Optimizacija svojstvenih vrijednosti Laplaceovog operatora

Bolfek, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Bolfek

OPTIMIZACIJA SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI LAPLACEOVOG OPERATORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, studeni 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U 18. stoljeću javlja se problem Chladnijevih oblika; različitih uzoraka koje formira pijesak prilikom vibracije metalne ploče na kojoj se nalazi [1]. Tek 19. i 20. stoljeće donose bitno otkriće da ti oblici odgovaraju svojstvenim parovima biharmonijskog operatora uz slobodne rubne uvjete. Jedan od spektakularnih primjera neuspješnog građevinskog ostvarenja zbog vibracija koji zorno prikazuje važnost rješavanja svojstvenog problema je urušavanje tek otvorenog mosta Tacoma 1940. godine, pri vjetru od samo 67 km/h [2]. Na snimkama urušavanja primijećeno je da most vibrira vrlo slično tankoj ploči u jednom od svojih svojstvenih stanja.

Čuti oblik bubnja znači donijeti zaključke o obliku bubnja pomoću zvuka kojeg proizvodi. Frekvencije kojima membrana bubnja vibrira ovise o njezinom obliku, a one su zapravo svojstvene vrijednosti Laplaceovog operatora. Za njih se zna kako ih izračunati ako je oblik poznat, no, ako znamo frekvencije, može li se predvidjeti oblik bubnja? Ako bubanj reprezentiramo kao domenu Ω u ravnini, a s λ_k označimo k-tu svojstvenu vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet na Ω, možemo preformulirati problem: što se o Ω može zaključiti ako imamo zadanu vrijednost λ_k? Ima li više rješenja? Odgovor na to pitanje je potvrdan; zaista je moguće naći dvije domene različitog oblika koje daju iste svojstvene vrijednosti, uz, naravno, neke dodatne uvjete.

Diferencijalne zadaće koje povezuju oblik domene sa svojstvenim vrijednostima Laplaceovog operatora među najzanimljivijim su problemima matematičke analize. Jedan od razloga koji ih čini toliko privlačnima je taj da objedinjuju čitav niz grana matematike. Tako nailazimo na elemente spektralne teorije, geometrije, teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, varijacijskog računa i još mnogih drugih. Osim toga, jednostavno ih je zadati, ali općenito vrlo teško riješiti. Štoviše, u ovoj problematici još uvijek postoji niz otvorenih problema.

Cilj je ovog rada fokusirati se na problem optimizacije svojstvenih vrijednosti Laplaceovog operatora uz Dirichletov i Neumannov rubni uvjet, uz različita dodatna ograničenja na domenu.

U prvom poglavlju predstavljamo funkcijske prostore i rezultate koji za njih vrijede, a koji će kasnije biti ključni elementi dokaza osnovnih teorijskih rezultata. Drugo poglavlje daje osnovnu teoriju vezanu uz linearni eliptički operator drugog reda. U trećem se poglavlju susrećemo s glavnim alatima koji će biti osnova dokaza rezultata iz četvrtog poglavlja, a koje pak za zadatak ima čitatelju približiti problem odabira domene u svrhu minimizacije prve svojstvene vrijednosti Laplaceovog operatora.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i preduvjeti

1.1 Prostori neprekidnih funkcija

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup.

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ je neprekidna na } \Omega\}$$

predstavlja linearan prostor u odnosu na uobičajene operacije zbrajanja funkcija i množenja skalarom. Definiramo pojam multiindeksa kao n-torku $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ nenegativnih cijelih brojeva te njegovu duljinu kao $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ i kažemo da je α multiindeks reda $|\alpha|$. Derivaciju funkcije u reda $|\alpha|$ definiramo s

$$\partial^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

i stavljamo $D^k u(x) = (\partial^\alpha u(x), |\alpha| = k)$. Nadalje, za svaki k iz $\mathbb{N}$ možemo definirati potprostor od $C(\Omega)$; prostor funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama do uključivo reda k:

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega),\ \forall |\alpha| \leqslant k\}.$$

U skladu s time, ponekad se koristi oznaka $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Funkcije iz prostora $C^k(\Omega)$ općenito su neograničene i nisu dobro definirane na granici domene. Iz tog se razloga uvode potprostori tih prostora koji se sastoje od funkcija neprekidnih "do ruba", odnosno, funkcija koje se po neprekidnosti mogu proširiti na otvoreni skup koji sadrži $\overline{\Omega}$. Za takve funkcije kažemo da su neprekidne na $\overline{\Omega}$.

$$C(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ je neprekidna na } \overline{\Omega}\}$$

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}),\ \forall |\alpha| \leqslant k\}$$

Kao i u prethodnom, pišemo $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ i koristimo oznake:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega), \quad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Vezano uz rubne zadaće, obično se promatra potprostor od $C^k(\overline{\Omega})$, koji se sastoji od funkcija koje iščezavaju na $\partial\Omega$ i to zajedno sa svojim parcijalnim derivacijama do uključivo reda k. Označavat ćemo ga s $C_0^k(\Omega)$. Nadalje, uvodimo nosač funkcije

$$\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Neovisno o ograničenosti skupa Ω, uvodimo prostor

$$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) : u \text{ ima kompaktan nosač}\}.$$

Prostor test funkcija iz teorije distribucija definira se kao

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_c^k(\Omega).$$

Kažemo da je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitzova ako postoji konstanta $L > 0$ takva da vrijedi

$$|u(x) - u(y)| \leqslant L|x - y|, \;\; x, y \in \Omega.$$

Za $u : \Omega \to \mathbb{R}$ i $0 < \gamma \leqslant 1$ kažemo da je u Hölderova s eksponentom γ ako postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\gamma, \;\; x, y \in \Omega.$$

Sada možemo definirati Hölderove prostore diferencijabilnih funkcija:

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : \partial^\alpha u \text{ je Hölderova s eksponentom } \gamma, \; \forall |\alpha| = k\},$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \;\; 0 < \gamma \leqslant 1.$

1.2 L^p prostori

Neka je sada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren skup opskrbljen Lebesgueovom mjerom naslijeđenom s $\mathbb{R}^N$. Za dvije funkcije $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da su jednake skoro svuda i pišemo $f = g$ *s.s.*, ako postoji skup $A \subset \Omega$ Lebesgueove mjere nula takav da $\forall x \in \Omega \setminus A, \; f(x) = g(x)$.

Definicija 1.2.1.
Za $1 \leqslant p < \infty$ *definiramo*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ je izmjeriva i } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \Big\}.$$

Za $p = \infty$ *imamo*

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ je izmjeriva i } \exists C \in \mathbb{R} \text{ t.d. } |u(x)| < C \text{ s.s.} \Big\}.$$

Promatramo klasu ekvivalencije

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \;\; s.s.$$

i definiramo

$$L^p := \mathcal{L}^p|_\sim .$$

Dakle, funkcije u $L^p(\Omega)$ poistovjećujemo s klasama skoro svuda jednakih funkcija.

Pokazuje se da je L^p, za $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ i uz normu

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \text{ za } 1 \leqslant p < \infty$$

odnosno

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C : |u(x)| \leqslant C \;\, s.s. \},$$

Banachov prostor.

Za $p = 2$ je $L^2(\Omega)$, uz skalarni produkt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx,$$

Hilbertov prostor.

1.3 Soboljevljevi prostori

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otvoren i ograničen skup. Dolazimo do prostora Soboljeva koji se definiraju pomoću pojma slabe parcijalne derivacije. Promatramo samo prostore Soboljeva vezane uz prve parcijalne derivacije. Shodno tome, definiramo:

Definicija 1.3.1. *Funkcija $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ima slabu parcijalnu derivaciju ako postoji $v_i \in L^p(\Omega)$ takva da je*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,dx,\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tada pišemo $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definicija 1.3.2. *Za $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definiramo Soboljevljev prostor*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ i = 1,2,...,N\right\}.$$

Za $p = 2$, prethodno definiran Soboljevljev prostor funkcija označavamo s $H^1(\Omega)$. Dakle,

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1,2,...,N\right\}.$$

Ovo je Hilbertov prostor opskrbljen skalarnim produktom:

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx,$$

uz odgovarajuću normu:

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2(x)\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

U slučaju Dirichletovog rubnog uvjeta, koristiti ćemo potprostor $H_0^1(\Omega)$; zatvarač prostora $C_c^\infty(\Omega)$, uz normu prostora $H^1(\Omega)$. To je također Hilbertov prostor. S $H^{-1}(\Omega)$ označimo dual prostora $H_0^1(\Omega)$ i dodajmo još da ćemo promatrati zadaće na ograničenim domenama.

Za neke nelinearne probleme, primjerice kada radimo s p-Laplaceovim operatorom, prikladnije je raditi s L^p prostorima ($p \geqslant 1$), nego s L^2. U tom slučaju, Soboljevljevi se prostori, analogno definirani, označavaju s $W^{1,p}(\Omega)$ i $W_0^{1,p}(\Omega)$, respektivno. Opskrbljeni analogno definiranom normom, to su Banachovi prostori.

U slučaju kada je Ω ograničen (ili ograničen u barem jednom smjeru), vrijedi Poincaréova nejednakost:

$$\exists C = C(\Omega)\ t.d.\ \forall u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega u^2(x)\,dx \leqslant C\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \tag{1.1}$$

Zapravo, konstanta C koja se javlja u (1.1) usko je povezana sa svojstvenim vrijednostima Laplaceovog operatora. Preciznije, najbolja moguća konstanta C je upravo $1/\lambda_1(\Omega)$, gdje je $\lambda_1(\Omega)$ prva svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet.

Definicija 1.3.3. *Neka su X i Y normirani prostori takvi da $X \subset Y$. Kažemo da je X neprekidno uložen u Y ako je linearno preslikavanje* $\mathrm{Id} : X \to Y$, $\mathrm{Id}(x) = x$, $\forall x \in X$ *neprekidno. Dodatno, ako je to preslikavanje još i kompaktno (neprekidno preslikavanje koje svaki ograničen skup preslikava u relativno kompaktan skup), kažemo da je X kompaktno uložen u Y.*

Po definiciji, $H_0^1(\Omega)$ i $H^1(\Omega)$ neprekidno su uloženi u $L^2(\Omega)$. Međutim, ono što će nama kasnije trebati jest kompaktnost ulaganja. To je svrha narednog teorema.

Teorem 1.3.4. ***(Rellich)***

- *Za bilo koji ograničen i otvoren skup Ω, ulaganje $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ je kompaktno.*
- *Ako je Ω ograničen skup s Lipschitzovom granicom, ulaganje $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ je kompaktno.*

Poglavlje 2

Svojstvene vrijednosti eliptičkog operatora

U ovom poglavlju podsjećamo na osnovne rezultate teorije eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Prototip eliptičkog operatora je upravo Laplaceov operator, no rezultati ovdje navedeni vrijede i za općenitije (linearne) eliptičke operatore.

2.1 Eliptički operator i rubni uvjeti

2.1.1 Eliptički operator

Neka je $a_{ij}(x),\ i, j = 1, ..., N$ niz ograničenih funkcija definiranih na Ω i neka vrijedi pozitivna definitnost (nužan uvjet eliptičnosti zadaće):

$$\exists \alpha > 0 \ t.d. \ \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \ \forall x \in \Omega, \ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \tag{2.1}$$

gdje $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_N^2)^{1/2}$ predstavlja euklidsku normu vektora ξ. Također, pretpostavljamo simetričnost od a_{ij}:

$$\forall x \in \Omega, \forall i, j, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x). \tag{2.2}$$

Neka je $a_0(x)$ ograničena funkcija definirana na Ω. Linearni eliptički operator drugog reda, definiran na $H^1(\Omega)$, tada je

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u. \tag{2.3}$$

Prototip eliptičkog operatora je Laplaceov operator:

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{2.4}$$

Napomena 2.1.1. *Napomenimo da, budući da se bavimo svojstvenim problemom, na funkciju $a_0(x)$ iz (2.3) ne stavljamo nikakav uvjet na predznak. Zaista, budući da je $a_0(x)$ ograničena, operator L možemo zamijeniti s $L + (\|a_0\|_\infty + 1)\mathrm{Id}$, odnosno, zamijeniti funkciju $a_0(x)$ s $a_0(x) + \|a_0\|_\infty + 1$, ukoliko trebamo pozitivnu funkciju. Što se svojstvenih vrijednosti tiče, ovo uzrokuje samo njihovu translaciju za $\|a_0\|_\infty + 1$ udesno.*

2.1.2 Dirichletov rubni uvjet

Neka je f funkcija iz $L^2(\Omega)$. Kada za u kažemo da je rješenje Dirichletovog problema

$$\begin{cases} Lu = f \;\; u\,\Omega, \\ \;\; u = 0 \;\; na\;\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

to znači da je u jedinstveno rješenje varijacijske zadaće

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega a_0(x) u(x) v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.6}$$

Egzistencija i jedinstvenost rješenja problema (2.6) slijedi iz Lax-Miligramove leme, pozitivne definitnosti (2.1) (odn. eliptičnosti) i Poincaréove nejednakosti (1.1). Primijetimo da se zbog Napomene 2.1.1 možemo ograničiti na slučaj $a_0(x) \geqslant 0$.

U nastavku ćemo s A_L^D (ili s $A_L^D(\Omega)$ u slučaju u kojem želimo naglasiti ovisnost o domeni Ω) označavati linearni operator definiran s:

$$\begin{aligned} A_L^D : L^2(\Omega) &\to H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \\ f &\mapsto u \text{ rješenje od (2.6).} \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.3 Neumannov rubni uvjet

Analogno, neka je f funkcija iz $L^2(\Omega)$ i neka je u je rješenje Neumannovog problema

$$\begin{cases} Lu = f \;\; u\,\Omega, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = 0 \;\; na\;\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

(gdje n predstavlja jedinični vektor vanjske normale na $\partial\Omega$, a n_i njegovu i-tu koordinatu). Primjerice, kada je $L = -\Delta$, rubni uvjet glasi

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Ovo znači da je u jedinstveno rješenje varijacijske zadaće

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_\Omega a_0(x) u(x) v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.9}$$

Egzistencija i jedinstvenost rješenja problema (2.9) slijedi iz Lax-Miligramove leme, pozitivne definitnosti (2.1) (odnosno eliptičnosti) i činjenici da možemo pretpostaviti $a_0(x) \geqslant 1$ (prema Napomeni 2.1.1).

U nastavku ćemo s A_L^N označavati linearni operator definiran s:

$$\begin{aligned} A_L^N : L^2(\Omega) &\to H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega), \\ f &\mapsto u \text{ rješenje od (2.9).} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Operatore definirane u (2.7) i (2.10) nazivamo rezolventnima operatoru L.

2.2 Svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije

2.2.1 Apstraktna spektralna teorija

Ovdje se susrećemo s osnovnim preduvjetima egzistencije svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija linearnih operatora.

Definicija 2.2.1. *Neka je H Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $(.,.)$ i neka je operator T linearno neprekidno preslikavanje s H u H. Tada:*

- *T je pozitivan, ako $\forall x \in H,\ (Tx, x) \geqslant 0$,*
- *T je hermitski, ako $\forall x, y \in H, (Tx, y) = (x, Ty)$,*
- *T je kompaktan, ako preslikava bilo koji ograničen skup u relativno kompaktan (odnosno, ima kompaktan zatvarač) u H.*

Iskažimo teorem iz kojeg slijedi egzistencija niza svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija.

Teorem 2.2.2. *Neka je H beskonačnodimenzionalan separabilan Hilbertov prostor. Neka je T hermitski, kompaktan i pozitivan operator definiran na H. Tada postoji niz pozitivnih realnih svojstvenih vrijednosti $(\nu_n)_n$, koji konvergira prema 0 te pripadni niz svojstvenih vektora $(x_n)_n$, koji definira Hilbertovu bazu za H takvu da $\forall n,\ Tx_n = \nu_n x_n$.*

Ovaj se teorem može shvatiti kao generalizacija klasičnog rezultata u konačnodimenzionalnom prostoru za simetrične i normalne matrice (egzistencija realnih svojstvenih vrijednosti i ortonormirane baze svojstvenih vektora) na Hilbertovim prostorima.

2.2.2 Primjena na eliptičke operatore

Dirichletov rubni uvjet

Primjenjujemo Teorem 2.2.2 na $H = L^2(\Omega)$ i na operator A_L^D definiran u (2.7):

- A_L^D je pozitivan: neka je $f \in L^2(\Omega)$ i neka je $u = A_L^D(f)$ rješenje od (2.6). Tada imamo

$$(f, A_L^D(f))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)u(x)\,dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega a_0(x)u^2(x)\,dx.$$

  Primijetimo sada da $a_0(x)$ možemo uzeti kao pozitivnu funkciju, što pak znači da iz (2.1) slijedi željeni rezultat. Ako je još i $f \neq 0$, imamo $(f, A_L^D(f)) > 0$.

- A_L^D je hermitski: uzmimo $f, g \in L^2(\Omega)$ i $u = A_L^D(f),\ v = A_L^D(g)$. Tada imamo

$$(f, A_L^D(g))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)\,dx.$$

  Prema pretpostavci simetričnosti (2.2) i (2.6) koju zadovoljava v, desna strana gornje jednakosti jednaka je $\int_\Omega u(x)g(x)\,dx = (A_L^D(f), g)$.

- A_L^D je kompaktan: ovo je direktna posljedica Rellichovog Teorema 1.3.4.

Dakle, kao posljedica Teorema 2.2.2, postoji Hilbertova baza $(u_n)_n$ za $L^2(\Omega)$. Također, postoji i niz $(\nu_n)_n \geqslant 0$, koji konvergira u 0. Vrijedi $A_L^D(u_n) = \nu_n u_n$. Pritom su ν_n strogo pozitivne, budući da iz stroge pozitivnosti od A_L^D slijedi $\nu_n \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} = (u_n, A_L^D(u_n))_{L^2(\Omega)} > 0$.

Iz (2.6) slijedi da u_n, za svaki v iz $H_0^1(\Omega)$, zadovoljava:

$$\nu_n\left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega a_0(x)u_n(x)v(x)\,dx\right) = \int_\Omega u_n(x)v(x)\,dx$$

odnosno,

$$Lu_n = \frac{1}{\nu_n} u_n.$$

Definirajmo $\lambda_n := \dfrac{1}{\nu_n}$. Time smo dokazali:

Teorem 2.2.3. *Neka je Ω otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^N$. Tada postoji niz pozitivnih svojstvenih vrijednosti (koji teži prema $+\infty$) i odgovarajući niz svojstvenih funkcija (koje definiraju Hilbertovu bazu za $L^2(\Omega)$). Označavamo ih s $0 < \lambda_1^D(L,\Omega) \leqslant \lambda_2^D(L,\Omega) \leqslant \dots$ i $u_1^D, u_2^D, \dots$, respektivno. Oni zadovoljavaju:*

$$\begin{cases} Lu_n^D = \lambda_n^D(L,\Omega)u_n^D & u\ \Omega, \\ u_n^D = 0 & na\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Kada je $L = -\Delta$ Laplaceov operator, svojstvene vrijednosti označavamo s $\lambda_n(\Omega)$ (ili samo s λ_n, ukoliko nije potrebno naglasiti domenu). Odgovarajuće svojstvene funkcije označavamo s u_n.

