb{E}\left(\int_E f\, dN \right) = \int_E f(x)\, \mu(dx). \tag{1.18}$$

(2) Pretpostavimo da je

$$\int_E \max\left([f(x)]^2, |f(x)|\right) \mu(dx) < \infty. \tag{1.19}$$

Tada je

$$\operatorname{Var}\left(\int_E f\, dN\right) = \int_E [f(x)]^2\, \mu(dx). \tag{1.20}$$

i desna je strana konačna.

(3) Pretpostavimo da f i g zadovoljavaju uvjet (1.19)*. Tada vrijedi*

$$\operatorname{Cov}\left(\int_E f\, dN, \int_E g\, dN\right) = \int_E f(x)\, g(x)\, \mu(dx). \tag{1.21}$$

Označeni Poissonovi procesi

Novi Poissonovi točkovni procesi mogu se iz danoga Poissonova procesa, tj. Poissonove slučajne mjere (PRM) konstruirati:

- izmjerivim transformacijama točaka PRM-a,
- nezavisnim označavanjem točaka PRM-a,
- zbrajanjem nezavisnih PRM-ova.

Od ova tri načina, nas zanima nezavisno označavanje točaka PRM-a. (Više o konstrukciji novih Poissonovih slučajnih mjera iz postojećih možete pročitati u Mikosch [4], str. 244.)

Dani PRM *označavamo* tako da njegovim točkama dodajemo koordinate koje su nezavisne s točkama. Tako dodanu koordinatu zovemo *oznakom*. Vidjet ćemo da je uz određene uvjete na distribuciju niza oznaka novoga procesa, taj novi proces također PRM na većem prostoru stanja. To je sadržaj sljedeće propozicije koju samo iskazujemo (za detalje vidjeti Mikosch [4], str. 246).

Propozicija 1.5.8. *Neka je $N_X = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i}$* PRM$(\mu)$ *na prostoru stanja $E_1 \subset \mathbb{R}^d$. Neka je $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih vektora s vrijednostima na* *prostoru stanja* $E_2 \subset \mathbb{R}^m$ *i zajedničkom funkcijom distribucije* F*. Ako su* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *i* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ *nezavisni, onda je točkovni proces*

$$N_{X,Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(X_i, Y_i)} \tag{1.22}$$

$\mathrm{PRM}(\mu \times \mu_F)$ *na prostoru stanja* $E = E_1 \times E_2$.

Napomena 1.5.9. *Mjera* μ_F *iz Propozicije 1.5.8 mjera je na* $\mathbb{R}^m$ *koja je u* $1-1$ *korespondenciji s funkcijom distribucije* F*. Za detalje možete pogledati Sarapa [7], Teorem* 9.3. *i relaciju* (9) *na str. 270.*

Slijedi primjer koji pokazuje da nezavisno označavanje danoga PRM-a može rezultirati nezavisnim stanjivanjem toga PRM-a.

Primjer 1.5.10. *Neka je* N_X $\mathrm{PRM}(\mu)$ *na skupu* $E \subset \mathbb{X}$ *s točkama* X_i*,* $i = 1, 2, \ldots$ *Označimo proces* N *nizom nezavisnih jednako distribuiranih simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli* (Y_n)*. Neka je* $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ *i* $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p =: q$*, pri čemu su* $p,\, q \in (0, 1)$ *. Iz Propozicije 1.5.8 slijedi da je označeni proces*

$$N_{X,Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(X_i, Y_1)}$$

PRM($\mu \times \mu_Y$*) na prostoru* $E \times \{-1, 1\}$ *. Posebno su točkovni procesi*

$$N_X^+ = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i} \mathbf{1}_{\{Y_i=1\}} = N_{X,Y}(\cdot \cap E \times \{1\}), \tag{1.23}$$

$$N_X^- = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{X_i} \mathbf{1}_{\{Y_i=-1\}} = N_{X,Y}(\cdot \cap E \times \{-1\}), \tag{1.24}$$

nezavisni, jer su definirani na disjunktnim skupovima $E \times \{1\}$ *i* $E \times \{-1\}$*. Štoviše, može se pokazati da je* N_X^+ $\mathrm{PRM}(p\,\mu)$*, a* N_X^- $\mathrm{PRM}(q\,\mu)$ *na istom skupu stanja* E*. Ti su točkovni procesi primjeri jednostavnog procesa stanjivanja procesa* N_X*. Naime, svaka točka* X_i *procesa* N_X *ostaje ili se isključuje iz procesa ovisno o tome je li* $Y_n = 1$ *ili* $Y_n = -1$*.*

Poglavlje 2

Procesi s klasterima

Procesi s klasterima sastoje se od dvije komponente - lokacija samih klastera koje su određene takozvanim centrima klastera i elemenata unutar klastera. Zbrajanje elemenata po klasterima čini opaženi proces. Kako bismo modelirali elemente u klasteru, uvodimo prebrojivu familiju točkovnih procesa N^{y_i} indeksiranu po centrima klastera $\{y_i\}$. Što se lokacija klastera tiče, pretpostavljamo da nam je dan točkovni proces centara klastera N_c koji je često neopažen i čije se realizacije sastoje od skupa točaka $\{y_i\} \subset \mathbb{Y}$. Često će vrijediti $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ (primjerice kod stacionarnih procesa).

2.1 Definicija

Neka su $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ konačno-dimenzionalni euklidski prostori i neka nam je dana familija $\{ N^y,\, y \in \mathbb{Y} \}$ točkovnih procesa s vrijednostima u skupu $\mathbb{X}$. Ova familija tvori *izmjerivu familiju* ako je za svaki skup $A \in \mathcal{N}^{\#}(\mathbb{X})$ preslikavanje $y \mapsto \mathbb{P}_{N^y}(A)$ sa $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ u $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ izmjerivo, pri čemu je

$$\mathbb{P}_{N^y}(A) = \mathbb{P}(N^y \in A), \tag{2.1}$$

tj. $\mathbb{P}_{N^y}(A)$ zakon je razdiobe točkovnoga procesa N^y.

Primjer 2.1.1. *Neka je $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Znamo da je δ_ε točkovni proces. Uzmemo li da je $N^y \stackrel{d}{=} \delta_{y+\varepsilon}$, vrijedi*

$$\mathbb{P}_{N^y}(A) = \mathbb{P}(\delta_{y+\varepsilon} \in A).$$

Sljedeća propozicija govori da je klaster sa slučajno odabranim centrom - slučajnom varijablom Y također točkovni proces.

Propozicija 2.1.2. *Neka je dana*

(a) izmjeriva familija točkovnih procesa s razdiobama $\mathbb{P}_{N^y}(A)$ definirana na $\mathbb{X}$ i indeksirana po skupu $\mathbb{Y}$ i

(b) slučajna varijabla Y s vrijednostima u $\mathbb{Y}$ i zakonom razdiobe $\mathbb{P}_Y$.

Tada integral

$$\mathcal{P}(A) = \mathbb{E}[\,\mathcal{P}(\,A\,|\,Y\,)\,] = \int_{\mathbb{Y}} \mathbb{P}_{N^y}(A)\,\mathbb{P}_Y(dy) \tag{2.2}$$

definira vjerojatnosnu mjeru $\mathcal{P}$ na $\mathcal{N}^{\#}(\mathbb{X})$ te stoga i točkovni proces na $\mathbb{X}$.

Za detalje pogledajte Daley i Vere-Jones [3], Propozicija 6.1.II , str. 165.

Primjer 2.1.3. *Uzmimo familiju točkovnih procesa kao u Primjeru 2.1.1 te slučajnu varijablu $Y \sim Exp(1)$. Točkovni proces $\delta_{Y+\epsilon}(\cdot)$ dobro je definiran po Propoziciji 2.1.2.*

Sljedeća lema daje nužne i dovoljne uvjete da indeksirana familija točkovnih procesa tvori izmjerivu familiju.

Lema 2.1.4. *Da bi familija $\{\,N^y\,\}_{y\in\mathbb{Y}}$ točkovnih procesa bila izmjeriva familija nužno je i dovoljno da su za sve pozitivne cijele brojeve k, konačne unije disjunktnih skupova $(B_1, B_2, \dots, B_k)$ i sve nenegativne cijele brojeve $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ konačno-dimenzionalne vjerojatnosti*

$$P_k^y(\,B_1, \dots, B_k;\, n_1, \dots, n_k\,) = \mathbb{P}\,(\,N^y(B_1) = n_1,\ \dots,\ N^y(B_k) = n_k\,)$$

izmjeriva preslikavanja sa $(\,\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y})\,)$ u $(\,[0,1], \mathcal{B}([0,1])\,)$.

Lemu 2.1.4 možemo odmah primijeniti za određivanje dovoljnih uvjeta koje je znatno lakše provjeriti od onih iz Propozicije 2.1.2.

