Poliedri

Bradaš, Marijana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marijana Bradaš

POLIEDRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru doc.dr.sc. Zvonku Iljazoviću na iskazanoj pomoći, vodstvu i susretljivosti u pisanju ovog diplomskog rada, kao i na posvećenom vremenu, korisnim savjetima i razumijevanju.
Također bih željela zahvaliti svojoj obitelji, koja mi je omogućila pohađanje studija, te me bezuvjetno podržavala i hrabrila tijekom svih godina studija.

Sadržaj

Uvod

Poliedri su objekti izgrađeni od simpleksa, a u tom smislu važnu ulogu imaju simplicijalni kompleksi.

U početku ćemo proučavati simplekse i simplicijalne komplekse te na koji način oni tvore poliedre. Nakon toga ćemo proučavati neka metrička svojstva poliedara kao na primjer kompaktnost i zatvorenost. Nadalje će biti govora o racionalnim simpleksima, maksimalnim simpleksima i dobrim točkama poliedara.

Poliedri imaju važnu ulogu u topologiji, a ovim radom ćemo prikazati neke zanimljive rezultate.

Poglavlje 1

Simpleksi i simplicijalni kompleksi

1.1 Geometrijska nezavisnost točaka

Definicija 1.1.1. *Neka je $N \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te neka su $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$. Kažemo da su $a_0, \dots, a_n$* ***geometrijski nezavisne točke*** *u $\mathbb{R}^N$ ako je $n = 0$ ili $n \geq 1$ i vektori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ su linearno nezavisni (u $\mathbb{R}^N$).*

Primjer 1.1.2. *Neka su $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^N$. Vrijedi sljedeće: a_0, a_1 su geometrijski nezavisne točke $\Leftrightarrow$ vektor $a_1 - a_0$ linearno nezavisan $\Leftrightarrow a_1 - a_0 \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq a_0$. Dakle,*

$$a_0, a_1 \text{ su geometrijski nezavisne točke} \Leftrightarrow a_1 \neq a_0.$$

Primjer 1.1.3. *Neka su u $\mathbb{R}^3$ dane točke $a_0 = (1,1,1),\ a_1 = (2,2,2),\ a_2 = (5,5,5)$. Jesu li one geometrijski nezavisne?*

Imamo $a_1 - a_0 = (1,1,1)$ i $a_2 - a_0 = (4,4,4)$, pa je jasno da su $a_1 - a_0$ i $a_2 - a_0$ linearno zavisni. Prema tome a_0, a_1 i a_2 nisu geometrijski nezavisne točke.

Primjer 1.1.4. *Neka su u $\mathbb{R}^2$ dane točke $a_0 = (2,1),\ a_1 = (1,2),\ a_2 = (5,4)$.*

Vrijedi: $a_1 - a_0 = (-1,1),\ a_2 - a_0 = (3,3)$. Iz toga je jasno da su vektori $a_1 - a_0$ i $a_2 - a_0$ linearno nezavisni. Dakle, točke a_0, a_1, a_2 su geometrijski nezavisne u $\mathbb{R}^2$.

Propozicija 1.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$, te neka su $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Tada su te točke geometrijski nezavisne ako i samo ako za sve $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeća implikacija*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0 \ i \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \right) \Rightarrow t_0 = \cdots = t_n = 0 \tag{1.1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da su $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisne točke. Pretpostavimo da su $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$ i $\sum_{i=0}^n t_i = 0$. Ako je $n = 0$, onda je očito $t_0 = 0$. Pretpostavimo da je $n \geq 1$. Iz izraza $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ imamo da je

$$t_0 = -\sum_{i=1}^n t_i. \tag{1.2}$$

Stoga je

$$0 = \sum_{i=0}^n t_i a_i = \sum_{i=1}^n t_i a_i + t_0 a_0 = \sum_{i=1}^n t_i a_i + \left(-\sum_{i=1}^n t_i\right) a_0 = \sum_{i=1}^n t_i a_i - \sum_{i=1}^n t_i a_0 = \sum_{i=1}^n (t_i a_i - t_i a_0).$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0) = 0$$

pa iz činjenice da su vektori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ linearno nezavisni (jer su točke $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisne) slijedi $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Dakle, iz (1.2) slijedi $t_0 = 0$. Time je dokazano da implikacija (1.1) vrijedi.
Obratno, pretpostavimo da za sve $t_0, \dots, t_n$ vrijedi implikacija (1.1). Želimo dokazati da su točke $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisne. Ako je $n = 0$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $n \geq 1$. Treba dakle dokazati da su vektori $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ linearno nezavisni. Pretpostavimo da su $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = 0.$$

Vrijedi

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i a_i - \lambda_i a_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i a_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) a_0. \tag{1.3}$$

Definirajmo

$$\lambda_0 = \left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Prema (1.3) vrijedi $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \lambda_0 a_0 = 0$, tj

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0.$$

Nadalje,

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Sada iz (1.1) slijedi

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Posebno,

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Iz toga zaključujemo da su vektori $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ linearno nezavisni, pa su točke $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisne.

□

1.2 Konveksni skupovi

Neka je $N \in \mathbb{N}$, te neka su $a, b \in \mathbb{R}^N$. Definiramo

$$\overline{ab} := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}.$$

Za $\overline{ab}$ kažemo da je segment u $\mathbb{R}^N$ određen točkama a i b. Uočimo da su $a, b \in \overline{ab}$. Nadalje, $\overline{aa} = \{a\}$.

Definicija 1.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Za S kažemo da je* ***konveksan skup*** *u $\mathbb{R}^N$ ako za sve $a, b \in S$ vrijedi $\overline{ab} \subseteq S$.*

Očito su $\emptyset, \mathbb{R}^N$ i svaki jednočlan podskup od $\mathbb{R}^N$ konveksni.

Primjer 1.2.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}^N, a \neq b$. Tada skup $\{a, b\}$ nije konveksan. U suprotnom bi vrijedilo $\overline{ab} \subseteq \{a, b\}$, no ovo je nemoguće jer je $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in \overline{ab}$, a $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \notin \{a, b\}$ (iz $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = a$ ili $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = b$ slijedi $a = b$).*

Iz prethodnog primjera slijedi da unija dva konveksna skupa ne mora biti konveksan skup. ($\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$)

Propozicija 1.2.3. *Neka je $\mathcal{A}$ neprazna familija konveksnih podskupova od $\mathbb{R}^N$. Tada je $\bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$ konveksan podskup od $\mathbb{R}^N$.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$. Slijedi da su $a, b \in K$, za sve $K \in \mathcal{A}$. Budući da je K konveksan skup, imamo $\overline{ab} \subseteq K$, za sve $K \in \mathcal{A}$. Slijedi da je $\overline{ab} \subseteq \bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$. Dakle, $\bigcap_{K \in \mathcal{A}} K$ je konveksan skup. □

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Definiramo

$$\mathrm{Conv}(S) = \bigcap_{\substack{K \text{ konveksan} \\ S \subseteq K}} K.$$

Za $\mathrm{Conv}(S)$ kažemo da je konveksna ljuska skupa S.

Nije teško dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Tada vrijedi:*

1. $\mathrm{Conv}(S)$ *je konveksan skup i* $S \subseteq \mathrm{Conv}(S)$
2. $\mathrm{Conv}(S) = S$ *ako i samo ako je S konveksan skup*
3. *Ako je K konveksan skup takav da je $S \subseteq K$ onda je* $\mathrm{Conv}(S) \subseteq K$.

Napomena 1.2.5. *Ako su S i T podskupovi od $\mathbb{R}^N$ takvi da je $S \subseteq T$ onda je* $\mathrm{Conv}(S) \subseteq \mathrm{Conv}(T)$.

Naime, zato što je $S \subseteq T \subseteq \mathrm{Conv}(T)$ i $\mathrm{Conv}(T)$ je konveksan, slijedi da je, prema propoziciji 1.2.4 (3.), $\mathrm{Conv}(S) \subseteq \mathrm{Conv}(T)$.

Teorem 1.2.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te neka su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^N$. Tada je*

$$\mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \mid t_0, \ldots, t_n \geq 0 \ i \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Dokaz. Neka je

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \mid t_0, \ldots, t_n \geq 0 \text{ i } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}. \tag{1.4}$$

Dokažimo da je S konveksan skup. Neka su $x, y \in S$. Tada je

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \text{ i } y = \sum_{i=0}^{n} s_i a_i,$$

gdje su $s_0, \ldots, s_n, t_0, \ldots, t_n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} s_i = 1$ i $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Želimo dobiti

$$\overline{xy} \subseteq S.$$

Neka je $z \in \overline{xy}$. Tada je $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, za neki $\lambda \in [0, 1]$. Imamo

$$z = (1-\lambda) \sum_{i=0}^{n} t_i a_i + \lambda \sum_{i=0}^{n} s_i a_i = \sum_{i=0}^{n} ((1-\lambda) t_i a_i + \lambda s_i a_i) = \sum_{i=0}^{n} ((1-\lambda) t_i + \lambda s_i) a_i.$$

Očito je $(1-\lambda)t_i + \lambda s_i \geq 0$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ te je

$$\sum_{i=0}^{n}((1-\lambda)t_i + \lambda s_i)a_i = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{n} t_i + \lambda \sum_{i=0}^{n} s_i = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

Zaključujemo da je $z \in S$. Prema tome $\overline{xy} \subseteq S$. Dakle, S je konveksan.
Uočimo da su $a_0, \dots, a_n \in S$. Dakle, $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq S$ pa je

$$\mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq S.$$

Obratno, dokažimo indukcijom po n da je $S \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}$. Za $n = 0$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 0$. Neka su $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Neka je

$$S' = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} t_i a_i \mid t_0, \dots, t_{n+1} \geq 0 \text{ i } \sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

Želimo dokazati da je

$$S' \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_{n+1}\}. \tag{1.5}$$

Neka je skup S definiran kao u (1.4). Prema induktivnoj pretpostavci vrijedi $S \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}$. Neka je $x \in S'$. Tada je

$$x = \sum_{i=0}^{n+1} t_i a_i \text{ gdje su } t_0, \dots, t_{n+1} \geq 0 \text{ i } \sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1.$$

1. slučaj

$$\sum_{j=0}^{n} t_j = 0.$$

Tada je $t_0 = \dots = t_n = 0$ i $t_{n+1} = 1$ pa je $x = a_{n+1}$. Stoga je očito $x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$.

2. slučaj

$$\sum_{j=0}^{n} t_j > 0.$$

Neka je $\lambda = \sum_{j=0}^{n} t_j$. Imamo

$$x = t_0 a_0 + \dots + t_n a_n + t_{n+1} a_{n+1} = \lambda \left(\frac{t_0}{\lambda} a_0 + \dots + \frac{t_n}{\lambda} a_n \right) + t_{n+1} a_{n+1}.$$

Označimo,

$$y = \frac{t_0}{\lambda} a_0 + \dots + \frac{t_n}{\lambda} a_n.$$

Dakle, imamo

$$x = \lambda y + t_{n+1}a_{n+1}.$$

Vrijedi $\lambda, t_{n+1} \geq 0$ i $\lambda + t_{n+1} = 1$. Stoga je $x \in \overline{ya_{n+1}}$. Uočimo da je $\frac{t_0}{\lambda} + \cdots + \frac{t_n}{\lambda} = 1$. Stoga je $y \in S$ pa slijedi da je $y \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$, dakle $y \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$. Imamo $y, a_{n+1} \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$. Dakle, $\overline{ya_{n+1}} \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ pa je $x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$. Time smo dokazali da vrijedi (1.5) pa je tvrdnja teorema dokazana.

□

1.3 Simpleksi

Definicija 1.3.1. *Neka su $N \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ te neka su $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je*

$$\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}.$$

Tada za σ kažemo da je ***n-simpleks*** *u $\mathbb{R}^N$.*

Primjer 1.3.2.

1. *Neka je $a_0 \in \mathbb{R}^N$. Tada je $\mathrm{Conv}\{a_0\} = \{a_0\}$. Stoga je $\{a_0\}$ 0-simpleks u $\mathbb{R}^N$.*

2. *Neka su $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^N, a_0 \neq a_1$. Tada su a_0 i a_1 geometrijski nezavisne točke, a prema teoremu (1.2.6) vrijedi:*

   $$\mathrm{Conv}\{a_0, a_1\} = \{t_0a_0 + t_1a_1 \mid t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\} = \{(1-t)a_0 + ta_1 \mid t \in [0,1]\} = \overline{a_0a_1}.$$

   Dakle, $\overline{a_0a_1}$ je 1-simpleks u $\mathbb{R}^N$. Obratno, svaki 1-simpleks u $\mathbb{R}^N$ je oblika $\overline{a_0a_1}$, gdje su $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^N$ i $a_0 \neq a_1$.

Propozicija 1.3.3. *Neka su $n \in \mathbb{N}_0, N \in N, a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Tada je*

$$\mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\} = \bigcup_{x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}} \overline{a_{n+1}x}.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$. Tada je $x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ (jer je $\mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$). Očito je $a_{n+1} \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$. Budući da je $\mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ konveksan skup vrijedi $\overline{a_{n+1}x} \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$. Prema tome

$$\bigcup_{x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}} \overline{a_{n+1}x} \subseteq \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_{n+1}\}.$$

Obratno, pretpostavimo da je $y \in \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$. Tada je

$$y = t_0 a_0 + \dots + t_{n+1} a_{n+1}, \quad t_0, \dots, t_{n+1} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1$$

(prema teoremu 1.2.6).

1. slučaj: $t_0 = \dots = t_n = 0$. Tada je $y = a_{n+1}$, pa je očito

$$y \in \bigcup_{x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}} \overline{a_{n+1} x}.$$

2. slučaj: Postoji $j \in 0, \dots, n$ takav da je $t_j > 0$. Tada je $\sum_{i=0}^n t_i > 0$ te imamo

$$y = \left(\sum_{i=0}^n t_i \right) \left(\frac{t_0}{\sum_{i=0}^n t_i} a_0 + \dots + \frac{t_n}{\sum_{i=0}^n t_i} a_n \right) + t_{n+1} a_{n+1}$$

pa je

$$y = \left(\sum_{i=0}^n t_i \right) x + t_{n+1} a_{n+1}, \tag{1.6}$$

gdje je

$$x = \frac{t_0}{\sum_{i=0}^n t_i} a_0 + \dots + \frac{t_n}{\sum_{i=0}^n t_i} a_n.$$

Iz teorema 1.2.6 slijedi da je $x \in \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}$. Imamo

$$\sum_{i=0}^n t_i \geq 0, \quad t_{n+1} \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=0}^n t_i + t_{n+1} = 1$$

pa iz (1.6) slijedi da je

$$y \in \overline{x a_{n+1}}.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Primjer 1.3.4. *Neka su $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^N$ geometrijski nezavisne točke. Neka je $\sigma =$ $= \mathrm{Conv}\{a_0, a_1, a_2\}$. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi*

$$\sigma = \bigcup_{x \in \mathrm{Conv}\{a_0, a_1\}} \overline{a_2 x} = \bigcup_{x \in \overline{a_0 a_1}} \overline{a_2 x}.$$

Definicija 1.3.5. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$. Definiramo*

$$\langle xy \rangle = \overline{xy} \backslash \{x, y\}.$$

*Za $\langle xy \rangle$ kažemo da je **otvoreni segment** određen s x i y.*

Uočimo da je

$$\langle xy \rangle = \{(1-t)x + ty \mid t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

Naime, očito je svaka točka $z \in \langle xy \rangle$ oblika $z = (1-t)x + ty$, za neki $t \in [0, 1]$. No, $t \neq 0$ i $t \neq 1$ jer je $z \neq x$ i $z \neq y$. Obratno, ako je $z = (1-t)x + ty$ za $t \in \langle 0, 1 \rangle$ onda je $z \in \overline{xy}$, a $z \neq x$ i $z \neq y$ vrijedi jer bismo u suprotnom dobili $x = y$.