Kako su svojstvene funkcije definirane do na konstantu, normaliziramo ih uvjetom

$$\int_\Omega u_n^2(x)\, dx = 1. \tag{2.12}$$

Naravno, može se javiti slučaj u kojem su neke svojstvene vrijednosti višestruke (pogotovo kod simetričnih domena). U tom slučaju, svojstvene se vrijednosti broje zajedno sa svojom kratnostima.

Napomena 2.2.4. *U slučaju kada Ω nije povezan; primjerice ako Ω ima dvije komponente povezanosti $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, svojstvene vrijednosti na Ω dobivamo pomoću svojstvenih vrijednosti svake od komponente povezanosti:*

$$\begin{aligned} &\lambda_1^D(L,\Omega) = min(\lambda_1^D(L,\Omega_1), \lambda_1^D(L,\Omega_2)), \\ &\lambda_2^D(L,\Omega) = min(max(\lambda_1^D(L,\Omega_1), \lambda_1^D(L,\Omega_2)), \lambda_2^D(L,\Omega_1), \lambda_2^D(L,\Omega_2)), \\ &\qquad\qquad \vdots \end{aligned} \tag{2.13}$$

Općenitije, svaka se svojstvena funkcija nepovezanog otvorenog skupa Ω može izabrati tako da iščezava na svima osim na jednoj od komponenata povezanosti od Ω. Posebno, kada su dvije komponente povezanosti jednake, imati ćemo $\lambda_1^D(L,\Omega) = \lambda_2^D(L,\Omega)$, odnosno, λ_1 je dvostruka svojstvena vrijednost.

Taj slučaj nije moguć kada je Ω povezan:

Teorem 2.2.5. *Neka je Ω regularan, otvoren i povezan skup. Tada je prva svojstvena vrijednost $\lambda_1^D(L,\Omega)$ jednostavna, a prva svojstvena funkcija u_1^D ima konstantan predznak na Ω. Obično pretpostavljamo njezinu pozitivnost na Ω.*

Zapravo je ovaj teorem posljedica Krein-Rutmanovog teorema, a koji je pak apstraktan rezultat i navodimo ga ovdje.

Teorem 2.2.6. ***(Krein-Rutman)*** *Neka je E Banachov prostor i neka je C zatvoren konveksan konus u E s vrhom u O. Neka je $\mathrm{Int}(C)$ neprazan i neka $C \cap (-C) = \{O\}$. Neka je T kompaktan operator u E koji zadovoljava $T(C \setminus \{O\}) \subset \mathrm{Int}(C)$. Tada je najveća svojstvena vrijednost od T jednostavna, a odgovarajući svojstveni vektor je iz $\mathrm{Int}(C)$ (ili iz $-\mathrm{Int}(C)$).*

Kako bismo dokazali Teorem 2.2.5., primjenjujemo Krein-Rutmanov teorem i to tako da stavimo $E := C^0(\overline{\Omega})$, $T := A_L^D$, i $C := \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v(x) \geqslant 0\}$. Sada iz jakog principa maksimuma slijedi $T(C \setminus \{O\}) \subset \mathrm{Int}(C)$. Činjenica da se T može definirati kao operator iz E u E te činjenica da je kompaktan, slijede iz klasičnih rezultata regularnosti (ako je desna strana od f neprekidna, onda je i rješenje u od (2.5) također neprekidno).

Napomena 2.2.7. *U Točki 2.3.3 vidjet ćemo dva dokaza nenegativnosti prve svojstvene funkcije (i jednostavnosti prve svojstvene vrijednosti). Za ovaj rezultat zapravo nisu potrebne pretpostavke regularnosti.*

Neumannov rubni uvjet

Na jednak način, kada je Ω ograničen, Lipschitzov i otvoren skup u $\mathbb{R}^N$, možemo dokazati sljedeći teorem. (Svojstvo Lipschitzovosti od Ω potrebno je za kompaktnost ulaganja $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$):

Teorem 2.2.8. *Neka je Ω ograničen, Lipschitzov i otvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Tada postoji niz nenegativnih svojstvenih vrijednosti (koji teži prema $+\infty$) i odgovarajući niz svojstvenih funkcija (koje definiraju Hilbertovu bazu za $L^2(\Omega)$). Označavamo ih s $0 \leqslant \mu_1^N(L,\Omega) \leqslant \mu_2^N(L,\Omega) \leqslant \ldots$ i $u_1^N, u_2^N, \ldots$, respektivno. Oni zadovoljavaju:*

$$\begin{cases} Lu_n^N = \mu_n^N(L,\Omega)u_n^N & u\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u_n^N}{\partial n} = 0 & na\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Kada je $L = -\Delta$ Laplaceov operator, svojstvene vrijednosti označavamo sa $\mu_n(\Omega)$ (ili samo s μ_n, kada nije potrebno naglasiti domenu). Odgovarajuće svojstvene funkcije označavamo sa u_n.

Primijetimo da je, za Laplaceov operator i, općenitije; u slučaju $a_0(x) = 0$, prva svojstvena vrijednost uvijek $\mu_1 = 0$, a odgovarajuća svojstvena funkcija je konstanta različita od 0 (na komponenti povezanosti od Ω).

I u slučaju Neumannovog rubnog uvjeta normaliziramo svojstvene funkcije uvjetom

$$\int_\Omega u_n^2(x)\, dx = 1. \tag{2.15}$$

Napokon, u slučaju nepovezanosti od Ω, vrijedi tvrdnja iz Napomene 2.2.4

2.2.3 Osnovne karakteristike svojstvenih vrijednosti

Ovdje promatramo svojstvene vrijednosti Laplaceovog operatora. Dakle, neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ i neka je, za $n \in \mathbb{N}$, λ_n svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora. Opće poznato je da je Laplaceov operator invarijantan na translacije i rotacije. Preciznije, označimo s τ_{x_0} translaciju vektora x_0: $\tau_{x_0}(x) = x + x_0$. Ako je v funkcija definirana na Ω, definiramo funkciju $\tau_{x_0}v$ na $\tau_{x_0}(\Omega)$ s $\tau_{x_0}v(x) := v(x - x_0)$. Tada je očito

$$\tau_{x_0} \circ \Delta = \Delta \circ \tau_{x_0}$$

iz čega slijedi

$$\lambda_n(\tau_{x_0}(\Omega)) = \lambda_n(\Omega). \tag{2.16}$$

Analogno, ako s R označimo izometriju, slijedi

$$\lambda_n(R(\Omega)) = \lambda_n(\Omega). \tag{2.17}$$

Promotrimo sada utjecaj homotetije. Neka je $k > 0$, a H_k homotetija sa središtem u O i koeficijentom homotetije k: $H_k(x) = kx$. Ako je v funkcija definirana na Ω, definiramo funkciju $H_k v$ na $H_k(\Omega)$ s $H_k v(x) := v(x/k)$. Budući da je $H_k \circ \Delta = k^2 \Delta \circ H_k$, zaključujemo

$$\lambda_n(H_k(\Omega)) = \frac{1}{k^2}\lambda_n(\Omega). \tag{2.18}$$

Čest predmet razmatranja je problem minimizacije svojstvenih vrijednosti s ograničenjem na domenu, kao primjerice

$$\min_{n\in\mathbb{N}}\{\lambda_n(\Omega) : |\Omega| = c\}. \tag{2.19}$$

Sada (2.18) za važnu posljedicu ima činjenicu da problem (2.19) možemo zamijeniti problemom

$$\min_{n\in\mathbb{N}} |\Omega|^{2/N}\lambda_n(\Omega). \tag{2.20}$$

Propozicija 2.2.9. *Problemi* (2.19) *i* (2.20) *su ekvivalentni.*

Pritom ekvivalencija znači da postoji bijekcija između rješenja ova dva problema. Zaista, budući da je pridruživanje (preciznije, funkcional) $\Omega \mapsto |\Omega|^{2/N}\lambda_n(\Omega)$ invarijantno na homotetiju (zahvaljujući (2.18)), korespondencija je jednostavna:

- svako rješenje od (2.19) ujedno je i rješenje od (2.20),
- ako je Ω rješenje od (2.20), uz $|\Omega| = c'$, onda je $H_k(\Omega)$, uz $k = (c/c')^{1/N}$, rješenje od (2.19).

2.2.4 Regularnost svojstvenih funkcija

Definicija 2.2.10. *Parcijalni diferencijalni operator L definiran na otvorenom podskupu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je hipoeliptičan ako za svaku distribuciju u definiranu na otvorenom podskupu $U \subset \Omega$, takvu da je $Lu \in C^\infty$, u također mora biti iz C^∞.*

Regularnost interiora

Zbog hipoeliptičnosti Laplaceovog operatora, njegove su svojstvene funkcije analitičke unutar domene (vidjeti [11] i [12]). Za općenitije operatore, to svojstvo ovisi o regularnosti koeficijenata operatora L.

Regularnost do ruba domene

Za regularnost do ruba domene potrebno je pretpostaviti njezinu dovoljnu regularnost. U tu svrhu navodimo sljedeće rezultate (vidjeti [15] i [16]).

Teorem 2.2.11. ***(Soboljevljeva regularnost)*** *Neka je $\Omega = C^{1,1}$ ili konveksan i neka su koeficijenti a_{ij} iz C^0, a a_0 iz L^∞. Tada svaka svojstvena funkcija u iz* (2.11) *pripada Soboljevljevom prostoru $H^2(\Omega)$.*

Teorem 2.2.12. ***(Hölderova regularnost)*** *Neka je $\Omega = C^{2,\alpha}$ za neki $\alpha > 0$ i neka su koeficijenti a_{ij} iz $C^{1,\alpha}$, a a_0 iz $C^{0,\alpha}$. Tada svaka svojstvena funkcija u iz* (2.11) *pripada Hölderovom prostoru $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

2.2.5 Primjeri

U ovom se poglavlju bavimo svojstvenim vrijednostima Laplaceovog operatora za vrlo jednostavne domene. Svojstvena zadaća pridružena Laplaceovom operatoru je diferencijalna zadaća oblika

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ \text{rubni uvjet.} \end{cases}$$

Pravokutnik

U 1-D slučaju, primjerice za interval $\Omega = (0, L)$, vrlo je jednostavno riješiti diferencijalnu zadaću

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) & x \in (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Jedina njezina netrivijalna rješenja su

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2} \\ u_n(x) &= sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}\right. \quad n \geqslant 1. \tag{2.22}$$

Sada, za pravokutnike (2-D slučaj), koristeći jednostavan trik separacije varijabli, možemo dokazati:

Propozicija 2.2.13. *Neka je $\Omega = (0, L) \times (0, l)$ pravokutnik u ravnini. Tada su svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2}\right) \\ u_{m,n}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{Ll}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \end{aligned}\right. \quad m, n \geqslant 1, \tag{2.23}$$

a njegove su svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije uz Neumannov rubni uvjet

$$\left.\begin{aligned} \mu_{m,n} &= \pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2}\right) \\ v_{m,n}(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{Ll}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \end{aligned}\right. \quad m, n \geqslant 0, \tag{2.24}$$

Jednostavno je provjeriti da je par $(\lambda_{m,n}, u_{m,n})$ iz (2.23) zaista svojstvena vrijednost i svojstvena funkcija Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet. Naravno, kompleksniji je dio dokazivanje jedinstvenosti tog rješenja. To je posljedica činjenice da funkcije $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right),\ m, n \geqslant 1$ čine ortogonalni sustav u $L^2(\Omega)$.

Krug

Neka je B_R krug radijusa R sa centrom u O. U polarnim koordinatama tražimo svojstvenu funkciju $u = u(r, \theta)$ tako da $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$; gdje r predstavlja radijus, a θ kut. To nas vodi na rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{cases} w''(\theta) + kw(\theta) = 0, \;\; w \text{ perioda } 2\pi, \\ v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + (\lambda - \frac{k}{r^2})v(r) = 0, \\ v'(0) = v(R) = 0, \end{cases}$$

gdje k konstanta, a λ svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora. Uvjet periodičnosti na prvu jednadžbu implicira da je $k = n^2$, gdje je n prirodan broj, a za a_n i b_n konstante, $w(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$.

Definirajmo sada Besselovu diferencijalnu jednadžbu i Besselove funkcije.

Definicija 2.2.14. *Besselova diferencijalna jednadžba je linearna obična diferencijalna jednadžba drugog reda dana s*

$$x^2 \frac{d^2u(x)}{dx^2} + x\frac{du(x)}{dx} + (x^2 - \alpha^2)u(x) = 0,$$

za proizvoljan kompleksan broj α. Za $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, definiramo Besselovu funkciju (prve vrste) J_n, kao rješenje Besselove diferencijalne jednadžbe. Još jedna definicija Besselove funkcije (prve vrste) je ona preko integrala:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\tau - n\tau)\, d\tau, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Ako u drugoj jednadžbi našeg sustava zamijenimo k s n^2, dolazimo upravo do Besselove diferencijalne jednadžbe. Sada možemo navesti:

Propozicija 2.2.15. *Neka je $\Omega = B_R$ krug radijusa R. Tada su svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet*

$$\begin{aligned} \lambda_{0,k} &= \frac{j_{0,k}^2}{R^2}, \;\; k \geqslant 1, \\ u_{0,k}(r,\theta) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{R|J_0'(j_{0,k})|}J_0(j_{0,k}r/R), \;\; k \geqslant 1, \\ \lambda_{n,k} &= \frac{j_{n,k}^2}{R^2}, \;\; n,k \geqslant 1, \;\; \textit{dvostruka svojstvena vrijednost} \\ u_{n,k}(r,\theta) &= \begin{matrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|}J_n(j_{n,k}r/R)\;\cos(n\theta) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|}J_n(j_{n,k}r/R)\;\sin(n\theta) \end{matrix}, \;\; n,k \geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.25}$$

gdje je $j_{n,k}$ *k-ta nultočka Besselove funkcije* J_n*.*

Uz Neumannove rubne uvjete, svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije su

$$\begin{aligned}
&\mu_{0,k} = \frac{{j'_{0,k}}^2}{R^2},\ k \geqslant 1,\\
&v_{0,k}(r,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{R|J_0(j'_{0,k})|}J_0(j'_{0,k}r/R),\ k \geqslant 1,\\
&\mu_{n,k} = \frac{{j'_{n,k}}^2}{R^2},\ n,k \geqslant 1,\ \textit{dvostruka svojstvena vrijednost}\\
&v_{n,k}(r,\theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{j'_{n,k}}{R\sqrt{{j'_{n,k}}^2 - n^2}|J_n(j'_{n,k})|}J_n(j'_{n,k}r/R)\ \cos(n\theta) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{j'_{n,k}}{R\sqrt{{j'_{n,k}}^2 - n^2}|J_n(j'_{n,k})|}J_n(j'_{n,k}r/R)\ \sin(n\theta) \end{cases},\ n,k \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gdje je $j'_{n,k}$ *k-ta nultočka od* J'_n *(derivacije Besselove funkcije* J_n*).*

2.3 Min-max principi i primjene

2.3.1 Min-max principi

Jedan od vrlo korisnih alata je varijacijska karakterizacija svojstvenih vrijednosti, poznatija kao Poincaréov princip ili Courant-Fischerove formule (vidjeti [11]).

Definirajmo Rayleighov kvocijent operatora L:

$$R_L[v] := \frac{\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega a_0(x)v^2(x)\,dx}{\int_\Omega v^2(x)\,dx}. \tag{2.27}$$

Sada imamo

$$\lambda_k^D(L,\Omega) = \min_{\substack{E_k\subset H_0^1(\Omega)\\ k=dim(E_k)}}\ \max_{\substack{v\in E_k\\ v\neq 0}} R_L[v], \tag{2.28}$$

$$\mu_k^N(L,\Omega) = \min_{\substack{E_k\subset H^1(\Omega)\\ k=dim(E_k)}}\ \max_{\substack{v\in E_k\\ v\neq 0}} R_L[v]. \tag{2.29}$$

U (2.28) i (2.29) minimum se postiže za E_k odabran kao prostor razapet s prvih k svojstvenih funkcija. Stoga, ako pretpostavimo da je prvih $k-1$ svojstvenih funkcija $(u_1, u_2, ..., u_{k-1})$

izračunato, imamo:

$$\lambda_k^D(L,\Omega) = \min_{\substack{E_k\subset H_0^1(\Omega)\\ v\perp u_1,u_2,\dots,u_{k-1}}} R_L[v]. \tag{2.30}$$

Zatim, za Laplaceov operator, (2.28) prelazi u

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{E_k\subset H_0^1(\Omega)\\ k=dim(E_k)}} \max_{\substack{v\in E_k\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx}{\int_\Omega v^2(x)\,dx}. \tag{2.31}$$

Posebno, prva svojstvena vrijednost uz Dirichletov rubni uvjet je

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx}{\int_\Omega v^2(x)\,dx}, \tag{2.32}$$

a prva netrivijalna svojstvena vrijednost uz Neumannov rubni uvjet dana je s

$$\mu_2(\Omega) = \min_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ v\neq 0\\ \int_\Omega v=0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx}{\int_\Omega v^2(x)\,dx}. \tag{2.33}$$

U (2.32) i (2.33) minimum se postiže za odgovarajuće svojstvene funkcije.

Postoji slična varijacijska karakterizacija za sume uzastopnih svojstvenih vrijednosti i za sume njihovih inverza (vidjeti [4] i [22]). Promotrimo slučaj Laplaceovog operatora s Dirichletovim rubnim uvjetom (svaki se drugi slučaj tretira potpuno analogno). Neka je $u_1, u_2, ..., u_k$ prvih k svojstvenih funkcija. Tada

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} \lambda_i(\Omega) = \min\left\{ \sum_{i=k+1}^{k+n} \int_\Omega |\nabla v_i(x)|^2\,dx \right\}, \tag{2.34}$$

gdje je (v_i) ortogonalna familija u $L^2(\Omega)$ koja zadovoljava $\int_\Omega v_i u_j\,dx = 0,\ j = 1,2,...,k$. Slično imamo

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{1}{\lambda_i(\Omega)} = \max\left\{ \sum_{i=k+1}^{k+n} \int_\Omega v_i^2(x)\,dx \right\}, \tag{2.35}$$

gdje je (v_i) familija u $H_0^1(\Omega)$ koja zadovoljava $\int_\Omega \nabla v_i\cdot\nabla v_j\,dx = \delta_{ij}$ i $\int_\Omega v_i u_j\,dx = 0,\ j = 1,2,...,k$.