Korolar 2.1.5. *Neka nam je dana slučajna varijabla Y definirana na $\mathbb{Y}$ sa zakonom razdiobe $\mathbb{P}_Y$ i neka familija konačno-dimenzionalnih vjerojatnosti $P_k^y(B_1, B_2, \dots, B_k; n_1, n_2, \dots, n_k)$ zadovoljava uvjet iz Leme 2.1.4. Tada postoji dobro definiran točkovni proces na $\mathbb{X}$ čije su konačno-dimenzionalne vjerojatnosti dane sa:*

$$\begin{aligned} P_k(B_1, B_2, \dots, B_k;\, n_1, n_2, \dots, n_k) &= \mathbb{E}(\,[P_k(B_1, B_2, \dots, B_k; n_1, n_2, \dots, n_k)\,|\,Y\,]\,) \\ &= \int_{\mathbb{Y}} P_k^y(\,B_1, B_2, \dots, B_k; n_1, n_2, \dots, n_k\,)\,\mathbb{P}_Y(dy)\,. \end{aligned}$$

Definicija 2.1.6. *N je* proces s klasterima *na euklidskom prostoru $\mathbb{X}$ s procesom centara N_c na euklidskom prostoru $\mathbb{Y}$ i komponentnim procesima koje čine izmjerive familije točkovnih procesa $\{N^y\}_{y\in\mathbb{Y}}$ ako za svaki ograničeni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ vrijedi*

$$N(A) := \int_{\mathbb{Y}} N^y(A)\, N_c(dy) = \sum_{y_i \in N_c} N^{y_i}(A) \;<\infty \quad (g.s.) \tag{2.3}$$

Mi ćemo zahtijevati da komponentni procesi - klasteri budu međusobno nezavisni, tj. smatrati da oni dolaze iz *nezavisne izmjerive familije.* U tom slučaju govorimo o *nezavisnim procesima s klasterima.* Također, u ovoj se definiciji podrazumijeva da će se pojavljivati višestruke nezavisne kopije procesa N^y ako je y centar više od jednog klastera.
Uvjet (g.s.) konačnosti (2.3) iz definicije za nezavisne procese s klasterima može se izreći i na sljedeći način.

Lema 2.1.7. *Nezavisni proces s klasterima postoji ako i samo ako za svaki ograničeni skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ vrijedi*

$$\int_{\mathbb{Y}} p_A(y)\, N_c(dy) \;=\; \sum_{y_i \in N_c} p_A(y_i) < \infty \qquad \mathbb{P}_c \text{ - } (g.s.), \tag{2.4}$$

gdje je $p_A(y) = \mathbb{P}(\, N^y(A) > 0\,)$ za $y \in \mathbb{Y}$ i $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ te $\mathbb{P}_c$ vjerojatnosna mjera procesa centara klastera.

Dokaz leme može se pročitati u Daley i Vere-Jones [3].

Napomena 2.1.8. *Ako je $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$, može se dodati i ograničenje da su translatirane komponente $N^y(A - y)$ jednako distribuirane. Tada kažemo da razdioba klastera ovisi samo o poziciji točaka u odnosu na centar klastera. Ako je uz to proces centara stacionaran, govorimo o stacionarnom procesu s klasterima. Točkovni je proces, primjerice na $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ stacionaran ako za svaki $r = 1, 2, \ldots$ te sve ograničene Borelove skupove $B_1, B_2, \ldots, B_r$ zajednička razdioba slučajnih varijabli*

$$(\, N(B_1 + t), N(B_2 + t), \ldots, N(B_r + t)\,)$$

ne ovisi o $t \in \mathbb{R}$.
Da bi stacionaran proces s klasterima postojao, dovoljna je konačnost očekivanja klastera s centrom u nuli, tj. središnjega klastera. Za postojanje Poissonova procesa s klasterima, taj uvjet čak i nije nužan. Detaljnije argumente za obje tvrdnje možete pročitati u Daley i Vere-Jones [3].

Ako je poznat proces centara klastera, mjera očekivanja procesa s klasterima uvjetno na taj proces glasi:

$$\mathbb{E}[\, N(A) \,|\, N_c \,] = \sum_{y_i \in N_c} M_1^{y_i}(A) = \int_{\mathbb{Y}} M_1^{y_i}(A) N_c(dy) \tag{2.5}$$

Pritom, M_1^y označava mjeru očekivanja klastera koji ima centar u y. Iz pretpostavke da komponentni procesi čine izmjerivu familiju, slijedi da, ukoliko postoji, $M_1^y(A)$ definira *izmjerivu jezgru* (za fiksni y, M^y mjera je na $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, a za fiksni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $y \mapsto M^y(A)$ izmjeriva je funkcija). Uzmemo li očekivanje od očekivanja procesa s klasterima obzirom na procesa centara dobivamo *mjeru prvoga momenta procesa s klasterima*

$$\mathbb{E}[\, N(A) \,] \;=\; \mathbb{E}\,[\, \mathbb{E}[\, N(A) \,|\, N_c \,]\,] \;=\; \int_{\mathbb{Y}} M_1^y(A)\, M^c(dy), \tag{2.6}$$

gdje je $M^c = \mathbb{E}[\, N_c \,]$ mjera očekivanja točkovnoga procesa centara klastera. Očito mjera prvoga momenta pripadnog procesa postoji ako i samo ako je integral u (2.6) konačan za sve ograničene skupove $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Na sličan način možemo dobiti reprezentacije mjera viših momenata.

Kod mjera faktorijel momenata, reprezentacija mjere faktorijel momenta odgovarajućeg procesa nešto je složenija. Recimo da na primjeru mjere drugog faktorijel momenta želimo proučiti sve mogućnosti da dvije različite točke upadnu u produktni skup $A \times B$ $(A,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Postoje samo dvije mogućnosti: ili obje točke dolaze iz istoga klastera ili dolaze iz dva različita klaster procesa. Uzimajući to u obzir i uz pretpostavku da nam je dan proces centara, vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\, N^{[2]}(\, A \times B \,) \,|\, N_c \,] = &\int_{\mathbb{Y}} M_{[2]}^y(\, A \times B \,)\, N_c(dy) \\ &+ \int_{\mathbb{Y}^2} M_1^{y_1}(A)\, M_1^{y_2}(B)\, N_c^{[2]}\,(dy_1 \times dy_2).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Eksponent u $N^{[2]}$ označava proces različitih parova iz N, a u drugom integralu koristili smo pretpostavku o *nezavisnosti* klastera. Uzimanjem očekivanja od očekivanja odgovarajućeg procesa uvjetno na proces centara klastera dobivamo *mjeru drugog faktorijel momenta procesa s klasterima*

$$M_{[2]}(\, A \times B \,) = \int_{\mathbb{Y}} M_{[2]}^y(\, A \times B \,)\, M^c(dy) + \int_{\mathbb{Y}^2} M_1^{y_1}(A)\, M_1^{y_2}(B)\, M_{[2]}^c\,(dy_1 \times dy_2). \tag{2.8}$$

Neka je $\Psi_{N^y}(\,f\,) \;=\; \mathbb{E}[\,\exp(-N^y(f))\,]$ Laplaceov funkcional komponentnog klastera N^y za nenegativnu, ograničenu izmjerivu funkciju f na $\mathbb{X}$. Za proces s klasterima $N \;=\; \sum_{y_i \in N_c} N^{y_i}$ zbog nezavisnosti komponentnih klastera vrijedi

$$\begin{aligned}
\Psi_N(\,f \,|\, N_c\,) \;&=\; \mathbb{E}\,[\,\exp(-N(f))\,|\,N_c\,] \;=\; \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{y_i \in N_c} N^{y_i}(f)\right)\,\middle|\, N_c\right] \\
&=\; \prod_{y_i \in N_c} \mathbb{E}\,[\,\exp\,(-N^{y_i}(f))\,] \;=\; \prod_{y_i \in N_c} \Psi_{N^{y_i}}(\,f\,) \\
&=\; \exp\left(\sum_{y_i \in N_c} \log \Psi_{N^{y_i}}(\,f\,)\right) \;=\; \exp \int_{\mathbb{Y}} \log \Psi_{N^y}(\,f\,)\, N_c(dy).
\end{aligned}$$

Laplaceov funkcional odgovarajućeg procesa s klasterima dobijemo kao očekivanje Laplaceova funkcionala obzirom na dani proces centara, tj. vrijedi

$$\begin{aligned}
\Psi_N(\,f\,) \;&=\; \mathbb{E}\,[\,\Psi_N(\,f \,|\, N_c\,)\,] \;=\; \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_{\mathbb{Y}} -\log \Psi_{N^y}(\,f\,)\, N_c(dy)\right)\right] \\
&=\; \Psi_{N_c}\,(\,-\log \Psi_{N^{\bullet}}(\,f\,)\,)\,.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Jedna vrsta procesa s klasterima jako je važna u primjenama. Nju karakteriziraju sljedeći uvjeti:

(1) središta klastera točke su Poissonova procesa

(2) klasteri su nezavisni i konačni s vjerojatnošću 1.

Klaster proces za koji je ispunjen uvjet (1) zovemo *Poissonovim procesom s klasterima.* Neka od osnovnih svojstava toga procesa dana su u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1.9. *Neka je proces centara klastera Poissonov s mjerom intenziteta μ_c i neka komponente klaster procesa čine nezavisnu izmjerivu familiju. Tada vrijedi*

(1) Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju pripadnoga procesa s klasterima je

$$\int_{\mathbb{Y}} p_A(y)\,\mu_c(dy) \;<\; \infty\,, \tag{2.10}$$

gdje je $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ ograničen skup.

(2) Ako proces postoji, njegov je Laplaceov funkcional oblika

$$\Psi_N(\, f\,) = \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{Y}} (1 - \Psi_{N^y}(\, f\,))\; \mu_c(dy) \right). \tag{2.11}$$

(3) Pripadni proces ima mjere prvog i drugog faktorijel momenta koje su za proizvoljne $A,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ dane redom sa:

$$M_1(A) = M_{[1]}(A) = \int\limits_{\mathbb{Y}} M_{[1]}^{y}(A)\, \mu_c(dy), \tag{2.12}$$

$$M_{[2]}(\, A \times B\,) = \int\limits_{\mathbb{Y}} M_{[2]}^{y}(\, A \times B\,)\, \mu_c(dy) + M_1(A)M_1(B). \tag{2.13}$$

Dokaz. Kako je $\mathbb{E}[\, N_c(dy)\,] = M^c(dy) = \mu_c(dy)$ za Poissonov proces s klasterima, onda uvjet (2.10) povlači konvergenciju (g.s.) integrala u (2.4) te stoga i egzistenciju procesa, tj. pokazali smo dovoljnost od (2.10).
Ako proces postoji, iz izraza (2.9) i Teorema 1.5.4 slijedi

$$\begin{aligned}
\Psi_N(\, f\,) &= \Psi_{N_c}\left(\, -\log \Psi_{N^\bullet}(\, f\,)\,\right) \\
&= \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{Y}} (\, 1 - e^{\log \Psi_{N^y}(\, f\,)}\,)\, \mu_c(dy) \right) \\
&= \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{Y}} (\, 1 - \Psi_{N^y}(\, f\,)\,)\, \mu_c(dy) \right).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi (2).