Napomena 1.3.6. *Neka su $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka su $t_0, \ldots, t_n$ i $s_0, \ldots, s_n$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, $\sum_{i=0}^n s_i = 1$ i $\sum_{i=0}^n t_i a_i = \sum_{i=0}^n s_i a_i$. Tada je $t_i = s_i$, za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

Naime imamo $\sum_{i=0}^n t_i a_i - \sum_{i=0}^n s_i a_i = 0$, tj. $\sum_{i=0}^n (t_i - s_i) a_i = 0$ i $\sum_{i=0}^n (t_i - s_i) = \sum_{i=0}^n t_i - \sum_{i=0}^n s_i = 1 - 1 = 0$. Iz ovog i propozicije 1.1.5 slijedi da je $t_i - s_i = 0$, tj. $t_i = s_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Teorem 1.3.7. *Neka su $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je $\sigma =$ $\mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$. Neka je $T \in \sigma$. Tada vrijedi*

$$T \notin \{a_0, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \sigma,\ x \neq y \text{ takvi da je } T \in \langle xy \rangle.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $T \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$. Imamo da je

$$T = \sum_{i=0}^n t_i a_i \text{ za neke } t_0, \ldots, t_n \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Sigurno postoji $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $t_i > 0$. Kada bi vrijedilo $t_j = 0 \quad \forall j \in \{0, \ldots, n\}, j \neq i$, onda bi bilo $t_i = 1$ i $T = a_i$ što je nemoguće. Stoga postoji $j \in \{0, \ldots, n\}$, $j \neq i$ takav da je $t_j > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $j < i$. Odaberimo $\epsilon > 0$ takav da je $\epsilon < \min\{t_i, t_j\}$. Tada je $t_i - \epsilon > 0$ i $t_j - \epsilon > 0$. Neka je

$$x = t_0 a_0 + \cdots + (t_j + \epsilon) a_j + \cdots + (t_i - \epsilon) a_i + \cdots + t_n a_n,$$

$$y = t_0 a_0 + \cdots + (t_j - \epsilon) a_j + \cdots + (t_i + \epsilon) a_i + \cdots + t_n a_n.$$

Prema teoremu 1.2.6 $x, y \in \sigma$. Nadalje, iz gornje napomene slijedi da je $x \neq y$. Očito je

$$T = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y,$$

pa imamo da je

$$T \in \langle xy \rangle.$$

Obratno, pretpostavimo da $\exists x, y \in \sigma$ takvi da je $x \neq y$ i $T \in \langle xy \rangle$. Imamo

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i, \ y = \sum_{i=0}^{n} s_i a_i$$

gdje su $t_0, \dots, t_n, s_0, \dots, s_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ i $\sum_{i=0}^{n} s_i = 1$. Budući da je $T \in \langle xy \rangle$ postoji $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ takva da je

$$T = \lambda x + (1 - \lambda) y.$$

Stoga je

$$T = \lambda \left(\sum_{i=0}^{n} t_i a_i \right) + (1 - \lambda) \left(\sum_{i=0}^{n} s_i a_i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda t_i + (1 - \lambda) s_i) a_i.$$

Uočimo da je

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda t_i + (1 - \lambda) s_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} t_i + (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n} s_i = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Pretpostavimo da je $T = a_j$, za neki $j \in \{0, \dots, n\}$. Tada je $T = \sum_{i=0}^{n} v_i a_i$ pri čemu je $v_i = 0$ za $i \neq j$ i $v_j = 1$. Iz napomene 1.3.6 slijedi $\lambda t_i + (1 - \lambda) s_i = v_i$ za sve $i = 0, \dots, n$. Stoga $\forall i \neq j$ vrijedi $\lambda t_i + (1 - \lambda) s_i = 0$ iz čega slijedi $t_i = s_i = 0$. Stoga je $t_j = s_j = 1$ pa je $x = a_j, y = a_j$. Ovo je u kontradikciji s $x \neq y$. Dakle, $T \neq a_j$ za sve $j \in \{0, \dots, n\}$. Prema tome, $T \notin \{a_0, \dots, a_n\}$. □

Korolar 1.3.8. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}_0$, neka su $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisne točke te neka su $b_0, \dots, b_m$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je $\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}$ te $\tau = \mathrm{Conv}\{b_0, \dots, b_m\}$. Pretpostavimo da je $\sigma = \tau$. Tada je*

$$\{a_0, \dots, a_n\} = \{b_0, \dots, b_m\}. \tag{1.7}$$

Posebno, $n = m$.

Dokaz. Neka je $T \in \{a_0, \dots, a_n\}$. Pretpostavimo da $T \notin \{b_0, \dots, b_m\}$. Iz $T \in \sigma$ slijedi $T \in \tau$. Iz teorema 1.3.7 slijedi da postoje $x, y \in \tau, x \neq y$ takvi da je $T \in \langle xy \rangle$. Sada teorem 1.3.7 i činjenica da su $x, y \in \sigma$ (jer $\tau = \sigma$) povlače $T \notin \{a_0, \dots, a_n\}$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom pa prema tome $T \in \{b_0, \dots, b_m\}$. Time smo dokazali da je

$$\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \{b_0, \dots, b_m\}.$$

Analogno dobivamo da je

$$\{b_0, \ldots, b_m\} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$$

pa je jednakost (1.7) dokazana.
Neka su $i, j \in \{0, \ldots, n\}, i \neq j$. Tada je $a_i \neq a_j$ jer bi u suprotnom vrijedilo $a_i - a_0 = a_j - a_0$ što je u kontradikciji s činjenicom da su vektori $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ linearno nezavisni. Isto tako je $b_i \neq b_j$. Iz ovog zaključujemo da je

$$\operatorname{card}\{a_0, \ldots, a_n\} = n + 1$$

i

$$\operatorname{card}\{b_0, \ldots, b_m\} = m + 1$$

pa iz (1.7) slijedi da je $n + 1 = m + 1$, tj.

$$n = m.$$

□

Dakle, prema prethodnom korolaru za svaki simpleks σ postoji jedinstveni, do na poredak geometrijski nezavisni niz točaka $a_0, \ldots, a_n$ takav da je $\sigma = \operatorname{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$. Za točke $a_0, \ldots, a_n$ kažemo da su vrhovi simpleksa σ. Za broj n kažemo da je dimenzija od σ i označavamo ga sa $\dim \sigma$. Uočimo da je broj svih vrhova simpleksa σ jednak $\dim \sigma + 1$.

Definicija 1.3.9. *Neka su σ i τ simpleksi u $\mathbb{R}^N$. Kažemo da je τ* ***stranica*** *od σ ako je svaki vrh od τ ujedno i vrh od σ.*

Uočimo sljedeće, ako je τ stranica od σ onda je $\tau \subseteq \sigma$. Naime, ako su $v_0, \ldots, v_m$ vrhovi od τ, onda je

$$\{v_0, \ldots, v_m\} \subseteq \sigma$$

pa je $\operatorname{Conv}\{v_0, \ldots, v_m\} \subseteq \sigma$ tj.

$$\tau \subseteq \sigma.$$

Nadalje, ako je σ simpleks te ako su $v_0, \ldots, v_m$ neki vrhovi od σ (međusobno različiti), onda je $\operatorname{Conv}\{v_0, \ldots, v_m\}$ stranica od σ. Pri tome treba uočiti da je $v_0, \ldots, v_m$ zaista geometrijski nezavisni niz točaka. Naime, ako je $i_0, \ldots, i_n$ bilo koja permutacija skupa $\{0, \ldots, n\}$ onda je $a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}$ geometrijski nezavisni niz točaka što slijedi iz propozicije 1.1.5. Sada možemo odabrati permutaciju $i_0, \ldots, i_n$ od $\{0, \ldots, n\}$ takvu da je

$$v_0 = a_{i_0}, v_1 = a_{i_1}, \ldots, v_m = a_{i_m}.$$

Iz definicije geometrijske nezavisnosti točaka je jasno da geometrijska nezavisnost konačnog niza $a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}$ povlači geometrijsku nezavisnost konačnog niza $a_{i_0}, \ldots, a_{i_m}$. Prema tome $v_0, \ldots, v_m$ je geometrijski nezavisni niz točaka.

Uočimo sljedeće: ako je τ stranica simpleksa σ, onda je

$$\dim \tau \leq \dim \sigma$$

te je

$$\dim \tau = \dim \sigma \Leftrightarrow \tau = \sigma.$$

Primjetimo i ovo: ako je σ n-simpleks u $\mathbb{R}^N$, onda je $n \leq N$ tj.

$$\dim \sigma \leq N.$$

S druge strane, za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji simpleks σ u $\mathbb{R}^N$ takav da je $\dim \sigma = N$. Naime, možemo uzeti $a_0 = (0, \ldots, 0), a_1 = (1, 0, \ldots, 0), a_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, a_N = (0, \ldots, 0, 1)$, tada je $a_0, \ldots, a_N$ geometrijski nezavisni niz točaka pa ako uzmemo simpleks σ kojeg ove točke razapinju, tj.

$$\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_N\},$$

onda je

$$\dim \sigma = N.$$

Definicija 1.3.10. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je τ stranica od σ takva da je $\tau \neq \sigma$. Tada za τ kažemo da je* ***prava stranica*** *od σ.*

Primjer 1.3.11. *Neka su a_0, a_1, a_2 geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je $\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, a_1, a_2\}$. Tada je σ 2-simpleks u $\mathbb{R}^N$, a sljedeći simpleksi su sve njegove stranice:*

$$\sigma, \overline{a_0a_1}, \overline{a_1a_2}, \overline{a_0a_2}, \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}.$$

Prave stranice od σ su svi gore navedeni simpleksi osim σ.

Definicija 1.3.12. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Definiramo skup $\mathrm{Bd}\,\sigma$ kao uniju svih pravih stranica od σ. Za $\mathrm{Bd}\,\sigma$ kažemo da je* ***rub*** *simpleksa σ.*
Neka je $\mathrm{Int}\,\sigma = \sigma \setminus \mathrm{Bd}\,\sigma$. Za $\mathrm{Int}\,\sigma$ kažemo da je ***interior*** *simpleksa σ.*

Primjer 1.3.13.

1. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ s vrhovima a_0, a_1, a_2. Tada je*

$$\mathrm{Bd}\,\sigma = \overline{a_0a_1} \cup \overline{a_1a_2} \cup \overline{a_0a_2}.$$

2. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ s vrhovima a_0, a_1. Tada je $\mathrm{Bd}\,\sigma = \{a_0, a_1\}$, a $\mathrm{Int}\,\sigma = \langle a_0a_1 \rangle$.*

3. *Neka je σ 0-simpleks u $\mathbb{R}^N$. Tada je $\mathrm{Bd}\,\sigma = \emptyset$, a $\mathrm{Int}\,\sigma = \sigma$.*

Napomena 1.3.14. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ s vrhovima $a_0, \ldots, a_n$ (tj. $a_0, \ldots, a_n$ je geometrijski nezavisni niz točaka takav da je $\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$). Tada prema teoremu* 1.2.6 *i napomeni* 1.3.6 *za svaki $x \in \sigma$ postoje jedinstveni realni brojevi $t_0, \ldots, t_n \geq 0$ takvi da je*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Definicija 1.3.15. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$, v vrh od σ, te $x \in \sigma$. Tada postoji geometrijski nezavisni niz točaka $a_0, \ldots, a_n$ u $\mathbb{R}^N$ takav da je $\sigma = \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$. Imamo $v = a_j$ za neki $j \in \{0, \ldots, n\}$. Neka su $t_0, \ldots, t_n$ jedinstveni nenegativni realni brojevi takvi da je*

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Za broj t_j kažemo da je ***baricentrička koordinata*** *točke x u simpleksu σ s obzirom na vrh v.*

Jasno je da definicija baricentričke koordinate točke x u simpleksu σ s obzirom na vrh v ne ovisi o izboru geometrijski nezavisnog niza $a_0, \ldots, a_n$ tj. o poretku vrhova simpleksa σ. Ako je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$, v njegov vrh te $x \in \sigma$, onda sa $t_v(x)$ označavamo baricentričku koordinatu od x u σ s obzirom na vrh v. Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ s vrhovima $v_0, \ldots, v_n$. Neka je $x \in \sigma$. Tada vrijedi

$$x \in \mathrm{Bd}\,\sigma \Leftrightarrow \exists i \in \{0, \ldots, n\} \text{ takav da je } t_{v_i}(x) = 0. \tag{1.8}$$

Naime, ako je $x \in \mathrm{Bd}\,\sigma$ onda se nalazi u nekoj pravoj stranici τ od σ, što znači da se x može zapsati kao linearna kombinacija nekih (ne svih) vrhova od σ s nenegativnim koeficijentima čija je suma jednaka 1. Kada tu linearnu kombinaciju proširimo do linearne kombinacije svih vrhova od σ stavljajući pri tome 0 uz one vrhove koji nisu iz τ, vidimo da postoji $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $t_{v_i}(x) = 0$. Obratno, ako postoji $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $t_{v_i}(x) = 0$, onda

$$x = \sum_{j=0}^{n} t_{v_j}(x) v_j \text{ i } \sum_{j=0}^{n} t_{v_j}(x) = 1$$

povlači

$$x = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} t_{v_j}(x) v_j \text{ i } \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} t_{v_j}(x) = 1$$

pa slijedi da se x nalazi u pravoj stranici od σ s vrhovima $v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$. Prema tome

$$x \in \mathrm{Bd}\,\sigma.$$

Iz (1.8) slijedi da je

$$x \in \operatorname{Int} \sigma \Leftrightarrow \forall i \in \{0, \ldots, n\} \text{ vrijedi } t_{v_i}(x) > 0.$$

Drugim riječima, interior smpleksa σ sastoji se od onih točaka simpleksa σ čije su sve baricentričke koordinate pozitivne.