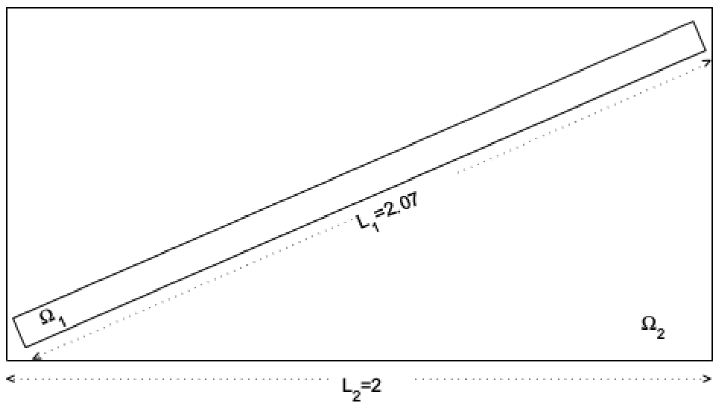
2.3.2 Monotonost

Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni i ograničeni skupovi takvi da $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Takva inkluzija inducira prirodno ulaganje $H_0^1(\Omega_1) \hookrightarrow H_0^1(\Omega_2)$ proširenjem nulom funkcija iz $H_0^1(\Omega_1)$. Iz min-max principa slijedi zaključak o monotonosti Dirichletovih svojstvenih vrijednosti:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k^D(L, \Omega_1) \geqslant \lambda_k^D(L, \Omega_2) \tag{2.36}$$

(budući da se minimum uzima na većem skupu za $\lambda_k^D(L, \Omega_2)$). Štoviše, nejednakost je stroga čim $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ sadrži skup pozitivnog kapaciteta (vidjeti (3.4.2)), budući da prva svojstvena funkcija ne može iščezavati na takvom skupu.

Važno za napomenuti je da (2.36) ne vrijedi u slučaju Neumannovog rubnog uvjeta. Slika 2.1 daje elementarni kontraprimjer na pravokutniku. Koristimo se činjenicom da je prva netrivijalna svojstvena vrijednost na pravokutniku za Neumannov rubni uvjet dana s $\mu_2(P) = \frac{\pi^2}{L^2}$, gdje je s L dana dužina pravokutnika P (vidjeti (2.24)).



Slika 2.1: Ovdje je $\Omega_1 \subset \Omega_2$, ali $\mu_2(\Omega_1) = \frac{\pi^2}{L_1^2} < \mu_2(\Omega_2) = \frac{\pi^2}{L_2^2}$.

2.3.3 Nodalne domene

Promotrimo sada predznak svojstvenih funkcija. U Teoremu 2.2.5 vidjeli smo da je prva svojstvena funkcija u_1 pozitivnog predznaka na Ω čim je Ω povezan. Općenitije, u_1 je nenegativna (pozitivna na jednoj od komponenata povezanosti, a iščezava na ostalima). Zapravo, zahvaljujući (2.28), za λ_1 možemo ponovo dobiti taj rezultat. Zaista, koristeći činjenicu da za $u \in H_0^1(\Omega)$ imamo $|u| \in H_0^1(\Omega)$ i $\frac{\partial |u|}{\partial x_i} = sign(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$, lako vidimo da u i

$|u|$ imaju jednak Rayleighov kvocijent. Dakle, $|u_1|$ je također minimizator Rayleighovog kvocijenta, pa stoga i svojstvena funkcija.

Što se ostatka svojstvenih funkcija tiče, s obzirom na to da su sve ortogonalne na u_1, one mijenjaju predznak na Ω.

Definicija 2.3.1. *Neka je u_k, $k \geqslant 2$ svojstvena funkcija eliptičkog operatora L uz Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet. Komponente povezanosti otvorenih skupova*

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : u_k > 0\} \quad i \quad \Omega_- = \{x \in \Omega : u_k < 0\}$$

nazivaju se nodalne domene od u_k.

Broj nodalnih domena odozgo je ograničen:

Teorem 2.3.2. ***(Nodalne domene)*** *Neka je u_k, $k \geqslant 2$ svojstvena funkcija eliptičkog operatora L uz Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet. Tada u_k ima najviše k nodalnih domena.*

Dokaz se provodi kontradikcijom: ako u_k ima više od k nodalnih domena, moguće je konstruirati test funkciju, ortogonalnu na $k-1$ prvih svojstvenih funkcija, a čiji je Rayleighov kvocijent vrijednosti strogo manji od λ_k, što je u kontradikciji s (2.30).

Tvrdnja Teorema 2.3.2 vrijedi i za $k = 1$ i daje elementaran dokaz nenegativnosti prve svojstvene funkcije (vidjeti Teorem 2.2.5), bez pretpostavke o regularnosti. Štoviše, implicira i to da je prva svojstvena funkcija jednostavna u povezanom slučaju, budući da dvije nenegativne i netrivijalne funkcije ne mogu biti ortogonalne.

Navedimo još jedno svojstvo nodalnih domena.

Propozicija 2.3.3. *Neka je u_k, $k \geqslant 2$, svojstvena funkcija eliptičkog operatora L uz Dirichletov ili Neumannov rubni uvjet s pripadnom svojstvenom vrijednosti λ_k. Neka je ω_k jedna od njezinih nodalnih domena. Tada*

$$\lambda_1(\omega_k) = \lambda_k.$$

Zaista, budući da u_k zadovoljava $Lu_k = \lambda_k u_k$ na ω_k, a iščezava na $\partial\omega_k$, ona je svojstvena funkcija operatora L na ω_k uz Dirichletov rubni uvjet. Štoviše, budući da u_k ima konstantan predznak na ω_k, ona nije ništa drugo no prva svojstvena funkcija.

Promotrimo sada preciznije drugu Dirichletovu svojstvenu funkciju u_2 Laplaceovog operatora. Prema Teoremu 2.3.2, u_2 ima najviše dvije nodalne domene. To znači da ima točno dvije nodalne domene kada je Ω povezan. Skup

$$\mathcal{N} = \{x \in \Omega : u_2(x) = 0\}$$

naziva se nodalnom linijom od u_2. Kada je Ω konveksna domena u ravnini, nodalna linija siječe granicu od Ω u točno dvije točke (vidjeti Meals [27] i Alessandrini [3]).

2.4 Perforirane domene

Kada domena minimizira danu funkciju svojstvenih vrijednosti, varijacijom ruba domene možemo doći do uvjeta optimalnosti. Alternativan način za dobivanje uvjeta optimalnosti unutar domene je korištenje asimptotskih razvoja svojstvenih vrijednosti na domenama s malim rupama. Za više o ovoj temi, vidjeti [28], [14] i [26].

Teorem 2.4.1. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Uzmimo $x_0 \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Nadalje, označimo $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(x_0, \varepsilon)$. Tada svojstvene vrijednosti Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet zadovoljavaju:*

$$\begin{aligned}\lambda_k(\Omega_\varepsilon) &= \lambda_k(\Omega) + \frac{2\pi}{-\log\varepsilon}u_k^2(x_0) + o\Big(\frac{1}{|\log\varepsilon|}\Big) \quad \text{za } N = 2,\\ \lambda_k(\Omega_\varepsilon) &= \lambda_k(\Omega) + \varepsilon^{N-2}S^{N-1}u_k^2(x_0) + o(\varepsilon^{N-2}) \quad \text{za } N \geqslant 3,\end{aligned} \tag{2.37}$$

gdje je S^{N-1} $(N-1)$-dimenzionalna mjera jedinične sfere u $\mathbb{R}^N$.

Ovi se izrazi mogu koristiti u dokazu nepostojanja minimizatora nekih funkcija svojstvenih vrijednosti. Preciznije, ako za dvodimenzionalni problem želimo dokazati da ne postoji minimizator neke funkcije svojstvenih vrijednosti F, odnosno

$$\min_{\Omega\subset\mathbb{R}^2} F(\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), ..., \lambda_k(\Omega)), \tag{2.38}$$

možemo pretpostaviti suprotno. Dakle, neka je Ω minimizator funkcije F. Označimo $J(\Omega) := F(\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), ..., \lambda_k(\Omega))$. Neka je Ω_ε kao i u prethodnom teoremu. Imamo

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + \frac{2\pi}{-\log\varepsilon}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial x_i}(\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), ..., \lambda_k(\Omega))u_i^2(x_0) + o\Big(\frac{1}{|\log\varepsilon|}\Big).$$

Očito, ako možemo naći točku x_0 iz Ω u kojoj je gornja suma pozitivna, imamo kontradikciju.

Poglavlje 3

Alati

3.1 Schwarzov preslog

Schwarzov preslog je glavni alat koji G. Faber i E. Krahn koriste u dokazu svoje poznate izoperimetričke nejednakosti (vidjeti Teorem 4.2.1). Metoda preslagivanja definira se zamjenom dane funkcije u, funkcijom u^*, koja ima neka svojstva (kao primjerice monotonost ili simetričnost).

Definicija 3.1.1. *Za bilo koji izmjeriv skup ω u $\mathbb{R}^N$, s ω^* označavamo kuglu sa središtem u O, jednakog volumena kao i ω. Ako je u nenegativna izmjeriva funkcija definirana na izmjerivom skupu Ω i ako iščezava na $\partial\Omega$, za $c \in \mathbb{R}$ s $\Omega(c) = \{x \in \Omega : u(x) \geqslant c\}$ označavamo pripadni nivo skup. Schwarzov preslog (ili radijalno opadajući preslog) funkcije u je funkcija u^* definirana na Ω^* s*

$$u^*(x) = \sup\{c : x \in \Omega(c)^*\}.$$

Drugim riječima, u^* je konstruirana iz u preslagivanjem nivo skupova od u, u kugle jednakog volumena. Iz konstrukcije u^*, jasna su sljedeća svojstva:

- u^* je radijalno simetrična i nerastuća kao funkcija od $|x|$,
- $\sup_\Omega u = \sup_{\Omega^*} u^*$,
- u i u^* su ekviizmjerive (njihovi nivo skupovi imaju jednaku mjeru).

Kao direktna posljedica posljednjeg svojstva slijedi:

Teorem 3.1.2. *Neka je Ω izmjeriv skup i neka je u nenegativna izmjeriva funkcija definirana na Ω koja iščezava na $\partial\Omega$. Neka je ψ bilo koja izmjeriva funkcija definirana na $\mathbb{R}^+$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$. Tada*

$$\int_\Omega \psi(u(x))\,dx = \int_{\Omega^*} \psi(u^*(x))\,dx. \tag{3.1}$$

Iskažimo sada dublji rezultat; tzv. Pòlyinu nejednakost. Ona daje vezu između integrala gradijenata funkcija u i u^*.

Teorem 3.1.3. ***(Pòlyina nejednakost)*** *Neka je Ω otvoren skup i neka je u nenegativna funkcija iz prostora Soboljeva $H_0^1(\Omega)$. Tada $u^* \in H_0^1(\Omega^*)$ i*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \geqslant \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 \, dx. \tag{3.2}$$

Općenitije, neka je g nenegativna, neprekidna funkcija definirana na $\mathbb{R}^+$ i neka je F nenegativna, rastuća, konveksna funkcija definirana na $\mathbb{R}^+$ takva da postoji p, $1 \leqslant p < +\infty$ i $c > 0$ takav da $F(x) \geqslant c(1 + x^p)$. Neka je u nenegativna funkcija iz prostora Soboljeva $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tada u^* pripada $W_0^{1,p}(\Omega)$ i vrijedi

$$\int_\Omega g(u(x))F(|\nabla u(x)|) \, dx \geqslant \int_{\Omega^*} g(u^*(x))F(|\nabla u^*(x)|) \, dx. \tag{3.3}$$

Slijedi još jedna korisna nejednakost.

Teorem 3.1.4. ***(Hardy-Littlewoodova nejednakost)*** *Neka su u i v nenegativne izmjerive funkcije definirane na Ω i neka su u^* i v^* njihovi Schwarzovi preslozi, respektivno. Tada*

$$\int_\Omega u(x)v(x) \, dx \leqslant \int_{\Omega^*} u^*(x)v^*(x) \, dx \tag{3.4}$$

Lema 3.1.5. *Neka je Ω otvoren skup i neka je f neprekidna, nenegativna, nerastuća funkcija definirana na $[0, +\infty)$. Nadalje, pretpostavimo da je pridruživanje*

$$t \mapsto (f(t^{1/N}) - f(0))t^{1-(1/N)} \tag{3.5}$$

konveksno za $t \geqslant 0$. Tada

$$\int_{\partial\Omega} f(|x|) \, d\sigma \geqslant \int_{\partial\Omega^*} f(|x|) \, d\sigma. \tag{3.6}$$

Primijetimo da (3.5) zadovoljavaju funkcije oblika $f(t) = t^p$ za $p \geqslant 1$.

3.2 Steinerova simetrizacija

Promotrimo ponovo Schwarzov preslog, ali ovog puta na malo drugačijem skupu kojeg će definirati Steinerova simetrizacija prostora. Time dolazimo do Steinerove simetrizacije funkcije.

3.2.1 Definicija

Ovakvo preslagivanje koristi se kod problema minimizacije λ_1 na mnogokutima. Nama će biti korisno u Poglavlju 4.3. Za dokaze i više detalja, vidjeti [23] i [29].

Bez smanjenja općenitosti možemo fiksirati hiperravninu $x_N = 0$ kao os simetrije. Neka je $N \geqslant 2$ i neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ izmjeriv skup. Označimo s Ω' projekciju od Ω na R^{N-1}:

$$\Omega' = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : \exists\, x_N \; t.d. \; (x', x_N) \in \Omega\},$$

a za $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, s $\Omega(x')$ presjek skupova Ω i $\{x'\} \times \mathbb{R}$:

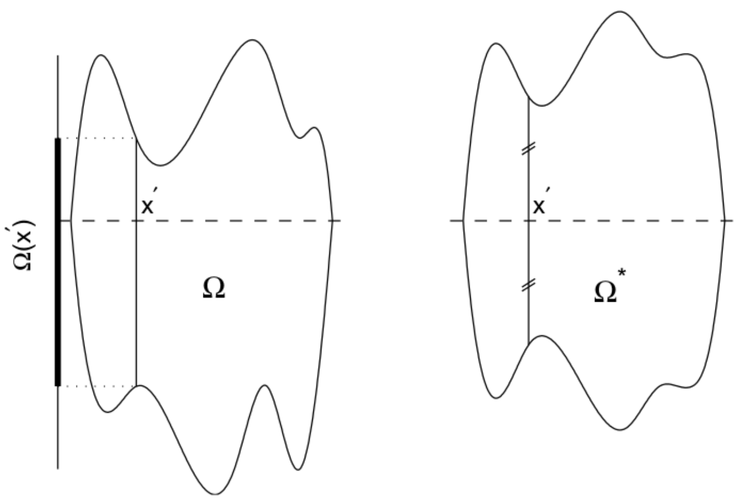
$$\Omega(x') = \{x_N \in \mathbb{R} : (x', x_N) \in \Omega\}, \; x' \in \Omega'.$$

Napomenimo da, ako je Ω otvoren skup, skupovi $\Omega(x')$ su također otvoreni i $x' \mapsto |\Omega(x')|$ je poluneprekidna odozdo.

Definicija 3.2.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ izmjeriv skup. Tada se skup*

$$\Omega^\star = \left\{ x = (x', x_N) : -\frac{1}{2}|\Omega(x')| < x_N < \frac{1}{2}|\Omega(x')|, \; x' \in \Omega' \right\}$$

naziva Steinerovom simetrizacijom od Ω u odnosu na hiperravninu $x_N = 0$.



Slika 3.1: Steinerova simetrizacija: skup Ω (lijevo) i njegova simetrizacija $\Omega^\star$ u odnosu na horizontalu (desno).

Grubo govoreći, $\Omega^\star$ dobiven je iz Ω na način da se Ω prvo projicira na hiperravninu (koja predstavlja os simetrije) i zatim se, za svaki element x' iz Ω', uzme pripadan dio pravca ortogonalnog na hiperravninu koji prolazi kroz x', a sadržan je u Ω. Locira se njegova sredina te se on pomakne tako da ona padne točno na os simetrije. Kao posljedica definicije, očito je da je $\Omega^\star$ simetričan u odnosu na $x_N = 0$ i konveksan u smjeru x_N. Nadalje, jednostavno je provjeriti da je $\Omega^\star$ otvoren čim je Ω otvoren.

Definicija 3.2.2. *Kažemo da je otvoren skup Ω Steiner simetričan u odnosu na hiperravninu H, ako se podudara s vlastitom Steinerovom simetrizacijom $\Omega^\star$ u odnosu na H. Odnosno, ako je simetričan u odnosu na H i konveksan u ortogonalnom smjeru.*

Promotrimo sada nenegativnu izmjerivu funkciju u definiranu na Ω koja iščezava na $\partial\Omega$. Slično kao i Schwarzov preslog, definiramo Steinerovu simetrizaciju od u.

Definicija 3.2.3. *Neka je u nenegativna izmjeriva funkcija definirana na Ω i neka iščezava na $\partial\Omega$. Za $c \in \mathbb{R}$, s $\Omega(c) = \{x \in \Omega : u(x) \geqslant c\}$ označavamo pripadni nivo skup. Steinerova simetrizacija od u je funkcija $u^\star$, definirana na $\Omega^\star$ s*

$$u^\star(x) = \sup\{c : x \in \Omega(c)^\star\}.$$

Steinerovu simetrizaciju od u možemo definirati i pomoću funkcije distribucije od u. Za s.s. $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, ta se funkcija definira kao $m_u(x', c) = |\{x_N \in \mathbb{R} : u(x', x_N) > c\}|$, $c > 0$. Ona je neopadajuća i neprekidna zdesna po c. Ako definiramo funkciju $y = Y(x', c) := \frac{1}{2} m_u(x', c)$, onda je njezin inverz upravo $u^\star$ te vrijedi

$$c = u^\star(x', y) = u^\star(x', -y).$$

3.2.2 Svojstva

Izrecimo sada u jednom teoremu glavna svojstva Steinerove simetrizacije. Ova su svojstva jednaka onima kod Schwarzovog presloga.

Teorem 3.2.4. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ izmjeriv skup, a u nenegativna funkcija definirana na Ω i neka iščezava na $\partial\Omega$. Neka su $\Omega^\star$ i $u^\star$ Steinerove simetrizacije. Tada*

(i) $|\Omega| = |\Omega^\star|$.

(ii) Ako je ψ neka izmjeriva funkcija s $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}$, tada

$$\int_\Omega \psi(u(x))\, dx = \int_{\Omega^\star} \psi(u^\star(x))\, dx. \tag{3.7}$$

(iii) Ako je Ω otvoren i ako je u iz prostora Soboljeva $W_0^{1,p}(\Omega)$ za $1 \leqslant p < +\infty$, onda $u^\star \in W_0^{1,p}(\Omega^\star)$ i vrijedi

$$\textbf{\textit{Pòlyina nejednakost}} \quad \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx \geqslant \int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star(x)|^p\, dx. \tag{3.8}$$

(iv) Ako je Ω otvoren i ako su u i v iz $L^2(\Omega)$, onda vrijedi

$$\textbf{Hardy-Littlewoodova nejednakost} \quad \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \leqslant \int_{\Omega^\star} u^\star(x)v^\star(x)\,dx. \tag{3.9}$$

3.2.3 Neprekidna Steinerova simetrizacija

Umjesto pozicioniranja središta svakog segmenta ortogonalnog u hiperravninu direktno u hiperravninu, možemo ga pomaknuti brzinom proporcionalnom njegovoj udaljenosti od hiperravnine. Naravno, matematička definicija ove konstrukcije mora biti preciznija. U ovoj točki dajemo definicije neprekidne simetrizacije i navodimo neka od njezinih svojstava (detaljnije analizirana u [6]).