Uzmemo li da je $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$, vrijedi

$$\begin{aligned}
1 - \Psi_{N^y}(\mathbf{1}_A) &= 1 - \mathbb{E}[e^{-N^y(A)}] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}\, \mathbb{P}(N^y(A) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N^y(A) = k) - \mathbb{P}(N^y(A) = 0) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}\mathbb{P}(N^y(A) = k) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N^y(A) = k) - \mathbb{P}(N^y(A) = 0) \\
&= \mathbb{P}(N^y(A) \geqslant 0) - \mathbb{P}(N^y(A) = 0) \\
&= \mathbb{P}(N^y(A) > 0)
\end{aligned}$$

iz čega slijedi nužnost uvjeta (2.10), jer vrijedi (2.11). Time smo pokazali da vrijedi (1).
Relacije (2.12) i (2.13) poseban su slučaj relacija (2.6) i (2.8) za Poissonov proces.

□

2.2 Primjeri

Primjer 2.2.1. *(Bartlett-Lewisov model; klaster proces slučajne šetnje; Poissonov proces grananja.) Pretpostavimo da je $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ i da su točke klastera uzastopne točke u konačnoj slučajnoj šetnji počevši od centra klastera kojega uključujemo u klaster proces. Poseban je slučaj slučajna šetnja s koracima u jednom smjeru u $\mathbb{R}$ (tj. konačni proces obnavljanja.). Preciznije, neka je $(X_n)_{n\geqslant 1}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Definiramo li slučajnu šetnju sa $S_0 := 0$, a $S_n = X_1 + X_2 + \dots X_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, odgovarajući klaster proces sa središtem u y možemo zapisati kao $N^y = \sum_{n\leqslant K} \delta_{y+S_n}$. Pritom je K diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, \dots, \infty\}$. Primjerice K ima geometrijsku razdiobu, tj. $K \sim G(p)$, $p \in (0,1)$. Slučajne varijable X_n modeliraju točke klastera sa središtem u y (različite od samoga središta y), a K broj točaka nakon kojih završava šetnja koja je krenula iz y. Ovaj primjer slučajne šetnje korišten je za modeliranje cestovnoga prometa (Bartlett, 1963.) te modeliranje nekih kompjuterskih kvarova (Lewis, 1964.).*
Čini se da zatvoreni oblik za $\Psi_{N^y}(f)$ ne postoji. Pretpostavimo li da su i duljine

koraka i broj koraka šetnje nezavisni od mjesta centra klastera, vrijedi

$$\Psi_{N^y}(\,-\log(f)\,) =$$

$$f(y)\left(q_0 + q_1 \int_{\mathbb{X}} f(y+x_1)F(dx_1) + q_2 \int_{\mathbb{X}^2} f(y+x_1)\, f(y+x_1+x_2)F(dx_1)F(dx_2) + \dots\right),$$

gdje je q_j vjerojatnost da šetnja završi nakon $j \in \mathbb{N}_0$ koraka, a F zajednička distribucija duljine koraka šetnje. Uočimo da zbog pretpostavke o nezavisnosti duljina i broja koraka šetnje od mjesta centra klastera vrijedi

$$N^y(A-y) \stackrel{d}{=} \sum_{n \leqslant K} \delta_{S_n}(A),$$

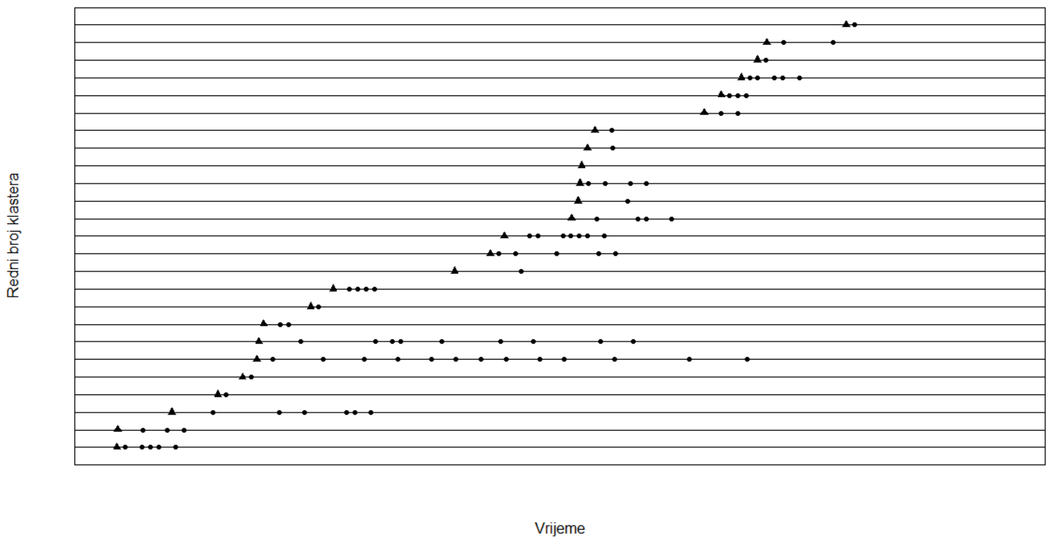
tj. klaster proces je stacionaran. Kao ilustraciju možete pogledati sliku 2.1. Zbrojimo li točke po horizontalnim linijama dobivamo opisani proces s klasterima. Neformalno rečeno, jedan klaster čini njegovo središte i točke pripadne jednosmjerne slučajne šetnje u $\mathbb{R}$. Taj je klaster prikazan na odgovarajućoj horizontalnoj osi na slici. Njegov je centar na slici istaknut trokutom.
Izrazi za najbližu točku i najmanju udaljenost dvije susjedne točke mogu se dobiti za slučaj jednosmjerne šetnje u $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ s pripadnom funkcijom distribucije F. Naime, vjerojatnost $p_y(t)$ da klaster s centrom u y ima točku u intervalu $(0,t)$ dana je sa

$$p_y(t) = \begin{cases} 0 & y > t, \\ 1 & 0 \leqslant y \leqslant t, \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} r_{i+1} \int\limits_0^{|y|} [\, F(\,|y| + t - x\,) - F(\,|y| - x\,)\,]\; dF^{i*}(x) & y < 0, \end{cases}$$

gdje je $r_i = \sum_{j=i}^{\infty} q_j$, a F^{i*} i-ta konvolucija funkcije distribucije sa samom sobom, tj. $F^{i*} = F^{(i-1)} * F$.

Promotrimo sad i jedan poseban slučaj ovoga procesa. I dalje pretpostavljamo da je $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Primjer 2.2.2. *(Gauss-Poissonov proces: proces koreliranih parova; Bol'shakov, 1969.; Newman, 1970.; Milne i Wescott, 1972.) Kod ovoga procesa klasteri sadrže ili jednu ili dvije točke, pa proces postoji ako i samo ako proces centara klastera postoji. Jedna od točaka predstavlja centar klastera. Označimo sa $F(dx \,|\, y)$ distribuciju druge točke uvjetovanu prvom te neka su $q_1(y)$, $q_2(y)$ vjerojatnosti pojavljivanja jedne, odnosno dvije točke, respektivno za centar u točki y. Uočimo da su točke korelirane, tj.*



Slika 2.1: Proces s klasterima koje čine središta klastera i točke konačne jednostrane slučajne šetnje na $(0, \infty)$. Točke klastera možemo interpretirati kao vremena nastanaka kompjuterskih kvarova. Točke na pojedinoj horizontalnoj liniji pripadaju istom klasteru. Centar klastera označena je sa $\blacktriangle$.

nemamo pretpostavku nezavisnosti iz prethodnoga primjera. Zato se proces i zove procesom koreliranih parova. Tada je, slično kao u Primjeru 2.2.1 Laplaceov funkcional za $-\log f$ *dan je sa*

$$\Psi_{N^y}(-\log f) = f(y)\, q_1(y) + f(y)\, q_2(y) \int\limits_{\mathbb{X}} f(x)\, F(dx \mid y).$$

Uzimajući u obzir da je $q_1(y)+q_2(y) = 1$ *te* $\int_{\mathbb{X}} F(dx \mid y) = 1$ *iz* (2.11) *za odgovarajući* *proces dobivamo*

$$
\begin{aligned}
\log\left(\,\Psi_N(-\log(f))\,\right) \;=\; & \int_{\mathbb{X}} \left(\;\Psi_{N^y}(-\log(f)\,) - 1\;\right)\mu(dy) \\
= & \int_{\mathbb{X}} \left(\,\Psi_{N^y}(-\log(f)\,) - q_1(y) - q_2(y)\,\right)\,\mu(dy) \\
= & \int_{\mathbb{X}} \left(q_1(y)\,(f(y)-1) + q_2(y) f(y) \int_{\mathbb{X}} f(x)\,F(dx\,|\,y) - q_2(x) \int_{\mathbb{X}} F(dx\,|\,y) \right) \mu(dy) \\
= & \int_{\mathbb{X}} q_1(y)\,(f(y)-1)\,\mu(dy) + \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} q_2(y)\,(f(y)f(x)-1)\,F(dx\,|\,y)\,\mu(dy).
\end{aligned}
$$

Poglavlje 3

Primjene u aktuarstvu

U ovom ćemo se poglavlju baviti primjenama procesa s klasterima u aktuarstvu. Svaka točka točkovnog procesa centara na $(0, \infty)$ predstavlja početak jedne skupine aktivnosti. Tu točku interpretiramo kao vrijeme dolaska zahtjeva za isplatu štete koji pokreće niz slučajnih isplata šteta osiguranicima. U ovom su poglavlju središta klastera točke homogenoga Poissonova procesa. Model uključuje i takozvanu *chain ladder* metodu koja aktuarima služi kako bi na temelju podataka iz prošlih godina procijenili ukupni broj isplata i ukupni iznos isplata u nekom budućem periodu. Proučit ćemo i problem predviđanja budućeg broja, odnosno iznosa isplata u slučaju kad je proces ispate Poissonov.