Propozicija 1.3.16. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je $x \in \sigma$. Tada postoji jedinstvena stranica τ od σ takva da je $x \in \operatorname{Int} \tau$.*

Dokaz. Neka su $v_0, \ldots, v_n$ vrhovi od σ. Vrijedi

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_{v_i}(x) v_i.$$

Neka su $i_0 < \cdots < i_k$ elementi iz $\{0, \ldots, n\}$ takvi da su $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ svi vrhovi od σ s obzirom na koje je baricentrička koordinata od x pozitivna. Tada je

$$x = \sum_{l=0}^{k} t_{v_{i_l}}(x) v_{i_l}, \ \sum_{l=0}^{k} t_{v_{i_l}}(x) = 1 \text{ i } t_{v_{i_l}}(x) > 0 \text{ za sve } l \in \{0, \ldots, k\}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$x \in \operatorname{Int} \tau,$$

gdje je τ simpleks razapet točkama $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$. Očito je τ stranica od σ. Pretpostavimo sada da je τ' stranica od σ takva da je

$$x \in \operatorname{Int} \tau'.$$

Neka su $j_0 < \cdots < j_m$ elementi od $\{0, \ldots, m\}$ takvi da su $v_{j_0}, \ldots, v_{j_m}$ vrhovi od τ'. Budući da je $x \in \operatorname{Int} \tau'$, vrijedi

$$x = \sum_{i=0}^{n} s_i v_i,$$

pri čemu su $s_0, \ldots, s_n$ nenegativni realni brojevi čija je suma jednaka 1 te takvi da je $s_i = 0$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da $i \notin \{j_0, \ldots, j_m\}$. Vrijedi

$$s_i = t_{v_i}(x) \text{ za svaki } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Stoga za $i \in \{0, \ldots, n\}$ imamo

$$i \in \{j_0, \ldots, j_m\} \Leftrightarrow s_i > 0 \Leftrightarrow t_{v_i}(x) > 0 \Leftrightarrow i \in \{i_0, \ldots, i_k\}.$$

Prema tome

$$\{j_0, \ldots, j_m\} = \{i_0, \ldots, i_k\}$$

pa je

$$\tau' = \tau.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

1.4 Simplicijalni kompleksi

Definicija 1.4.1. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je K konačna neprazna familija simpleksa u $\mathbb{R}^N$ takva da vrijedi sljedeće:*

1. *ako je $\sigma \in K$ te ako je τ stranica od σ onda je $\tau \in K$.*
2. *ako su $\sigma, \tau \in K$ takvi da je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, onda je $\sigma \cap \tau$ stranica i od σ i od τ.*

Tada za K kažemo da je ***simplicijalni kompleks*** *u $\mathbb{R}^N$.*

Propozicija 1.4.2. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je K neprazna konačna familija simpleksa u $\mathbb{R}^N$. Tada je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ ako i samo ako vrijedi:*

1. ako je $\sigma \in K$ te ako je τ stranica od σ onda je $\tau \in K$.
2'. ako su $\sigma, \tau \in K$ takvi da je $\sigma \neq \tau$, onda je $\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo da je K simplicijalni kompleks. Po definiciji 1.4.1 vrijedi 1. Dokažimo da vrijedi $2'$. Neka su $\sigma, \tau \in K$ takvi da je $\sigma \neq \tau$. Pretpostavimo da je $\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau \neq \emptyset$. Odaberimo

$$x \in \operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau.$$

Tada je $x \in \operatorname{Int} \sigma$ i $x \in \operatorname{Int} \tau$ pa je $x \in \sigma$ i $x \in \tau$. Posebno $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ pa je $\sigma \cap \tau$ stranica i od σ i od τ. Označimo

$$s = \sigma \cap \tau.$$

Dakle $x \in s$ i s je simpleks. Prema prepoziciji 1.3.16 postoji jedinstvena stranica t od s takva da je $x \in \operatorname{Int} t$. Budući da je s stranica od σ, imamo da je t stranica od σ pa iz $x \in \operatorname{Int} t$, $x \in \operatorname{Int} \sigma$ i propozicije 1.3.16 imamo da je

$$\sigma = t.$$

Analogno dobivamo da je

$$t = \tau$$

pa je onda

$$\sigma = \tau$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom $\sigma \neq \tau$. Dakle,

$$\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau = \emptyset.$$

Obratno, pretpostavimo da vrijede 1. i $2'$. Dokažimo da je K simplicijalni kompleks. U tu svrhu dovoljno je dokazati svojstvo 2. iz definicije 1.4.1. Neka su $\sigma, \tau \in K$ takvi da je

$$\sigma \cap \tau \neq \emptyset.$$

Neka su $a_0, \dots, a_k$ svi zajednički vrhovi od σ i od τ te neka je ρ simpleks razapet tim vrhovima (ako takvih zajedničkih vrhova nema, neka je $\rho = \emptyset$). Tvrdimo da je

$$\rho = \sigma \cap \tau.$$

Iz definicije od ρ je jasno da je $\rho \subseteq \sigma$ i $\rho \subseteq \tau$, to jest

$$\rho \subseteq \sigma \cap \tau.$$

Obratno, neka je

$$x \in \sigma \cap \tau.$$

Tada je $x \in \sigma$ i $x \in \tau$. Tada postoje stranice s od σ i t od τ takve da je $x \in \operatorname{Int} s$ i $x \in \operatorname{Int} t$. Stoga je

$$\operatorname{Int} s \cap \operatorname{Int} t \neq \emptyset.$$

S druge strane, iz 1. slijedi da su $s, t \in K$. Sada iz 2′. slijedi da je

$$s = t.$$

Dakle, s je stranica i od σ i od τ što povlači da je svaki vrh od s jedna od točaka $a_0, \dots, a_k$. Znači da je s stranica od ρ pa je $s \subseteq \rho$ iz čega slijedi $x \in \rho$ (jer je $x \in \operatorname{Int} s \subseteq s$). Time smo dokazali da je

$$\sigma \cap \tau \subseteq \rho.$$

Dakle,

$$\rho = \sigma \cap \tau.$$

Prema tome, $\sigma \cap \tau$ je stranica i od σ i od τ. Zaključujemo da je K simplicijalni kompleks.

□

Primjer 1.4.3. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Neka je*

$$K = \{\tau \mid \tau \text{ stranica od } \sigma\}.$$

Tada je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$.

Naime, ako je $\tau \in K$ i ako je ρ stranica od τ, onda je ρ stranica od σ jer je po definiciji od K τ stranica od σ, dakle, $\rho \in K$. Nadalje, ako su $\tau_1, \tau_2 \in K$ takvi da je $\tau_1 \neq \tau_2$ onda je $\operatorname{Int} \tau_1 \cap \operatorname{Int} \tau_2 = \emptyset$ jer bi u suprotnom postojala točka $x \in \sigma$ takva da je $x \in \operatorname{Int} \tau_1$ i $x \in \operatorname{Int} \tau_2$ što bi bilo u kontradikciji s propozicijom 1.3.16 (τ_1 i τ_2 su stranice od σ). Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$.

Definicija 1.4.4. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je L neprazna podfamilija od K takva da za svaki $\sigma \in L$ i svaku stranicu τ od σ vrijedi $\tau \in L$. Tada za L kažemo da je* ***potkompleks*** *od K.*

Uočimo ako je L potkompleks od K, onda je L i sam simplicijalan kompleks. Naime, ako su $\sigma, \tau \in L$ takvi da je $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, onda je $\sigma \cap \tau$ stranica i od σ i od τ jer su σ i τ ujedno elementi od K koji je simplicijalni kompleks.

Primjer 1.4.5. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$ takav da je $\dim \sigma \geq 1$. Neka je*

$$K = \{\tau \mid \tau \text{ stranica od } \sigma\}$$

i

$$L = \{\tau \mid \tau \text{ prava stranica od } \sigma\}.$$

Tada je L potkompleks simplicijalnog kompleksa K.

Definicija 1.4.6. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$. Definiramo*

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

Za $|K|$ kažemo da je ***politop*** *simplicijalnog kompleksa K.*
Za podskup S od $\mathbb{R}^N$ kažemo da je ***poliedar*** *u $\mathbb{R}^N$ ako postoji simplicijalni kompleks K u $\mathbb{R}^N$ takav da je $S = |K|$ to jest takav da je S politop simplicijalnog kompleksa K.*

Primjer 1.4.7. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Neka je*

$$K = \{\tau \mid \tau \text{ stranica od } \sigma\}.$$

Tada je

$$|K| = \sigma.$$

Iz ovog zaključujemo da je svaki simpleks poliedar.

Propozicija 1.4.8. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$. Tada za svaki $x \in |K|$ postoji jedinstveni $s \in K$ takav da je $x \in \operatorname{Int} s$.*

Dokaz. Budući da je $x \in |K|$ postoji $\sigma \in K$ takav da je $x \in \sigma$. Tada postoji stranica s od σ takva da je $x \in \operatorname{Int} s$, a iz definicije simplicijalnog kompleksa slijedi da je $s \in K$. Pretpostavimo da je $t \in K$ takav da je $x \in \operatorname{Int} t$. Tada je $\operatorname{Int} s \cap \operatorname{Int} t \neq \emptyset$ pa iz 1.4.2 slijedi da je $s = t$. □

Uočimo sljedeće: ako su K i L simplicijalni kompleksi u $\mathbb{R}^N$ takvi da je $K \cap L \neq \emptyset$, onda je $K \cap L$ simplicijalni kompleks. Štoviše, ako je $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija simplicijalnih kompleksa u $\mathbb{R}^N$ takva da je

$$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset,$$

onda je

$$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$$

simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$.

Primjer 1.4.9. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^2$ razapet točkama $(0,0)$ i $(2,0)$ te neka je τ simpleks u $\mathbb{R}^2$ razapet točkama $(1,0)$ i $(1,1)$. Imamo*

$$\begin{aligned}\sigma &= \{(1-\lambda)(0,0) + \lambda(2,0) \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(2\lambda, 0) \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(x,0) \mid x \in [0,2]\}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\tau &= \{(1-\lambda)(1,0) + \lambda(1,1) \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(1-\lambda, 0) + (\lambda, \lambda) \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(1,\lambda) \mid \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(1,y) \mid y \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Iz ovoga je jasno da je

$$\sigma \cap \tau = \{(1,0)\}.$$

Prema tome, $\sigma \cap \tau$ nije stranica od σ.

Neka je K skup svih stranica od σ te neka je L skup svih stranica od τ. Znamo da su K i L simplicijalni kompleksi. No, $K \cup L$ nije simplicijalni kompleks. Naime, vrijedi $\sigma, \tau \in K \cup L$, no $\sigma \cap \tau$ nije stranica od σ.

Neka je K' skup svih pravih stranica od σ. Tada je K' simplicijalni kompleks (prema primjeru 1.4.5*). No, $K \setminus K'$ nije simplicijalni kompleks. Naime, $\sigma \in K \setminus K'$ i $\{(0,0)\}$ je stranica od σ, ali $\{(0,0)\} \notin K \setminus K'$.*

Teorem 1.4.10. *Neka su $n, N \in \mathbb{N}$ te neka su $K_1, \dots, K_n$ simplicijalni kompleksi u $\mathbb{R}^N$ takvi da vrijedi sljedeće:*
ako su $i, j \in \{1, \dots, n\}$ takvi da je

$$|K_i| \cap |K_j| \neq \emptyset,$$

onda postoji L takav da je L podkompleks i od K_i i od K_j te takav da je

$$|K_i| \cap |K_j| = |L|.$$

Tada je $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ simplicijalni kompleks.

Dokaz. Neka je
$$\sigma \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$$
te neka je τ stranica od σ. Tada je $\sigma \in K_i$ za neki $i \in \{1, \dots, n\}$ pa, budući da je K_i simplicijalni kompleks, imamo $\tau \in K_i$. Dakle,
$$\tau \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n.$$
Neka su $\sigma, \tau \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ takvi da je
$$\sigma \neq \tau.$$
Dokažimo da je
$$\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau = \emptyset.$$
Ako to dokažemo, onda će iz propozicije 1.4.2 slijediti da je $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ simplicijalni kompleks. Pretpostavimo suprotno,
$$\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau \neq \emptyset.$$
Odaberimo
$$x \in \operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau.$$
Tada je $x \in \operatorname{Int} \sigma$ i $x \in \operatorname{Int} \tau$. Posebno, $x \in \sigma$ i $x \in \tau$. Budući da su $\sigma, \tau \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$, postoje $i, j \in \{1, \dots, n\}$ takvi da je $\sigma \in K_i$ i $\tau \in K_j$. Slijedi da je $x \in |K_i|$ i $x \in |K_j|$, tj.
$$x \in |K_i| \cap |K_j|.$$
Prema pretpostavci propozicije vrijedi $|K_i| \cap |K_j| = |L|$, gdje je L podkompleks i od K_i i od K_j. Sada imamo
$$x \in |L|$$
pa prema propoziciji 1.4.8 postoji $s \in L$ takav da je $x \in \operatorname{Int} s$. Imamo $\sigma, s \in K_i$ (jer je $L \subseteq K_i$) te $x \in \operatorname{Int} \sigma$ i $x \in \operatorname{Int} s$. Iz propozicije 1.4.8 zaključujemo $\sigma = s$. Isto tako, $\tau, s \in K_j$, te $x \in \operatorname{Int} \tau$ i $x \in \operatorname{Int} s$ pa je $\tau = s$. Stoga je
$$\sigma = \tau.$$
Kontradikcija. Prema tome,
$$\operatorname{Int} \sigma \cap \operatorname{Int} \tau = \emptyset.$$
Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Primjer 1.4.11. *Neka su* $a = (0, 0), b = (1, 0), c = (1, 1), d = (0, 1)$. *Neka je* σ *simpleks razapet točkama* a, b, c *te neka je* τ *simpleks razapet točkama* a, c, d. *Vrijedi*

$$\begin{aligned}\sigma &= \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}\\ &= \{(\beta + \gamma, \gamma) \mid \beta, \gamma \geq 0, \beta + \gamma \leq 1\}\end{aligned}$$

dakle,

$$\sigma = \{(x, y) \mid x \geq y, x, y \in [0, 1]\}.$$

Analogno dobivamo

$$\tau = \{(x, y) \mid x \leq y, x, y \in [0, 1]\}.$$

Stoga je

$$\sigma \cap \tau = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}.$$

No,

$$\begin{aligned}\overline{ac} &= \{(1 - \mu)a + \mu c \mid \mu \in [0, 1]\}\\ &= \{(\mu, \mu) \mid \mu \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

pa je

$$\sigma \cap \tau = \overline{ac}.$$

Neka je K_1 *skup svih stranica od* σ *te neka je* K_2 *skup svih stranica od* τ. *Neka je* L *skup svih stranica od* $\overline{ac}$. *Budući da je* $\overline{ac}$ *stranica od* σ, *imamo da je* $L \subseteq K_1$. *Isto tako,* $L \subseteq K_2$. *Stoga je* L *podkompleks i od* K_1 *i od* K_2. *Imamo*

$$|K_1| \cap |K_2| = \overline{ac} = |L|$$

pa iz teorema 1.4.10 *slijedi da je* $K_1 \cup K_2$ *simplicijalni kompleks.*

Uočimo da je

$$\begin{aligned}|K_1 \cup K_2| &= |K_1| \cup |K_2|\\ &= \sigma \cup \tau\\ &= \{(x, y) \mid x \geq y, x, y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \mid x \leq y, x, y \in [0, 1]\}.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$|K_1 \cup K_2| = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1] \times [0, 1]\}.$$

Posebno, $[0, 1] \times [0, 1]$ je poliedar.

Napomena 1.4.12. *Općenito ako su σ i τ simpleksi u $\mathbb{R}^N$, takvi da je $\sigma \cap \tau$ stranica i od σ i od τ, onda je $\sigma \cup \tau$ poliedar. Naime, neka su*

$$K_1 = \{s \mid s \text{ stranica od } \sigma\}$$

i

$$K_2 = \{t \mid t \text{ stranica od } \tau\}$$

te neka je

$$L = \{\rho \mid \rho \text{ stranica od } \sigma \cap \tau\}.$$

Tada je L podkompleks i od K_1 i od K_2, a vrijedi

$$|K_1| \cap |K_2| = \sigma \cap \tau = |L|$$

pa je prema teoremu 1.4.10 *$K_1 \cup K_2$ simplicijalni kompleks. Vrijedi*

$$|K_1 \cup K_2| = |K_1| \cup |K_2| = \sigma \cup \tau.$$

Poglavlje 2

Metrička svojstva poliedara

2.1 Metrički prostori

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijede sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *i* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

*Tada za d kažemo da je **metrika** na skupu X a za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.*

Primjer 2.1.2. *Podsjetimo se da je norma na (realnom) vektorskom prostoru $(V, +, \cdot)$ funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, takva da za sve $x, y \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\|x\| \geq 0$ *i* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pretpostavimo da je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor te da je $\|\cdot\|$ norma na $(V, +, \cdot)$. Definirajmo $d : V \times V \to \mathbb{R}$ sa

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dokažimo da je d metrika na V. Očito je da d zadovoljava svojstva 1. i 2. iz definicije metričkog prostora. Neka su $x, y, z \in V$. Tada je

$$\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

dakle,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Prema tome, d je metrika na V. Za d kažemo da je **metrika inducirana normom** $\|\cdot\|$.