Označimo s $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ skup svih izmjerivih skupova u $\mathbb{R}^N$. Počnimo s jednozimenzionalnim slučajem.

Definicija 3.2.5. *Familiju skupovnih preslikavanja*

$$E_t : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}), \;\; 0 \leqslant t \leqslant +\infty,$$

koja zadovoljava svojstva ($A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}),\; 0 \leqslant s, t \leqslant +\infty$):

(i) $|E_t(A)| = |A|$, *(ekviizmjerivost)*

(ii) Ako $A \subset B$, onda $E_t(A) \subset E_t(B)$, (monotonost)

(iii) $E_t(E_s(A)) = E_{s+t}(A)$

(iv) Ako je $I = [y_1, y_2]$, ograničen i zatvoren interval, onda $E_t(I) = [y_1^t, y_2^t]$, gdje

$$\begin{aligned} y_1^t &= (1/2)(y_1 - y_2 + e^{-t}(y_1 + y_2)) \\ y_2^t &= (1/2)(y_2 - y_1 + e^{-t}(y_1 + y_2)) \end{aligned} \tag{3.10}$$

nazivamo neprekidnom simetrizacijom skupova u $\mathbb{R}$.

Ako je Ω neki izmjeriv skup, s $\Omega^t = E_t(\Omega)$ označavamo simetrizirane skupove. Egzistencija, jedinstvenost i neka daljnja svojstva familije $\{E_t\}_t$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ dokazani su u [6], Teorem 2.1. Posebno, za svaki $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$,

$$\Omega^0 = \Omega, \;\; \Omega^\infty = \Omega^\star. \tag{3.11}$$

Slijedi definicija neprekidne Steinerove simetrizacije skupa te neprekidne Steinerove simetrizacije funkcije.

Definicija 3.2.6. *Neka je $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Familija skupova*

$$\Omega^t = \left\{x = (x', x_N) : x_N \in \left(\Omega(x')\right)^t,\ x' \in \Omega'\right\},\ 0 \leqslant t \leqslant +\infty, \tag{3.12}$$

naziva se neprekidnom Steinerovom simetrizacijom od Ω. Ako je Ω otvoren, onda je i Ω^t otvoren.

Definicija 3.2.7. *Neka je u nenegativna funkcija na otvorenom skupu Ω koja iščezava na $\partial\Omega$. Familija funkcija u^t, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$, definirana na Ω^t s*

$$u^t(x) = \sup\left\{c : x \in \{u > c\}^t\right\},\ x \in \Omega^t \tag{3.13}$$

naziva se neprekidnom Steinerovom simetrizacijom od u, u odnosu na $x_N = 0$.

Kao i u (3.11), može se dokazati da, za svaki $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ i za u kao u prethodnom, vrijedi

$$\Omega^0 = \Omega,\ \ \Omega^\infty = \Omega^\star \quad u^0 = u,\ \ u^\infty = u^\star. \tag{3.14}$$

Sažmimo sada neka svojstva neprekidne simetrizacije. Zapravo su slična svojstvima iz Teorema 3.2.4.

Teorem 3.2.8. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ izmjeriv skup i neka je u nenegativna funkcija definirana na Ω koja iščezava na $\partial\Omega$. Neka su Ω^t i u^t pripadne neprekidne Steinerove simetrizacije. Tada:*

(i) $|\Omega| = |\Omega^t|$.

(ii) Ako je ψ neka izmjeriva funkcija s $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}$, onda

$$\int_\Omega \psi(u(x))\,dx = \int_{\Omega^t} \psi(u^t(x))\,dx. \tag{3.15}$$

(iii) Ako je Ω otvoren i ako je u iz prostora Soboljeva $W_0^{1,p}(\Omega)$, za $1 \leqslant p < +\infty$, onda $u^t \in W_0^{1,p}(\Omega^t)$ i

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \geqslant \int_{\Omega^t} |\nabla u^t(x)|^p\,dx. \tag{3.16}$$

Posebno, primjenom (2.32), jednostavno je iz (3.15) i (3.16) zaključiti da se prva svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet smanjuje uslijed primjene neprekidne Steinerove simetrizacije. Ponašanje ostalih svojstvenih vrijednosti pod neprekidnom Steinerovom simetrizacijom nije toliko jednostavno.

Teorem 3.2.9. ***(Bucur-Henrot)*** *Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}^*$. Pridruživanje $t \mapsto \lambda_k(\Omega^t)$ je poluneprekidno slijeva odozdo i poluneprekidno zdesna odozgo. Štoviše, vrijedi implikacija: ako $\lambda_k(\Omega^t) \geqslant \lambda_k(\Omega)$ za neki $t > 0$, onda, za svaki $\lambda \in [\lambda_k(\Omega), \lambda_k(\Omega^t)]$, postoji $t_\lambda \in [0, t]$ takav da $\lambda_k(\Omega^{t_\lambda}) = \lambda$.*

Za dokaz, vidjeti [8].

Jedna od glavnih prednosti neprekidne Steinerove simetrizacije je ta da možemo promotriti što se događa kada $t \to 0$. Otprije je poznata činjenica da je preslikavanje $t \to u^t$ neprekidno u $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (funkcije proširujemo nulom izvan Ω^t). Također, vrlo je zanimljivo promotriti svojstva diferencijabilnosti funkcionala kao $t \mapsto \int_{\Omega^t} |\nabla u^t(x)|^p \, dx$. Naravno, zahvaljujući (3.16), derivacija ovakvog preslikavanja mora biti negativna. Preciznije, navedimo rezultat koji pokazuje što se događa kada je derivacija jednaka nuli (za dokaz, vidjeti [6]).

Teorem 3.2.10. ***(Brock)*** *Neka je Ω ograničena domena, $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u > 0$ u Ω i neka je $u = 0$ na $\partial\Omega$. Nadalje, neka je G pozitivna, rastuća i strogo konveksna funkcija na $[0, +\infty)$ i pretpostavimo da*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \Big(\int_{\Omega^t} G(|\nabla u^t|) \, dx - \int_{\Omega} G(|\nabla u|) \Big) = 0. \tag{3.17}$$

Tada imamo dekompoziciju

$$\{x \in \Omega : 0 < u(x) < \sup u\} = \bigcup_{k=1}^{m} \Big(B(z_k, R_k) \setminus \overline{B(z_k, r_k)} \Big) \bigcup S, \tag{3.18}$$

gdje je

$$\begin{aligned} &S = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} \ \text{ te za } \ 1 \leqslant k \leqslant m \ \text{ vrijedi:} \\ &R_k > r_k \geqslant 0, \\ &z_k \in \{x \in \Omega : 0 < u(x) < \sup u\}, \\ &B(z, R) \text{ je kugla radijusa } R \text{ sa centrom u } z, \\ &\frac{\partial u}{\partial \rho} < 0 \text{ na } B(z_k, R_k) \setminus \overline{B(z_k, r_k)}, \ (\rho \text{ je udaljenost od } z_k), \\ &\min\{u(x) : x \in B(z_k, r_k)\} = \min\{u(x) : x \in \partial B(z_k, r_k)\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Skupovi na desnoj strani jednakosti (3.18) *su disjunktni.*

Ovaj rezultat koristit ćemo u Poglavlju 4.4.

3.3 Neprekidnost svojstvenih vrijednosti

3.3.1 Uvod

Za dokaz egzistencije minimizatora ili maksimizatora svojstvenih vrijednosti, ili pak funkcija svojstvenih vrijednosti, očito trebamo neprekidnost svojstvenih vrijednosti u odnosu na neku varijablu. Ovdje ćemo se usredotočiti na ovisnost svojstvenih vrijednosti o domeni, što će nam i trebati u Poglavlju 4.

Teorem 3.3.1. *Neka su T_1 i T_2 hermitski, kompaktni i pozitivni operatori na separabilnom Hilbertovom prostoru H te neka su $\lambda_k(T_1)$ i $\lambda_k(T_2)$ njihove k-te svojstvene vrijednosti, respektivno. Tada*

$$|\lambda_k(T_1) - \lambda_k(T_2)| \leqslant \|T_1 - T_2\| := \sup_{\substack{f \in H \\ f \neq 0}} \frac{\|(T_1 - T_2)(f)\|}{\|f\|}. \tag{3.20}$$

Izravna posljedica Teorema 3.3.1 je ta da iz jake konvergencije operatora slijedi konvergencija svojstvenih vrijednosti. Sada ćemo vidjeti da, u našem kontekstu, zahvaljujući kompaktnosti ulaganja $H^1 \hookrightarrow L^2$ i $L^2 \hookrightarrow H^{-1}$, konvergencija rezolventnih operatora po točkama implicira konvergenciju svojstvenih vrijednosti.

Dodajmo još da se ovdje bavimo eliptičkim operatorima uz Dirichletov rubni uvjet. Dakle, neka je L neki eliptički operator dan s (2.3) i sjetimo se operatora definiranih s (2.7). Kako bismo mogli promotriti niz domena $(\Omega_n)_n$ unutar neke fiksne domene D, niz operatora $(A_L^D(\Omega_n)_n$ proširimo na $L^2(D)$:

$$\begin{aligned} A_L^D(\Omega_n) : L^2(D) &\to L^2(D), \\ f &\mapsto \tilde{u}, \end{aligned}$$

gdje je u rješenje od (2.6), a $\tilde{u}$ njegovo proširenje nulom izvan Ω_n. Zbog jednostavnosti, umjesto $\tilde{u}$, pišemo u.

Teorem 3.3.2. *Neka je $(A_n)_n$, A niz rezolventnih operatora s $L^2(D)$ u $L^2(D)$, koji odgovaraju nizu uniformno eliptičkih operatora uz Dirichletov rubni uvjet. Pretpostavimo da, za svaki $f \in L^2(D)$, $A_n(f)$ konvergira prema $A(f)$ u $L^2(D)$. Tada A_n konvergira jako prema A. Posebno, svojstvene vrijednosti operatora A_n konvergiraju prema odgovarajućim svojstvenim vrijednostima operatora A.*

Dokaz. Napomenimo najprije da rezolventni operatori A_n i A imaju ograničenu normu. Zaista, iz (2.6) i uniformne eliptičnosti od A_n, slijedi (uz $u = A_n(f)$)

$$\alpha \int_D |\nabla u|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^N \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx + \int_D a_0(x) u^2(x)\, dx = \int_D f(x) u(x)\, dx.$$

Zahvaljujući Poincaréovoj nejednakosti (1.1) za lijevu stranu i Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti za desnu stranu gornje nejednakosti, imamo

$$\frac{\alpha}{C}\|u\|^2_{L^2(D)} \leqslant \|f\|_{L^2(D)}\|u\|_{L^2(D)},$$

iz čega slijedi

$$\|A_n\| := \sup_{\substack{f\in L^2(D)\\ f\neq 0}} \frac{\|u\|_{L^2(D)}}{\|f\|_{L^2(D)}} \leqslant \frac{C}{\alpha}. \tag{3.21}$$

Sada tvrdimo da je moguće (za fiksan n) naći f^n u jediničnoj kugli prostora $L^2(D)$ tako da se postiže supremum:

$$\sup_{\|f\|_{L^2(D)}\leqslant 1} \|A_n(f) - A(f)\|_{L^2(D)} = \|A_n(f^n) - A(f^n)\|_{L^2(D)}.$$

Zaista, ako je $(f_k)_k$ maksimizirajući niz, moguće je izolirati njegov podniz koji konvergira slabo prema nekom f^n, a koji također pripada jediničnoj kugli prostora $L^2(D)$. Budući da je ulaganje $L^2(D) \hookrightarrow H^{-1}(D)$ kompaktno (hermitski adjungirano ulaganju $H^1_0(D) \hookrightarrow L_2(D)$) i da su A_n i A neprekidna preslikavanja s $H^{-1}(D)$ u $H^1_0(D)$, prethodna jednakost slijedi za $k \to +\infty$.

Ponovimo sada ovu metodu s nizom $(f^n)_n$: postoji f u jediničnoj kugli prostora $L^2(D)$ takva da $(f^n)_n$ konvergira slabo u $L^2(D)$ i jako u $H^{-1}(D)$ prema f. Fiksirajmo prirodan broj n_1 takav da $n \geqslant n_1$. Imamo:

$$\|f^n - f\|_{H^{-1}(D)} \leqslant \frac{\varepsilon\alpha}{4C} \quad \text{i} \quad \|A_n(f) - A(f)\|_{L^2(D)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

gdje druga nejednakost slijedi iz pretpostavke konvergencije (po točkama) $(A_n)_n$ prema A. Sada

$$\begin{aligned}
\sup_{\|g\|_{L^2(D)}\leqslant 1} \|A_n(g) - A(g)\|_{L^2(D)} &= \|A_n(f^n) - A(f^n)\|_{L^2(D)} \\
&\leqslant \|A_n(f) - A(f)\|_{L^2(D)} + \|A_n(f^n - f) - A(f^n - f)\|_{L^2(D)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H^1_0,H^{-1})}\frac{\varepsilon\alpha}{4C} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C}{\alpha}\frac{\varepsilon\alpha}{4C} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju Teorema. □

3.3.2 Neprekidnost u odnosu na domenu uz Dirichletov rubni uvjet

Kao što smo vidjeli u Teoremu 3.3.2, konvergencija svojstvenih vrijednosti na različitim domenama usko je povezana s neprekidnošću rješenja Dirichletovog problema u odnosu na domenu (tzv. γ-konvergencija). Za više o temi, vidjeti [7], [20].

γ-konvergencija

Počnimo definicijom γ-konvergencije (za Laplaceov operator).

Definicija 3.3.3. *Neka je D fiksna kugla, $(\Omega_n)_n \subset D$ niz otvorenih skupova i neka je $\Omega \subset D$ također otvoren skup. Kažemo da niz $(\Omega_n)_n$ γ-konvergira prema Ω (i pišemo $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$) ako, za svaki $f \in L^2(D)$, rješenje $u^f_{\Omega_n}$ za Laplaceov operator* (2.5) *uz Dirichletov rubni uvjet na Ω_n s desnom stranom f na $L^2(D)$, konvergira (jako) prema u^f_Ω; rješenju na Ω (svaka funkcija na $H^1_0(\Omega_n)$ proširena je nulom izvan Ω_n).*

Drugim riječima, koristeći notaciju Poglavlja 2.1.2

$$\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega \text{ ako, } \forall f \in L^2(D),\ A^D_\Delta(\Omega_n)(f) \to A^D_\Delta(\Omega)(f).$$

U narednom teoremu izlažemo karakterizaciju γ-konvergencije. Za dokaz, vidjeti [7], [20].

Teorem 3.3.4. *Ekvivalentno je*

(i) $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$.

(ii) ***Šverak:*** $A^D_\Delta(\Omega_n)(1) \to A^D_\Delta(\Omega)(1)$ *na* $L^2(D)$.

(iii) ***Udaljenost od H^1_0:*** $\forall \varphi \in H^1_0(D)$, $d(\varphi, H^1_0(\Omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} d(\varphi, H^1_0(\Omega_n))$ *(gdje $d(\varphi, X)$ označava udaljenost φ od konveksnog skupa X).*

(iv) ***Projekcija na H^1_0:*** $\forall \varphi \in H^1_0(D)$, $\operatorname{proj}_{H^1_0(\Omega)}(\varphi) = \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{proj}_{H^1_0(\Omega_n)}(\varphi)$ *(gdje $\operatorname{proj}_X(\varphi)$ označava projekciju od φ na konveksan skup X).*

(v) ***(Jaka) Konvergencija rezolventnih operatora:*** $\|A^D_\Delta(\Omega_n) - A^D_\Delta(\Omega)\| \to 0$.

(vi) ***Moscova konvergencija:*** *$H^1_0(\Omega_n)$ konvergira u Moscovom smislu prema $H^1_0(\Omega)$ odnosno:*

(M1) Za svaki $v \in H^1_0(\Omega)$, postoji niz $(v_n)_n$, $v_n \in H^1_0(\Omega_n)$ takav da $v_n \to v$ (jaka konvergencija u $H^1_0(D)$).

(M2) Za svaki podniz $(v_{n_k})_k$ funkcija u $H^1_0(\Omega_{n_k})$ koji konvergira slabo prema funkciji $v \in H^1_0(D)$, vrijedi $v \in H^1_0(\Omega)$.

Primjenom Teorema 3.3.2 imamo:

Korolar 3.3.5. *Ako $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$, onda $\lambda_k(\Omega_n) \to \lambda_k(\Omega)$.*

Napomena 3.3.6. *Zapravo, svaki od uvjeta Moscove konvergencije osigurava poluneprekidnost za svojstvene vrijednosti (vidjeti [7]). Preciznije, možemo dokazati:*

$$\begin{aligned} &\textit{Ako vrijedi (M1), onda } \limsup_{n\to\infty} \lambda_k(\Omega_n) \leqslant \lambda_k(\Omega) \textit{ (poluneprekidnost odozgo).} \\ &\textit{Ako vrijedi (M2), onda } \liminf_{n\to\infty} \lambda_k(\Omega_n) \geqslant \lambda_k(\Omega) \textit{ (poluneprekidnost odozdo).} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Hausdorffova udaljenost

Unatoč tome što Teorem 3.3.4 daje puno karakterizacija γ-konvergencije, a stoga i nužne i dovoljne uvjete za neprekidnost svojstvenih vrijednosti, nijedna od njih nije zaista jednostavna niti praktična za primjenu. Ovo je razlog iz kojeg dajemo jednostavne dovoljne uvjete koji osiguravaju neprekidnost svojstvenih vrijednosti.

Za proučavanje konvergencije otvorenih skupova, često je pogodno koristiti Hausdorffovu udaljenost.

Definicija 3.3.7. *Neka su K_1 i K_2 neprazni i kompaktni podsupovi od $\mathbb{R}^N$. Stavimo*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^N,\ d(x, K_1) &= \inf_{y\in K_1} |y - x|, \\ \rho(K_1, K_2) &= \sup_{x\in K_1} d(x, K_2). \end{aligned}$$

Hausdorffova udaljenost od K_1 do K_2 definira se s

$$d_H(K_1, K_2) = \max(\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)). \tag{3.23}$$

Također, imamo dvije definicije ekvivalentne (3.23)*:*

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\alpha > 0 : K_2 \subset K_1^\alpha \text{ i } K_1 \subset K_2^\alpha\}, \tag{3.24}$$

gdje $K^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, K) \leqslant \alpha\}$, te

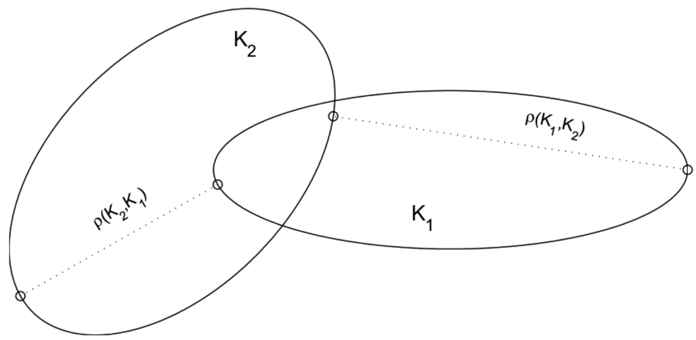
$$d_H(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(K_1\cup K_2)}, \tag{3.25}$$

gdje, za bilo koji kompaktan skup K, $d_K(x) = d(x, K)$.