3.1 Općeniti klaster proces u aktuarstvu

Prisjetimo se definicije procesa s klasterima i Propozicije 2.1.2 koja kaže da je i klaster sa slučajno odabranim centrom točkovni proces. Pretpostavimo da vrijede sljedeći uvjeti:

(1) Zahtjevi za isplatu šteta dolaze u slučajnim vremenima $0 < Y_1 < Y_2 < ...$, za $i = 1, 2, \ldots$ koja predstavljaju točke procesa centara N_c .

(2) Zahtjev i uzrokuje slučajan niz ili klaster isplata osiguraniku, a isplata j zahtjeva i pozitivna je slučajna varijabla Z_{ij} koja se izvrši u vremenu

$$Y_{ij} = Y_i + \sum_{k=1}^{j} X_{ik}, \quad 1 \leqslant j \leqslant K_i,$$

gdje je $(X_{ik})_{k \geqslant 1}$ niz pozitivnih slučajnih varijabli i K_i pozitivna cjelobrojna slučajna varijabla.

Dakle, naš je proces s klasterima oblika

$$N = \sum_{Y_i \in N_c} N^{Y_i} = \sum_{Y_i \in N_c} \sum_{j=1}^{K_i} \delta_{Y_{ij}} = \sum_{j=1}^{K_1} \delta_{Y_{1j}} + \sum_{j=1}^{K_2} \delta_{Y_{2j}} + \dots .$$

Kako je u aktuarstvu bitno pamtiti i iznose isplate, a ne samo vremena isplata, naša definicija procesa s klasterima nije dovoljna. Poslužit ćemo se označenim točkovnim procesima.
Uočimo da je proces ispate $i-$toga zahtjeva opisan slučajnim parom (Y_{ij}, Z_{ij}), $j = 1, 2, \dots K_i$. $i-$ti je zahtjev isplaćen u vremenu $Y_{iK_i} = Y_i + \sum_{k=1}^{K_i} X_{ij}$ i on ima iznos $\sum_{k=1}^{K-i} Z_{ij}$. Za ilustraciju možete vidjeti sliku 3.1.
Vrijeme dolaska zahtjeva za isplatu Y_i označavamo slučajnim elementom $A_i : \Omega \to E_A$ definiranim sa

$$A_i(\omega) = (\, (X_{ik}(\omega))_{k \geqslant 1},\, (Z_{ik}(\omega))_{k \geqslant 1},\, K_i(\omega)\,), \quad i = 1, 2, \dots ,$$

gdje je $E_A = (0, \infty)^\infty \times (0, \infty)^\infty \times \mathbb{N}$, a $(0, \infty)^\infty$ označava prostor nizova s pozitivnim komponentama, tj.

$$(0, \infty)^\infty = \{\, (x_k)_{k \geqslant 1} : x_k \in (0, \infty)\, \}.$$

Stoga naš proces s klasterima N definiramo kao

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(Y_i,\, A_i)}, \tag{3.1}$$

tj. to je označeni proces na prostoru $E = (0, \infty) \times E_A$. No, je li prostor E uopće euklidski prostor? Pokaže se da za nizove $x = (x_k)$ i $y = (y_k)$ na $(0, \infty)^\infty$ metrika

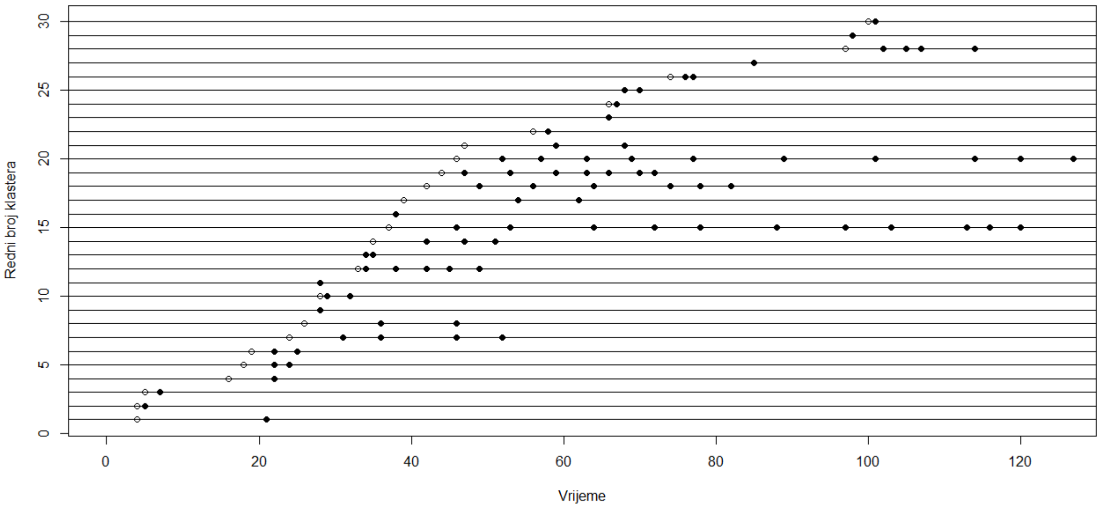
$$\rho(x, y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

čini $(\,(0, \infty)^\infty,\, \rho\,)$ potpunim separabilnim metričkim prostorom (vidjeti Billingsley [1], Dodatak 1). Produktni su prostori E_A i $E = (0, \infty) \times E_A$ također potpuni separabilni metrički prostori. Stoga možemo definirati otvorene skupove u E, odnosno E_A koji generiraju pripadne Borelove $\sigma-$algebre (vidjeti Billingsley [1] za uvod u teoriju vjerojatnosti na potpunim metrički prostorima).

Chain ladder **metoda**

Chain ladder model koristi se često za procjenu pričuva. Za opis modela uvodimo *vremenske periode* (recimo godine):

$$C_i \;=\; (\, i - 1,\, i\,], \qquad i = 1, 2, \dots$$



Slika 3.1: Vizualizacija vremena isplate zahtjeva. Svaka horizontalna linija odgovara jednom zahtjevu za isplatu štete, odnosno jednom klasteru. Središta klastera označena su sa $\circ$. Ona ne pripadaju samom klasteru. Iznimno, ako nakon nekog vremena pristizanja zahtjeva ne slijedi niti jedno vrijeme isplate, onda vrijeme dolaska zahtjeva, tj. središte klastera čini taj klaster.

te *združene vremenske periode*

$$C_{i,i+j} \;=\; C_i \cup \ldots \cup C_{i+j} \;=\; (\,i-1,\; i+j\,], \qquad j = 0, 1, \ldots\,.$$

Sa $N_{i,i+j}$ i $S_{i,i+j}$ označimo broj i iznos ukupnih zahtjeva koji su pristigli u godini C_i i za koje se isplata izvršila u periodu $C_{i,i+j}$, $j = 0, 1, \ldots$. Za proces s klasterima definiran sa (3.1) broj pristiglih zahtjeva ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}
N_{i,i+j} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{K_n} \mathbf{1}_{\{\,Y_n \in C_i,\, Y_{nl} \in C_{i,i+j}\,\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{K_n} \mathbf{1}_{\{\,Y_n \in C_i,\, Y_n + (\,X_{n1} + \ldots X_{nl}\,) \in C_{i,i+j}\,\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(Y_n,\, ((\,X_{nk}\,)_{k \geqslant 1},\, (\,Z_{nk}\,)_{k \geqslant 1},\, K_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(\,Y_n,\, A_n\,) \;=\; \int_E f\, dN \\
&= \int_E \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{\,y \in C_i,\, y + (\,x_1 + \ldots x_l\,) \in C_{i,i+j}\,\}}\, N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r),\, dk\,), \quad j = 0, 1, \ldots\,,
\end{aligned}$$

gdje je u predzadnjoj jednakosti korišteno (1.11).