Primjer 2.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Za d kažemo da je **euklidska metrika** *na $\mathbb{R}^n$. Dokažimo da je d zaista metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}. \tag{2.1}$$

Uočimo da ako su $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ i $y=(y_1,\ldots,y_n)$ onda je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \\ &= \|(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)\| \\ &= \|x-y\|, \end{aligned}$$

dakle,

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{2.2}$$

Stoga je dovoljno pokazati da je funkcija $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$. Naime, tada će iz (2.2) *slijediti da je d metrika inducirana normom $\|\cdot\|$ (što će posebno značiti da je d zaista metrika). Općenito, ako je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor onda za funkciju $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x \mid y)$ kažemo da je* **skalarni produkt** *na $(V,+,\cdot)$ ako za sve $x,y,z \in V$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $(x \mid x) \geq 0, (x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $(x+z \mid y) = (x \mid y) + (z \mid y)$
3. $(\lambda x|y) = \lambda(x \mid y)$
4. $(x \mid y) = (y \mid x)$

Pretpostavimo da je $(\cdot \mid \cdot)$ skalarni produkt na vektorskom prostoru $(V,+,\cdot)$. Neka su $x,y \in V$. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(t) = (x+ty \mid x+ty).$$

Iz 1. *slijedi da je* $f(t) \geq 0$ *za sve* $t \in \mathbb{R}$. *S druge strane, koristeći svojstva* 2., 3., 4. *lako zaključujemo da je*

$$f(t) = (y \mid y)t^2 + 2(x \mid y)t + (x \mid x), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, f *je kvadratna funkcija s vrijednostima koje su nenegativne pa slijedi da je diskriminanta te funkcije manja ili jednaka* 0. *Prema tome,*

$$4(x \mid y)^2 - 4(y \mid y)(x \mid x) \leq 0,$$

to jest

$$(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y). \tag{2.3}$$

Definirajmo funkciju $n : V \to \mathbb{R}$ *sa*

$$n(x) = \sqrt{(x \mid x)}.$$

Tvrdimo da je n *norma na* $(V, +, \cdot)$. *Prvo svojstvo iz definicije norme je očito. Nadalje, ako su* $x \in V$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *onda je*

$$n(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda| \sqrt{(x \mid x)} = |\lambda| n(x).$$

Neka su $x, y \in V$. *Vrijedi*

$$\begin{aligned} n(x+y) &\leq n(x) + n(y) \\ \Leftrightarrow (n(x+y))^2 &\leq n(x)^2 + 2n(x)n(y) + n(y)^2 \\ \Leftrightarrow (x+y \mid x+y) &\leq (x \mid x) + 2n(x)n(y) + (y \mid y) \\ \Leftrightarrow (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) &\leq (x \mid x) + 2n(x)n(y) + (y \mid y) \\ \Leftrightarrow (x \mid y) &\leq n(x)n(y). \end{aligned}$$

No, iz (2.3) *slijedi*

$$|(x \mid y)| \leq n(x)n(y).$$

Prema tome vrijedi

$$n(x+y) \leq n(x) + n(y).$$

Dakle, n *je norma na* $(V, +, \cdot)$. *Za* n *kažemo da je* ***norma inducirana skalarnim produktom*** $(\cdot \mid \cdot)$. *Neka je* $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$((x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Lako se provjeri da je $(\cdot \mid \cdot)$ *skalarni produkt na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* n *norma inducirana tim skalarnim produktom. Tada za* $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *vrijedi* $n(x) = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. *Prema tome* $n = \|\cdot\|$, *pri čemu je* $\|\cdot\|$ *funkcija definirana sa* (2.1). *To znači da je* $\|\cdot\|$ *zaista norma na* $\mathbb{R}^n$ *i time smo dokazali da je* d *metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Za* $\|\cdot\|$ *kažemo da je* ***euklidska norma*** *na* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su x_0 i $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Definiramo skupove*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

i

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

*Za $K(x_0, r)$ kažemo da je **(otvorena) kugla** oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d), a za $\overline{K}(x_0, r)$ kažemo da je **zatvorena kugla** oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d). Ako želimo istaknuti o kojoj se metrici radi pišemo $K(x_0, r; d)$ i $\overline{K}(x_0, r; d)$.*

Propozicija 2.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$. Neka je d metrika inducirana normom $\|\cdot\|$. Tada su sve otvorene i sve zatvorene kugle u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ konveksni skupovi.*

Dokaz. Neka su $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Pokažimo da je $K(x_0, r)$ konveksan skup. Neka je $c \in \overline{ab}$. Tada je $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$ za neki $\lambda \in [0, 1]$. Imamo

$$\begin{aligned}
d(c, x_0) &= \|c - x_0\| \\
&= \|(1 - \lambda)a + \lambda b - ((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_0)\| \\
&= \|(1 - \lambda)(a - x_0) + \lambda(b - x_0)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(a - x_0)\| + \|\lambda(b - x_0)\| \\
&= (1 - \lambda)\, \|(a - x_0)\| + \lambda\, \|(b - x_0)\| \\
&= (1 - \lambda)d(a, x_0) + \lambda d(b, x_0) \\
&< (1 - \lambda)r + \lambda r \\
&= r
\end{aligned} \tag{2.4}$$

jer je $d(a, x_0) < r$ i $d(b, x_0) < r$. Dakle,

$$d(c, x_0) < r$$

pa je $c \in K(x_0, r)$. Time smo dokazali da je $\overline{ab} \subseteq K(x_0, r)$ pa zaključujemo da je kugla $K(x_0, r)$ konveksan skup. Analogno dobivamo da je $\overline{K}(x_0, r)$ konveksan skup. □

Primjer 2.1.6. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Dokažimo za je d metrika na X. Svojstva 1. i 2. iz definicije metrike su očita. Neka su $x, y, z \in X$. Želimo dokazati

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \tag{2.5}$$

*Ako je $d(x,z) = 0$ ili $d(z,y) = 0$, onda (2.5) očito vrijedi. Inače imamo $d(x,z) = 1$ i $d(z,y) = 1$ pa je jasno da (2.5) vrijedi. Dakle, d je metrika na X. Za d kažemo da je **diskretna metrika** na X. Uočimo da za sve $x_0 \in X$ i $r > 0$ vrijedi:*

$$K(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

i

$$\overline{K}(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & r < 1 \\ X, & r \geq 1. \end{cases}$$

Primjer 2.1.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$. Definirajmo funkciju $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s*

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) = (a,b) \text{ ili } (x,y) = (b,a) \\ 0, & x = y \\ 1, & \text{inače}. \end{cases}$$

Na isti način kao u prethodnom primjeru zaključujemo da je d metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $K(a, \frac{2}{3}) = \{a,b\}$ i $\overline{K}(a, \frac{2}{3}) = \{a,b\}$ pa zaključujemo da $K(a, \frac{2}{3})$ i $\overline{K}(a, \frac{2}{3})$ nisu konveksni skupovi.

Definicija 2.1.8. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x \in X$, te $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$. Tada je $\{d(x,s) | s \in S\}$ neprazan, odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$, stoga ima infimum. Definiramo*

$$d(x,S) = \inf\{d(x,s) | s \in S\}.$$

*Za $d(x,S)$ kažemo da je **udaljenost** točke x do skupa S u metričkom prostoru (X,d).*

Uočimo, ako je (X,d) metrički prostor, $S \subseteq X$, $x \in S$ onda je $d(x,S) = 0$.

Primjer 2.1.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $S = \langle 0, \infty\rangle$ i $x = 0$. Imamo:*

$$\begin{aligned} d(x,S) &= \inf\{d(x,s) \mid s \in \langle 0,\infty\rangle\} \\ &= \inf\{|0 - s| \mid s \in \langle 0,\infty\rangle\} \\ &= \inf\{s \mid s \in \langle 0,\infty\rangle\} \\ &= \inf\langle 0,\infty\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$d(x,S) = 0,$$

no $x \notin S$. Prema tome, udaljenost točke od skupa može biti 0 iako točka ne pripada skupu.

2.2 Omeđenost u metričkim prostorima

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je **omeđen skup** u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Iz prethodne definicije je jasno da je svaka otvorena kugla u metričkom prostoru omeđen skup. Nadalje, svaka zatvorena kugla je omeđen skup: ako je (X, d) metrički prostor, $x \in X$, $r > 0$, onda je $\overline{K}(x, r) \subseteq K(x, r + 1)$.

Lema 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen skup u (X, d). Tada*

$$\forall x \in X, \exists r > 0 \text{ takav da } S \subseteq K(x, r).$$

Dokaz. Iz činjenice da je S omeđen slijedi da postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r_0)$. Uzmimo $x \in X$. Definiramo

$$r = d(x, x_0) + r_0.$$

Tvrdimo da je

$$K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r). \tag{2.6}$$

Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(y, x_0) < r_0$. Imamo

$$\begin{aligned} d(y, x) &= d(x, x_0) + d(x_0, y) \\ &< d(x, x_0) + r_0 \\ &= r. \end{aligned}$$

Dakle, $d(y, x) < r$ pa je $y \in K(x, r)$. Time smo dokazali da vrijedi (2.6). Sada iz $S \subseteq K(x_0, r_0)$ i (2.6) slijedi

$$S \subseteq K(x, r).$$

□

Propozicija 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x \in X$. Prema lemi 2.2.2, postoje pozitivni realni brojevi $r_1, \ldots, r_n$ takvi da je $S_1 \subseteq K(x, r_1), \ldots, S_n \subseteq K(x, r_n)$. Neka je

$$r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}.$$

Tada je

$$K(x, r_1) \subseteq K(x, r), \ldots, K(x, r_n) \subseteq K(x, r)$$

pa je

$$S_1 \subseteq K(x,r), \dots, S_n \subseteq K(x,r).$$

Prema tome,

$$S_1 \cup \cdots \cup S_n \subseteq K(x,r),$$

što znači da je $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ omeđen skup u (X,d). □

Napomena 2.2.4. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0 \in X, r > 0$. Neka su $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$. Tada je*

$$d(x,y) \leq 2r.$$

Naime, imamo

$$d(x,y) \leq d(x_0,x) + d(x_0,y) \leq r + r = 2r.$$

Definicija 2.2.5. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je S neprazan, omeđen skup u (X,d). Tada postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0,r)$. Iz prethodne napomene tada slijedi da je $d(x,y) \leq 2r, \forall x,y \in S$. Ovo znači da je $\{d(x,y) \mid x,y \in S\}$ odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Taj skup je neprazan jer je S neprazan pa ima supremum. Definiramo*

$$\operatorname{diam} S = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in S\}.$$

Za $\operatorname{diam} S$ *kažemo da je* ***dijametar*** *skupa S u metričkom prostoru (X,d).*

Iz prethodne definicije je jasno da za svaki neprazan omeđen skup S u metričkom prostoru (X,d) i sve $x,y \in S$ vrijedi

$$d(x,y) \leq \operatorname{diam} S.$$

Napomena 2.2.6. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka su S i T neprazni podskupovi od X takvi da je $S \subseteq T$. Pretpostavimo da je T omeđen u (X,d). Tada je S omeđen u (X,d) te vrijedi*

$$\operatorname{diam} S \leq \operatorname{diam} T.$$

Naime, očito je da je S omeđen skup. Za sve $x,y \in S$ vrijedi $x,y \in T$ pa je $d(x,y) \leq \operatorname{diam} T$. Ovo znači da je $\operatorname{diam} T$ *gornja međa skupa $\{d(x,y) | x,y \in S\}$. Stoga je supremum tog skupa manji ili jednak od* $\operatorname{diam} T$*, tj.* $\operatorname{diam} S \leq \operatorname{diam} T$.

Primjer 2.2.7. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $r > 0$. Skup $\overline{K}(x_0,r)$ je omeđen u (X,d) te za sve $x,y \in \overline{K}(x_0,r)$ vrijedi*

$$d(x,y) \leq 2r$$

prema napomeni 2.2.4. *Prema tome,* $2r$ *je gornja međa skupa* $\{d(x,y) | x, y \in \overline{K}(x_0, r)\}$ *pa je supremum tog skupa manji ili jednak* $2r$*, tj.*

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \leq 2r.$$

Iz $K(x_0, r) \subseteq \overline{K}(x_0, r)$ *slijedi da je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) \leq 2r.$$

Primjer 2.2.8. *Neka je* X *neprazan skup te neka je* d *diskretna metrika na* X*. Neka je* $x_0 \in X$ *te neka je* $r = \frac{1}{2}$*. Tada je*

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq \frac{1}{2}\} = \{x_0\}$$

pa je

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) = 0 < 2r.$$

Dakle, $\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) \neq 2r$*. Također*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) = 0 < 2r.$$

Primjer 2.2.9. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $\|\cdot\|$ *norma na* $\mathbb{R}^n$*. Neka je* d *metrika inducirana normom* $\|\cdot\|$*. Neka su* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *i* $r > 0$*. Tvrdimo da u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$ *vrijedi*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) = 2r.$$

Znamo da je $\operatorname{diam} K(x_0, r) \leq 2r$*. Pretpostavimo da je* $\operatorname{diam} K(x_0, r) < 2r$*. Odaberimo* $\epsilon > 0$ *takav da je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) + 2\epsilon < 2r. \tag{2.7}$$

Možemo pretpostaviti da je $\epsilon < r$ *(jer ako nejednakost* (2.7) *vrijedi za neki* ϵ *posebno vrijedi i za svaki manji* ϵ *pa možemo uzeti onaj koji je ujedno i manji od* r*). Nadalje, odaberimo* $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ *te neka je* $e = \frac{1}{\|v\|}v$*. Tada je* $\|e\| = 1$*. Neka je*

$$x = x_0 + (r - \epsilon)e$$

i

$$y = x_0 - (r - \epsilon)e.$$

Imamo

$$d(x, x_0) = \|x - x_0\| = \|(r - \epsilon)e\| = |r - \epsilon| \, \|e\| = r - \epsilon < r.$$

Dakle, $x \in K(x_0, r)$*. Analogno dobijemo* $d(y, x_0) = r - \epsilon < r$ *pa je* $y \in K(x_0, r)$*. Nadalje,*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|x_0 + (r - \epsilon)e - x_0 + (r - \epsilon)e\| \\ &= \|2(r - \epsilon)e\| \\ &= |2(r - \epsilon)| \, \|e\| \\ &= 2r - 2\epsilon \\ &> \operatorname{diam} K(x_0, r) \end{aligned}$$

zbog (2.7)*. Dakle,* $d(x, y) > \operatorname{diam} K(x_0, r)$*. No, iz* $x, y \in K(x_0, r)$ *slijedi* $d(x, y) \le \operatorname{diam} K(x_0, r)$*. Došli smo do kontradikcije pa zaključujemo da je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) = 2r.$$