Za otvorene skupove, definiramo Hausdorffovu udaljenost pomoću njihovih komplemenata:

Definicija 3.3.8. *Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi nekog kompaktnog skupa B. Tada se Hausdorffova udaljenost definira s*

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = d_H(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2). \tag{3.26}$$



Slika 3.2: Hausdorfova udaljenost dva kompaktna skupa.

Jedno od najkorisnijih svojstava Hausdorffove udaljenosti je svojstvo kompaktnosti (vidjeti [7] i [20]):

Teorem 3.3.9. *Neka je B kompaktan skup u $\mathbb{R}^N$ i neka je $(\Omega_n)_n$ niz otvorenih podskupova od B. Tada postoji otvoreni skup $\Omega \subset B$ i podniz $(\Omega_{n_k})_k$, koji u Hausdorffovoj metrici konvergira prema.*

Napomena 3.3.10. *Ako niz otvorenih skupova $(\Omega_n)_n$ u Hausdorffovoj metrici konvergira prema Ω, može se dokazati da vrijedi Moscov uvjet (M1). Drugim riječima, primjenom Napomene 3.3.6, vidimo da je niz svojstvenih vrijednosti poluneprekidan odozgo kada niz otvorenih skupova konvergira u Hausdorffovoj metrici.*

Dovoljni uvjeti za neprekidnost

Prva dva rezultata pokazuju da neprekidnost niza svojstvenih vrijednosti uz Hausdorffovu udaljenost vrijedi kada su domene uniformno regularne (vidjeti [10] i [20]).

Teorem 3.3.11. *Neka je B kompaktan skup u $\mathbb{R}^N$ i neka je $(\Omega_n)_n$ niz konveksnih otvorenih skupova u B koji u Hausdorffovoj metrici konvergira prema (konveksnom) skupu Ω. Tada $(\Omega_n)_n$ γ-konvergira prema Ω.*

Definicija 3.3.12. *Skupovi $(\Omega_n)_n \subset \mathbb{R}^N$ su uniformno Lipschitzovi ako je $\partial\Omega_n$ lokalno graf Lipschitzove funkcije i ako uniformno možemo uzeti Lipschitzovu konstantu L za sve Lipschitzove funkcije i za sve skupove Ω_n.*

Teorem 3.3.13. ***(Chenais)*** *Neka je B kompaktan skup u $\mathbb{R}^N$ i neka je $(\Omega_n)_n$ niz otvorenih podskupova od B. Pretpostavimo da su skupovi Ω_n uniformno Lipschitzovi. Nadalje, pret-*

postavimo da $(\Omega_n)_n$ u Hausdorffovoj metrici konvergira prema Ω. Tada $(\Omega_n)_n$ γ-konvergira prema Ω.

U dvije dimenzije vrijedi rezultat koji daje neprekidnost uz slabije pretpostavke (vidjeti [20] i [35]). Grubo govoreći, kaže da je broj rupa u nizu $(\Omega_n)_n$ uniformno ograničen te da, ako $(\Omega_n)_n$ konvergira u Hausdorffovoj metrici, onda konvergiraju i svojstvene vrijednosti. Preciznije, za bilo koji otvoreni skup Ω (čiji komplement označavamo s Ω^c), definiramo

$$\sharp\Omega^c = \text{broj komponenata povezanosti od } \Omega^c.$$

Teorem 3.3.14. ***(Šverak)*** *Neka je B kompaktan skup u $\mathbb{R}^2$ i neka je $(\Omega_n)_n$ niz otvorenih podskupova od B. Neka je $p \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da skupovi Ω_n zadovoljavaju $\sharp\Omega_n^c \leqslant p$. Tada, ako skupovi Ω_n u Hausdorffovoj metrici konvergiraju prema skupu Ω, onda oni γ-konvergiraju prema Ω i, za svaki fiksan k, $\lambda_k(\Omega_n) \to \lambda_k(\Omega)$.*

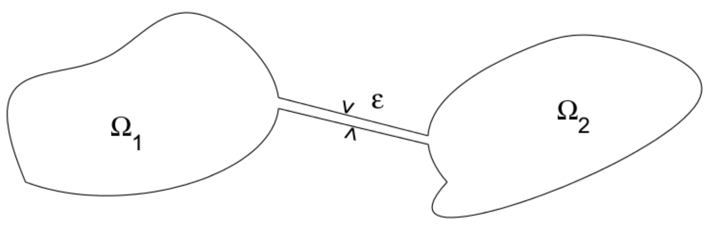
Kao primjer primjene, navodimo rezultat koji će pokazati da uvođenje povezanosti generalno ne mijenja ništa u problemu minimizacije.

Teorem 3.3.15. *Neka su Ω_1 i Ω_2 disjunktni i otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$ i neka je Σ segment koji spaja Ω_1 i Ω_2. Neka je $\varepsilon > 0$ i označimo s Ω_ε otvoreni skup*

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Sigma} B(x, \varepsilon) \cup \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

koji se dobiva spajanjem skupova Ω_1 i Ω_2 malenom prugom širine ε (vidjeti Sliku 3.3). Tada, za svaki $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k(\Omega_\varepsilon) \to \lambda_k(\Omega_1 \cup \Omega_2), \ za\ \varepsilon \to 0.$$



Slika 3.3: Svojstvene vrijednosti povezanog skupa Ω_ε konvergiraju prema svojstvenim vrijednostima skupa $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Jasno je da, u Hausdorffovoj metrici, Ω_ε konvergira prema $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Stoga je dvodimenzionalan slučaj jednostavna posljedica Šverakovog Teorema 3.3.14. N-dimenzionalni slučaj zahtijeva više analize. Posebno, potrebni su neki alati vezani uz kapacitet te još neka posebna svojstva Soboljevljevih prostora (vidjeti Poglavlje 3.4). Iz tog razloga ovdje dajemo reference [7] i [20]. Dokaz ovog Teorema koristi Napomenu 3.3.10, iz koje vidimo da, zahvaljujući konvergenciji u Hausdorffovoj metrici, vrijedi uvjet (M1) Moscove konvergencije. Stoga preostaje dokazati (M2), kako bismo mogli primijeniti Teorem 3.3.4.

3.4 Teoremi egzistencije minimizirajuće domene

Vratimo se sada problemu minimizacije svojstvenih vrijednosti Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet. U tom kontekstu navodimo dva opća teorema o egzistenciji. Prvi govori o konveksnim domenama, a drugi je, za kojeg su zaslužni G. Butazzo i G. Dal Maso (vidjeti [9]) općenitiji. Počnimo sa slučajem konveksne domene.

Teorem 3.4.1. *Neka je c pozitivna konstanta i neka je k neki prirodni broj. Tada postoji konveksna domena Ω^* takva da*

$$\lambda_k(\Omega^*) = \min\{\lambda_k(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^N, \Omega \textit{ konveksna, } |\Omega| = c\}.$$

Dokaz. Neka je $(\Omega_n)_n$ minimizirajući niz za λ_k. Najprije, tvrdimo da je dijametar od Ω_n ograničen. Definirajmo širinu od Ω_n kao maksimalan dijametar presjeka bilo kojeg dijela od Ω_n i hiperravnine ortogonalne na segment koji čini dijametar od Ω_n. U slučaju da dijametar od Ω_n nije ograničen, njegova širina bi trebala ići u nulu zbog činjenice da je svim domenama Ω_n volumen zadan te zbog pretpostavke konveksnosti. Stoga bismo mogli naći niz paralelepipeda (ili cilindara), koji sadrže Ω_n, s barem jednom dimenzijom koja teži prema nuli. Međutim, za takve paralelepipede znamo vrijednost od λ_1 (vidjeti Točku 2.2.5). Ona konvergira prema $+\infty$. Stoga bismo, kako bi zadovoljili svojstvo monotonosti niza svojstvenih vrijednosti, imali $\lambda_k(\Omega_n) \to +\infty$. Budući da je niz koji čine dijametri niza $(\Omega_n)_n$ ograničen, možemo pretpostaviti (do na translaciju) da je čitav niz sadržan u fiksnoj kugli B. Po Teoremu 3.3.9 postoji konveksna domena Ω^* i podniz, i dalje označen s $(\Omega_n)_n$, takav da $(\Omega_n)_n$ u Hausdorffovoj metrici konvergira prema Ω^*. Sada, po Teoremu 3.3.11, $\lambda_k(\Omega_n) \to \lambda_k(\Omega)$. Štoviše, jednostavno je vidjeti da karakteristična funkcija za Ω_n konvergira prema karakterističnoj funkciji za Ω^* u $L^1(B)$. Stoga $|\Omega_n| \to |\Omega^*|$ i $|\Omega^*| = c$. Time je dokaz gotov. □

Definicija 3.4.2. *Neka je D otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^N$. Definiramo kapacitet* $\operatorname{cap}_D(E)$ *(relativno u odnosu na D) bilo kojeg podskupa E od D na način:*
za bilo koji kompaktan $K \subset D$ imamo

$$\operatorname{cap}_D(K) = \inf\left\{ \int_D |\nabla v|^2 : v \in C_0^\infty(D), v \geqslant 1 \textit{ na } K \right\} < +\infty. \tag{3.27}$$

Za ω otvoreni podskup od D imamo

$$\mathrm{cap}_D(\omega) = \sup\{\mathrm{cap}_D(K) : K \text{ kompaktan, } K \subset \omega\}. \tag{3.28}$$

Napokon, za E bilo koji podskup od D, imamo

$$\mathrm{cap}_D(E) = \inf\{\mathrm{cap}_D(\omega) : \omega \text{ otvoren, } E \subset \omega\}. \tag{3.29}$$

Grubo govoreći, kapacitet za Soboljevljev prostor H^1 igra ulogu jednaku kao i Lebesgueova mjera za prostor L^2. Definirajmo sada kvazi-otvorene skupove.

Definicija 3.4.3. *Podskup Ω od D je kvazi-otvoren ako postoji padajući niz otvorenih skupova $(\omega_n)_n$, takav da je $\Omega \cup \omega_n$ otvoren i $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{cap}_D(\omega_n) = 0$.*

Kao fundamentalan primjer, za svaki u iz $H^1(D)$ i za svaki α iz R, skup

$$[u > \alpha] := \{x \in D : u(x) > \alpha\}$$

je kvazi-otvoren. Štoviše, teorija svojstvenih vrijednosti eliptičkih operatora može se proširiti na kvazi-otvorene skupove.

Sada možemo navesti Buttazzo-Dal Masov rezultat o egzistenciji. Promotrimo fiksan otvoren skup D i pozitivan broj c takav da $c < |D|$. S $\mathcal{A}_c$ označimo klasu:

$$\mathcal{A}_c = \{\omega \subset D : \omega \text{ kvazi-otvoren, } |\omega| = c\}.$$

Teorem 3.4.4. *Neka je $p \in \mathbb{N}$ i F funkcija s $\mathbb{R}^p$ u $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da vrijedi*

(i) F je poluneprekidna odozdo,

(ii) F je neopadajuća u svim varijablama.

Tada problem: naći $\Omega \in \mathcal{A}_c$ koji minimizira J definiran s

$$J(\omega) := F(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), ..., \lambda_p(\omega)) \tag{3.30}$$

ima rješenje.

Korolar 3.4.5. *Neka je k prirodan broj. Problem: naći $\Omega \in \mathcal{A}_c$ takav da*

$$\lambda_k(\Omega) = \min\{\lambda_k(\omega) : \omega \in \mathcal{A}_c\} \tag{3.31}$$

ima rješenje.

3.5 Derivacije svojstvenih vrijednosti

3.5.1 Uvod

Čim želimo zapisati uvjete optimalnosti za problem optimizacije koji uključuje svojstvene vrijednosti, potrebne su nam formule za njihove derivacije.

Naravno, svojstvo diferencijabilnosti svojstvene vrijednosti (u klasičnom smislu) može se dokazati samo kada je svojstvena vrijednost jednostavna. To se lako može shvatiti promatranjem jednostavnog konačnodimenzionalnog slučaja: neka je A_t 2×2 matrica definirana s

$$A_t = \begin{bmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{bmatrix}.$$

Matrica $A_0 = I$ ima dvostruku svojstvenu vrijednost. Prva svojstvena vrijednost od A_t (njezina najmanja), λ_1 je $1 - t$ za $t \geqslant 0$ i $1 + t$ za $t \leqslant 0$. Imamo

$$\lambda_1(A_t) = 1 - |t| \quad \lambda_2(A_t) = 1 + |t|.$$

Preslikavanje $t \mapsto \lambda_1(A_t)$ nije diferencijabilno u $t = 0$. Ovo se ne može dogoditi u slučaju matrica s jednostavnim svojstvenim vrijednostima. Zapravo, ako bolje promotrimo svojstvene vrijednosti matrice A_t (nacrtamo grafove), vidimo da postoje dvije "grane" koje se sijeku u vrijednosti 1 i za koje vrijedi da je $t \mapsto \lambda_1(A_t)$ diferencijabilna na njima (štoviše, analitička). Drugim riječima, možemo renumerirati svojstvene vrijednosti kako bismo došli do diferencijabilnosti. Ovdje ne ulazimo u detalje ovog problema (vidjeti [20]), već se bavimo slučajem s jednostavnim svojstvenim vrijednostima.

3.5.2 Derivacije u odnosu na domenu

Promatramo otvoreni skup Ω i familiju preslikavanja $\Phi(t)$, koja zadovoljavaju

$$\Phi : t \in [0, T) \to W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \text{ diferencijabilna u 0, uz } \Phi(0) = I, \Phi'(0) = V, \tag{3.32}$$

gdje je $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ skup ograničenih Lipschitzovih preslikavanja s $\mathbb{R}^N$ u $\mathbb{R}^N$. I je identiteta, a V vektorsko polje. Za malen t, $\Phi(t)$ je difeomorfizam. Primjerice, možemo odabrati

$$\Phi(t) = I + tV.$$

Označimo s $\Omega_t = \Phi(t)(\Omega)$ i s $\lambda_k(t) = \lambda_k(\Omega)$ (odnosno $\mu_k(t) = \mu_k(\Omega)$) k-tu svojstvenu funkciju Laplaceovog operatora na Ω_t uz Dirichleov (odnosno Neumannov) rubni uvjet. Pretpostavimo da je $\lambda_k(t)$ (ili $\mu_k(t)$) jednostavna (za malen t) i, budući da je k fiksan, u nastavku s u_t označimo pripadnu svojstvenu funkciju na $H_0^1(\Omega_t)$ (ili $H^1(\Omega_t)$, ovisno o rubnom uvjetu). Sve to uz normalizaciju

$$\int_{\Omega_t} u_t^2(x)\, dx = 1. \tag{3.33}$$

Teorem 3.5.1. ***(Prva derivacija Dirichletove svojstvene vrijednosti)*** *Neka je Ω ograničen i otvoren skup. Pretpostavimo da je $\lambda_k(\Omega)$ jednostavna. Tada su funkcije $t \mapsto \lambda_k(t)$ i $t \mapsto u_t \in L^2(\mathbb{R}^N)$ diferencijabilne u $t = 0$ uz*

$$\lambda_k'(0) := -\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^2 V)\, dx. \tag{3.34}$$

Ako je još Ω klase C^2 ili konveksna, onda

$$\lambda_k'(0) := -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 V \cdot n\, d\sigma, \tag{3.35}$$

a u', derivacija od u^t u nuli, je rješenje zadaće

$$\begin{cases} -\Delta u' = \lambda_k u' + \lambda_k' u & u\ \Omega, \\ \quad u' = -\dfrac{\partial u}{\partial n} V \cdot n & na\ \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u u'\, d\sigma = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Napomena 3.5.2. *Ako Laplaceov operator zamijenimo općenitijim linearnim eliptičkim operatorom L, kako je definiran u* (2.3)*, izraz za prvu derivaciju prelazi u*

$$\lambda_k'(0) = -\int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i\Big) V \cdot n\, d\sigma. \tag{3.37}$$

Teorem 3.5.3. ***(Derivacija volumena)*** *Neka je Ω ograničen i otvoren skup i uvedimo oznaku* $\mathrm{Vol}(t) := |\Omega_t|$ *(za volumen od Ω_t). Tada je funkcija $t \mapsto \mathrm{Vol}(t)$ diferencijabilna u $t = 0$ uz*

$$\mathrm{Vol}'(0) := \int_\Omega \operatorname{div}(V)\, dx. \tag{3.38}$$

Štoviše, ako je Ω Lipschitzov,

$$\mathrm{Vol}'(0) := \int_{\partial\Omega} V \cdot n\, dx. \tag{3.39}$$

Korolar 3.5.4. *Neka je Ω konveksna ili C^2 domena u $\mathbb{R}^N$ koja, od svih skupova zadanog volumena, minimizira svojstvenu vrijednost λ_k. Pretpostavimo još i da je λ_k jednostavna. Tada postoji konstanta c takva da svojstvena funkcija u_k zadovoljava*

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial n}\right| = c \quad na\ \partial\Omega. \tag{3.40}$$

Zaista, ako Ω minimizira λ_k uz uvjet $\mathrm{Vol}(\Omega) = A$, postoji Lagrangeov multiplikator C takav da $\lambda_k'(0) = C\mathrm{Vol}'(0)$, iz čega imamo

$$-\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n}\right)^2 V\cdot n\,d\sigma = C\int_{\partial\Omega} V\cdot n\,d\sigma$$

za bilo koje vektorsko polje V u $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ (znamo da svojstvene funkcije u_k pripadaju Soboljevljevom prostoru $H^2(\Omega)$ prema klasičnim rezultatima regularnosti; vidjeti Točku 2.2.4). Iz ovoga slijedi $-(\frac{\partial u}{\partial n})^2 = C$, što daje željeni rezultat za $c = \sqrt{-C}$.

Teorem 3.5.5. ***(Prva derivacija Neumannove svojstvene vrijednosti)*** *Neka je Ω ograničen i otvoren skup. Pretpostavimo da je $\mu_k(\Omega)$ jednostavna. Tada su funkcije $t \mapsto \mu_k(t)$ i $t \mapsto u_t \in L^2(\omega)$, gdje je ω otvoren skup takav da $\overline{\omega} \subset \Omega$, diferencijabilne u $t = 0$, uz*

$$\mu_k'(0) := \int_\Omega \mathrm{div}((|\nabla u|^2 - \mu_k u^2)V)\,dx. \tag{3.41}$$

Ako je još Ω klase C^3, onda

$$\mu_k'(0) := \int_{\partial\Omega} (|\nabla u|^2 - \mu_k u^2)V\cdot n\,d\sigma, \tag{3.42}$$

a u', derivacija od u, je rješenje zadaće

$$\begin{cases} -\Delta u' = \lambda_k u' + \lambda_k' u & u\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u'}{\partial n} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2} V\cdot n + \nabla u\cdot\nabla_\Gamma(V\cdot n) & na\ \partial\Omega, \\ 2\displaystyle\int_\Omega uu'\,dx + \int_{\partial\Omega} u^2 V\cdot n\,d\sigma = 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

gdje ∇_Γ označava tangencijalni gradijent.