Pripadni iznosi šteta imaju oblik:

$$\begin{aligned}
S_{i,i+j} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{K_n} Z_{nl}\, \mathbf{1}_{\{\,Y_n \in C_i,\, Y_{nl} \in C_{i,i+j}\,\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{K_n} Z_{nl}\, \mathbf{1}_{\{\,Y_n \in C_i,\, Y_n + (\,X_{n1} + \ldots X_{nl}\,) \in C_{i,i+j}\,\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g(Y_n,\, ((\,X_{nk}\,)_{k \geqslant 1},\, (\,Z_{nk}\,)_{k \geqslant 1},\, K_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g(\,Y_n,\, A_n\,) \;=\; \int_E g\, dN \\
&= \int_E \sum_{l=1}^{k} z_l\, \mathbf{1}_{\{\,y \in C_i,\, y + (\,x_1 + \ldots x_l\,) \in C_{i,i+j}\,\}}\, N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r),\, dk\,), \quad j = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Chain ladder niz je parova $(N_{i,i+j}, S_{i,i+j})$ $i = 1, 2, \ldots, m,\ 1 \leqslant i + j \leqslant m$ sljedećeg oblika:

$$\begin{array}{rrrr}
(N_{11}, S_{11}) & (N_{12}, S_{12}) & (N_{13}, S_{13}) \dots & (N_{1m}, S_{1m}) \\
 & (N_{22}, S_{22}) & (N_{23}, S_{23}) \dots & (N_{2m}, S_{2m}) \\
 & & (N_{33}, S_{33}) \dots & (N_{3m}, S_{3m}) \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & (N_{mm}, S_{mm}).
\end{array}$$

Ako C_m predstavlja sadašnju godinu, *chain ladder* niz sadrži potpune (više)godišnje informacije o svim isplatama zahtjeva u prethodnim i sadašnjoj godini. Informacija se sastoji od broja isplata $N_{i,i+j}$ i odgovarajućeg iznosa $S_{i,i+j}$ za zahtjev koji je pristigao u godini C_i za neko $i \leqslant m$ i koji je isplaćen u periodu $C_{i,i+j}$, $i + j \leqslant m$. Predviđanje elemenata N_{ij} i S_{ij} jedan je od najvažnijih praktičnih problema u aktuarstvu.

3.2 Poissonov proces s klasterima u aktuarstvu

Pretpostavke modela

Prisjetimo se da je

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(Y_i,\, A_i)} \quad \text{i} \quad A_i = (\, (X_{ik})_{k \geqslant 1},\, (Z_{ik})_{k \geqslant 1},\, K_i\,), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Osim uvjeta (1) i (2) na stranici 26 pretpostavimo i sljedeće:

(3) Vremena dolazaka zahtjeva $0 < Y_1 < Y_2 < \dots$ točke su homogenog Poissonova procesa na $(0, \infty)$ s intenzitetom $\lambda > 0$.

(4) Niz $A := (A_i)_{i \geqslant 1}$ sastoji se od nezavisnih i jednako distribuiranih elemenata s funkcijom distribucije F_A na E_A. To znači da su različiti zahtjevi međusobno nezavisni i imaju istu distribuciju.

(5) Nizovi $A = (A_i)_{i \geqslant 1}$ i $Y := (Y_i)_{i \geqslant 1}$ međusobno su nezavisni.

(6) Niz $Z := (Z_{ik})_{k \geqslant 1}$ sastoji se od pozitivnih iznosa šteta koji imaju funkciju distribucije F.

(7) Za svako $i \geqslant 1$, cjelobrojna slučajna varijabla K_i i nizovi $Z = (Z_{ik})_{k \geqslant 1}$ i $X := (X_{ik})_{k \geqslant 1}$ međusobno su nezavisni.

Označimo još sa F_X i F_K zajedničku funkciju distribucije niza X, odnosno niza K. Iako je K_i cjelobrojna slučajna varijabla, proučavat ćemo i slučaj kad je $K_i = \infty$ (g.s.), primjerice kad točke $\sum_{k=1}^{j} X_{ik}$, $j = 1, 2, \ldots$ tvore Poissonov proces.

Točke (Y_i, A_i), $i = 1, 2, \ldots$ predstavljaju točke Poissonove slučajne mjere N na prostoru E. Kako je distribucija PRM-a N određena njegovom mjerom očekivanja na E, a N označeni PRM, njegova mjera očekivanja ima produktni oblik

$$\lambda \,|\cdot|\, \times \mu_A,$$

gdje je μ_A mjera na E_A koja je u $1-1$ korespondenciji sa F_A. Ona također ima produktni oblik

$$\mu_A = \mu_X \times \mu_Z \times \mu_K,$$

gdje su μ_X, μ_Z i μ_K mjere koje su u $1-1$ korespondenciji s funkcijama distribucije F_X, F_Z, odnosno F_K. Uočimo još da je $F_Z = F^\infty = F \times F \times \cdots$ beskonačni produkt funkcija distribucije koje su u $1-1$ korespondenciji s mjerom na $(0, \infty)$, budući da je Z niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F.

Stoga smo definirali označeni PRM$(\lambda \,|\cdot|\, \times \mu_A)$ oblika

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(Y_i,\, A_i)}.$$

Za ovakav točkovni proces možemo definirati Poissonove integrale i oni će imati ista svojstva kao integrali na konačno-dimenzionalnom euklidskom prostoru E.

Napomena 3.2.1. *Primijetimo da vrijedi*

(a) Kako je $E = (0, \infty) \times E_A$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} N_{i,i+j} &= \int_E \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{\, y \in C_i,\, y + (\, x_1 + \ldots x_l\,) \in C_{i,i+j} \,\}} \, N(\, dy,\, d(x_r),\, d(z_r),\, dk\,) \\ &= \int_{C_i \times E_A} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{\, y + (\, x_1 + \ldots x_l\,) \in C_{i,i+j} \,\}} \, N(\, dy,\, d(x_r),\, d(z_r),\, dk\,), \quad j \geqslant 0 \quad (3.2) \end{aligned}$$

i

$$S_{i,i+j} = \int_E \sum_{l=1}^{k} z_l \mathbf{1}_{\{\,y\in C_i,\, y+(\,x_1+\ldots x_l\,)\in C_{i,i+j}\,\}}\, N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r)\, dk\,)$$
$$= \int_{C_i\times E_A} \sum_{l=1}^{k} z_i \mathbf{1}_{\{\,y+(\,x_1+\ldots x_l\,)\in C_{i,i+j}\,\}}\, N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r),\, dk\,), \quad j\geqslant 0. \tag{3.3}$$

Nizovi $((N_{i,i+j}, S_{i,i+j}))_{j\geqslant 0}$ *za* $i = 1,2,\ldots$ *međusobno su nezavisni. To slijedi iz činjenice da su područja integracije* $C_i \times E_A$ *u Poissonovim integralima u* (3.2) *i* (3.3) *disjunktna za različite godine* C_i *i Leme 1.5.6 primijenjene za slučaj općenitog prostora stanja* E*.*

(b) *Vrijedi da je* $(N_{i,i+j})_{j\geqslant 0} \overset{d}{=} (N_{1,1+j})_{j\geqslant 0}$ *te* $(S_{i,i+j})_{j\geqslant 0} \overset{d}{=} (S_{1,1+j})_{j\geqslant 0}$*. To slijedi iz međusobne nezavisnosti nizova* (Y_n) *i* (A_n) *te homogenosti Poissonova procesa centara s točkama* Y_n*. Stoga su nizovi Poissonovih integrala* $((N_{i,i+j}, S_{i,i+j}))_{j\geqslant 0}$ *za* $i = 1,2,\ldots$ *nezavisni i jednako distribuirani. Detalji su dani u Mikosch [4], str. 389.*

(c) *Za danu godinu* C_i *integrandi Poissonovih integrala* $N_{i,i+j}$*,* $S_{i,i+j}$ *za* $j = 0,1,\ldots$ *općenito nemaju disjunktne nosače te su stoga pripadni integrali zavisni.*

Analiza prvih i drugih momenata

Promatramo označene točkovne procese iz prethodnoga potpoglavlja bez komponente koja je predstavljala iznos štete, tj. bez niza $(Z_{ik})_{k\geqslant 1}$. Koristit ćemo iste simbole u točkovnom procesu i njegovim oznakama. Dakle, $N = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(Y_i,A_i)}$ označeni je PRM$(\lambda\,|\cdot|\times\mu_A)$ na prostoru $E = (0,\infty)\times E_A$, gdje je $E_A = (0,\infty)^{\infty}\times\mathbb{N}$ i

$$A_i = ((X_{ik})_{k\geqslant 1}, K_i).$$

Želimo odrediti očekivanu vrijednost, varijancu i kovarijacijsku strukturu procesa

$$H(b) = \int_{(0,1]\times E_A} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{y+(x_1+\ldots x_l)\in(0,b]\}}\, N(\,dy,\, d(x_r),\, dk\,), \quad b\geqslant 1. \tag{3.4}$$

Za fiksni $b\geqslant 1$ slučajna varijabla $H(b)$ modelira broj isplata šteta u periodu $(0,b]$ za koje su zahtjevi pristigli u prvoj godini $C_1 = (0,1]$. Prvi i drugi moment procesa H daju uvid u red veličine slučajnih varijabli $H(b)$, $b\geqslant 1$ te njihovu strukturu zavisnosti. Teorem 1.5.4 i Lemu 1.5.7 primjenjujemo u slučaju metričkoga prostora E označenoga procesa N za dokaz sljedeće leme.

Lema 3.2.2. *Neka je U uniformna slučajna varijabla $U \sim U(0,1)$ nezavisna od niza $(X_n) = (X_{1n})$. Označimo još $W_l = X_1 + X_2 + \ldots X_l$, $l \geqslant 1$ i $\overline{F}_K = 1 - F_K$.*

(1) Poissonovi su integrali $H(b)$, $b \geqslant 1$ (g.s.) konačni.