Uočimo da za sve $x, y \in K(x_0, r)$ *vrijedi*

$$d(x, y) \le d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r,$$

tj. $d(x, y) < 2r$*. Dakle,*

$$d(x, y) < \operatorname{diam} K(x_0, r), \forall x, y \in K(x_0, r).$$

Uočimo također da je

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_0, r) = 2r.$$

Propozicija 2.2.10. *Neka je* $N \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ *norma na* $\mathbb{R}^N$ *te* d *metrika inducirana normom* $\|\cdot\|$. *Neka je* σ *simpleks u* $\mathbb{R}^N$ *s vrhovima* $v_0, \dots, v_n$, $n \in \mathbb{N}_0$*. Tada je* σ *omeđen skup u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^N, d)$ *i vrijedi*

$$\operatorname{diam} \sigma = \max\{d(v_i, v_j) | i, j \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Dokaz. Uočimo prije svega da je skup $\{d(v_i, v_j) | i, j \in \{0, \dots, n\}\}$ konačan podskup od $\mathbb{R}$ pa ima maksimum. Označimo:

$$M = \max\{d(v_i, v_j) | i, j \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Ako je $n = 0$, tvrdnja propozicije je jasna. Pretpostavimo da je $n \ge 1$. Tada je $M > 0$. Neka je $i \in \{0, \dots, n\}$. Za svaki $j \in \{0, \dots, n\}$ vrijedi $d(v_i, v_j) \le M$ pa je $v_j \in \overline{K}(v_i, M)$. Prema tome,

$$\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \overline{K}(v_i, M).$$

Prema propoziciji 2.1.5 $\overline{K}(v_i, M)$ je konveksan skup pa iz propozicije 1.2.4 prema (3.) slijedi da je $\text{Conv}\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \overline{K}(v_i, M)$, tj

$$\sigma \subseteq \overline{K}(v_i, M).$$

Stoga je σ omeđen skup te za svaki $x \in \sigma$ vrijedi $x \in \overline{K}(v_i, M)$ pa je $d(x, v_i) \leq M$. Dakle, za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ i svaki $x \in \sigma$ vrijedi

$$d(x, v_i) \leq M. \tag{2.8}$$

Neka je $x \in \sigma$. Prema (2.8) vrijedi $v_0, \dots, v_n \in \overline{K}(x, M)$ pa je

$$\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \overline{K}(x, M).$$

Iz propozicije 1.2.4 slijedi

$$\sigma \subseteq \overline{K}(x, M).$$

Neka je $y \in \sigma$. Tada je $y \in \overline{K}(x, M)$ pa je $d(x, y) \leq M$. Dakle, za sve $x, y \in \sigma$ vrijedi

$$d(x, y) \leq M$$

što znači da je M gornja međa skupa $\{d(x, y) | x, y \in \sigma\}$, što povlači da je

$$\sup\{d(x, y) | x, y \in \sigma\} \leq M.$$

Prema tome,

$$\operatorname{diam} \sigma \leq M.$$

S druge strane, iz definicije od M je jasno da je $M = d(v_i, v_j)$ za neke $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Iz $v_i, v_j \in \sigma$ slijedi $d(v_i, v_j) \leq \operatorname{diam} \sigma$ pa je

$$M \leq \operatorname{diam} \sigma.$$

Dakle,

$$M = \operatorname{diam} \sigma.$$

□

Napomena 2.2.11. *Neka je $N \in \mathbb{N}$, te $n \in \mathbb{N}_0$. Neka su $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ točke (ne nužno geometrijski nezavisne). Neka je $S = \text{Conv}\{v_0, \dots, v_n\}$. Tada na posve isti način kao u dokazu prethodne propozicije vidimo da je S omeđen skup te da je*

$$\operatorname{diam} S = \max\{d(v_i, v_j) \mid i, j \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Definicija 2.2.12. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Za simplicijalni kompleks K u $\mathbb{R}^N$ kažemo da je* ***triangulacija*** *skupa S ako je $S = |K|$.*

Napomena 2.2.13. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Uočimo da S ima triangulaciju (tj. postoji K takav da je K triangulacija od S) ako i samo ako je S poliedar u $\mathbb{R}^N$.*

Definicija 2.2.14. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je $v \in \mathbb{R}^N$. Kažemo da je v* ***vrh*** *simplicijalnog kompleksa K ako postoji $\sigma \in K$ takav da je v vrh od σ. Skup svih vrhova simplicijalnog kompleksa K označavamo sa K^0.*

Uočimo sljedeće: ako je K simplicijalan kompleks u $\mathbb{R}^N$ te $v \in \mathbb{R}^N$, onda je

$$v \in K^0 \Leftrightarrow \{v\} \in K.$$

Naime, ako je $\{v\} \in K$ onda je $v \in K^0$ jer je v vrh od $\{v\}$. Obratno, ako je $v \in K^0$ onda je v vrh od σ, za neki $\sigma \in K$. Tada je očito da je $\{v\}$ stranica od σ, a kako je K simplicijalni kompleks, imamo $\{v\} \in K$.
Nadalje, uočimo da je K^0 konačan skup, naime K je konačna familija simpleksa, a svaki simpleks ima konačno mnogo vrhova.

Propozicija 2.2.15. *Neka je d metrika inducirana nekom normom na $\mathbb{R}^N$. Neka je S poliedar u $\mathbb{R}^N$.*

1. *S je omeđen skup u $(\mathbb{R}^N, d)$.*

2. *Ako je K triangulacija od S, onda je*

$$\operatorname{diam} S = \max\{d(v, w) | v, w \in K^0\}. \tag{2.9}$$

Dokaz. 1. Budući da je S poliedar, S je unija konačno mnogo simpleksa. Svaki simpleks u $\mathbb{R}^N$ je omeđen skup u $(\mathbb{R}^N, d)$ prema propoziciji 2.2.10. Stoga je S omeđen skup prema propoziciji 2.2.3.

2. Budući da je K^0 konačan skup imamo

$$K^0 = \{v_0, \dots, v_k\},$$

$k \in \mathbb{N}_0$. Neka je

$$T = \operatorname{Conv}\{v_0, \dots, v_k\}.$$

Neka je $\sigma \in K$. Neka su $a_0, \dots, a_n$ vrhovi od σ. Očito su tada $a_0, \dots, a_n \in K^0$ pa je $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \{v_0, \dots, v_k\}$. Iz napomene 1.2.5 slijedi da je

$$\operatorname{Conv}\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \operatorname{Conv}\{v_0, \dots, v_k\}.$$

Prema tome, $\sigma \subseteq T$. Dakle, za svaki $\sigma \in K$ vrijedi $\sigma \subseteq T$ pa je

$$\bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq T,$$

tj. $S \subseteq T$. Iz napomene 2.2.6 slijedi

$$\operatorname{diam} S \leq \operatorname{diam} T.$$

Prema napomeni 2.2.11 imamo $\operatorname{diam} T = \max\{d(v_i, v_j) | i, j \in \{0, \ldots, k\}\}$, tj.

$$\operatorname{diam} T = \max\{d(v, w) | v, w \in K^0\}.$$

Prema tome,

$$\operatorname{diam} S \leq \max\{d(v, w) | v, w \in K^0\}.$$

S druge strane, ako su $v, w \in K^0$ onda su $v, w \in S$ (jer je $S = |K|$) pa je

$$d(v, w) \leq \operatorname{diam} S.$$

Stoga je

$$\max\{d(v, w) | v, w \in K^0\} \leq \operatorname{diam} S.$$

Prema tome, vrijedi (2.9). □

Definicija 2.2.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Za U kažemo da je* ***otvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Propozicija 2.2.17. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1. *$\emptyset, X$ su otvoreni skupovi u (X, d).*

2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d), onda je unija $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).*

3. *Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. 1. Očito vrijedi.

2. Ako je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, onda je $x \in U_{\alpha_0}$ za neki $\alpha_0 \in A$ pa slijedi da postoji $r > 0$ takav da $K(x, r) \subseteq U_{\alpha_0}$, što povlači $K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Dakle, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup.

3. Neka je $x \in U \cap V$. Slijedi $x \in U$ i $x \in V$ pa postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je $K(x, r_1) \subseteq U$ i $K(x, r_2) \subseteq V$. Uzmimo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je $K(x, r) \subseteq U \cap V$. Dakle, $U \cap V$ je otvoren skup.

□

Propozicija 2.2.18. *Neka je (X, d) metrički prostor te $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je
$$a \in K(x_0, r).$$
Tada je $d(a, x_0) < r$. Neka je $r_1 = r - d(x_0, a)$. Tada je $r_1 > 0$ i
$$r = r_1 + d(x_0, a).$$
Tvrdimo da je
$$K(a, r_1) \subseteq K(x_0, r). \tag{2.10}$$
Neka je
$$b \in K(a, r_1).$$
Tada je $d(a, b) < r_1$ pa imamo
$$d(x_0, b) \leq d(x_0, a) + d(a, b) < d(x_0, a) + r_1 = r.$$
Dakle, $d(x_0, b) < r$ pa je
$$b \in K(x_0, r).$$
Prema tome, vrijedi (2.10) te zaključujemo da je $K(x_0, r)$ otvoren skup. □

Definicija 2.2.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F* ***zatvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako je F^C otvoren skup u (X, d).*

Propozicija 2.2.20. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

1. *$\emptyset, X$ su zatvoreni skupovi u (X, d).*
2. *Ako je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija zatvorenih skupova u (X, d), onda je presjek $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup u (X, d).*
3. *Ako su F i G zatvoreni skupovi u (X, d), onda je $F \cup G$ zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz.

1. Vrijedi $\emptyset^C = X$, a X je otvoren pa slijedi da je $\emptyset$ zatvoren. Isto tako iz $X^C = \emptyset$ zaključujemo da je X zatvoren.
2. Vrijedi $(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha)^C = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^C$ pa iz propozicije 2.2.17 (2.dio) slijedi da je $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^C$ otvoren pa je $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup.
3. Vrijedi $(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$ pa iz propozicije 2.2.17 (3.dio) slijedi da je $F^C \cap G^C$ otvoren pa je $F \cup G$ zatvoren skup.

□

2.3 Neprekidne funkcije

Definicija 2.3.1. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, $f : X \to Y$ i $x_0 \in X$. Za funkciju f kažemo da je **neprekidna u točki** x_0 s obzirom na metrike d i d' ako*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \quad (\, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \,).$$

Napomena 2.3.2. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna u točki x_0 s obzirom na metriku d ako i samo ako*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad (\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \,).$$

Definicija 2.3.3. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **neprekidna s obzirom na metrike** d i d' ako je f neprekidna u točki x_0 s obzirom na metrike d i d' za svaki $x_0 \in X$.*

Primjer 2.3.4. *1. Neka su (X, d) metrički prostor te $f : X \to X$ identiteta na X, tj. $f(x) = x$ za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna.*
Naime, ako su $x_0 \in X$ i $\epsilon > 0$, onda za svaki $\delta \in \langle 0, \epsilon]$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(x, x_0) < \epsilon.$$

2. Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $y_0 \in Y$. Tada je funkcija $f : X \to Y$ definirana sa $f(x) = y_0$, $\forall x \in X$ neprekidna.
Naime, za sve $x_0 \in X$ i za sve $\epsilon > 0$ vrijedi

$$d'(f(x), f(x_0)) = d'(y_0, y_0) = 0 < \epsilon, \;\; \forall x \in X.$$

Dakle, $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, $\forall x \in X$. Stoga, $\forall \delta > 0$ i $\forall x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna. Ovime smo pokazali da je svaka konstantna funkcija neprekidna.

Definicija 2.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te U otvoren skup u (X, d) takav da je $x_0 \in U$. Tada za U kažemo da je **okolina** točke x_0 u metričkom prostoru (X, d).*

Propozicija 2.3.6. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, $f : X \to Y$ funkcija i $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u točki x_0 s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u (Y, d') postoji okolina U od x_0 u (X, d) takva da je $f(U) \subseteq V$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je V okolina od $f(x_0)$ u (Y, d'). Imamo da je V otvoren skup te da je $f(x_0) \in V$ pa stoga postoji $r > 0$ takav da

$$K(f(x_0), r) \subseteq V.$$

Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takva da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < r.$$

Tada vrijedi

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), r). \tag{2.11}$$

Naime ako je $y \in f(K(x_0, \delta))$, onda je $y = f(x)$ gdje je $x \in K(x_0, \delta)$. Slijedi,

$$d(x, x_0) < \delta,$$

a to povlači

$$d'(f(x), f(x_0)) < r$$

pa je $f(x) \in K(f(x_0), r)$ tj.

$$y \in K(f(x_0), r).$$

Dakle, vrijedi (2.11). Iz (2.11) slijedi da je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq V.$$

Jasno je da je $K(x_0, \delta)$ okolina točke x_0.

Pretpostavimo sada da za svaku okolinu V od $f(x_0)$ postoji okolina U od x_0 takva da vrijedi

$$f(U) \subseteq V.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Tada je $K(f(x_0), \epsilon)$ okolina od $f(x_0)$ pa postoji okolina U od x_0 takva da je

$$f(U) \subseteq K(f(x_0), \epsilon). \tag{2.12}$$

Budući da je U otvoren skup koji sadrži x_0 postoji $\delta > 0$ takva da je $K(x_0, \delta) \subseteq U$. Stoga je

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U) \tag{2.13}$$

pa iz (2.12) i (2.13) slijedi

$$f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \epsilon).$$

Iz ovoga zaključujemo da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u točki x_0. □

Teorem 2.3.7. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako za svaki otvoreni skup V u (Y, d') vrijedi da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je V otvoren skup u (Y, d'). Neka je $x \in f^{\leftarrow}(V)$. Tada je $f(x) \in V$ pa je V okolina od $f(x)$. Iz prethodne propozicije slijedi da postoji okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$. Slijedi

$$U \subseteq f^{\leftarrow}(V).$$

Budući da je U okolina od x, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$ iz čega slijedi

$$K(x, r) \subseteq f^{\leftarrow}(V).$$

Zaključujemo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup.

Obratno, pretpostavimo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X, d), za svaki otvoren skup V u (Y, d'). Neka je $x_0 \in X$. Neka je V okolina od $f(x_0)$. Definirajmo

$$U = f^{\leftarrow}(V).$$

Tada je U okolina od x_0 te vrijedi

$$f(U) = f(f^{\leftarrow}(V)) \subseteq V.$$

Iz prethodne propozicije slijedi da je f neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna. □

Propozicija 2.3.8. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna ako i samo ako je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren skup u (X, d) za svaki zatvoren skup G u (Y, d').*

Dokaz. Neka je $A \subseteq Y$. Tvrdimo da je

$$X \backslash f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(Y \backslash A).$$

Vrijedi,

$$\forall x \in X \quad x \in X \backslash f^{\leftarrow}(A) \Leftrightarrow x \notin f^{\leftarrow}(A) \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow f(x) \in Y \backslash A \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(Y \backslash A).$$

Pretpostavimo sada da je f neprekidna. Neka je G zatvoren skup u (Y, d'). Tada je $Y \backslash G$ otvoren u (Y, d') pa iz prethodnog teorema slijedi da je $f^{\leftarrow}(Y \backslash G)$ otvoren skup u (X, d). Dakle, $X \backslash f^{\leftarrow}(G)$ je otvoren skup u (X, d) pa slijedi da je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren u (X, d).

Obratno, pretpostavimo da je $f^{\leftarrow}(G)$ zatvoren skup u (X, d) za svaki zatvoren skup G u (Y, d'). Neka je V otvoren skup u (Y, d'). Tada je $Y \backslash V$ zatvoren u (Y, d') pa je $f^{\leftarrow}(Y \backslash V)$ zatvoren u (X, d), tj. $X \backslash f^{\leftarrow}(V)$ je zatvoren u (X, d). Stoga je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren u (X, d). Iz prethodnog teorema slijedi da je f neprekidna. Time je propozicija dokazana. □

Lema 2.3.9. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$ funkcija takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi*

$$d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Tada je f neprekidna funkcija.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\epsilon > 0$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x_0, x) < \epsilon \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna. □

Primjer 2.3.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$ te neka je $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Tada je funkcija p neprekidna s obzirom na metrike d i d'.
Ovo slijedi iz prethodne leme, naime, ako su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ onda je

$$\begin{aligned} d'(p(x), p(y)) &= d'(x_i, y_i) \\ &= |x_i - y_i| \\ &= \sqrt{(x_i - y_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Dakle,

$$d'(p(x), p(y)) \leq d(x, y).$$

Propozicija 2.3.11. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in X$ te neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u x_0 (s obzirom na metrike d i d'). Tada su i funkcije $-f : X \to \mathbb{R}$ i $f + g : X \to \mathbb{R}$ neprekidne u x_0.*

Dokaz. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d'((-f)(x), (-f)(x_0)) = |-f(x) - (-f)(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| = d'(f(x), f(x_0)),$$

dakle,

$$d'((-f)(x), (-f)(x_0)) = d'(f(x), f(x_0)). \tag{2.14}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takva da

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Iz (2.14) slijedi da vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'((-f)(x), (-f)(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, funkcija $-f$ je neprekidna u x_0.