Poglavlje 4

Prva svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet

4.1 Uvod

Povijesno, minimizacija λ_1 prvi je problem te vrste koji se pojavio u znanstvenoj literaturi. U svojoj poznatoj knjizi "Teorija zvuka", Lord Rayleigh, zahvaljujući nizu eksplicitnih izračuna i fizičkih dokaza, tvrdi da je krug domena u ravnini koja bi trebala minimizirati prvu svojstvenu vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet (među domenama jednake površine). Glazbena interpretacija ovog rezultata mogla bi biti ta da između svih bubnjeva iste veličine, onaj kružnog oblika je bubanj koji daje najdublji ton. Ovu pretpostavku dokazali su tek trideset godina kasnije, u isto vrijeme i nezavisno, G. Faber i E. Krahn (Poglavlje 4.2). Ipak, priča o minimizaciji λ_1 ne završava ovdje. Kasnije G. Pólya razmatra isti problem na mnogokutima sa zadanim brojem stranica. Vrlo je jednostavno dokazao očekivani rezultat za trokute i četverokute. Međutim, njegov dokaz ne prolazi u slučaju mnogokuta s brojem stranica većim od pet (Poglavlje 4.3). Nadalje (Poglavlje 4.4) promatramo problem minimizacije λ_1 na skupovima koji moraju ležati unutar nekog zadanog područja. Na kraju (Poglavlje 4.5) razmatramo slučaj domena s nizom ograničenja: kakvo ograničenje na domenu dati, s ciljem minimizacije i maksimizacije prve svojstvene vrijednosti. Mnogi problemi i dalje ostaju otvoreni, čak i u ovom jednostavnom kontekstu.

4.2 Faber-Krahnova nejednakost

Za prvu svojstvenu vrijednost vrijedi osnovni rezultat (kako je pretpostavio Lord Rayleigh):

Teorem 4.2.1. ***(Faber-Krahn)*** *Neka je c pozitivan realan broj i neka je B kugla volumena c. Tada*

$$\lambda_1(B) = \min\{\lambda_1(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \textit{ otvoren, } |\Omega| = c\}.$$

Dokaz. Klasičan dokaz koristi Schwarzov (radijalno opadajući) preslog opisan u Poglavlju 3.1. Dakle, neka je Ω otvoren i ograničen skup volumena c i neka je $\Omega^* = B$ kugla jednakog volumena. Označimo s u_1 svojstvenu funkciju koja pripada svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1(\Omega)$ i neka je u_1^* njezin Schwarzov preslog. Iz (3.1) i (3.2) slijedi

$$\int_{\Omega^*} {u_1^*}^2(x)\,dx = \int_\Omega u_1^2(x)\,dx \ \text{ i } \ \int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2\,dx. \tag{4.1}$$

Sada, prema (2.32), imamo

$$\lambda_1(\Omega^*) \leqslant \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2\,dx}{\int_{\Omega^*} {u_1^*}^2(x)\,dx} \ \text{ i } \ \lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2\,dx}{\int_\Omega {u_1}^2(x)\,dx}. \tag{4.2}$$

Sada iz (4.1) i (4.2) slijedi traženi rezultat. □

Napomena 4.2.2. *Možemo se zapitati je li kugla jedinstveni minimizator od λ_1 (do na pomak). Zapravo, nije. Primjerice, ako u $\mathbb{R}^2$ iz kruga uklonimo konačan broj točaka, na njemu se postiže ista λ_1, pa je stoga i on minimizator. Općenitije; budući da se prostor Soboljeva $H_0^1(\Omega)$ ne mijenja ako iz Ω uklonimo skup kapaciteta nula (vidjeti Poglavlje 3.4), bilo koja domena oblika $\Omega^* \setminus K$, gdje je K skup kapaciteta nula, minimizira λ_1. Zapravo, ako ne dozvolimo takvu vrstu iregularnosti, kugla jest jedinstveni minimizator.*

Napomena 4.2.3. *Prva svojstvena vrijednost p-Laplaceovog operatora obično se definira s*

$$\lambda_1^p(\Omega) := \inf_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,dx}{\int_\Omega v^p(x)\,dx}, \tag{4.3}$$

gdje je p realan broj i $1 \leqslant p < \infty$. Slijedeći dokaz Faber-Krahnove nejednakosti (i koristeći (3.3) *umjesto* (3.2)*), slijedi:*

$$\forall p \in [1, +\infty), \quad \lambda_1^p(\Omega^*) \leqslant \lambda_1^p(\Omega). \tag{4.4}$$

Drugim riječima, kugla minimizira prvu svojstvenu vrijednost p-Laplaceovog operatora.

4.3 Mnogokuti

Problemu minimizacije λ_1 možemo rješenje tražiti i na klasi mnogokuta sa zadanim brojem stranica N. Označimo s $\mathcal{P}_N$ klasu mnogokuta u ravnini s najviše N stranica.

4.3.1 Egzistencija optimalnog mnogokuta

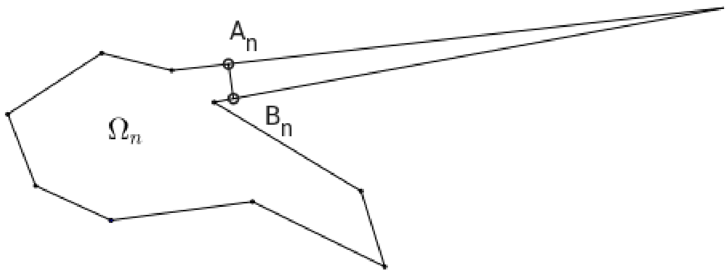
Počnimo s rezultatom o egzistenciji.

Teorem 4.3.1. *Neka je $a > 0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ fiksan. Tada problem*

$$\min\{\lambda_1(\Omega) : \Omega \in \mathcal{P}_N,\ |\Omega| = a\} \tag{4.5}$$

ima rješenje. Štoviše, ako s m_N označimo minimalnu vrijednost definiranu s (4.5)*, niz $(m_N)_N$ je (strogo) padajući.*

Dokaz. Neka je $(\Omega_n)_n$ minimizirajući niz u $\mathcal{P}_N$ za λ_1. Dokažimo prvo da je dijametar $D(\Omega_n)$ ograničen. Zaista, ako tome nije tako, možemo odabrati minimizirajući niz tako da $D(\Omega_n)$ konvergira prema $+\infty$. To bi značilo da dužina barem jednog dijela od Ω_n konvergira prema $+\infty$, ali s tim da osnovica širine A_nB_n, konvergira prema 0 (u suprotnom ograničenje na površinu od Ω ne bi bilo zadovoljeno). Ovo možemo zamisliti pomoću Slike 4.1. Dio od Ω_n čija dužina konvergira u $+\infty$ nazovimo krakom. Dokazati ćemo da uklanjanjem kraka



Slika 4.1: Zamišljamo da dužina izraženo kraka konvergira prema $+\infty$.

pri osnovici dobivamo novi minimizirajući niz $(\widetilde{\Omega}_n)_n$. Označimo stoga s $\widetilde{\Omega}_n$ mnogokut koji dobivamo zamjenom našeg kraka segmentom A_nB_n. Očito, imamo $|\widetilde{\Omega}_n| \leqslant |\Omega|$, pa preostaje dokazati da razlika $\lambda_1(\widetilde{\Omega}_n) - \lambda_1(\Omega_n)$ konvergira prema 0. To će pokazati da je $(\widetilde{\Omega}_n)_n$ minimizirajući niz za produkt $|\Omega|\lambda_1(\Omega)$. Budući da je broj krakova ograničen s $N/2$, u konačno mnogo koraka možemo doći do Ω_n transformiranog na način da mu je dijametar ograničen, stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je bila potrebna jedna takva transformacija. Označimo $\eta_n = A_nB_n$ ($\eta_n \to 0$) i $\omega_n = \Omega_n \cap B(\frac{A_n+B_n}{2}, 3\eta_n)$. Definirajmo i funkciju χ_n:

$$\begin{cases} \chi_n = 1 & \text{izvan } B(\frac{A_n+B_n}{2}, 3\eta_n), \\ \chi_n = 0 & \text{na segmentu } A_nB_n, \\ \chi_n \text{ je } C^1 & \text{na } \overline{\widetilde{\Omega}}_n, \\ \exists C > 0 \text{ neovisan o } n, & t.d. \ |\nabla\chi_n| \leqslant \frac{C}{\eta_n}. \end{cases}$$

Neka je u_n prva (normalizirana) svojstvena funkcija na Ω_n. Po konstrukciji $\chi_n u_n \in H^1_0(\widetilde{\Omega}_n)$ i, stoga, može ući u izraz (2.32), koji definira λ_1. Sada, za bilo koju C^1 funkciju v, imamo

$$|\nabla(vu_n)|^2 = |u_n\nabla v + v\nabla u_n|^2 = u_n^2|\nabla v|^2 + \nabla u_n \cdot \nabla(u_n v^2)$$

odnosno

$$|\nabla(vu_n)|^2 = u_n^2|\nabla v|^2 + \operatorname{div}(u_n v^2 \nabla u_n) + \lambda_1(\Omega_n)u_n^2 v^2.$$

Zamjenom v s χ_n i integriranjem na $\widetilde{\Omega}_n$, dobivamo

$$\int_{\widetilde{\Omega}_n} |\nabla(\chi_n u_n)|^2 = \int_{\widetilde{\Omega}_n} u_n^2|\nabla\chi_n|^2 + \lambda_1(\Omega_n)\int_{\widetilde{\Omega}_n} \chi_n^2 u_n^2. \tag{4.6}$$

Sada varijacijska definicija za $\lambda_1(\widetilde{\Omega}_n)$ (2.32) glasi:

$$\lambda_1(\widetilde{\Omega}_n) \leqslant \lambda_1(\Omega_n) + \frac{\int_{\widetilde{\Omega}_n} u_n^2|\nabla\chi_n|^2}{\int_{\widetilde{\Omega}_n} \chi_n^2 u_n^2}. \tag{4.7}$$

Uvrštavanjem $|\nabla\chi_n| = 0$ izvan $B(\frac{A_n+B_n}{2}, 3\eta_n)$, $|\nabla\chi_n| \leqslant \frac{C}{\eta_n^2}$ na ω_n i $\int_{\widetilde{\Omega}_n} \chi_n^2 u_n^2 \geqslant \frac{1}{2}$, iz (4.7) slijedi

$$\lambda_1(\widetilde{\Omega}_n) \leqslant \lambda_1(\Omega_n) + \frac{2C}{\eta_n^2}\int_{\omega_n} u_n^2 \leqslant \lambda_1(\Omega_n) + C' \sup_{\omega_n} u_n^2.$$

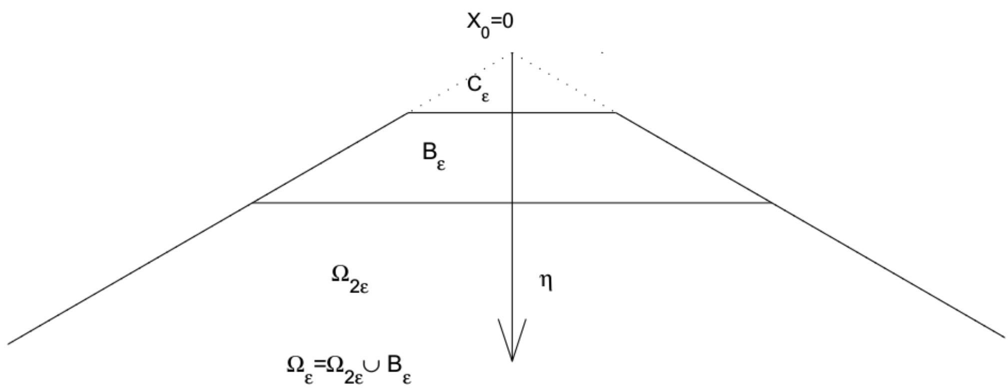
S obzirom na to da $\sup_{\omega_n} u_n^2 \to 0$, rezultat je dokazan.

Budući da je λ_1 invarijantna na translacije, možemo pretpostaviti da su sve domene $\widetilde{\Omega}_n$ unutar fiksne kugle B. Time su ispunjeni uvjeti Teorema 3.3.9, pa postoji otvoren skup $\Omega \in B$ i podniz $(\widetilde{\Omega}_{n_k})_k$, koji u Hausdorffovoj metrici konvergira prema Ω. Štoviše, budući da vrhovi od $\widetilde{\Omega}_n$: A_n^j, $j = 1, ..., M, M \leqslant N$, ostaju u B, također možemo pretpostaviti da (do na podniz označen s $(\widetilde{\Omega}_{n_k})_k$), svaki $(A_{n_k}^j)_k$ konvergira prema nekoj točki A^j iz B. Sada je jednostavno zaključiti da je, zahvaljujući svojstvima konvergencije u Hausdorffovoj metrici, Ω mnogokut s vrhovima A^j. Napokon, jasno je da bilo koji mnogokut iz klase $\mathcal{P}_N$ ima najviše $N/3$ komponenata povezanosti svog komplementa, pa možemo primijeniti Šverakov Teorem 3.3.14, koji dokazuje konvergenciju od $\lambda_1(\widetilde{\Omega}_{n_k})$ prema $\lambda_1(\Omega)$. Preostaje još dokazati da Ω ima točno N stranica. Zapravo to će biti posljedica Leme koja slijedi, a u kojoj stoji zadnja tvrdnja ovog Teorema. Pozivamo se na to da je minimizacija $\lambda_1(\Omega)$ uz ograničenje na površinu ekvivalentna minimizaciji $|\Omega|\lambda_1$ bez ograničenja (vidjeti Propoziciju 2.2.9). □

Lema 4.3.2. *Neka je $M \in \mathbb{N}$ i neka je Ω mnogokut s M stranica. Tada Ω ne može biti (lokalni) minimum za $|\Omega_\varepsilon|\lambda_1(\Omega_\varepsilon)$ na klasi $\mathcal{P}_{M+1}$ ($\Omega_\varepsilon \in \mathcal{P}_{M+1}$).*

Pritom pod "lokalni", mislimo na Hausdorffovu udaljenost. Drugim riječima, za bilo koji $\varepsilon > 0$, možemo naći mnogokut Ω_ε s $M+1$ stranica i $d_H(\Omega, \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$, takav da $|\Omega_\varepsilon|\lambda_1(\Omega_\varepsilon) < |\Omega|\lambda_1(\Omega)$.

Dokaz. Neka je x_0 vrh od Ω s pripadnim kutem $\alpha \leqslant \pi$. Bez smanjenja možemo pretpostaviti da se x_0 nalazi u ishodištu. Dokazat ćemo da produkt $|\Omega|\lambda_1(\Omega)$ možemo smanjiti "rezom veličine ε" pri vrhu x_0. Prema Slici 4.2 uvedimo notaciju: Neka je η jedinični



Slika 4.2: Uklanjanje kapice.

vektor u smjeru simetrale kuta α. C_ε je kapica definirana s $C_\varepsilon = \{x \in \Omega : x \cdot \eta \leqslant \varepsilon\}$, Ω_ε je mnogokut koji dobivamo uklanjanjem kapice C_ε iz Ω: $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus C_\varepsilon$. Trebat će nam i $B_\varepsilon = \{x \in \Omega : \varepsilon < x \cdot \eta \leqslant 2\varepsilon\}$, $C_{2\varepsilon} = C_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ i $\Omega_{2\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \setminus B_\varepsilon = \Omega \setminus C_{2\varepsilon}$. S u_1 označavamo prvu normaliziranu svojstvenu funkciju na Ω. Ključna je činjenica ta da za gradijent svojstvene funkcije u_1 vrijedi:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega}} |\nabla u_1(x)| = 0. \tag{4.8}$$

Neka je $\beta > 0$ malen broj (kojeg ćemo odabrati na kraju). Prema (4.8) i Teoremu srednje vrijednosti, možemo odabrati ε dovoljno malen da vrijedi:

$$\forall x \in C_{2\varepsilon} \quad |u_1(x)| \leqslant \beta |x|. \tag{4.9}$$

Nadalje:

$$\int_{C_{2\varepsilon}} |u_1(x)|^2\,dx \leqslant \beta^2 \int_{C_{2\varepsilon}} |x|^2\,dx = \frac{8}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(3+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2})\beta^2\varepsilon^4 =: c_1\beta^2\varepsilon^4. \tag{4.10}$$

Definirajmo sada C^1 funkciju χ_ε s

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon(x) = 1 & \text{za } x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0 \leqslant \chi_\varepsilon(x) \leqslant 1 & \text{za } x \in B_\varepsilon, \\ \chi_\varepsilon(x) = 0 & \text{za } x \in C_\varepsilon, \end{cases}$$

i funkciju $u_\varepsilon^1 := \chi_\varepsilon u_1$, koja pripada prostoru Soboljeva $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Prema (2.32), imamo

$$\lambda_1(\Omega_\varepsilon) \leqslant \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^1|^2\,dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^1)^2\,dx}.$$

Sada imamo:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^1)^2\,dx \geqslant \int_{\Omega_{2\varepsilon}} u_1^2\,dx = 1 - \int_{C_{2\varepsilon}} u_1^2\,dx \geqslant 1 - c_1\beta^2\varepsilon^4, \tag{4.11}$$

gdje posljednja nejednakost slijedi iz (4.10). Iduće ocjenjujemo integral gradijenta:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^1|^2\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u^1|^2\,dx + \int_{B_\varepsilon} |\nabla \chi_\varepsilon|^2 u_1^2\,dx.$$

Iz konstrukcije χ_ε slijedi da postoji konstanta c_2 takva da $|\nabla\chi_\varepsilon|^2 \leqslant \dfrac{c_2}{\varepsilon^2}$ i, stoga, pomoću (4.10) slijedi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^1|^2\,dx \leqslant \lambda_1 + c_1 c_2 \beta^2\varepsilon^2. \tag{4.12}$$

Uvažavanjem (4.11) i (4.12), imamo

$$\lambda_1(\Omega_\varepsilon) \leqslant \frac{\lambda_1 + \beta^2\varepsilon^2 c_1 c_2}{1 - c_1\beta^2\varepsilon^4}.$$

Također, vrijedi i $|\Omega_\varepsilon| = |\Omega| - |C_{2\varepsilon}| = |\Omega| - 4\varepsilon^2\operatorname{tg}(\alpha/2) + o(\varepsilon^2)$ i stoga

$$|\Omega_\varepsilon|\lambda_1(\Omega_\varepsilon) \leqslant |\Omega|\lambda_1 + \varepsilon^2(\beta^2 c_1 c_2|\Omega| - 4\lambda_1\operatorname{tg}(\alpha/2)) + o(\varepsilon^2).$$

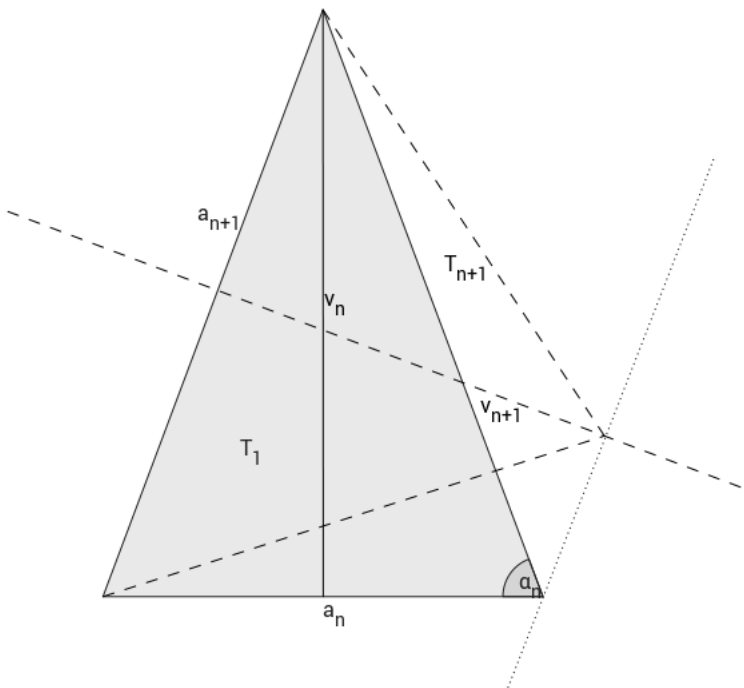
Sada je jasno da, za ε dovoljno malen, imamo $|\Omega_\varepsilon|\lambda_1(\Omega_\varepsilon) < |\Omega|\lambda_1$ čim $\beta^2 < \dfrac{4\lambda_1\operatorname{tg}(\alpha/2)}{c_1c_2|\Omega|}$, što daje željeni rezultat. $\square$

4.3.2 Slučajevi $N = 3, 4$

Nakon rezultata o egzistenciji, želimo identificirati minimizator na $\mathcal{P}_N$. Prema Faber-Krahnovoj nejednakosti, prirodno je pretpostaviti da je to pravilan N-terokut. Zapravo, rezultat je poznat samo za $N = 3$ i $N = 4$.

Teorem 4.3.3. ***(Pólya)*** *Među svim trokutima zadane površine, na jednakostraničnom se postiže najmanja prva svojstvena vrijednost. Također, od svih četverokuta zadane površine, na kvadratu se postiže najmanja prva svojstvena vrijednost.*

Dokaz. Dokaz se oslanja na jednaku shemu kao i dokaz Faber-Krahnovog Teorema, uz razliku da se ovdje koristi Steinerova simetrizacija. Budući da ta simetrizacija ima ista svojstva (3.1) i (3.2) kao i Schwarzov preslog, jasno je da bilo koja Steinerova simetrizacija smanjuje (ili barem ne povećava) prvu svojstvenu vrijednost. Slijedom Steinerovih simetrizacija u odnosu na simetralu svake stranice, dani trokut konvergira prema jednakostraničnom. Preciznije, označimo s v_n i a_n visinu i osnovicu trokuta T_n, koji dobivamo primjenom n-te Steinerove simetrizacije. Neka je T_n jednakokračan trokut i neka je α_n jedan od kutova uz osnovicu (vidjeti Sliku 4.3). Imamo:



Slika 4.3: Trokut T_n i njegova Steinerova simetrizacija T_{n+1}.

$$\frac{v_n}{a_{n+1}} = \sin \alpha_n, \quad \frac{v_{n+1}}{a_n} = \sin \alpha_n. \tag{4.13}$$

Označimo $x_n := \dfrac{v_n}{a_n}$. Iz (4.13) slijedi

$$x_{n+1} = \frac{\sin^2 \alpha_n}{x_n} = \frac{\sin^2(\mathrm{arctg}(2x_n))}{x_n} = \frac{4x_n}{1 + 4x_n^2}.$$

Sada elementarna analiza niza $(x_n)_n$ pokazuje da konvergira prema $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ujedno je to i vrijednost karakteristična za jednakostraničan trokut. Zaista, dokažimo najprije da ovaj niz zaista ima limes. Jednostavno slijedi $x_{n+1} < x_n$ na $(0, +\infty)$, odnosno, niz pada. Također imamo i

$$\left|\frac{4x_n}{1 + 4x_n^2}\right| = \frac{4x_n}{1 + 4x_n^2} \leqslant 4x_n = 4\frac{\sin^2 \alpha_n}{a_{n+1}h_{n+1}} \leqslant 4.$$

Dakle, niz $(x_n)_n$ je ograničen. Iz monotonosti i ograničenosti slijedi da niz $(x_n)_n$ ima limes. Označimo ga s L. Ako stavimo

$$L = \frac{4L}{1 + 4L^2},$$

slijedi

$$L = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Budući da visina trokuta ne može biti manja ili jednaka nuli (kao ni veličina kuta), niz $(x_n)_n$ konvergira prema $L = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Štoviše, prema istom argumentu kao i prije (Šverakov Teorem 3.3.14), niz trokuta γ-konvergira prema jednakostraničnom trokutu. Označimo ga s $\hat{T}$. Ako T označava trokut s kojim smo krenuli, time smo dokazali:

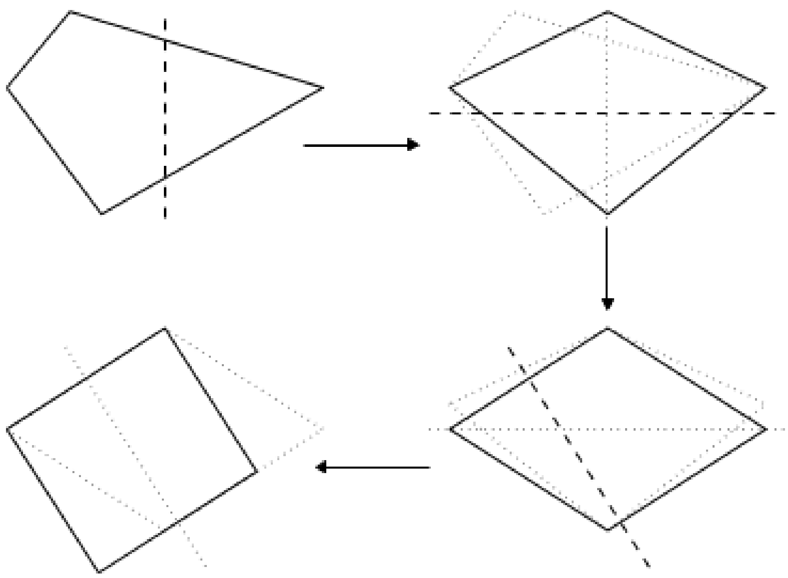
$$\lambda_1(\hat{T}) = \lim \lambda_1(T_n) \leqslant \lambda_1(T).$$

Nadalje, može se dokazati da je gornja nejednakost stroga ako T nije jednakostraničan.

Zanimljivo, dokaz je malo jednostavniji za četverokute. Zaista, niz od tri Steinerove simetrizacije transformira svaki četverokut u pravokutnik (Slika 4.4). Stoga je dovoljno promotriti problem minimizacije na pravokutnicima. Elementarno je dokazati da među svim pravokutnicima upravo kvadrat minimizira λ_1. Dakle, neka su L i l stranice pravokutnika P. Koristimo aritmetičko-geometrijsku nejednakost. Prema (2.23) imamo

$$\lambda_1(P) = \pi^2(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{l^2}) \geqslant 2\pi^2 \sqrt{\frac{1}{L^2}\frac{1}{l^2}} = 2\pi^2 \frac{1}{|P|},$$

gdje s $|P|$ označavamo površinu pravokutnika. Kako se jednakost postiže za $L = l$, slijedi tvrdnja Teorema za četverokute. □



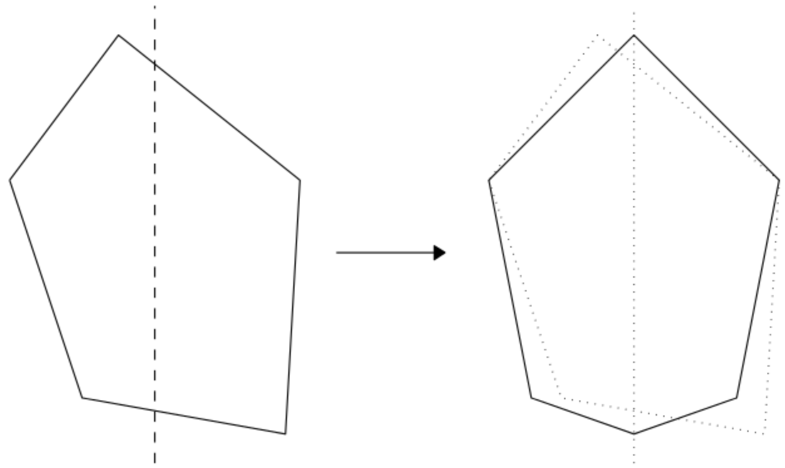
Slika 4.4: Niz od tri Steinerove simetrizacije transformira svaki četverokut u pravokutnik.

Spomenimo još da, za $N \geqslant 5$, Steinerova simetrizacija nažalost povećava broj stranica (Slika 4.5). To nas sprečava u korištenju jednake tehnike u ovom slučaju. Stoga ostaje lijep (i težak) izazov riješiti

Otvoreni problem 1. *Dokazati da pravilan N-terokut ima najmanju prvu svojstvenu vrijednost od svih N-terokuta zadane površine za $N \geqslant 5$.*

Ovu pretpostavku podržava klasična izoperimetrička nejednakost koja povezuje opseg i površinu mnogokuta ($4\pi A \leqslant L^2$, gdje je L duljina zatvorene krivulje, a A površina dijela ravnine koji zatvara). Slijedi još jedna vrsta rezultata koja se može dokazati na mnogokutima:

Teorem 4.3.4. ***(Hersch)*** *Među svim paralelogramima sa zadanom udaljenosti između suprotnih stranica, pravokutnik je taj koji maksimizira λ_1.*



Slika 4.5: Steinerova simetrizacija peterokuta općenito ima 6 stranica.

4.4 Domene unutar zadanog područja

Umjesto promatranja otvorenih skupova uz ograničenja samo na volumen, možemo razmatrati i otvorene skupove takve da leže unutar nekog zadanog područja D. Drugim riječima, promatramo zadaću

$$\min\{\lambda_1(\Omega) : \Omega \subset D,\ |\Omega| = A\}, \tag{4.14}$$

gdje je A zadan. Prema Teoremu 3.4.5, problem (4.14) uvijek ima rješenje na klasi kvazi-otvorenih skupova. Naravno, ako je konstanta A dovoljno malena da postoji kugla volumena A sva sadržana u D, ona će dati rješenje. Stoga je zanimljiv slučaj onaj kada je kugla volumena A prevelika da bude cijela sadržana u D.

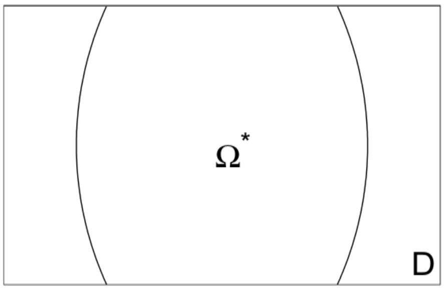
Teorem 4.4.1. *Neka je* $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$ *minimizator problema* (4.14). *Pretpostavimo da ne postoji krug površine A sadržan u D. Tada:*

(i) Ω^* *dodiruje granicu od D.*

(ii) Slobodni dijelovi granice od Ω^* *(oni koji su unutar D) su analitički.*

(iii) Slobodni dijelovi granice od Ω^* *ne sadrže lukove kružnica.*

Dokaz. Ovdje ne dokazujemo (ii), već se referiramo na [5]. Dokažimo (iii) (vidjeti i [19]). Označimo s u prvu (normaliziranu) svojstvenu funkciju na Ω^*. Pretpostavimo suprotno, da



Slika 4.6: Ω^* rješava problem (4.14): slobodni dijelovi granice od Ω^* nisu lukovi krugova.

$\partial\Omega^*$ sadrži dio kružnice γ. Prema Korolaru 3.5.4, Ω^* zadovoljava uvjet optimalnosti

$$\frac{\partial u}{\partial n} = c \quad \text{na } \gamma. \tag{4.15}$$

Smještamo centar odgovarajućeg kruga u ishodište i definiramo funkciju

$$w(x,y) = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Jednostavno slijedi

$$\begin{aligned} -\Delta w = \lambda_1 w \qquad & \text{u } \Omega^*, \\ w = 0 \qquad & \text{na } \gamma, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad & \text{na } \gamma. \end{aligned}$$

Sada, koristeći Hölmgrenov teorem jedinstvenosti [31], budući da w iščezava na γ, po analitičnosti mora iščezavati, kako na okolini od γ, tako i na cijeloj domeni. Nadalje, $w = 0$ implicira radijalnu simetričnost od Ω^*. Zaista, u polarnim koordinatama iz $w = 0$ slijedi $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$. Dakle, Ω^* je krug, što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom.

Za točku (i), pretpostavimo suprotno; neka je Ω^* strogo sadržan u D. Posebno, ako provedemo bilo koju neprekidnu Steinerovu simetrizaciju na Ω^* (vidjeti 3.2.3), skup Ω_t^* ostaje u D za maleni t i, stoga, $\lambda_1(\Omega^*) \leqslant \lambda_1(\Omega_t^*)$. No, kako Steinerova simetrizacija ne povećava prvu svojstvenu vrijednost, također vrijedi $\lambda_1(\Omega_t^*) \leqslant \lambda_1(\Omega)$. Dakle, $\lambda_1(\Omega^*) = \lambda_1(\Omega_t^*)$. Označimo s u_t neprekidnu Steinerovu simetrizaciju od u. Imamo

$$\lambda_1(\Omega^*) = \lambda_1(\Omega_t^*) \leqslant \frac{\int_{\Omega_t^*} |\nabla u_t|^2}{\int_{\Omega_t^*} u_t^2} \leqslant \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega^*} u^2} = \lambda_1(\Omega^*).$$

Slijedi $\int_{\Omega_t^*} |\nabla u_t|^2 = \int_{\Omega^*} |\nabla u|^2$. Stoga možemo primijeniti Brockov Teorem 3.2.10. Međutim, u dekompoziciji (3.18), skup S ima mjeru 0 pošto je u analitička. Neka je $B_1 = B(z_1, R_1)$ prvi krug u (3.18) i neka je x_1 točka na njezinom rubu gdje u dostiže svoj minimum. Prema (iii), postoji još jedan krug, označimo ga s B_2, koji izvana dodiruje B_1 u x_1. Međutim, ako s n označimo vanjsku normalu na B_1, po Hopfovom principu maksimuma [30], imamo $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0$. No, ako na B_2 primijenimo (3.19), slijedi $-\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) \leqslant 0$. Kontradikcija. Preciznije, ovaj argument pokazuje da niti jedan krug ne može dodirivati B_1 na luku kruga gdje $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$, jer bi to značilo da taj luk kruga pripada granici od Ω^*, što je pak kontradikcija s (iii). □

Napomena 4.4.2. *Prethodni se teorem djelomice generalizira u višim dimenzijama. Zapravo, točke (i) i (iii) mogu se dokazati na potpuno analogan način. Primjerice, za (iii) koristimo funkcije*

$$w_{i,j} := x_i \frac{\partial u}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, ..., N$$

umjesto w. Dokazujemo da sve funkcije $w_{i,j}$ iščezavaju na Ω^*, iz čega slijedi da je Ω^* kugla.

Otvoreni problem 2. *Neka je $\Omega^* \subset \mathbb{R}^N$ minimizator za problem* (4.14). *Treba dokazati da je Ω^* regularan (primjerice analitički) čim $N \geqslant 3$.*

Također, otvoreno je i pitanje geometrije minimizatora:

Otvoreni problem 3. *Neka je $\Omega^* \subset \mathbb{R}^N$ minimizator za problem* (4.14). *Treba dokazati da, ako je D konveksan (zvjezdast), onda je i Ω^* konveksan (zvjezdast).*

4.5 Višestruko povezane domene

Razmotrimo sada 2-povezan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (s jednom rupom). S Γ_0 označimo vanjsku granicu od Ω, a s γ njegovu unutarnju granicu. Sada možemo promotriti nekoliko problema optimizacije, varirajući rubne uvjete na vanjskoj granici ili na rupi. Počnimo rezultatom u kojem Dirichletov rubni uvjet uvažavamo na vanjskom, a Neumannov na unutarnjem rubu.

Teorem 4.5.1. ***(Payne-Weinberger)*** *Neka je $O_{L_0,A}$ klasa 2-povezanih domena Ω u ravnini, površine A i s vanjskom granicom Γ_0 duljine L_0. Neka je γ unutarnja granica. Označimo s λ_1^M prvu svojstvenu vrijednost mješovite zadaće*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1^M u & u\ \Omega, \\ u = 0 & na\ \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & na\ \gamma. \end{cases} \tag{4.16}$$

Tada kružni vijenac maksimizira λ_1^M na klasi $O_{L_0,A}$.