(2) Ako je $\mathbb{E}K < \infty$, onda $H(b)$ ima konačno očekivanje dano sa

$$\mathbb{E}[H(b)] \;=\; \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1)\, \mathbb{P}(\, U + W_l \;\leqslant\; b\,), \quad b \geqslant 1. \tag{3.5}$$

(3) Ako još vrijedi i $\mathbb{E}[K^2] < \infty$, tada za $1 \leqslant b_1 \leqslant b_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\, H(b_1),\, H(b_2)\,) \;=\; & \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1)\, l\, \mathbb{P}(\, U + W_l \;\leqslant\; b_1\,) \\ & + \lambda \sum_{l_2=1}^{\infty} \overline{F}_K(l_2 - 1) \sum_{l_1=1}^{l_2-1} \mathbb{P}(\, U + W_{l_1} \;\leqslant\; b_1,\, U + W_{l_2} \;\leqslant\; b_2\,). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Posebno, stavimo li $b_1 = b_2 = b \geqslant 1$,

$$\operatorname{Var}(H(b)) \;=\; \lambda \sum_{l=1}^{\infty} (2l-1)\, \overline{F}_K(l-1)\, \mathbb{P}(\, U + W_l \;\leqslant\; b\,) \quad < \infty\,. \tag{3.7}$$

Dokaz. (1) Trebamo pokazati da je slučajna varijabla

$$\begin{aligned} H(b) \quad &= \int\limits_{(0,1]\times E_A} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{y + w_l \in (0,b]\}}\, N(\, dy,\, d(x_r),\, dk\,) \\ &= \int\limits_{(0,\infty)\times E_A} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{\, y \in (0,1],\, y + w_l \in (0,b]\}}\, N(\, dy,\, d(x_r),\, dk\,) \end{aligned}$$

konačna s vjerojatnošću 1.
Promatrajmo funkciju

$$g_b(y,\, x,\, k) \;=\; \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{y + w_l \in (0,b]\}}\,,$$

pri čemu je $(y,\, x,\, k) \in (0,1] \times E_A$ i $w_l = x_1 + \ldots x_l$ za niz $x = (x_r)_{r \geqslant 1}$. Kako $g_b \geqslant 0$ po definiciji te je izmjeriva funkcija, a nizovi Y i A po pretpostavci međusobno nezavisni vrijedi

$$\int\limits_{E} \min(\, g_b(y,\, x,\, k),\, 1)\, dy\, F_A(dx, dk) \;\leqslant\; \int\limits_{E} F(\, dy,\, dx,\, dk\,) \;=\; 1 \quad < \infty.$$

Po Teoremu 1.5.4 (2) vrijedi da je Poissonov integral $H(b) = \int_E q_b \, dN < \infty$ (g.s.).

(2) Uočimo da je po definiciji funkcije g_b vrijedi da je $g_b \leqslant k$. Stoga je

$$H(b) = \int\limits_E g_b(y, x, k) \, N(dy, dx, dk) \quad \leqslant \quad \int\limits_E k \, N(dy, dx, dk) .$$

Po Lemi 1.5.7 (1) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int\limits_E k \, N(dy, dx, dk) \right] &= \lambda \int\limits_E k \, dy \, F_A(dx, dk) \\ &= \lambda \int\limits_{(0,\infty)\times(0,\infty)^{\infty}} dy \, F_X(dx) \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathbb{P}(K = k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathbb{P}(K = k) = \lambda \mathbb{E}K. \end{aligned}$$

U drugoj je jednakosti korišten Fubinijev teorem i činjenica da su zbog pretpostavljenih uvjeta (5) i (7) na stranici 30 za svako i slučajna varijabla K_i i niz $(Y_i, (X_{ik})_{k\geqslant 1})$ nezavisni.
Iz pretpostavke da je $\mathbb{E}K < \infty$ slijedi da slučajna varijabla $H(b)$ ima konačno očekivanje. Također, po Lemi 1.5.7 (1) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(b)] &= \lambda \int\limits_E g_b(y, x, k) \, dy \, F_A(dx, dk) \\ &= \lambda \int\limits_{(0,1]\times E_A} g_b(y, x, k) \, dy \, F_A(dx, dk) \\ &= \lambda \int\limits_{(0,1]} \int\limits_{E_A} \sum_{l=1}^{k} \mathbf{1}_{\{y+w_l\in(0,b]\}} \, F_A(dx, dk) \, dy \\ &= \lambda \int\limits_0^1 \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{K} \mathbf{1}_{\{y+W_l\leqslant b\}} \right] dy. \end{aligned}$$

Uzimanjem očekivanja podintegralne funkcije uvjetno na slučajnu varijablu K dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H(b)] &= \lambda \int_0^1 \mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{K} \mathbb{P}\,(\, y + W_l \leqslant b\,)\right) dy \\ &= \lambda\,\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{K} \mathbb{P}\,(\, U + W_l \leqslant b\,)\right],\end{aligned}$$

gdje je U uniformno distribuirana slučajna varijabla, $U \sim U(0,1)$. Uočimo da su K, U i (W_l) nezavisni, pa vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H(b)] &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K=k) \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}(\,U + W_l \leqslant b\,) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}(K=k)\,\mathbb{P}(\,U + W_l \leqslant b\,) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \mathbb{P}(K=k)\,\mathbb{P}(\,U + W_l \leqslant b\,) \\ &= \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1)\,\mathbb{P}(\,U + W_l \leqslant b\,), \quad b \geqslant 1\,.\end{aligned}$$

Dokaz za (3) možete pročitati u Mikosch [4], str. 391. □

Primjer 3.2.3. *(Broj isplata je konstantan)*
Pretpostavimo li da je broj isplata šteta K_i $i-$toga zahtjeva u prvoj godini neki unaprijed poznati cijeli broj $k \geqslant 1$ formule u Lemi 3.2.2 poprimaju jednostavniji oblik. Primjerice,

$$\mathbb{E}[H(b)] = \lambda \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}\,(\,U + W_l \leqslant b\,)\,, \quad b \geqslant 1 \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Var}(H(b)) = \lambda \sum_{l=1}^{\infty} (2l-1)\,\mathbb{P}(\,U + W_l \leqslant b\,), \quad b \geqslant 1\,. \tag{3.9}$$

Primjer 3.2.4. *(Isplate šteta na početku Poissonova procesa zaustavljanja)*
Neka u svakom vremenu dolaska Y_i zahtjeva započinje homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\gamma > 0$ i točkama $Y_{ij} - Y_i$. Poznato je da je $(X_{1k}) = (X_k)_{k \geqslant 1}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih $Exp(\gamma)$ slučajnih varijabli te stoga $W_l = X_1 + \ldots X_l$

ima $\Gamma(l, 1/\gamma)$ *distribuciju. Za neprekidne Markovljeve lance slučajne varijable* X_k *zovemo* vremenima čekanja, *a slučajne varijable* W_l vremenima skokova *pripadnog Markovljeva lanca. Poznat nam je i brojeći proces koji odgovara našem homogenom Poissonov procesu (osim što je početak tog procesa uvijek bio u nuli). Detalje možete pronaći u Vondraček [8].*
Prisjetimo se da je funkcija gustoće gama razdiobe s parametrima l *i* $1/\gamma$ *dana sa*

$$f_{W_l}(s) \;=\; e^{-\gamma s}\gamma^{l}\frac{s^{l-1}}{(l-1)!}\,, \quad s \geqslant 0.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(b)] &= \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1)\,\mathbb{P}(\,W_l \;\leqslant\; b-U\,) \\
&= \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1) \int\limits_{b-1}^{b} \mathbb{P}(\,W_l \;\leqslant\; t\,) \\
&= \lambda \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1) \int\limits_{b-1}^{b} \int\limits_{0}^{t} e^{-\gamma s}\gamma^{l}\frac{s^{l-1}}{(l-1)!}\,ds\,dt \\
&= \lambda\,\gamma \int\limits_{b-1}^{b} \int\limits_{0}^{t} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{F}_K(l-1)\,e^{-\gamma s}\,\frac{(s\,\gamma)^{l-1}}{(l-1)!}\,ds\,dt \\
&= \lambda\,\gamma \int\limits_{b-1}^{b} \int\limits_{0}^{t} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{F}_K(l)\,e^{-\gamma s}\,\frac{(s\,\gamma)^{l}}{l!}\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Označimo sa $\widetilde{N} = (\widetilde{N})_{s\geqslant 0}$ *homogeni Poissonov proces na* $(0,\infty)$ *s intenzitetom* $\gamma > 0$ *i pretpostavimo da je* $\widetilde{N}$ *nezavisan od* K. *Vrijedi*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(b)] &= \lambda\gamma \int_{b-1}^{b} \int_{0}^{t} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{F}_K(l)\, \mathbb{P}(\, \widetilde{N}(s) \,=\, l\,)\, ds\, dt \\
&= \lambda\gamma \int_{b-1}^{b} \int_{0}^{t} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\, K \,>\, l\,)\, \mathbb{P}(\, \widetilde{N}(s) \,=\, l\,)\, ds\, dt \\
&= \lambda\gamma \int_{b-1}^{b} \int_{0}^{t} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\, K \,\geqslant\, l+1,\, \widetilde{N}(s) \,=\, l\,)\, ds\, dt \\
&= \lambda\gamma \int_{b-1}^{b} \int_{0}^{t} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\, K \,\geqslant\, \widetilde{N}(s)+1 \,|\, \widetilde{N}(s) = l\,)\, \mathbb{P}(\, \widetilde{N}(s) = l\,) ds\, dt \\
&= \lambda\gamma \int_{b-1}^{b} \int_{0}^{t} \mathbb{P}(\, K \,\geqslant\, \widetilde{N}(s)+1\,)\, ds\, dt.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da je $K \sim G(p)$, tj. geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p \in (0,1)$. Tada je $\mathbb{P}(K = k) = p(1-p)^{k-1}$, za $k = 1, 2, \ldots$. Primjenom Fubinijeva teorema i jednostavnim računom dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(b)] &= \lambda\gamma \left[\int_{0}^{b-1} e^{-\gamma p s}\, ds + \int_{b-1}^{b} (b-s)\, e^{-\gamma p s}\, ds \right] \\
&= \frac{\lambda}{p} \left(1 - \frac{e^{-\gamma p b}\, (e^{\gamma b} - 1)}{\gamma p} \right).
\end{aligned}
$$