Neka je $x \in X$. Imamo

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|.$$

Dakle,

$$d'((f+g)(x), (f+g)(x_0)) \leq d'(f(x), f(x_0)) + d'(g(x), g(x_0)). \tag{2.15}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Budući da su f i g neprekidne u x_0, postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takve da vrijedi:

$$d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad i \quad d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d'(g(x), g(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.16}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$. Tada iz (2.15) i (2.16) slijedi da je

$$d'((f+g)(x), (f+g)(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle funkcija $f + g$ je neprekidna u x_0. □

Koristeći prethodnu propoziciju indukcijom lako slijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in X$, $k \in \mathbb{N}$ te $f_1, \ldots, f_k : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u x_0. Tada je funkcija $f_1 + \cdots + f_k : X \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

Propozicija 2.3.13. *Neka su (X, d), (Y, d') i (Z, d'') metrički prostori, neka je $x_0 \in X$, neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna u x_0 te $g : Y \to Z$ funkcija neprekidna u $f(x_0)$. Tada je $g \circ f : X \to Z$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je g neprekidna u $f(x_0)$, postoji $\delta_1 > 0$ takva da za sve $y \in Y$ vrijedi

$$d'(y, f(x_0)) < \delta_1 \Rightarrow d''(g(y), g(f(x_0))) < \epsilon. \tag{2.17}$$

Nadalje, budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takva da za sve $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \delta_1. \tag{2.18}$$

Iz (2.17) i (2.18) slijedi da $\forall x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d''(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon.$$

Prema tome, funkcija $g \circ f$ je neprekidna u x_0. □

Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je X skup te neka je $f : X \to \mathbb{R}^n$. Tada postoje i jedinstvene su funkcije $f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ takve da za svaki $x \in X$ vrijedi $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Za funkcije $f_1, \dots, f_n$ kažemo da su ***komponentne*** *funkcije od f.*

Propozicija 2.3.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $f : X \to \mathbb{R}^n$. Neka su $f_1, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od f. Tada je f neprekidna u x_0 (s obzirom na d i euklidsku metriku na $\mathbb{R}^n$) ako i samo ako su $f_1, \dots, f_n$ neprekidne u x_0 (s obzirom na d i euklidsku metriku na $\mathbb{R}$).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$$

pa je

$$p(f(x)) = f_i(x).$$

Prema tome,

$$f_i = p \circ f.$$

Iz primjera 2.3.10 i propozicije 2.3.13 slijedi da je funkcija f_i neprekidna u x_0.

Obratno, pretpostavimo da su funkcije

$$f_1, \dots, f_n$$

neprekidne u x_0. Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned} p(f(x), f(x_0)) &= p((f_1(x), \dots, f_n(x)), (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))) \\ &= \sqrt{(f_1(x) - f_1(x_0))^2 + \cdots + (f_n(x) - f_n(x_0))^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Funkcija f_i je neprekidna u x_0 pa postoji $\delta_i > 0$ takva da

$$d(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Imamo dakle, $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ i vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow (f_1(x) - f_1(x_0))^2 < \tfrac{\epsilon^2}{n} \\ &\vdots \\ d(x, x_0) < \delta_n &\Rightarrow (f_n(x) - f_n(x_0))^2 < \tfrac{\epsilon^2}{n}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Tada iz (2.19) i (2.20) slijedi da za sve $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow p(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, funkcija f je neprekidna u x_0. □

Primjer 2.3.15. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} d(x_0, x) < r &\Leftrightarrow |x_0 - x| < r \\ &\Leftrightarrow x_0 - x < r \ \ i \ \ x - x_0 < r \\ &\Leftrightarrow x_0 - r < x \ \ i \ \ x < x_0 + r \\ &\Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $x_0 = \frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}$. Tada je $x_0 - r = a, x_0 + r = b$. Dakle,

$$\langle a, b\rangle = K(x_0, r).$$

Posebno, $\langle a, b\rangle$ je otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ (slijedi iz propozicije 2.2.18).
Neka je $a \in \mathbb{R}$. Uzmimo $x \in \langle a, \infty\rangle$. Tada je $a < x$ pa je broj $r = x - a$ pozitivan. Imamo $a = x - r$ pa je

$$K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle = \langle a, x + r\rangle \subseteq \langle a, \infty\rangle.$$

Zaključujemo da je $\langle a, \infty\rangle$ otvoren skup. Analogno dobijemo da je $\langle -\infty, a\rangle$ otvoren skup.
S druge strane, skup $\langle -\infty, a]$ nije otvoren jer ne postoji $r > 0$ takav da je $\langle a - r, a + r\rangle \subseteq \langle -\infty, a]$.
Analogno skup $[a, \infty\rangle$ nije otvoren.
Iz činjenice da su $\langle -\infty, a\rangle$ i $\langle a, \infty\rangle$ otvoreni skupovi slijedi da su $\langle -\infty, a]$ i $[a, \infty\rangle$ zatvoreni skupovi.

Primjer 2.3.16. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je*

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1,\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Tvrdimo da je S zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$.
Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Funkcije $p_1, \dots, p_n$ su neprekidne prema primjeru 2.3.10, a funkcija f je neprekidna jer je $f = p_1 + \cdots + p_n$. Iz definicije skupa S slijedi

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 1,\ p_1(x) \geq 0, \dots, p_n(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0\} \cap \cdots \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_n(x) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$S = f^{\leftarrow}(\langle -\infty, 1]) \cap p_1^{\leftarrow}([0, \infty\rangle) \cap \cdots \cap p_n^{\leftarrow}([0, \infty\rangle).$$

Prema propoziciji 2.3.8 *skupovi* $f^{\leftarrow}(\langle -\infty, 1]), p_1^{\leftarrow}([0, \infty\rangle), \ldots, p_n^{\leftarrow}([0, \infty\rangle)$ *su zatvoreni u* $\mathbb{R}^n$. *Stoga je* S *zatvoren skup kao presjek zatvorenih skupova.*

2.4 Kompaktni skupovi

Neka je (X, d) *metrički prostor te neka je* $\mathcal{U}$ *neprazna familija podskupova od* X *takva da je* U *otvoren skup u* (X, d) *za svaki* $U \in \mathcal{U}$.
Neka je $K \subseteq X$ *takav da je* $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. *Tada kažemo da je* $\mathcal{U}$ ***otvoreni pokrivač*** *skupa* K *u metričkom prostoru* (X, d).
Neka je (X, d) *metrički prostor te* $K \subseteq X$. *Kažemo da je* K ***kompaktan*** *skup u* (X, d) *ako za svaki otvoreni pokrivač* $\mathcal{U}$ *od* K *u* (X, d) *postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Primjer 2.4.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* K *konačan podskup od* X. *Tada je* K *kompaktan skup u* (X, d).
Naime, neka je $\mathcal{U}$ *otvoreni pokrivač od* K *u* (X, d). *Ako je* $K = \emptyset$, *onda odaberemo bilo koji* $U \in \mathcal{U}$ *i vrijedi* $K \subseteq U$. *Inače, imamo* $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Za svaki* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *postoji* $U_i \in \mathcal{U}$ *takav da je* $x_i \in U_i$. *Tada je očito* $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Primjer 2.4.2. *Neka je* X *beskonačan skup te neka je* d *diskretna metrika na* X. *Neka je*

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Za svaki $x \in X$ *vrijedi*

$$K\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\}$$

iz čega slijedi da je $\{x\}$ *otvoren skup u* (X, d). *Očito je*

$$X \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Stoga je $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač skupa* X *u* (X, d). *Kada bi* X *bio kompaktan skup u* (X, d), *onda bi postojali* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je* $X \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ *što je nemoguće jer je skup* $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ *konačan (kao konačna unija jednočlanih skupova), a* X *je beskonačan skup. Dakle,* X *nije kompaktan skup u* (X, d). *Uočimo da je* X *zatvoren skup u* (X, d) *te također da je i omeđen* ($X = K(x_0, 2)$, $\forall x_0 \in X$).

Propozicija 2.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen u (X, d).*

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač skupa K u metričkom prostoru (X, d). Budući da je K kompaktan skup, postoje $x_1, \dots, x_n \in X$ i $r_1, \dots, r_n > 0$ takvi da je

$$K \subseteq K(x_1, r_1) \cup \dots \cup K(x_n, r_n).$$

Stoga je K podskup omeđenog skupa (jer je unija konačno mnogo omeđenih skupova omeđen skup) pa je K također omeđen. □

Lema 2.4.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$ takvi da je $x \neq y$. Tada postoji $r > 0$ takav da je*

$$K(x, r) \cap K(y, r) = \emptyset. \tag{2.21}$$

Dokaz. Neka je $r = \frac{d(x,y)}{2}$. Očito je $r > 0$. Tvrdimo da vrijedi (2.21). Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $z \in X$ takav da je $z \in K(x, r)$ i $z \in K(y, r)$. Slijedi $d(x, z) < r$ i $d(y, z) < r$ pa je

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y).$$

Kontradikcija. Prema tome, vrijedi (2.21). □

Teorem 2.4.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren u (X, d).*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$. Dokažimo da je K^c otvoren skup. Fiksirajmo $x \in K^c$. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa prema lemi 2.4.4 postoji $r_y > 0$ takav da je $K(x, r_y) \cap K(y, r_y) = \emptyset$. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(y, r_y) \mid y \in K\}.$$

Očito za svaki $y \in K$ vrijedi $y \in K(y, r_y)$ pa je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K. Budući da je K kompaktan, postoje $y_1, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} K(y_i, r_{y_i}). \tag{2.22}$$

Neka je $\delta = \min\{r_{y_1}, \dots, r_{y_n}\}$. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Iz

$$K(x, \delta) \subseteq K(x, r_{y_i})$$

i

$$K(x, r_{y_i}) \cap K(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$$

slijedi

$$K(x, \delta) \cap K(y_i, r_{y_i}) = \emptyset.$$

Ovo, dakle, vrijedi za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ pa slijedi

$$K(x, \delta) \cap (\bigcup_{1 \le i \le n} K(y_i, r_{y_i})) = \emptyset.$$

Iz ovoga i (2.22) slijedi $K(x, \delta) \cap K = \emptyset$. Stoga je

$$K(x, \delta) \subseteq K^c.$$

Dakle, K^c je otvoren skup, pa je K zatvoren. □

Prethodni teorem i propozicija zajedno daju sljedeću tvrdnju.

Teorem 2.4.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen i zatvoren skup u (X, d).*

Obrat prethodnog teorema općenito ne vrijedi. Naime, u primjeru 2.4.2 smo imali metrički prostor te zatvoren i omeđen skup u njemu koji nije kompaktan. U $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ obrat ipak vrijedi. Navest ćemo taj rezultat bez dokaza (dokaz se može naći u knjizi [3] s popisa literature).

Teorem 2.4.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je K kompaktan u $(\mathbb{R}^n, d)$ ako i samo ako je K zatvoren i omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Propozicija 2.4.8. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike d i d'. Neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je $f(K)$ kompaktan skup u (Y, d').*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od $f(K)$ u (Y, d'). Neka je

$$\mathcal{U} = \{f^{\leftarrow}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi da je V otvoren skup u (Y, d') pa prema propoziciji 2.3.8 imamo da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren skup u (X, d). Dakle, svaki element od $\mathcal{U}$ je otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in K$. Tada je $f(x) \in f(K)$ pa budući da je

$$f(K) \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$$

postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $f(x) \in V$ iz čega slijedi $x \in f^{\leftarrow}(V)$. Stoga je

$$x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Time smo dokazali da je

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Prema tome, $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač od K. Iz činjenice da je K kompaktan slijedi da postoje $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{\leftarrow}(V_1) \cup \cdots \cup f^{\leftarrow}(V_n). \tag{2.23}$$

Neka je $x \in K$. Prema (2.23) imamo $x \in f^{\leftarrow}(V_i)$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Slijedi $f(x) \in V_i$ pa je $f(x) \in V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Iz ovoga zaključujemo da je

$$f(K) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Prema tome, $f(K)$ je kompaktan u (Y, d').

□

Lema 2.4.9. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki x_0. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije $cf, |f| : X \to \mathbb{R}$ neprekidne u x_0.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Za svaki $x \in X$ vrijedi $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$. Stoga, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |f(x_0)|| < \epsilon.$$

Prema tome, funkcija $|f|$ je neprekidna x_0.

Nadalje, postoji $\delta' > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{1 + |c|}.$$

Neka je $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta'$. Vrijedi

$$|cf(x) - cf(x_0)| = |c||f(x) - f(x_0)| \leq |c|\frac{\epsilon}{1 + |c|} < \epsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(x, x_0) < \delta' \Rightarrow |cf(x) - cf(x_0)| < \epsilon$$

pa je funkcija cf neprekidna u x_0. □

Lema 2.4.10. *Neka su $n, N \in \mathbb{N}$. Neka su $g_0, \dots, g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije te neka su $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ funkcija definirana sa $f(x) = g_0(x)v_0 + \dots + g_n(x)v_n$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka su $v_i^1, \dots, v_i^N \in \mathbb{R}$ takvi da je $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^N)$. Nadalje, neka su $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od f. Neka je $j \in \{1, \dots, N\}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f_j(x) = g_0(x)v_0^j + \dots + g_n(x)v_n^j.$$

Iz prethodne leme i korolara 2.3.12 slijedi da je f_j neprekidna funkcija. Dakle, $f_1, \dots, f_N$ su neprekidne funkcije pa iz propozicije 2.3.14 slijedi da je f neprekidna. □

Teorem 2.4.11. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Tada je σ kompaktan skup.*

Dokaz. Neka su $v_0, \dots, v_n$ vrhovi od σ, $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je $n = 0$, onda je $\sigma = \{v_0\}$ pa je očito σ kompaktan skup. Pretpostavimo da je $n \geq 1$. Neka je

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Neka je $x \in S$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Uočimo da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $0 \leq x_i \leq 1$, prema tome, $|x_i| \leq 1$. Imamo

$$d(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n}$$

pa je $x \in K(0, \sqrt{n} + 1)$. Prema tome, $S \subseteq K(0, \sqrt{n} + 1)$ pa je S omeđen u $\mathbb{R}^n$. Prema primjeru 2.3.16 skup S je zatvoren u $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 2.4.7, S je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ sa

$$f(x_1, \dots, x_n) = (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)v_0 + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projekcija na i-tu koordinatu. Neka je $g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$g_0(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n} g_i(x).$$