Dokaz. Glavni dio ovog dokaza je gornja granica za λ_1^M, koju dobivamo metodom unutarnjih paralela (vidjeti [25] i [34]). Promotrimo 2-povezan skup Ω s vanjskom granicom Γ duljine L_0 i unutarnjom granicom γ. Označimo s d_Γ funkciju koja mjeri udaljenost do Γ; $d_\Gamma(x) = \inf\{|x-y| : y \in \Gamma\}$. Definirajmo sada unutarnju paralelu od Γ u Ω na udaljenosti $\delta > 0$ s

$$\mathcal{L}_\delta = \{x \in \Omega : d_\Gamma(x) = \delta\},$$

što je unutarnja granica otvorenog skupa

$$\mathcal{A}_\delta = \{x \in \Omega : d_\Gamma(x) < \delta\}.$$

Označimo s $a(\delta)$ površinu skupa $\mathcal{A}_\delta$, a s $l(\delta)$ duljinu od $\mathcal{L}_\delta$. Pridruživanje $\delta \mapsto a(\delta)$ je derivabilno (vidjeti [13] i [32]) i $\frac{da}{d\delta} = l(\delta)$. Vrijedi

$$l(\delta) \leqslant L_0 - 2\pi\delta. \tag{4.17}$$

Iz (4.17) integriranjem slijedi $a(\delta) \leqslant L_0\delta - \pi\delta^2$ i

$$l(\delta)^2 \leqslant L_0^2 - 4\pi a(\delta). \tag{4.18}$$

Kako bismo izračunali prvu svojstvenu vrijednost λ_1^M, kao i u Točki 2.3.1 koristimo min formulu, koja u ovom slučaju glasi:

$$\lambda_1^M = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega)\setminus\{0\} \\ v=0 \text{ na } \Gamma_0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx}{\int_\Omega v^2(x)\, dx}. \tag{4.19}$$

Sada, odabirom neke analitičke funkcije $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, koja zadovoljava $\phi(0) = 0$, u (4.19) možemo staviti $v(x) = \phi(d_\Gamma(x))$, što daje

$$\lambda_1^M \leqslant \frac{\int_\Omega |\phi'(d_\Gamma(x))|^2 |\nabla d_\Gamma(x)|^2\, dx}{\int_\Omega \phi^2(d_\Gamma(x))\, dx}. \tag{4.20}$$

Integriranjem duž unutarnjih paralela i uvažavanjem $|\nabla d_\Gamma(x)| = 1$, (4.20) postaje

$$\lambda_1^M \leqslant \frac{\int_0^{\delta_M} |\phi'(\delta)|^2 l(\delta)\, d\delta}{\int_0^{\delta_M} \phi^2(\delta) l(\delta)\, d\delta}, \tag{4.21}$$

gdje δ_M označava maksimalnu vrijednost od δ. Pridruživanje $\delta \mapsto a(\delta)$ je injektivno pa definiramo $\hat{\phi}(\alpha) = \phi(a^{-1}(\alpha))$. Zamjenom varijable $\delta = a^{-1}(\alpha)$ na desnoj strani nejednakosti (4.21) slijedi

$$\lambda_1^M \leqslant \frac{\int_0^A l^2(a^{-1}(\alpha))|\hat{\phi}'(\alpha)|^2\, d\alpha}{\int_0^A \hat{\phi}^2(\alpha)\, d\alpha}. \tag{4.22}$$

(4.18) daje

$$\lambda_1^M \leqslant \frac{\int_0^A (L_0^2 - 4\pi\alpha)|\hat{\phi}'(\alpha)|^2 \, d\alpha}{\int_0^A \hat{\phi}^2(\alpha) \, d\alpha}. \tag{4.23}$$

Ova nejednakost vrijedi za svaku funkciju $\hat{\phi}$ koja zadovoljava $\hat{\phi}(0) = 0$. Iz nje možemo izvesti gornju granicu za λ_1^M:

$$\lambda_1^M \leqslant \lambda_{out}(L_0, A), \tag{4.24}$$

gdje $\lambda_{out}(L_0, A)$ ovisi samo o L_0 i A i dana je s

$$\lambda_{out}(L_0, A) = \min_{\substack{\varphi \\ \varphi(0)=0}} \frac{\int_0^A (L_0^2 - 4\pi\alpha)|\varphi'(\alpha)|^2 \, d\alpha}{\int_0^A \varphi^2(\alpha) \, d\alpha}. \tag{4.25}$$

Razmotrimo sada slučaj kada je Ω^* kružni vijenac iz klase $O_{L_0,A}$. Prva svojstvena funkcija na Ω^* je radijalna (dana je kombinacijom Besselovih funkcija prve i druge vrste, $J_0(\omega_1 r)$ i $Y_0(\omega_1 r)$, gdje je ω_1 rješenje neke transcendentalne jednadžbe): $u_1 = u_1(r)$. Stoga je u_1 dopustiva u varijacijskoj definiciji za $\lambda_{out}(L_0, A)$. Štoviše, za Ω^*, nejednakost (4.17) prelazi u jednakost. Sada, za Ω^*, u (4.24) vrijedi jednakost:

$$\lambda_1^M(\Omega^*) = \lambda_{out}(L_0, A),$$

što dokazuje željeni rezultat. □

U [21], J. Hersch primijenjuje prethodni dokaz na slučaj s Dirichletovim rubnim uvjetom na unutarnjoj granici Γ_1 duljine L_1 te s Neumannovim rubnim uvjetom na vanjskoj granici γ. Dokazuje

$$\lambda_1^M \leqslant \lambda_{in}(A, L_1), \tag{4.26}$$

što prelazi u jednakost na kružnom vijencu. Iz ovoga slijedi:

Teorem 4.5.2. ***(Hersch)*** *Neka je O_{A,L_1} klasa 2-povezanih domena Ω u ravnini, površine A. Neka je Γ_1 unutarnja granica domene Ω, duljine L_1 i neka je γ njezina vanjska granica. Označimo s λ_1^M prvu svojstvenu vrijednost mješovite zadaće*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1^M u & u\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & na\ \gamma. \\ u = 0 & na\ \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.27}$$

Tada kružni vijenac maksimizira λ_1^M na klasi O_{A,L_1}.

Otvoreni problem 4. *Generalizacija Teorema 4.5.1 i Teorema 4.5.2 na N-dimenzionalan prostor.*

Napokon, promotrimo slučaj kada obje granice zadovoljavaju Dirichletov rubni uvjet.

Teorem 4.5.3. *Neka je $\mathcal{O}$ klasa 2-povezanih domena Ω u ravnini, površine A, koje zadovoljavaju:*

- *duljina vanjske granice je L_0,*
- *duljina unutarnje granice je L_1,*
- $L_0^2 - L_1^2 = 4\pi A$.

Tada kružni vijenac maksimizira λ_1 na klasi $\mathcal{O}$.

Dokaz. Neka je $\Omega \in \mathcal{O}$ fiksan. Označimo s Γ_0 njegovu vanjsku, a s Γ_1 njegovu unutarnju granicu. Najvažnija činjenica koju koristimo u ovom dokazu je da između Γ_0 i Γ_1 možemo naći krivulju γ, takvu da prva svojstvena funkcija u_1 na Ω zadovoljava

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \text{ na } \gamma,$$

što je ustanovio Weinberger u [33]. Označimo s Ω_0 otvoreni skup omeđen s Γ_0 i γ površine A_0 te, analogno, s Ω_1 otvoreni skup omeđen s γ i Γ_1 površine A_1. Prva svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet $\lambda_1(\Omega)$ je ujedno i prva svojstvena vrijednost na Ω_0 i Ω_1, u smislu Teorema 4.5.1 i 4.5.2. Stoga iz nejednakosti (4.24) (4.26) slijedi

$$\lambda_1(\Omega) = \lambda_1^M(\Omega_0) \leqslant \lambda_{out}(L_0, A_0) \quad \text{i} \quad \lambda_1(\Omega) = \lambda_1^M(\Omega_1) \leqslant \lambda_{in}(A_1, L_1).$$

Dakle

$$\lambda_1(\Omega) \leqslant \min(\lambda_{out}(L_0, A_0), \lambda_{in}(A_1, L_1))$$

i stoga

$$\lambda_1(\Omega) \leqslant \max_{\substack{\hat{A}_0 \geqslant 0, \hat{A}_1 \geqslant 0 \\ \hat{A}_0 + \hat{A}_1 = A}} \min(\lambda_{out}(L_0, \hat{A}_0), \lambda_{in}(\hat{A}_1, L_1)). \tag{4.28}$$

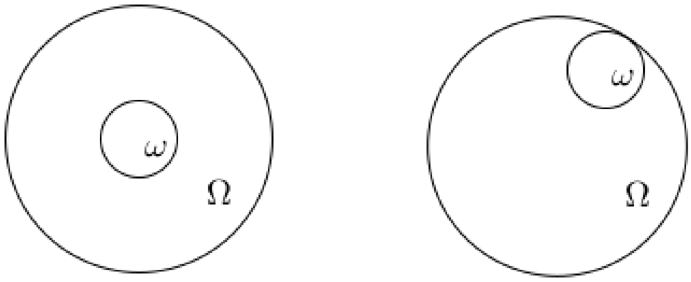
Kako su funkcije $A \mapsto \lambda_{out}(L_0, A)$ i $A \mapsto \lambda_{in}(A, L_1)$ padajuće, max-min iz (4.28) postiže se za $\hat{A}_0$ i $\hat{A}_1$ odabrane tako da $\lambda_{out}(L_0, \hat{A}_0) = \lambda_{in}(\hat{A}_1, L_1)$

Zahvaljujući pretpostavci $L_0^2 - L_1^2 = 4\pi A$, postoji kružni vijenac Ω^* u klasi $\mathcal{O}$. Štoviše, za Ω^*, krivulja γ je kružnica na kojoj svojstvena funkcija u_1 postiže svoj maksimum. Prema Teoremima 4.5.1 i 4.5.2, imamo

$$\lambda_1(\Omega^*) = \lambda_1^M(\Omega_0) = \lambda_{out}(L_0, A_0) \quad \text{i} \quad \lambda_1(\Omega^*) = \lambda_1^M(\Omega_1) = \lambda_{in}(A_1, L_1),$$

što pokazuje da za kružni vijenac u (4.28) vrijedi jednakost, što i je željeni rezultat. □

Posebno, ovaj rezultat implicira da je za domenu Ω, oblika $\Omega = B_1 \setminus B_0$ (razlika dva kruga zadanog radijusa), λ_1 maksimalna kada su ti krugovi koncentrični. Ovaj rezultat su kasnije na N-dimenzionalni slučaj generalizirali M. Ashbaugh i T. Chatelain 1997., E. Harrel, P. Kröger i K. Kurata u [17], Kesavan u [24]. Također, dokazano je da je $\lambda_1(B_1 \setminus B_0)$ minimalna kada B_0 dodiruje granicu od B_1.



Slika 4.7: Pozicija rupe koja maksimizira $\lambda_1(\Omega \setminus \omega)$ (lijevo) i jedna pozicija koja je minimizira (desno).

Rezultat je generaliziran u [17] na slijedeći način:

Teorem 4.5.4. ***(Harrell-Kröger-Kurata)*** *Neka je Ω konkveksna domena u $\mathbb{R}^N$ i neka je B kugla sadržana u Ω. Nadalje, neka je Ω simetrična u odnosu na hiperravninu H. Tada*

- *Ako je $\lambda_1(\Omega \setminus B)$ minimalna, onda B dodiruje $\partial\Omega$*
- *Ako je $\lambda_1(\Omega \setminus B)$ maksimalna, onda se središte kugle B nalazi u H.*

Za dokaz, vidjeti [18].

Za kraj, navedimo još jedno zanimljivo otvoreno pitanje:

Otvoreni problem 5. *Neka je Ω fiksna domena u $\mathbb{R}^N$ i neka je B_0 kugla fiksnog radijusa. Treba dokazati da je $\lambda_1(\Omega \setminus B_0)$ minimalna kada B_0 dodiruje granicu od Ω (i otkriti gdje) te da je $\lambda_1(\Omega \setminus B_0)$ maksimalna kada je B_0 centrirana u određenoj točki u Ω (i otkriti koja je to točka).*

Zapravo, čini se da optimalan centar od B_0 ovisi o radijusu i nije fiksan (osim u simetričnom slučaju). Kada radijus od B_0 teži u 0, klasične asimptotske formule za svojstvene vrijednosti na domenama s malim rupama (2.37) i [14], vode na to da bi kugla morala biti smještena u točki maksimuma prve svojstvene funkcije na domeni bez rupa. Naravno, isto se pitanje može postaviti i za necirkularne rupe zadane mjere: u tom slučaju, potrebno je naći ne samo lokaciju, već i oblik rupe, kako bismo maksimizirali ili minimizirali prvu svojstvenu vrijednost.

Bibliografija

[1] *Chladni patterns: aluminum plate and violin bow*, `https://www.youtube.com/watch?v=tliBfYdddhU`, [Internet; posjećeno 11.11.2015].

[2] *Tacoma Bridge*, `http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs`, [Internet; posjećeno 11.11.2015].

[3] G. Alessandrini, *Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), 142–154.

[4] C. Bandle, Isoperimetric inequalities and applications. Monographs and Studies in Mathematics, 7, Pitman, Boston, Mass.-London, 1980.

[5] T. Briançon, *Regularity of optimal shapes for the Dirichlet's energy with volume constraint*, ESAIM: COCV **10** (2004), 99–122.

[6] F. Brock, *Continuous symmetrization and symmetry of solutions of elliptic problems*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **110** (2000), 157–204.

[7] D. Bucur i G. Buttazzo, *Variational Methods in Shape Optimization Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhäuser, Basel, Boston **65** (2005).

[8] D. Bucur i A. Henrot, *Stability for the Dirichlet problem under continuous Steiner symmetrization*, Potential Anal. **13** (2000), 127–145.

[9] G. Buttazzo i G. Dal Maso, *An Existence Result for a Class of Shape Optimization Problems*, Arch. Rational Mech. Anal **122** (1993), 183–195.

[10] D. Chenais, *On the existence of a solution in a domain identification problem*, J. Math. Anal. Appl. **52** (1975), 189–289.

[11] R. Courant i D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 1 et 2, Wiley, New York, 1953 i 1962.

[12] R. Dautray i J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique,Vol. I and II, Masson, Paris, 1984.

[13] H. Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[14] M. Flucher, *Approximation of Dirichlet eigenvalues on domains with small holes*, J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), 169–199.

[15] D. Gilbarg i N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[16] P. Grisvard, Elliptic problems in non-smooth domains, Pitman, London, 1895.

[17] E.M. Harrell, P. Kröger i K Kurata, *On the placement of an obstacle or a well so as to optimize the fundamental eigenvalue*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 240–259.

[18] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Springer Science and Business Media, 2006.

[19] A. Henrot i E. Oudet, *Minimizing the second eigenvalue of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal **169** (2003), 73–87.

[20] A. Henrot i M. Pierre, *Variation et optimisation de formes, Mathématiques et Applications*, Springer **48** (2005).

[21] J. Hersch, *Contribution to the method of interior parallels applied to vibrating membrane*, Studies in mathematical analysis and related topics pp, Stanford Univ. Press, Stanford (1962), 132–139.

[22] G. N. Hile i Z. Y. Xu, *Inequalities for sums of reciprocals of eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **180** (1993), 412–430.

[23] B Kawohl, Rearrangements and convexity of level sets in PDE, Lecture Notes in Mathematics, 1150. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[24] S. Kesavan, *On two functionals connected to the Laplacian in a class of doubly connected domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **133** (2003), 617–624.

[25] E. Makai, *Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam*, Acta Sci. Math. Szeged **20** (1959), 33–35.

[26] V. Maz'ja, S. Nazarov i B. Plamenevskii, Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. I., Mathematische Lehrbücher und Monographien, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

[27] A. Melas, *On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$*, J. Diff. Geometry **35** (1992), 255–263.

[28] S. Ozawa, *Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian*, Duke Math. J. **48** (1981), 767–778.

[29] G. Pólya i G Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1951.

[30] P. Pucci i J. Serrin, *The strong maximum principle revisited*, Journal of Differential Equations **196** (1991), 7–10.

[31] J Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[32] B. Sz-Nagy, *Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereichte*, Acta Sci. Math. Szeged **20** (1959), 36–47.

[33] H. F. Weinberger, *An effectless cutting of a vibrating membrane*, Pacific J. Math **13** (1963), 1239–1240.

[34] H. F. Weinberger i Payne L. E., *Some isoperimetric inequalities for membrane frequencies and torsional rigidity*, J. Math. Anal. Appl **2** (1961), 210–216.

[35] V. Šverak, *On optimal shape design*, J. Math. Pures Appl. **72** (1993), 537–551.

Sažetak

U ovom radu dokazani su osnovni rezultati o ovisnosti svojstvenih vrijednosti Laplaceovog operatora o promatranoj domeni. Posebno, promatra se problem nalaženja domene koja minimizira prvu svojstvenu vrijednost.

Prvo poglavlje daje pregled funkcijskih prostora korištenih u radu i osnovnih rezultata koji vrijede za te prostore.

U drugom poglavlju definirali smo linearni eliptički operator drugog reda te mu pridružili rubne uvjete. Nadalje, iznijeli smo osnovni rezultat koji daje uvjete za egzistenciju rješenja svojstvenog problema te dokazali da ih linearni eliptički operator drugog reda (pa time i Laplaceov operator) zaista ispunjava. Sada kada smo osigurali egzistenciju svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija, promotrili smo njihove osnovne karakteristike i dokazali važne relacije koje će do izražaja doći u zadnjem poglavlju.

U trećem poglavlju iznesen je skup alata koje smo koristili u zadnjem poglavlju rada. Najprije smo definirali Schwarzov preslog i Steinerovu simetrizaciju. Zatim smo promotrili kako svojstvene vrijednosti ovise o domeni i u tu svrhu definirali γ-konvergenciju i Hausdorffovu udaljenost skupova i tako došli do uvjeta dovoljnih za neprekidnost funkcija svojstvenih vrijednosti. Izložili smo i teoreme o egzistenciji domene na kojoj k-ta svojstvena vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet poprima minimum i naveli nekoliko rezultata o derivacijama svojstvenih vrijednosti s obzirom na domenu.

Naposljetku, u četvrtom poglavlju izložili smo poznatu Faber-Krahnovu nejednakost koja dokazuje da među svim domenama zadane površine, upravo kugla minimizira prvu svojstvenu vrijednost Laplaceovog operatora uz Dirichletov rubni uvjet. Isti smo problem promotrili u ravnini na mnogokutima sa zadanim brojem stranica, na domenama unutar nekog zadanog područja te na domenama s rupom. Također, naveli smo nekoliko otvorenih problema koji se nameću iz ovdje dokazanih rezultata.

Summary

This paper provides several basic results on behaviour of eigenvalues of the Laplacian operator with respect to the variations of the domain. In particular, the problem of finding a domain which minimizes the first eigenvalue was considered.

The first chapter is a simple overlook of the function spaces used later on.

The second section focused on recalling the basic results of the theory of elliptic partial differential equations. We stated an abstract result which provides existence of a solution of the eigenproblem and made sure the linear elliptic operator of second order satisfies its conditions. Once the existence of eigenvalues and corresponding eigenfunctions was ensured, we proved some of their properties which will come to the fore in the last chapter.

The third chapter displays a set of tools used later on in the fourth chapter. We defined Schwarz rearrangement and Steiner symmetrization and then studied the continuity of the eigenvalues with respect to the domain. For this purpose the γ-convergence and the Hausdorff distance of sets were brought up. They obtained simple sufficient conditions ensuring continuity of eigenvalues. These motions enabled us to state two general existence theorems for minimization problems pertaining to eigenvalues of the Laplace operator with respect to Dirichlet boundary condition.

Lastly, in the fourth chapter a well known Faber-Krahn inequality was proved. It claims that the disk is a plane domain which minimizes the first eigenvalue of the Dirichlet-Laplacian, among domains of the same area. The same problem was considered on a class of plane polygons with a given number of sides, among sets in a box and on sets with one hole. Furthermore, few open problems concerning generalizations of proved results were mentioned.

Životopis

Rođena sam 7. travnja 1991. godine u Zagrebu. Osnovno obrazovanje stekla sam u Područnoj školi Rakitje te u Osnovnoj školi Sveta Nedelja, gdje sam se zainteresirala za matematiku. Po završetku osnovnoškolskog obrazovanja upisala sam V. gimnaziju u Zagrebu. Maturirala sam 2010. godine te sam iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2013. godine, kada sam upisala diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.

Tokom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja učila sam engleski jezik u školi stranih jezika Littera u Samoboru te trenirala sportski ples u plesnoj školi Spin.