Poissonov proces s Poissonovim klasterima

Pretpostavimo sad da je $K_i = \infty$ (g.s.) te da točke $Y_{ij} - Y_i = \sum_{k=1}^{j} X_{ik}$ čine Poissonov proces na $(0, \infty)$ s mjerom intenziteta μ. Stoga, opisani PRM N ima točke $(\, Y_i,\, A_i\,)$, gdje je

$$A_i \,=\, ((X_{ik})_{k\geqslant 1},\, (Z_{ik})_{k\geqslant 1}) \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Prostor je stanja $E = (0,\infty) \times E_A$, gdje je $E_A = (0,\infty)^{\infty} \times (0,\infty)^{\infty}$. Zanimaju nas slučajni procesi

$$
\begin{aligned}
H(b) &= \int\limits_{(0,1]\times E_A} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{y+w_l\in(0,b]\}} N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r)\,) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\,Y_i\in(0,1],\, Y_{il}\in(0,b]\,\}}, \qquad b \geqslant 1, \\
S(b) &= \int\limits_{(0,1]\times E_A} \sum_{l=1}^{\infty} z_l \mathbf{1}_{\{y+w_l\in(0,b]\}} N(\,dy,\, d(x_r),\, d(z_r)\,) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} Z_{il}\, \mathbf{1}_{\{\,Y_i\in(0,1],\, Y_{il}\in(0,b]\,\}}, \qquad b \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

$M(b)$ predstavlja broj isplata osiguraniku u periodu $(0, b]$, a $S(b)$ pripadni iznos isplata šteta čiji su zahtjevi pristigli u periodu $(0, 1]$. Reprezentacija tih veličina pomoću Poissonova integrala dana je sa

$$
\begin{aligned}
H(b) &= \int\limits_{(0,1]\times E_A} g_b\, dN, \qquad \text{gdje je} \qquad g_b(y, x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{y+w_l\in(0,b]\}}, \\
S(b) &= \int\limits_{(0,1]\times E_A} h_b\, dN, \qquad \text{gdje je} \qquad h_b(y, x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} z_l\, \mathbf{1}_{\{y+w_l\in(0,b]\}}.
\end{aligned}
$$

Uvedimo oznaku $\mu(y) := \mu[0, y]$, za $y \geqslant 0$.

Lema 3.2.5. *(Očekivanje, varijanca i kovarijacijska struktura H(b) i S(b))*

(1) Za proizvoljno $b \geqslant 1$ vrijedi,

$$
\mathbb{E}[H(b)] = \lambda \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\, dy \quad i \quad \mathbb{E}[S(b)] = \lambda \mathbb{E} Z_{11} \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\, dy,
$$

pri čemu pretpostavljamo da je $\mathbb{E}Z_{11} < \infty$ (za $\mathbb{E}[S(b)]$).

(2) Za $1 \leqslant b_1 \leqslant b_2$,

$$
\mathrm{Cov}(H(b_1),\, H(b_2)) = \lambda \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\, [\, 1 + \mu(b_2 - b_1 + y)\,]\, dy,
$$

$$\mathrm{Cov}(S(b_1),\, S(b_2)) \;=\; \lambda \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\,[\,\mathbb{E}(Z_{11}^2) + (\mathbb{E}Z_{11})^2\,\mu(b_2 - b_1 + y)\,]\,dy,$$

pri čemu pretpostavljamo da je $\mathrm{Var}(Z_{11}) \;<\; \infty$ *(za* $\mathrm{Cov}(S(b_1),\, S(b_2))$*).*

Dokaz. Po pretpostavci je

$$\Pi(y) := \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{W_l \leqslant y\}} \;=\; \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{W_l}((0, y]), \qquad y > 0$$

Poissonov proces na $(0, \infty)$ s mjerom intenziteta μ. Iz Leme 1.5.7 (1) i reprezentacije $H(b)$ pomoću Possonova integrala za $b \geqslant 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(b)] \;&=\; \lambda \int\limits_{(0,1]\times E_A} g_b(y, x, z)\,dy\,F_A(\,dx,\,dz\,) \;=\; \lambda \int\limits_{0}^{1} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{y+W_l \in (0,b]\}}\right] dy \\
&=\; \lambda \int\limits_{0}^{1} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{W_l \leqslant b-y\}}\right] dy \;=\; \lambda \int\limits_{0}^{1} \mathbb{E}\Pi(b-y)\,dy \;=\; \lambda \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Pritom smo u zadnjoj jednakosti koristili jednostavne zamjene varijabli $s = b - y$ te $t = s$. Slično, za niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli $(Z_l) = (Z_{1l})$ koji je nezavisan od niza $(X_l) = (X_{1l})$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(b)] \;&=\; \lambda \int\limits_{(0,1]\times E_A} h_b(y, x, z)\,dy\,F_A(\,dx,\,dz\,) \;=\; \lambda \int\limits_{0}^{1} \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty} Z_l\, \mathbf{1}_{\{y+W_l \in (0,b]\}}\right] dy \\
&=\; \lambda\, \mathbb{E}Z_{11} \int\limits_{0}^{1} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(\,W_l \leqslant b-y)\;dy \int\limits_{0}^{1} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\,W_l\,\leqslant\, b-y\,\}}\right]\,dy \\
&=\; \lambda\, \mathbb{E}Z_{11} \int\limits_{0}^{1} \mathbb{E}\Pi(b-y)\,dy \;=\; \lambda\, \mathbb{E}Z_{11} \int\limits_{b-1}^{b} \mu(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi (1). Pretpostavimo da je $1 \;\leqslant\; b_1 \;\leqslant\; b_2$. Kako su prirasti Poissonova procesa nezavisni, lako se dokaže da je $\mathrm{Cov}(\Pi(s),\, \Pi(t)) \;=\; \mathrm{Cov}(\Pi(s),\, \Pi(s)) \;=$

$\mathrm{Var}(\Pi(s)) = \mu(s)$, za $s \leqslant t$. Iz Leme 1.5.7 (3) slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(H(b_1),\, H(b_2)) \\
&= \lambda \int\limits_{(0,1]\times E_A} g_{b_1}(y,x,z)\, g_{b_2}(y,x,z)\, dy\, F_A(\, dx,\, dz\,) \\
&= \lambda \int\limits_0^1 \mathbb{E}\left(\sum_{l=1_1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{y+W_{l_1} \leqslant b_1\}} \sum_{l=1_2}^{\infty} \mathbf{1}_{\{y+W_{l_2} \leqslant b_2\}} \right) dy \\
&= \lambda \int\limits_0^1 \left[\mathrm{Cov}\,(\,\Pi(b_1-y),\, \Pi(b_2-y)) \,+ \mathbb{E}\Pi(b_1-y)\, \mathbb{E}\Pi(b_2-y)\right] dy \\
&= \lambda \int\limits_0^1 \mu(b_1-y)\, [\,1+\mu(b_2-y)\,]\, dy \,=\, \int\limits_{b_1-1}^{b_1} \mu(y)\, [\,1+\mu(b_1-b_2+y)\,]\, dy.
\end{aligned}$$

U predzadnjem redu primijenili smo jednostavnu činjenicu da je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$. U posljednjoj smo jednakosti koristili supstitucije $s = b_1 - y$ te $y = s$. Definirajmo sada *složeni Poissonov proces*

$$C(y) := \sum_{l=1}^{\Pi(y)} Z_l \,=\, \sum_{l=1}^{\Pi(y)} Z_l\, \mathbf{1}_{\{W_l \leqslant y\}}, \quad y \geqslant 0.$$

On također ima nezavisne priraste, pa za njegovu kovarijacijsku funkciju vrijedi $\mathrm{Cov}(C(s),\, C(t)) = \mathrm{Var}(C(s))$, za svako $s \leqslant t$. Stoga vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}(S(b_1),\, S(b_2)) \\
&= \lambda \int\limits_{(0,1]\times E_A} h_{b_1}(y,x,z)\, h_{b_2}(y,x,z)\, dy\, F_A(\, dx,\, dz\,) \\
&= \lambda \int\limits_0^1 \mathbb{E}\left(\sum_{l=1_1}^{\infty} Z_{l1}\, \mathbf{1}_{\{y+W_{l_1} \leqslant b_1\}} \sum_{l=1_2}^{\infty} Z_{l2}\, \mathbf{1}_{\{y+W_{l_2} \leqslant b_2\}} \right) dy \\
&= \lambda \int\limits_0^1 [\operatorname{Cov}\left(\, C(b_1-y),\, C(b_2-y)\,\right) + \mathbb{E}C(b_1-y)\, \mathbb{E}C(b_2-y)]\; dy \\
&= \lambda \int\limits_0^1 \mu(b_1-y)\; [\, 1+\mu(b_2-y)\,]\; dy \\
&= \int\limits_{b_1-1}^{b_1} \mu(y)\; \big[\, \mathbb{E}(Z_{11}^2) + (\mathbb{E}Z_{11})^2 \mu(b_2-b_1+y)\,\big]\; dy.
\end{aligned}
$$