Iz primjera 2.3.10, propozicije 2.3.11, korolara 2.3.12 te primjera 2.3.4(2.dio) slijedi da su $g_0, \dots, g_n$ neprekidne funkcije. Budući da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ očito vrijedi

$$f(x) = g_0(x)v_0 + \dots + g_n(x)v_n,$$

iz leme 2.4.10 zaključujemo da je f neprekidna funkcija. Tvrdimo da je

$$f(S) = \sigma. \tag{2.24}$$

Neka je $(x_1, \dots, x_n) \in S$. Tada su brojevi $1 - \sum_{i=1}^{n} x_i, x_1, \dots, x_n$ nenegativni i suma im je jednaka 1. Iz ovoga i definicije funkcije f slijedi da je

$$f(x_1, \dots, x_n) \subseteq \sigma.$$

Obratno, neka je $y \in \sigma$. Tada je $y = \sum_{i=0}^{n} x_i v_i$, gdje su $x_0, \dots, x_n \geq 0$ i $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$. Slijedi $1 - \sum_{i=1}^{n} x_i = x_0$ pa je

$$f(x_1, \dots, x_n) = y.$$

Prema tome, vrijedi (2.24). Iz (2.24) i propozicije 2.4.8 slijedi da je σ kompaktan u $\mathbb{R}^N$. □

Korolar 2.4.12. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Tada je σ zatvoren skup u $\mathbb{R}^N$. Nadalje, svaki poliedar u $\mathbb{R}^N$ je zatvoren skup.*

Dokaz. Da je σ zatvoren slijedi iz prethodnog teorema i iz teorema 2.4.5. Ako je P poliedar u $\mathbb{R}^N$, onda je

$$P = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ te gdje su $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ simpleksi u $\mathbb{R}^N$. Općenito, unija konačno mnogo zatvorenih skupova u metričkom prostoru je zatvoren skup što lako slijedi indukcijom iz propozicije 2.2.20. Stoga je P zatvoren skup. □

Korolar 2.4.13. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka je P poliedar u $\mathbb{R}^N$. Tada je P kompaktan skup u $\mathbb{R}^N$.*

Dokaz. Ovo slijedi iz prethodnog korolara, propozicije 2.2.15 i teorema 2.4.7. □

Poglavlje 3

Aproksimacija racionalnim simpleksima

3.1 Hausdorffova udaljenost

Neka je (X, d) *metrički prostor te neka su* S *i* T *neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Neka je* $r > 0$*. Pišemo* $S \approx_r T$ *ako za svaki* $x \in S$ *postoji* $y \in T$ *takav da je* $d(x, y) < r$ *te ako za svaki* $y \in T$ *postoji* $x \in S$ *takav da* $d(y, x) < r$*.*

Propozicija 3.1.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* S *i* T *neprazni omeđeni skupovi u* (X, d)*. Tada postoji* $r > 0$ *takav da je* $S \approx_r T$*.*

Dokaz. Skup $S \cup T$ je omeđen u (X, d). Neka je $r = \operatorname{diam}(S \cup T) + 1$. Neka su $x \in S$ i $y \in T$. Tada je

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}(S \cup T) < \operatorname{diam}(S \cup T) + 1 = r.$$

Dakle, $d(x, y) < r$, za sve $x \in S, y \in T$. Stoga je $S \approx_r T$. □

Propozicija 3.1.2. *Neka je* $N \in \mathbb{N}$*, neka je* d *metrika na* $\mathbb{R}^N$ *inducirana nekom normom* $\|\cdot\|$*. Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$ *te neka su* $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^N$*. Pretpostavimo da je* $r > 0$ *takav da je* $d(a_i, b_i) < r$*, za svaki* $i \in \{0, \dots, n\}$*. Neka je* $S = \operatorname{Conv}\{a_0, \dots, a_n\}$ *i* $T = \operatorname{Conv}\{b_0, \dots, b_n\}$*. Tada je* $S \approx_r T$*.*

Dokaz. Neka je $x \in S$. Tada je prema teoremu 1.2.6 $x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i$, gdje su $t_0, \dots t_n \geq 0$ i $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Neka je $y = \sum_{i=0}^{n} t_i b_i$. Tada je $y \in T$ te imamo:

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} t_i(a_i - b_i) \right\| &\leq \sum_{i=0}^{n} \|t_i(a_i - b_i)\| = \sum_{i=0}^{n} |t_i| \, \|a_i - b_i\| = \sum_{i=0}^{n} t_i d(a_i, b_i) \\ &< \sum_{i=0}^{n} t_i r = r. \end{aligned}$$

Dakle,

$$d(x, y) < r.$$

Posve analogno dobivamo da za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da je $d(y, x) < r$. Prema tome, $S \approx_r T$. □

Neka je (X, d) *metrički prostor te neka su* S *i* T *neprazni omeđeni skupovi u* (X, d). *Definiramo*

$$\rho(S, T) = \inf\{r > 0 \mid S \approx_r T\} \tag{3.1}$$

(uočimo da je broj $\rho(S, T)$ *dobro definiran prema propoziciji* 3.1.1*). Za* $\rho(S, T)$ *kažemo da je* ***Hausdorffova udaljenost*** *skupova* S *i* T *u metričkom prostoru* (X, d).

Korolar 3.1.3. *Neka je* $N \in \mathbb{N}$ *te neka je* d *metrika na* $\mathbb{R}^N$ *inducirana nekom normom. Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$ *te neka su* $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^N$. *Pretpostavimo da je* $r > 0$ *takav da je* $d(a_i, b_i) < r$, *za svaki* $i \in \{0, \ldots, n\}$. *Neka je* $S = \mathrm{Conv}\{a_0, \ldots, a_n\}$ *i* $T = \mathrm{Conv}\{b_0, \ldots, b_n\}$. *Tada je* $\rho(S, T) < r$.

Dokaz. Očito je

$$\max\{d(a_i, b_i) \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} < r.$$

Odaberimo $r' \in \mathbb{R}$ takav da je $\max\{d(a_i, b_i) \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} < r' < r$. Slijedi da je $d(a_i, b_i) < r'$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$. Iz propozicije 3.1.2 slijedi da je $\rho(S, T) \leq r'$. Stoga je $\rho(S, T) < r$. □

Za $n \in \mathbb{N}$ *neka je*

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| + \cdots + |x_n| = 1\}.$$

Propozicija 3.1.4. *Neka su* $n, N \in \mathbb{N}$ *te neka su* $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^N$. *Tada su* $w_1, \ldots, w_n$ *linearno nezavisni vektori ako i samo ako*

$$x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n \neq 0, \tag{3.2}$$

za svaki $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$.

Dokaz. Pretpostavimo da su $w_1, \ldots, w_n$ linearno nezavisni vektori. Ako je $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$, onda postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x_i \neq 0$ pa linearna nezavisnost od $w_1, \ldots, w_n$ povlači da vrijedi (3.2).

Obratno, pretpostavimo da (3.2) vrijedi za svaki $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$. Pretpostavimo da vektori $w_1, \ldots, w_n$ nisu linearno nezavisni. Tada postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0$ i $\alpha_i \neq 0$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Neka je $t = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Očito je $t > 0$. Imamo

$$\left|\frac{\alpha_1}{t}\right| + \cdots + \left|\frac{\alpha_n}{t}\right| = \frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{t} = \frac{t}{t} = 1$$

pa je $(\frac{\alpha_1}{t}, \dots, \frac{\alpha_n}{t}) \in S^n$. Imamo

$$\frac{\alpha_1}{t} w_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{t} w_n = \frac{1}{t}(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) = 0$$

a to je u kontradikciji s pretpostavkom da (3.2) vrijedi za svaki $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$. Dakle, $w_1, \dots, w_n$ su linearno nezavisni vektori. □

Propozicija 3.1.5. *Neka je K neprazan kompaktan skup u $\mathbb{R}$ (tj. u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$). Tada K ima minimum i maksimum.*

Dokaz. Prema teoremu 2.4.7 K je omeđen i zatvoren u $\mathbb{R}$. Slijedi da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da

$$K \subseteq K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

Stoga je $x_0 - r$ donja međa skupa K. Budući da je odozdo omeđen i neprazan, skup K ima infimum, označimo ga s a. Tvrdimo da je $a \in K$. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \notin K$. Tada je $a \in K^c$, a K^c je otvoren skup, stoga postoji $r_a > 0$ takav da $K(a, r_a) \subseteq K^c$. Dakle,

$$\langle a - r_a, a + r_a \rangle \subseteq K^c.$$

Neka je $x \in K$. Tvrdimo da je $a + r_a \leq x$. U suprotnom bi vrijedilo $x < a + r_a$ pa bismo imali $a \leq x < a + r_a$ (jer je a infimum skupa K) iz čega bi slijedilo $x \in \langle a - r_a, a + r_a \rangle$ što bi povlačilo $x \in K^c$, a to je očito nemoguće. Stoga je $a + r_a$ donja međa skupa K. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je a najveća donja međa skupa K. Prema tome, $a \in K$ pa slijedi da je a minimum skupa K. Analogno zaključujemo da K ima maksimum. □

Korolar 3.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna s obzirom na metriku d i euklidsku metriku na $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je K neprazan, kompaktan skup u (X, d). Tada f poprima maksimum i minimum na K, tj. postoje $x_0, x_1 \in K$ takvi da je $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.4.8 skup $f(K)$ je kompaktan u $\mathbb{R}$. Taj skup je očito i neprazan pa prema prethodnoj propoziciji $f(K)$ ima minimum i maksimum. Neka je $a = \min f(K)$ i $b = \max f(K)$. Imamo $a, b \in f(K)$. Tada postoje $x_0, x_1 \in K$ takvi da je $a = f(x_0)$ i $b = f(x_1)$. Za svaki $x \in K$ očito vrijedi $f(x) \in f(K)$ pa je $a \leq f(x) \leq b$, tj. $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. □

Lema 3.1.7. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup S^n je kompaktan u $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka je $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$. Očito je tada $|x_i| \leq 1$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je

$$d((x_1, \dots, x_n), (0, \dots, 0)) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{1 + \dots + 1} = \sqrt{n}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $S^n \subseteq K(0, \sqrt{n} + 1)$. Prema tome, S^n je omeđen skup.

Za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projekcija na i-tu koordinatu. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Funkcija f je neprekidna jer je $f = |p_1| + \cdots + |p_n|$. Vrijedi

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in \{1\}\} = f^{\leftarrow}(\{1\}).$$

Dakle, $S^n = f^{\leftarrow}(\{1\})$, a $\{1\}$ je zatvoren skup u $\mathbb{R}$ (jer je $\{1\} = \langle -\infty, 1] \cap [1, \infty\rangle$). Iz propozicije 2.3.8 slijedi da je S^n zatvoren skup. Iz teorema 2.4.7 slijedi da je S^n kompaktan skup. □

Lema 3.1.8. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Tada je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Imamo

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|$$

pa je

$$\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|.$$

Analogno dobivamo

$$\|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\|.$$

Stoga je

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Uzmimo bilokoji $\delta \in \langle 0, \epsilon\rangle$. Tada očito vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| < \epsilon.$$

Prema tome funkcija $\|\cdot\|$ je neprekidna u točki x_0. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Teorem 3.1.9. *Neka su $n, N \in \mathbb{N}$ te neka su $w_1, \dots, w_n$ linearno nezavisni vektori u $\mathbb{R}^N$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^N$. Tada postoji $r > 0$ sa sljedećim svojstvom:*

ako su $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ takvi da je $d(v_i, w_i) < r$ za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$, onda su $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni vektori.

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ funkcija definirana s

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n.$$

Prema lemi 2.4.10 funkcija f je neprekidna (naime, ako je za $i \in \{1, \dots, n\}$ $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projekcija na i-tu koordinatu, onda je $f(x) = p_1(x)w_1 + \cdots + p_n(x)w_n$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$). Neka je $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$g(x) = \|x\|,$$

pri čemu je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^N$. Kompozicija $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija (g je neprekidna prema lemi 2.4.10). Prema korolaru 3.1.6 funkcija $g \circ f$ poprima minimum na S^n, tj. postoji $a \in S^n$ takav da

$$(g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(x), \ \forall x \in S^n. \tag{3.3}$$

Označimo

$$\epsilon = (g \circ f)(a).$$

Imamo $a = (a_1, \dots, a_n)$ te je $f(a) = a_1 w_1 + \dots, a_n w_n$. Iz propozicije 3.1.4 slijedi da je $f(a) \neq 0$. Stoga je $\|f(a)\| > 0$ tj. $g(f(a)) > 0$. Prema tome, $\epsilon > 0$. Prema (3.3) vrijedi $\epsilon \leq (g \circ f)(x)$ za svaki $x \in S^n$, tj.

$$\epsilon \leq \|x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n\|, \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in S^n.$$

Neka je $r = \frac{\epsilon}{2n}$. Pretpostavimo da su $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ takvi da je

$$d(v_i, w_i) < r \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tvrdimo da su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno. Tada prema propoziciji 3.1.4 postoji $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$ takav da je $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq \|x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n\| \\
&= \|x_1(w_1 - v_1) + \cdots + x_n(w_n - v_n) + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n\| \\
&= \|x_1(w_1 - v_1) + \cdots + x_n(w_n - v_n)\| \\
&\leq |x_1| \, \|(w_1 - v_1)\| + \cdots + |x_n| \, \|(w_n - v_n)\| \\
&\leq \|(w_1 - v_1)\| + \cdots + \|(w_n - v_n)\| \\
&= d(v_1, w_1) + \cdots + d(v_n, w_n) \\
&< r + \cdots + r = nr = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Kontradikcija. Prema tome, $v_1, \dots, v_n$ su linearno nezavisni vektori. □

Korolar 3.1.10. *Neka su $N \in \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ te neka su $a_0, \dots, a_n$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^N$. Tada postoji $r > 0$ sa sljedećim svojstvom:*

ako su $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^N$ takvi da je $d(b_i, a_i) < r$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$, onda su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke.

Dokaz. Neka su $w_1 = a_1 - a_0, \dots, w_n = a_n - a_0$. Tada su $w_1, \dots w_n$ linearno nezavisni vektori. Prema prethodnom teoremu postoji $r > 0$ takav da za sve $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$d(v_i, w_i) < r,\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow v_1, \dots, v_n \text{ linearno nezavisni vektori} \tag{3.4}$$

Pretpostavimo da su $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^N$ takvi da je

$$d(a_i, b_i) < \frac{r}{2},\ \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Tvrdimo da su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^N$. Imamo

$$\begin{aligned} d(b_i - b_0, w_i) &= d(b_i - b_0, a_i - a_0) \\ &= \|b_i - b_0 - a_i + a_0\| \\ &\leq \|b_i - a_i\| + \|a_0 - b_0\| \\ &= d(a_i, b_i) + d(a_0, b_0) \\ &< \frac{2r}{2} = r. \end{aligned}$$

Dakle,

$$d(b_i - b_0, w_i) < r,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Iz implikacije (3.4) možemo zaključiti da su $b_1 - b_0, \dots, b_n - b_0$ linearno nezavisni vektori. Stoga su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke. Dakle, ako su $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^N$ takve da vrijedi $d(a_i, b_i) < \frac{r}{2}$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ tada su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke, čime smo dokazali tvrdnju korolara. □

3.2 Gusti skupovi u metričkim prostorima

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $D \subseteq X$. Kažemo da je D **gust skup** u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in X$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji $y \in D$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$.*

Primjer 3.2.2. *1. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{Q}$ gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Naime neka su $x \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$. Imamo $x < x + \epsilon$ pa postoji $y \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < y < x + \epsilon$ iz čega slijedi $0 < y - x < \epsilon$. Dakle, $d(x, y) < \epsilon$.

2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $\mathbb{Q}^n$ gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$. Dokažimo to.*

   Neka su $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $\epsilon > 0$. Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ prema tvrdnji 1. ovog primjera postoji $y_i \in \mathbb{Q}$ takav da je $|x_i - y_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Neka je $y = (y_1, \dots, y_n)$. Očito je $y \in \mathbb{Q}^n$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

   Dakle, $d(x,y) < \epsilon$.

3.3 Racionalni simpleksi

Definicija 3.3.1. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Kažemo da je σ* ***racionalan simpleks*** *ako su svi njegovi vrhovi elementi od $\mathbb{Q}^N$.*

Teorem 3.3.2. *Neka je σ n-simpleks u $\mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}_0$, $N \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji racionalni n-simpleks τ u $\mathbb{R}^N$ takav da je $\rho(\sigma, \tau) < \epsilon$.*

Dokaz. Neka su $a_0, \dots, a_n$ vrhovi od σ. Prema korolaru 3.1.10 postoji $r > 0$ takav da za sve $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^N$ takve da je $d(a_i, b_i) < r$ za svaki $i = 0, \dots, n$ vrijedi da su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da je $\mathbb{Q}^N$ gust u $(\mathbb{R}^N, d)$, za svaki $i = 0, \dots, n$ postoji $b_i \in \mathbb{Q}^N$ takav da je

$$d(a_i, b_i) < \min\{r, \epsilon\}. \tag{3.5}$$

Slijedi da su $b_0, \dots, b_n$ geometrijski nezavisne točke. Neka je $\tau = \mathrm{Conv}\{b_0, \dots, b_n\}$. Tada je τ racionalan n-simpleks u $\mathbb{R}^N$. Nadalje iz (3.5) i korolara 3.1.3 slijedi da je

$$\rho(\sigma, \tau) < \epsilon.$$

$\square$

Poglavlje 4

Maksimalni simpleksi i dobre točke poliedara

4.1 Ravnina i ortogonalna projekcija

Definicija 4.1.1. *Neka je W potprostor od $\mathbb{R}^N$ te neka je $a \in \mathbb{R}^N$. Neka je $\pi = \{a+x \mid x \in W\}$. Tada za π kažemo da je **ravnina** u $\mathbb{R}^N$, a za W kažemo da je **smjer ravnine** π. Kažemo i da je π ravnina kroz a smjera W.*

Neka su $a_0, \ldots, a_n$ geometrijski nezavisne točke u $\mathbb{R}^N$. Neka je W potprostor od $\mathbb{R}^N$ razapet vektorima $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$. Neka je π ravnina kroz a_0 smjera W. Tada za π kažemo da je ravnina u $\mathbb{R}^N$ razapeta točkama $a_0, \ldots, a_n$.

Uočimo da je

$$\pi = \{a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \cdots + t_n(a_n - a_0) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tvrdimo da je

$$\pi = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \mid t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}. \tag{4.1}$$

Neka je $x = \pi$. Tada je

$$x = a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \cdots + t_n(a_n - a_0),$$

gdje su $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} t_i\right) a_0 + t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n.$$

Neka je

$$t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Tada je

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \ i \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Na isti način vidimo da je svaka točka oblika $x = \sum_{i=0}^{n} t_i$, *gdje su* $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ *i* $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ *element od* π.

Uočimo da (4.1) *povlači sljedeće: ako je* σ *simpleks s vrhovima* $a_0, \dots, a_n$, *onda je* $\sigma \subseteq \pi$.

Napomena 4.1.2. *Neka je* $N \in \mathbb{N}$ *te neka je* W *vektorski potprostor od* $\mathbb{R}^N$ *dimenzije* n. *Tada postoji ortonormirana baza* $(e_1, \dots, e_N)$ *od* $\mathbb{R}^N$ *takva da je* $(e_1, \dots, e_n)$ *ortonormirana baza od* W.

Naime, neka je $(a_1, \dots, a_n)$ *baza od* W. *Tada su* $a_1, \dots, a_n$ *linearno nezavisni vektori u* $\mathbb{R}^N$, *pa ih možemo proširiti do baze za* $\mathbb{R}^N$, *tj. postoje* $a_{n+1}, \dots, a_N \in \mathbb{R}^N$ *takvi da je* $(a_1, \dots, a_N)$ *baza za* $\mathbb{R}^N$. *Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije dobivamo međusobno okomite vektore* $e_1, \dots, e_N$ *norme* 1 *takve da za svaki* $k \in \{1, \dots, N\}$ *vektori* $a_1, \dots, a_k$ *i* $e_1, \dots, e_k$ *razapinju isti potprostor od* $\mathbb{R}^N$. *Prema tome,* $(e_1, \dots, e_N)$ *je ortonormirana baza za* $\mathbb{R}^N$, *a* $(e_1, \dots, e_n)$ *je ortonormirana baza za* W.

Propozicija 4.1.3. *Neka su* $n, N \in \mathbb{N}$. *Neka je* W *vektorski potprostor od* $\mathbb{R}^N$, *dimenzije* n. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$ *te neka je* d' *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^N$. *Tada postoji bijekcija* $f : \mathbb{R}^n \to W$ *takva da je*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza za W. Definiramo $f : \mathbb{R}^n \to W$ sa

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Jasno je da je funkcija f bijekcija. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Imamo

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| \\ &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n - (y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n)\| \\ &= \|(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n\| \\ &= \sqrt{\langle (x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n \mid (x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n \rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Dakle,

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

□

Propozicija 4.1.4. *Neka je $N \in \mathbb{N}$ te neka su $x_0 \in \mathbb{R}^N$ i W potprostor od $\mathbb{R}^N$. Neka je $\pi = x_0 + W$ (tj. $\pi = \{x_0 + w \mid w \in W\}$). Tada je*

$$W = \{x - y \mid x, y \in \pi\}.$$

Dokaz. Neka je $w \in W$. Neka je $x = x_0 + w$ te $y = x_0 + 0$. Očito vrijedi $x, y \in \pi$ i $x - y = w$. Obratno, neka su $x, y \in \pi$. Tada je $x = x_0 + w_1$ i $y = x_0 + w_2$ gdje su $w_1, w_2 \in W$. Tada je $x - y = w_1 - w_2$ pa je $x - y \in W$. □

Neka je π ravnina u $\mathbb{R}^N$. Tada postoji jedinstveni potprostor W od $\mathbb{R}^N$ takav da je W smjer od π. Naime, pretpostavimo da su W i W' smjerovi od π. Tada postoje $x_0, x_0' \in \mathbb{R}^N$ takvi da je

$$\pi = x_0 + W \ \ i \ \ \pi = x_0' + W'.$$

Iz prethodne propozicije slijedi

$$W = \{x - y \mid x, y \in \pi\} \ \ i \ \ W' = \{x - y \mid x, y \in \pi\}$$

pa je $W = W'$.

Definicija 4.1.5. *Neka je π ravnina u $\mathbb{R}^N$ smjera W te neka je $z \in \mathbb{R}^N$. Za točku $z_0 \in \pi$ kažemo da je* ***ortogonalna projekcija*** *točke z na π ako je $z - z_0 \perp w$ za svaki $w \in W$.*

Propozicija 4.1.6. *Neka je π ravnina u $\mathbb{R}^N$ te neka je $z \in \mathbb{R}^N$. Tada postoji jedinstvena ortogonalna projekcija točke z na π.*

Dokaz. Pretpostavimo da su z_0 i z_0' ortogonalne projekcije točke z na ravninu π. Neka je

$$a = z - z_0 \ \text{ i } \ v = z_0 - z_0'.$$

Iz $z_0, z_0' \in \pi$ slijedi $v \in W$. Stoga je

$$a \perp v.$$

Uočimo da je $a + v = z - z_0'$ pa budući da je z_0' ortogonalna projekcija od z na π imamo da je

$$a + v \perp v.$$

Dakle,

$$0 = \langle a + v \mid v \rangle = \langle a \mid v \rangle + \langle v \mid v \rangle = 0 + \langle v \mid v \rangle.$$

Iz čega slijedi da je $\langle v \mid v\rangle = 0$ tj.

$$v = 0.$$

Dakle, $z_0 - z_0' = 0$, tj.

$$z_0 = z_0'.$$

Neka je $(e_1, \dots, e_N)$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^N$ takva da je $(e_1, \dots, e_n)$ baza za W. Tada postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ takve da je

$$z - x_0 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N.$$

Neka je

$$a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

te

$$b = \alpha_{n+1} e_{n+1} + \cdots + \alpha_N e_N.$$

Uočimo da je $a \in W$ te da je $b \perp w$ za svaki $w \in W$. Neka je

$$z_0 = x_0 + a.$$

Očito je $z_0 \in \pi$. Imamo

$$z - z_0 = z - (x_0 + a) = (z - x_0) - a = b.$$

Dakle, $z - z_0 = b$ pa je

$$z - z_0 \perp w$$

za svaki $w \in W$. Prema tome, z_0 je ortogonalna projekcija od z na π. □

4.2 Svojstva maksimalnih simpleksa i dobrih točki poliedara

Definicija 4.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T podskupovi od X takvi da je $S \subseteq T$. Kažemo da je S* ***gust skup*** *u T (u metričkom prostoru (X, d)) ako za svaki $x \in T$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji $y \in S$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$.*

Propozicija 4.2.2. *Neka je σ simpleks u $\mathbb{R}^N$. Tada je $\operatorname{Int}\sigma$ gust skup u σ.*

Dokaz. Očito je $\operatorname{Int}\sigma \subseteq \sigma$. Neka su $a_0, \dots, a_n$ vrhovi od σ. Neka je $x \in \sigma$ te neka je $\epsilon > 0$. Tada je

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i,$$

gdje su $t_0, \dots, t_n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Znamo da postoji $i_0 = \{0, \dots, n\}$ takav da je $t_{i_0} > 0$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\delta < \frac{t_{i_0}}{n}$ i

$$\delta < \frac{\epsilon}{\left\|a_0 + a_1 + \cdots + a_{i_0-1} - na_{i_0} + a_{i_0+1} + \cdots + a_n\right\| + 1}.$$

Za $i \in \{0, \dots, n\}$ definiramo broj s_i na sljedeći način:

$$s_i = \begin{cases} \mathrm{t}_{i_0} - n\delta, & i = i_0 \\ t_i + \delta, & i \neq i_0 \end{cases}$$

Uočimo da su $s_0, \dots, s_n > 0$ i $\sum_{i=0}^{n} s_i = 1$. Neka je

$$y = \sum_{i=0}^{n} s_i a_i.$$

Očito je $y \in \sigma$, a budući da su sve baricentričke koordinate od y pozitivne tada je $y \in \operatorname{Int} \sigma$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|y - x\| \\ &= \left\|\sum_{i=0}^{n} s_i a_i - \sum_{i=0}^{n} t_i a_i\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} (s_i - t_i) a_i\right\| \\ &= \left\|\delta a_0 + \cdots + \delta a_{i_0-1} - n\delta a_{i_0} + \delta a_{i_0+1} + \cdots + \delta a_n\right\| \\ &= \delta \left\|a_0 + \cdots + a_{i_0-1} - na_{i_0} + a_{i_0+1} + \cdots + a_n\right\| \\ &< \delta \left\|a_0 + \cdots + a_{i_0-1} - na_{i_0} + a_{i_0+1} + \cdots + a_n\right\| + 1 < \epsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $d(x, y) < \epsilon$. □

Definicija 4.2.3. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je $x \in |K|$. Za x kažemo da je **dobra točka** u K ako postoji jedinstven $\sigma \in K$ takav da je $x \in \sigma$.*

Definicija 4.2.4. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je $\sigma \in K$. Za σ kažemo da je **maksimalan simpleks** u K ako σ nije prava stranica niti jednog drugog simpleksa iz K.*

Propozicija 4.2.5. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$.*

1. *Ako je σ maksimalan simpleks u K onda je svaka točka iz $\operatorname{Int} \sigma$ dobra u K.*

2. *Ako je x dobra točka u K onda postoji maksimalan simpleks σ u K takav da je $x \in \operatorname{Int} \sigma$.*

Dokaz. 1. Neka je σ maksimalan simpleks u K te neka je $x \in \operatorname{Int}\sigma$. Pretpostavimo da je $\tau \in K$ takav da je $x \in \tau$. Tada postoji stranica t od τ takva da je $x \in \operatorname{Int} t$. Očito je $t \in K$ pa iz $x \in \operatorname{Int}\sigma \cap \operatorname{Int}\tau$ slijedi da je $\sigma = \tau$. Dakle, σ je stranica od τ, no σ nije prava stranica od τ (jer je σ maksimalan simpleks) stoga je $\sigma = \tau$. Dakle, σ je jedinstven simpleks iz K koji sadrži x. Prema tome, x je dobra točka u K.

2. Neka je x dobra točka u K. Znamo da postoji $\sigma \in K$ takav da je $x \in \operatorname{Int}\sigma$. Pretpostavimo da je σ prava stranica od τ za neki $\tau \in K$. Tada je $\sigma \neq \tau$ i $x \in \tau$ što je u kontradikciji s činjenicom da je x dobra točka. Prema tome, σ je maksimalan simpleks u K.

□

Propozicija 4.2.6. *Neka je K simplicijalni kompleks u $\mathbb{R}^N$ te neka je S skup svih točaka koje su dobre u K. Tada je S gust skup u $|K|$.*

Dokaz. Neka su $x \in |K|$ i $\epsilon > 0$. Neka je $\sigma \in K$ simpleks najveće dimenzije takav da je $x \in \sigma$. Tada je σ maksimalan simpleks u K. Naime, kada bi postojao $\tau \in K$ takav da je σ prava stranica od τ, onda bismo imali $\dim\sigma < \dim\tau$ i $x \in \tau$ što je u kontradikciji s odabirom simpleksa σ. Prema propoziciji 4.2.2 postoji $y \in \operatorname{Int}\sigma$ takav da je $d(x, y) < \epsilon$. Iz prethodne propozicije (1.dio) slijedi da je y dobra točka u K, tj. $y \in S$. Time smo dokazali da je S gust skup u $|K|$. □

Bibliografija

[1] J. R. Munkres, Elements of Algebraic Topology Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California, 1984.

[2] I. M. Singer, J. A. Thorpe, Lecture Notes in Elementary Topology and Geometry SpringerVerlag, New York-Heielberg-Berlin, 1967.

[3] W. A. Sutherland, Introduction to metric and topological spaces, Oxford University Press, 1975.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo poliedre i njihova svojstva.

Poliedri su objekti koji su izgrađeni od simpleksa pri čemu se u toj izgradnji simpleksi spajaju na određeni način po svojim stranicama tvoreći tako simplicijalne komplekse. U tu svrhu proučavali smo strukturu i svojstva simpleksa i simplicijalnih kompleksa kako bismo stekli predznanje potrebno za proučavanje poliedara i njihovih svojstva. Govorili smo o aproksimaciji racionalnih simpleksa te o maksimalnim simpleksima i dobrim točkama poliedara.

Poliedri imaju važnu ulogu u topologiji, što je prikazano i u ovom diplomskom radu.

Summary

In this thesis we studied polyhedra and their characteristics.

Polyhedra are objects that are built from the simplexes where in that building simplexes are connected in a certain way on its site, thus creating a simplicial complexes. For this purpose, we studied the structure and properties of the simplexes and simplicial complexes in order to gain knowledge necessary for the study of polyhedra and their characteristics. We have discussed about approximation of rational simplexes, the maximum simplexes and good points of polyhedra, too.

Polyhedra have a significant role in topology, which is shown in this thesis.

Životopis

Zovem se Marijana Bradaš. Rođena sam 19.08.1988. godine u Zagrebu.

Osnovnu školu završila sam u Zagrebu 2003. godine, dok sam srednjoškolsko obrazovanje stekla pohađajući Prvu gimnaziju u Zagrebu, u razdoblju od 2003. do 2007. godine. U ljeto 2007. godine upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, smjer: Matematika. Po završetku preddiplomskog studija 2012. godine, upisala sam diplomski studij, smjer: Matematička statistika.

Tijekom studiranja sudjelovala sam na projektu uređivanja web stranice PMF-a, Matematičkog odsjeka te radila kao demonstrator u praktikumu od 2012.