$\square$

Predviđanje broja zahtjeva i ukupnog iznosa šteta

Želimo izračunati sljedeća uvjetna očekivanja

$$\mathbb{E}[H(b,\, b+x] \,|\, H(b)] \quad \text{i} \quad \mathbb{E}[S(b,\, b+x] \,|\, H(b)] \quad \text{za} \quad b \geqslant 1,$$

pri čemu su $H(b, b+x]$ i $S(b, b+x]$ prirasti procesa $(H(s))_{s\geqslant 1}$ i $(S(s))_{s\geqslant 1}$, respektivno na intervalu $(b, b+x]$ za proizvoljno $x > 0$. Drugim riječima, želim predvidjeti (u srednje kvadratnom smislu) broj isplata u periodu $(b, b+x]$ i pripadajući ukupni iznos šteta zahtjeva koji su pristigli u periodu $(0, 1]$ i isplaćeni su u $(0, b]$. Uočimo sljedeće

$$
\begin{aligned}
H(b) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k\in(0,1],\, Y_k+W_{kl}\in(0,b]\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k\in(0,1]\}} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{W_{kl} \leqslant b-Y_k\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k\leqslant 1\}}\, \Pi_k(b-Y_k) = \sum_{k=1}^{\widetilde{N}(1)} \Pi_k(b-Y_k).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Pritom vrijedi

$$\Pi_k(y) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{W_{kl}\leqslant y\}}\,, \quad \widetilde{N}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k\leqslant y\}}\,, \quad y \geqslant 0.$$

Niz (Π_k) sastoji se od nezavisnih i jednako distribuiranih Poissonovih procesa na $(0, \infty)$ sa zajedničkom mjerom intenziteta μ te je nezavisan od homogenoga Poissonova procesa $\widetilde{N}$ koji ima intenzitet λ.
Iz (3.10) vidimo da je σ-algebra generirana sa $H(b)$ sadržana u $\sigma-$algebri generiranoj nizovima $(\Pi_i(b - Y_i))$ i (Y_i). Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H(b,\, b+x] \,|\, H(b)] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k \leqslant y\}} \Pi_k(b - Y_k,\, b + x - Y_k) \middle| (\Pi_i(b - Y_i)),\, (Y_i)\right] \middle| H(b)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Y_k \leqslant y\}} \mathbb{E}\left[\Pi_k(b - Y_k,\, b + x - Y_k) \middle| \Pi_k(b - Y_k),\, Y_k\right] \middle| H(b)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y_k \leqslant y\}}\, \mathbb{E}\left[\Pi_k(b - Y_k,\, b + x - Y_k) \middle| \Pi_k(b - Y_k),\, Y_k\right] \middle| H(b)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\, \mathbf{1}_{\{Y_k \leqslant y\}}\, \mu(b - Y_k,\, b + x - Y_k) \,|\, H(b)\,\right]
\end{aligned}$$

U računu smo redom koristili uvjetni Beppo-Levijev teorem, nezavisnost nizova $(\Pi_i(b - Y_i))$ i (Y_i) i jedno od svojstava uvjetnoga matematičkog očekivanja, pa ponovno uvjetni Bepp-Levijev teorem i na kraju nezavisnost prirasta procesa Π_k i jedno od svojstava uvjetnog matematičkog očekivanja.
Slično, uvjetno na $H(b)$ dobijemo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[S(b,\, b+x] \,|\, H(b)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^{\infty} Z_{kl} \mathbf{1}_{\{Y_k \leqslant 1,\, W_{kl} \in (b - Y_k,\, b + x - Y_k]\}} \middle| (W_{kl})_{k,\, l \geqslant 1},\, (Y_i)\right] \middle| H(b)\right] \\
&= \mathbb{E}Z_{11}\, \mathbb{E}[H(b,\, b+x] \,|\, H(b)].
\end{aligned}$$

Ako je Π homogeni Poissonov proces, možemo eksplicitno izračunati $\mathbb{E}[H(b,\, b + x] \,|\, H(b)]$. To je sadržaj sljedeće propozicije.

Propozicija 3.2.6. *Pretpostavimo da je* Π *homogeni Poissonov proces na* $(0,\, \infty)$ *s* *intenzitetom $\gamma > 0$. Za proizvoljno $m = 0, 1, \ldots$ i $b > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[H(b,\, b+x] \,|\, H(b) \;=\; m] \;=\; \lambda\,\gamma\,x\,\frac{\phi_1^{(m)}(\gamma)}{\phi_2^{(m)}(\gamma)},$$
$$\mathbb{E}[S(b,\, b+x] \,|\, H(b) \;=\; m] \;=\; \lambda\,\gamma\,x\,\mathbb{E}Z_{11}\,\frac{\phi_1^{(m)}(\gamma)}{\phi_2^{(m)}(\gamma)},$$

pri čemu su $\phi_1^{(m)}$ i $\phi_2^{(m)}$ m-te derivacije Laplace-Stieltjesove transformacije slučajne varijable $\sum_{i=1}^{L+1}(b - U_i)$, odnosno $\sum_{i=1}^{L}(b - U_i)$, a L Poissonova slučajna varijabla, tj. vrijedi $L \sim P(\lambda)$ koja je nezavisna od niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli (U_i) sa zajedničkom uniformnom distribucijom $U(0, 1)$.

Dokaz propozicije možete pročitati u Mikosch [4], str. 399, mi ga ovdje nećemo navoditi. Zbog uvjeta pretpostavljenih za ovaj model, procjenitelj za $H(j,\, j+1]$ uz dano $H(1)$, $H(2)$, $\ldots$ $H(j)$ ne može biti linearna funkcija. Drugim riječima ne postoje nenegativni realni brojevi f_j tako da vrijedi

$$\mathbb{E}(\,H(j,\, j+1]|H(1), H(2), \ldots H(j)\,) \;=\; (f_j - 1)\,H(j), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.11}$$

Uvjet (3.11) jedan je od uvjeta *Mackova modela*. Taj model sadrži i pretpostavku da su N_j i S_j iz *chain ladder* modela (g.s.) pozitivni. Zato distribucija od N_j ne može biti primjerice Poissonova ili binomna, a distribucija od S_j ne može biti složena Poissonova. Upravo zato nismo proučavali Mackov model u ovom diplomskom radu.

Bibliografija

[1] Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968.

[2] Billingsley, P.: *Probability and Measure*. Wiley, New York, 1968.

[3] Daley, D.J. i D. Vere-Jones: *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume 1: Elementary Theory and Methods, Second Edition*. Springer, 2002.

[4] Mikosch, T.: *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process*. Springer, 2009.

[5] Mimica, A.: *Laplace transform*. 2015. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~amimica/index.php`.

[6] Resnick, S.I.: *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer-Verlag, New York, 2009.

[7] Sarapa, N.: *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, 2002.

[8] Vondraček, Z.: *Predavanja iz slučajnih procesa, 2013/14*. 2014. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14.html`.

Sažetak

Cilj je ovog diplomskog rada bio proučiti Poissonov proces s klasterima i njegova osnovna svojstva. Nakon prvoga poglavlja, čitatelju su poznate definicija točkovnih procesa, mjera njihovih momenata te primjene tzv. Laplaceove transformacije i Laplaceova funkcionala točkovnoga procesa. Navedeno je i nekoliko primjera točkovnih procesa te najvažniji točkovni proces, općeniti Poissonov točkovni proces ili Poissonova slučajna mjera (PRM). Pokazano je i kako se dodavanjem nezavisne koordinate točkama poznatoga PRM-a može konstruirati novi PRM. Dalje je navedena definicija i jedna karakterizacija općenitih točkovnih procesa s klasterima. Pretpostavljamo da nam je poznat proces centara klastera. Točke tog procesa generiraju klastere koji su također točkovni procesi. Zbrajanje elemenata po klasterima čini opaženi proces. Ako su središta klastera točke Poissonova procesa, riječ je o Poissonovom procesu s klasterima. U zadnjem poglavlju bavimo se primjenom Poissonova procesa s klasterima u matematici neživotnoga osiguranja. Točku Poissonova procesa interpretiramo kao vrijeme dolaska zahtjeva za isplatu štete, a klaster koji ona uzrokuje opisuje vremena i iznose isplate tog zahtjeva. Proučavamo i *chain ladder* model. Na kraju se bavimo Poissonovim procesima s Poissonovim klasterima. Analiziramo njihove prve i druge momente kako bismo predvidjeli broj i ukupan iznos isplata šteta. *Chain ladder* model i Poissnov proces s klasterima često se koriste za procjenu pričuva, što je jedan od najvažnijih praktičnih problema u aktuarstvu.

Summary

The aim of this thesis was to study the Poisson cluster process as well as its basic properties. After the first chapter the reader is familiar with the definition of point processes, their moment measures, and the application of the so called Laplace transform and the Laplace functional of the point processes. There are several examples of point processes including the most important one, the general Poisson point process or Poisson random measure (PRM). It is also shown how one can adhere an independent coordinate to the points of given PRM to construct a new PRM. In addition, there is a definition and a characterization of general point process with independent clusters. We suppose a point process of cluster centers is known. The points of the center process generate the clusters, which are also point processes. The superposition of the elements within clusters constitutes the observed process. If the cluster centers are the points of a Poisson process, we speak of a Poisson cluster process. In the final chapter we consider the applications of the Poisson cluster process in non-life insurance mathematics. A Poisson process point is interpreted as the arrival time of a claim, and the cluster that point triggers describes the times and amounts of the payment for this particular claim. We also study the chain ladder model. Lastly, we concentrate on the Poisson processes with Poisson clusters. We analyze the first and second moments of those processes in order to predict the claim number and total claim amounts. Chain ladder model and Poisson cluster process are often used to estimate reserves, which is one of the most important insurance practice problems.

Životopis

Rođena sam 8. lipnja 1991. godine u Mostaru. Nakon završene osnovne škole upisala sam Gimnaziju fra Grge Martića Mostar, opći smjer. Godine 2010. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2013. godine diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu.