Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Matija Benčić

Teorija mjerenja s primjenama

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, travanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Naše društvo se svakodnevno susreće s mnogim problemima poput alokacije rijetkih resursa, onečišćenjem zraka, optimalnog korištenja energije, društvenih nejednakosti i drugih. Za ovakve i slične probleme rješenja se dobivaju i sagledavaju kroz društvene znanosti, uz pomoć matematike. Gornji problemi, gledani kroz društvene znanosti, su veoma kompleksni i tu neće biti puno matematike. Ali, ponekad ćemo moći matematički precizno definirati problem, sagledati ga na razne načine i ponuditi neki pristup njegovom rješavanju. Jako bitna stvar u znanosti je mogućnost mjerenja objekata i pojava. To nam pomaže u određivanju rješenja danog problema. Ovaj rad se bavi osnovama teorije mjerenja.

Razlika između razvijene znanosti poput fizike i manje razvijene poput filozofije ili sociologije je stupanj do kojeg možemo mjeriti stvari. Počet ćemo sa već razvijenim mjerenjima mase i temperature koje ćemo dalje proširiti na mjerenja u društvenim znanostima poput preferencija ili zagađenja zraka.

U počecima mjerenja, imamo samo grubu podjelu, npr za mjerenje topline. Možemo samo reći da li je objekt topao ili hladan. No ako želimo ići dalje, u finiju podjelu, možemo danom objektu dodijeliti stupanj topline, i tu već možemo nešto raditi s podacima. Finija podjela kod mjerenja vodi k boljoj formulaciji zakona i formula. Zamislimo zakone fizike samo s grubom podjelom da je jedan objekt topliji od drugoga. Mjerenjem se objektu ili pojavi najčešće dodjeli broj. Ponekad se dodjeljivanjem broja izgube svojstva samog objekta, ali to u ovom radu nećemo razmatrati. Pridruživanje brojeva nam omogućuje da upotrebljavamo matematiku. Pomoću matematičkih alata možemo bolje sagledati neki objekt i opisati mu općenite atribute.
Razlikujemo 2 vrste mjerenja:

- fundamentalna mjerenja - javljaju se u počecima razvoja znanosti; masa, temperatura, volumen...
- izvedena mjerenja - nove mjere se javljaju u terminima starih mjera; gustoća = masa / volumen

Takav pristup zadržavamo i u ovom radu.
Mi se nećemo baviti detaljima kako nešto izmjeriti, aparaturom i slično, već kako dobro definirati mjerenje, pridruživanje brojeva promatranom objektu ili pojavi. U fizici već imamo dobro postavljenje temelje teorije mjerenja. Ali s druge strane, u društvenim znanostima poput psihologije, znanostima ponašanja, sociologije i sličnih nemamo. Postavljanje dobrih temelja za mjerenje i razumijevanje problema mjerenja bi moglo imati veliku ulogu u budućem razvoju takvih znanosti. Naprimjer, preferencije možemo izmjeriti na konzistentan način ako su zadovoljena 2 aksioma:

- ako a preferirašs vise od b , ne preferiraš b vise od a
- ako ne preferiraš a vise od b i ako ne preferiraš b vise od c, tada ne preferiraš a vise od c

Dva su osnovna problema u teoriji mjerenja, problem reprezentacije i problem jedinstvenosti. Problem kako naći uvjete pod kojima se mjerenje može obaviti nazivamo problem reprezentacije. Posebna pozornost biti će posvećena ekstenzivnom mjerenju i Hölderovom teoremu. Atributi koji imaju svojstvo aditivnosti, poput mase objekta, tradicionalno se zovu ekstenzivni. Zbog toga se problem nalaženja dovoljnih uvjeta za mogućnost obavljanja mjerenja naziva problem ekstenzivnog mjerenja. Kad je mjerenje moguće, posvetit ćemo se problemu jedinstvenosti. Do koje mjere je naše mjerenje jedinstveno te kakva nam je skala na kojoj iskazujemo rezultat mjerenja? To će biti bitno zbog određivanja koje manipulacije su dozvoljene na dobivenim mjerenjima. Ima li smisla reći da je jedna skupina ljudi duplo pametnija od druge skupine ljudi?

2 Ponavljanje definicija

U ovom poglavlju ponoviti ćemo teoriju koja se koristi u radu, govoriti ćemo o relacijama i relacijskim sustavima, te o funkcijama i homomorfizmima.

2.1 Relacije

Definicija 2.1. *Neka su* $A_1, A_2, ..., A_n$ *skupovi. Kartezijev produkt skupova* $A_1, A_2, ..., A_n$*, u oznaci*

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

je skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *takvih da je* $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$

Definicija 2.2. *Neka su* A *i* B *skupovi. Kartezijev produkt skupova* A *i* B*, pišemo*

$$A \times B$$

je skup svih uređenih parova (a, b) *takvih da je* $a \in A$ *i* $b \in B$*. Oznaka je* $A \times B$*.*

Definicija 2.3. *Relacija* R *reda n je neprazan podskup Kartezijevog produkta skupova* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$*,* $R \subseteq A^n$

Mi ćemo koristiti binarne relacije.

Definicija 2.4. *Binarna relacija* R *na* A *je podskup Kartezijevog produkta* A *sa* A*,*

$$R \subseteq A \times A$$

Pogledajmo primjer skupa i relacija definiranih na tom skupu.

Primjer 2.5. Neka je zadan skup $A = \{1, 2, 3\}$. Tada je Kartezijev produkt skupova

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Definiramo relaciju R na $A \times A$

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$$

Definiramo relaciju M na $A \times A$

$$M = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

Relacija M je relacija *manje od* na skupu A. Uređeni par (a, b) nalazi se u relaciji M ako i samo ako vrijedi $a < b$. Slično, možemo definirati relaciju J na $A \times A$

$$J = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

Relacija J je relacija *jednako* na skupu A. Uređeni par (a, b) nalazi se u relaciji J ako i samo ako vrijedi $a = b$.

Skup A ne mora nužno biti skup brojeva.

Primjer 2.6. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Tada je $R = \{(a, b), (c, d)\}$ također primjer relacije na skupu A.

Definicija 2.7. *Relacija $\circ$ je operacija na A, $\circ \subseteq A^3$ ako vrijedi:*

$$(\forall a, b \in A)(\exists c \in A) \left[(a, b, c) \in \circ\right]$$

$$(\forall a, b, c, d \in A) \left[((a, b, c) \in \circ \;\; \& \;\; (a, b, d) \in \circ \implies (c = d)\right]$$

Primjer 2.8. Neka je $\circ$ operacija na realnim brojevima definirana sa

$$(a, b, c) \in \circ \iff a + b = c$$

Tada je $\circ$ operacija zbrajanja. $(1, 2, 3) \in \circ$ i $(2, 3, 5) \in \circ$, ali $(1, 2, 4) \notin \circ$

Primjer 2.9. Neka je $A = \{1, 2\}$ i definiramo

$$R = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,2)\}$$

$$S = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,1,2)\}$$

Tada je relacija R operacija koja pridružuje brojevima a i b 1 ako je $a + b$ neparan i 2 ako je $a + b$ paran. Relacija S nije operacija jer se u relaciji S nalazi $(2, 1, 1)$ i $(2, 1, 2)$.

2.2 Relacija ekvivalencije

Definicija 2.10. *Relaciju R koja je*

$$\begin{array}{ll} \text{refleksivna,} & aRa, \;\; \forall a \in A \\ \text{simetrična,} & aRb \implies bRa, \;\; \forall a, b \in A \\ \text{tranzitivna,} & aRb \,\&\, bRc \implies aRc, \;\; \forall a, b, c \in A \end{array}$$

nazivamo relacija ekvivalencije.

Neka je A skup i E relacija ekvivalencije na skupu A. Relacija E dijeli skup A na klase ekvivalencije $a^* = \{b \in A, aEb\}$. Uzmimo da je skup $A = \{0, 1, 2, 3, ..., 19, 20\}$ i relacija E zadana sa

$$aEb \iff a \cong b mod 3$$

Tada imamo klase ekvivalencije

$$\begin{aligned} 0^* &= \{0, 3, 6, ..., 18\} \\ 1^* &= \{1, 4, 7, ..., 19\} \\ 2^* &= \{2, 5, 8, ..., 20\} \end{aligned}$$

Najvažnije svojstvo relacije ekvivalencija dano je u sljedećem teoremu kojega navodimo bez dokaza:

Teorem 2.11. *Neka je A skup i E relacije ekvivalencije na A. Tada:*
(a) Svake dvije klase ekvivalencije su ili jednake ili disjunktne
(b) Unija svih različitih klasa ekvivalencije daje particiju skupa A

Kada imamo relaciju ekvivalencije na nekom skupu, tada je ekonomičnije raditi sa klasama ekvivalencije od A umjesto sa elementima od A.

2.3 Relacijski sustavi

Definicija 2.12. *Relacijski sustav je uređena (m+n+1)-torka*

$$\mathfrak{A} = (A, R_1, R_2, .., R_m, \circ_1, \circ_2, .., \circ_n)$$

gdje je A skup, R_1,...,R_m relacije na A i $\circ_1$,...,$\circ_n$ operacije na A.

Primjer 2.13. Neka je zadan skup $A = \{1, 2, 3\}$ i relacija $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Tada je uređeni par (A, R) jedan relacijski sustav.

Primjer 2.14. Neka je zadan skup $A = Re$, relacija manje "$<$" i operacija zbrajanja "$+$". Tada je uređena trojka $(A, <, +)$ jedan relacijski sustav.

2.4 Funkcije

Definicija 2.15. *Neka su A i B skupovi. Funkcija f je preslikavanje iz skupa A u skup B, $f : A \to B$ pri čemu se svakom elementu skupa A pridruži jedinstven element iz skupa B*

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B) \left[f(x) = y\right]$$

Skup A zovemo domena funkcije, a skup B zovemo kodomena funkcije.

Primjer 2.16. Neka su zadani skupovi A={1,2,3} i B={1,2,3}. Tada je preslikavanje $R \subset A \times B$, R={(1,2),(2,3),(1,3)} funkcija, dok preslikavanje S={(1,2),(2,3)} nije, jer nismo preslikali sve elemente iz domene (skupa A). Preslikavanje T={(2,3),(1,3),(3,2)} također nije funkcija jer se dva elementa iz domene preslikaju u isti element kodomene: $1 \to 3$ i $2 \to 3$.

2.5 Homomorfizmi

Definicija 2.17. *Neka su* $\mathfrak{A} = (A, R_1, \circ_1)$ *i* $\mathfrak{B} = (B, R_2, \circ_2)$ *dva relacijska sustava. Preslikavanje* $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *je homomorfizam, ako čuva strukturu, tj. ako vrijedi*

$$xR_1y \iff f(x)\, R_2\, f(y),\ \forall x, y \in A$$

$$f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y),\ \forall x, y \in A$$

Homomorfizam koji je još i injekcija naziva se monomorfizam.
Homomorfizam koji je još i surjekcija zovemo epimorfizam.
Homomorfizam koji je i monomorfizam i epimorfizam zovemo izomorfizam.

Primjer 2.18. Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7\}$ skupovi u relacijskim sustavima $\mathfrak{A} = (A, <)$ i $\mathfrak{B} = (B, <)$. Za funkciju $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, definiranu sa $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 6$ vrijedi:

$$1 < 2 \iff f(1) = 4 < 5 = f(2)$$

$$1 < 3 \iff f(1) = 4 < 6 = f(3)$$

$$2 < 3 \iff f(2) = 5 < 6 = f(3)$$

Dakle, f je homomorfizam.

Primjer 2.19. Neka su $\mathfrak{A} = (Re, <, +)$ i $\mathfrak{B} = (Re^+, <, \times)$ dva relacijska sustava. Za funkciju $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, definiranu sa $f(x) = e^x$ vrijedi sljedeće:

$$a < b \iff e^a < e^b$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Svaki element iz domene je preslikan u kodomenu i svaki element kodomene je pogođen. Dakle, f je izomorfizam između $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

3 Uvod u teoriju mjerenja

U ovom poglavlju, upoznati ćemo se sa osnovama teorije mjerenja. Postoje dvije osnovne vrste mjerenja, fundamentalno mjerenje i izvedeno mjerenje. Fundamentalno mjerenje se pojavljuje u ranim fazama znanstvenog istraživanja, dok se nove mjere tek uvode, a izvedena mjerenja se javljaju kasnije, dok se nove mjere definiraju pomoću otprije definiranih mjera. Rad je podjeljen u tri dijela, prvi dio govori o osnovama fundamentalnog mjerenja, drugi dio o osnovama izvedenog mjerenja, a treći dio o ekstenzivnom mjerenju. U prva dva dijela govoriti ćemo o osnovnim problemima teorije mjerenja, problemu reprezentacije i problemu jedinstvenosti. Definirati ćemo regularnosti skale, tipove skale, te na kraju značajnost i beznačajnost izjava. U trećem dijelu ćemo obraditi ekstenzivno mjerenje, posebno dokaz Hölderovog teorema.

3.1 Fundamentalna mjerenja

3.1.1 Uvod u fundamentalno mjerenje

Počnimo sa definiranjem mjerenja. Ne postoji jedinstvena definicija fundamentalnog mjerenja, ali mi ćemo krenuti putem Robertsa. On navodi nekoliko definicija [Roberts, str. 49] "Mjerenje veličina je, u najširem smislu, svaka metoda kojom se na jedinstven način dodijeljuje veza između veličina i brojeva, prirodnih, racionalnih ili realnih, ovisno o potrebi." i "Mjerenje je pridruživanje brojeva objektima ili pojavama u skladu sa nekim pravilima." Vodeći se ovim definicijama, možemo reći sljedeće: Mjerenje je dodijeljivanje brojeva koji odgovaraju, predstavljaju ili čuvaju promatrane relacije među objektima."

Za uvod dajemo tri primjera mjerenja, mjerenje topline, mjerenje mase i mjerenje korisnosti. Oni će nam biti od velike važnosti i koristiti ćemo ih kroz rad.

Primjer 3.1. Pretpostavimo da je A skup objekata, te da imamo binarnu relaciju W na A. Reći ćemo da je aWb ako procijenimo da je a topliji od b. Tada želimo dodijeliti broj $f(a)$ svakom $a \in A$ tako da za sve $a, b \in A$ vrijedi

$$aWb \iff f(a) > f(b) \tag{1}$$

Primjer 3.2. Pretpostavimo da je A skup objekata, te da imamo binarnu relaciju H na A. Reći ćemo da je aHb ako procjenimo da je a teži od b. Tada želimo dodijeliti broj $f(a)$ svakom $a \in A$ tako da za sve $a, b \in A$ vrijedi

$$aHb \iff f(a) > f(b) \tag{2}$$

Za mjerenje mase želimo i više od relacije H. Želimo da "mjera" bude i "aditivna" u smislu da je masa kombinacije elemenata, zapravo suma njihovih masa. Formalno, govorimo o binarnoj operaciji $\circ$ na A kojom dobivamo novi objekat $A \ni c = a \circ b$ tako da stavimo a na b. Želimo da funkcija f na A zadovoljava ne samo uvjet (2) , već i da čuva binarnu relaciju $\circ$ tako da

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b) \tag{3}$$

Primjer 3.3. Treći primjer uzimamo iz društvenih znanosti. Mjerenje preferencije je pridruživanje brojeva na način da se očuva relacija preferencije. Pretpostavimo da je A skup objekata, te da imamo binarnu relaciju P na A. Reći ćemo da je aPb ako a preferiramo strogo više od b. Tada želimo dodijeliti broj $u(a)$ svakom $a \in A$ tako da za sve $a, b \in A$ vrijedi

$$aPb \iff u(a) > u(b) \tag{4}$$

Funkciju u nazivamo ordinalnom funkcijom korisnosti.

Uvođenjem relacijskih sustava, olakšavamo si matematički zapis gornjih formula i uvjeta. Prisjetimo se definicije relacijskih sustava 2.12. Prema definiciji, u gornjim primjerima imamo relacijski sustav $\mathfrak{A} = (A, W)$ koji se preslikava u relacijski sustav $\mathfrak{B} = (Re, >)$ pritom čuvajući relaciju H, te relacijski sustav $\mathfrak{A} = (A, H, \circ)$ koji se preslikava u relacijski sustav $\mathfrak{B} = (Re, >, +)$ pritom čuvajući relaciju W i operaciju $\circ$.

Preslikavanja koja čuvaju relacije i operacije nazivamo homomorfizmi. Prema definiciji 2.17, f je homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ ako f zadovoljava jednadžbu (1). Također, f je homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ ako f zadovoljava jednadžbe (2) i (3).

Može postojati više homomorfizama iz jednog relacijskog sustava u drugi. Ilustrirajmo to na sljedećem primjeru.

Primjer 3.4. Neka je $A = \{a, b, c\}$ i definiramo relaciju R na A kao $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$. Tada funkcija f definirana sa $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, i $f(c) = 1$ definira homomorfizam sa relacijskog sustava $\mathfrak{A} = (A, R)$ u numerički relacijski sustav $\mathfrak{B} = (Re, >)$. Ali, također i funkcija g definirana sa $g(a) = 6$, $g(b) = 5$, i $g(c) = 4$ definira homomorfizam sa relacijskog sustava $\mathfrak{A} = (A, R)$ u numerički relacijski sustav $\mathfrak{B} = (Re, >)$.

3.1.2 Fundamentalno mjerenje - osnovni problemi

Kažemo da je fundamentalno mjerenje učinjeno ako možemo dodijeliti homomorfizam iz promatranog relacijskog sustava $\mathfrak{A}$ u neki numerički relacijski sustav $\mathfrak{B}$. Dosad smo imali 3 primjera mjerenja, mjerenje temperature, mjerenje mase i mjerenje preferencija. Sva 3 mjerenja su se provodila nad promatranim skupom A u skup realnih brojeva Re.

Ovdje se postavlja pitanje u koji numerički sustav ćemo napraviti preslikavanje? Možemo uzeti interval, samo racionalne ili samo cijele brojeve. Odabir numeričkog sustava će ovisiti o tome što želimo dobiti iz mjerenja. Kada uspostavimo homomorfizam, kažemo da homomofizam između dva relacijska sustava daje reprezentaciju, te uređenu trojku $(\mathfrak{A},\mathfrak{B},f)$ nazivamo skala. U nastavku, kada kažemo skala, misliti ćemo na homomorfizam f.

Prema Robertsu, prvi osnovni problem teorije mjerenja je problem reprezentacije: Za dani numerički relacijski sustav $\mathfrak{B}$ nađi dovoljne (i nužne) uvjete pod kojima za promatrani relacijski sustav $\mathfrak{A}$ postoji homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$. Ti uvjeti se nazivaju axiomima reprezentacije, a teoremi koji ih izriču nazivaju se teoremi reprezentacije. Na axiome reprezentacije možemo gledati kao na skup pravila pod kojima se objekti u promatranom sustavu mogu složiti na određeni način.

Drugi osnovni problem teorije mjerenja je problem jedinstvenosti homomorfizma f. Na primjeru 3.4 smo vidjeli da može postojati više homomorfizama iz jednog relacijskog sustava u drugi. To pitanje će kasnije doći do izražaja dok ćemo govoriti o tipu skale. Dok uspostavimo skalu, postavlja se pitanje koje matematičke manipulacije smijemo vršiti nad brojevima proizašlim iz skale? Jer mi uvijek možemo raditi matematičke operacije nad brojevima (zbrajati ih, oduzimati ih, logaritmirati,...). Ali, ključno pitanje je, nakon što uradimo takve operacije, možemo li i dalje zaključiti istinu (ili bolje, značajnost) izjave o objektima nad kojima vršimo mjerenje. Kasnije ćemo uvesti pojam značajne i beznačajne izjave.

3.1.3 Fundamentalno mjerenje - Regularne skale

Promotrimo sljedeće dvije izjave:

- Limenka kukuruza je 2 puta teža od limenke soka.
- Temperatura limenke soka je 2 puta veća nego temperatura limenke kukuruza.

Prva izjava se čini dobrom, jer neovisno o skali (kilogrami, grami,...), limenka kukuruza će uvijek težiti 2 puta više nego limenka soka. Druga izjava je problematična. Ako je duplo više Celzijusa, to ne znači da je duplo više Fahrenheita, ili duplo više Kelvina. Vidjeli smo da homomorfizam ne mora biti jedinstven, pa zato moramo navesti o kojem homomorfizmu se radi u izjavi, ili istinitost izjave mora biti neovisna o izboru homomorfizma. Izjava koja ima to svojstvo naziva se značajna izjava. Značajnost izjave proučavat ćemo preko dopustivih transformacija skale.

Definicija 3.5. *Neka je trojka ($\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,f) skala. Neka je ϕ funkcija koja preslikava skup*

$$f(A) = \{f(a), a \in A\}$$

u B. Tada je kompozicija $\phi \circ f$ funkcija sa A u B. Ako je $\phi \circ f$ homomorfizam sa $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, tada ϕ zovemo dopustivom transformacijom skale.

Primjer 3.6. Uzmimo $\mathfrak{A} = (N, >)$ i $\mathfrak{B} = (Re, >)$ i $f : N \to$ Re definirana sa $f(x) = 3x$. Tada je f homomorfizam sa $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$. Ako stavimo $\phi(x) = x + 2$, tada je $\phi \circ f$ također homomorfizam sa $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ jer vrijedi $(\phi \circ f)(x) = 3x + 2$ i vrijedi

$$x > y \iff 3x + 2 > 3y + 2$$

Zato je ϕ prema gornjoj definiciji, dopustiva transformacija skale.

Definicija 3.7. *Reći ćemo da je izjava koja uključuje numeričke skale značajna ako se njezina istinitost ne mijenja dok skalu f zamjenimo prihvatljivom skalom g.*

Neka je f temperaturna skala u Celzijusima. Transformacijom

$$1.8x + 32$$

dobivamo skalu u Fahrenheitima. To nam daje motiv za sljedeće.

Neka je ($\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,f) skala.

Definicija 3.8. *Ako za svaku skalu ($\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,g) postoji dopustiva transformacija $\phi : f(A) \to B$ takva da je $g = \phi \circ f$, tada skalu $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ zovemo regularna skala. Skale koje nisu regularne, zovu se iregularne skale.*
Ako je svaki homomorfizam f sa $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ regularan, kažemo da je reprezentacija $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ regularna.

Za regularne reprezentacije značajnost izjave ćemo definirati na jednostavniji način.

Definicija 3.9. *Izjava sa numeričkom skalom je značajna ako i samo ako se njezina istinitost ne mijenja pod dopustivim transformacijama skale.*

Primjer 3.10. Dajmo primjer iregularne skale. Definiramo binarnu relaciju $>_1$ na Re sa

$$x >_1 y \iff x > y + 1$$

Neka je zadan skup $A = \{a, b, c\}$ i relacija $R = \{(a, b), (a, c)\}$. Neka su zadane funkcije f i g na sljedeći način:

$$f(a) = 2, f(b) = 0, f(c) = 0$$

$$g(a) = 2, g(b) = 0.5, g(c) = 0$$

f i g su homomorfizmi sa $\mathfrak{A} = (A, R)$ u numerički relacijski sustav $\mathfrak{B} = (Re, >)$. Ali ne postoji funkcija $\phi : f(A) \to Re$ takva da vrijedi $g = \phi \circ f$. Uvjerimo se:

$$0.1 = g(b) = (\phi \circ f)(b) = \phi(0)$$
$$0 = g(c) = (\phi \circ f)(c) = \phi(0)$$

Ovaj primjer nas navodi na sljedeći teorem:

Teorem 3.11. *(Roberts, str. 60) Skala ($\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,f) je regularna ako i samo ako za svaki drugi homomorfizam g iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, i za sve $a, b \in A$ vrijedi*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g(a) = g(b)$$

Dokaz. Ako je f regularna skala, tada postoji funkcija ϕ takva da je $g = \phi \circ f$. Tada vrijedi

$$g(a) = \phi[f(a)] = \phi[f(b)] = g(b)$$

Obratno, definiramo ϕ kao $\phi[f(a)] = g(a)$. Pošto vrijedi implikacija

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g(a) = g(b)$$

ϕ je dobro definirana. Također, vrijedi i $g = \phi \circ f$, pa iz definicije slijedi da je f regularna. □

Korolar 3.12. *Svaki izomorfizam je regularan.*

Korolar 3.12 daje način kako da dođemo do regularne skale. Ideja je da promatrani relacijski sustav $\mathfrak{A} = (A, R, \circ)$ reduciramo na ireducibilan relacijski sustav $\mathfrak{A}^* = (A^*, R^*, \circ^*)$ koji se sastoji od klasa ekvivalencija i na njima definiranih relacija i operacija, ali tako da svaka klasa ekvivalencije ima samo jedan element. Preciznije, neka je $\mathfrak{A} = (A, R, \circ)$ reacijski sustav i E relacija savršenih supstituta, tj. vrijedi $aEb \iff aRb$. Tada ako

$$(aEa' \ \& \ bEb') \implies (a \circ a')E(b \circ b')$$

kažemo da je $\mathfrak{A}$ reducibilan i definiramo redukciju $\mathfrak{A}^*$.
Dobro je napomenuti da ako je $\mathfrak{A}$ ireducibilan, tada je $\mathfrak{A}$ izomorfan sa $\mathfrak{A}^*$

preko izomorfizma $f(a) = a^*$. Također, ako je f homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, tada $f(a) = f(b)$ implicira aEb. Zato, ako je $\mathfrak{A}$ ireducibilan, svaki homomorfizam f iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ je i izomorfizam zbog

$$f(a) = f(b) \implies aEb \implies a = b$$

Konačno, pretpostavimo da postoji homomorfizam f iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, te da je $\mathfrak{A}$ reducibilan. Tada možemo pronaći homomorfizam F sa $\mathfrak{A}^*$ u $\mathfrak{B}$ ako stavimo $F(a^*) = f(a)$ za nekog reprezentanta a iz a^*.
Ako je $\mathfrak{A}$ ireducibilan, tada je svaki homomorfizam iz $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$ izomorfizam, pa je regularan po korolaru 3.12. Ako $\mathfrak{A}$ nije ireducibilan, ali je homomorfan sa $\mathfrak{B}$, tada je $\mathfrak{A}^*$ homomorfan sa $\mathfrak{B}$. Budući da uvijek možemo postići ireducibilnost od $\mathfrak{A}^*$, svaki homomorfizam iz $\mathfrak{A}^*$ u $\mathfrak{B}$ je izomorfizam, pa je reprezentacija $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}$ regularna. Zato, da bi osigurali regularnost skale, dovoljno je reducirati relacijski sustav na način da "poništimo" savršene supstitute. Ilustrirajmo to na primjeru.

Primjer 3.13. Neka je $A = \{0, 1, 2, ..., 25\}$ i definiramo relaciju R i operaciju $\circ$ na A na sljedeći način:

$$aRb \iff a \, mod 3 > b \, mod 3$$

$$c = a \circ b \iff \left[c \cong a + b \, mod 3 \;\&\; c \in \{0, 1, 2\}\right]$$

Tada je $\mathfrak{A} = (A, R, \circ)$ reducibilan. Ako je $\circ'$ zbrajanje $mod 3$ na $\{0, 1, 2\}$, tada je $\mathfrak{A}$ homomorfan sa $\mathfrak{B} = (\{0, 1, 2, \}, >, \circ')$ preko homomorfizma $f(a) = a \, mod 3$. Štoviše, $\mathfrak{A}^*$ je izomorfan sa $\mathfrak{B}$ preko funkcije $F(0^*) = f(0) = 0$, $F(1^*) = f(1) = 1$, $F(2^*) = f(2) = 2$. Dakle, skala $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}, \mathfrak{F})$ je regularna.

U ovom radu ćemo se baviti samo regularnim reprezentacijama. Za regularne reprezentacije postoji razvijena teorija jedinstvenosti, značajnosti i tipova skale.

3.1.4 Fundamentalno mjerenje - Tipovi skale

Za regularne reprezentacije, klasa dopustivih transformacija određuje jedinstvenost i tip skale. Roberts je skale podijelio na 5 tipova skala [Roberts, str. 64]. U tablici vidimo tih 5 tipova skala zajedno sa dopustivim transformacijama koje ih određuju.

Tablica 1, tipovi skale i dopustive transformacije.

Klasa dopustivih transformacija	Tip skale	Primjer skale
$\phi(x) = x$ Identiteta	Apsolutna skala	Brojanje
$\phi(x) = \alpha x$, $\alpha > 0$ Transformacija sličnosti	Omjerna skala	Masa, Temperatura u Kelvinima, Glasnoća
$\phi(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$ Pozitivna linearna transformacija	Intervalna skala	Temperatura u Celzijusima i Fahrenheitima
$x > y \iff \phi(x) > \phi(y)$ Striktno rastuća funkcija	Ordinalna skala	Kakvoća zraka, Tvrdoća
Bijekcija	Nominalna skala	Brojevi na uniformama, alternativni planovi

Tablica 1: Tipovi skale

Najjednostavniji primjer skale je apsolutna skala, gdje je jedina dopustiva transformacija identiteta. Brojanje je primjer apsolutne skale. Brojati možemo samo na jedan način.

Sljedeći primjer skale je omjerna skala. Omjerna skala je tip skale gdje su dopustive transformacije množenja sa $\alpha > 0$.

$$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$$

Masa je primjer omjerne skale. Možemo fiksirati 0 i mijenjati jedinicu mase množeći sa pozitivnom konstantom α, recimo iz kilograma u gram množeći sa 1000. Temperatura u Kelvinima je isto omjerna skala jer temperaturu mjerimo od 0 prema pozitivnim brojevima.

Treći primjer skale je intervalna skala. Dopustive transformacije su pozitivne linearne transformacije

$$\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$$

Primjer takve skale je temperaturna skala u Celzijusima ili Fahrenheitima. Ishodište "0" mijenjamo sa parametrom β, a jedinicu skale za koeficijentom

α. Mijenjanjem koeficijenata α i β možemo se prebaciti iz Fahrenheita u Celzijuse. Uzmemo α = 5/9, β = -160/9.

Četvrta po jačini je ordinalna skala. Klasa dopustivih transformacija za ordinalne skale su sve strogo rastuće funkcije.

$$x > y \iff \phi(x) > \phi(y)$$

Ordinalne skale se razlikuju samo po svojem redu. Primjer takve skale bi bila kakvoća zraka. Možemo dodijeliti broj 0 za zdravi zrak, broj 1 za dovoljno čist, broj 2 za onečišćen zrak i 3 za nezdravi zrak. Na isti način smo mogli dodijeliti brojeve 2,4,8,16 ili 0,e,π,5.

Zadnja i najslabija skala je nominalna skala. Klasa dopustivih transformacija je svaka bijekcija. Brojevi na dresovima nogometaša bi bio primjer nominalne skale. Sami brojevi na dresovima ne znače ništa, bitna je samo identifikacija igrača u timu.

Skale su poredane od "najjače" ka "najslabijoj" prema informacijama koje sadrže u sebi. To znači da omjerna skala sadrži više informacija nego ordinalna ili nominalna skala. Prema Roberstu, cilj mjerenja je dobiti najjaču moguću skalu. [Roberts, str. 66] "Rani ljudi su vjerojatno razlikovali samo toplo od hladnog, i time su koristili nominalnu skalu. Kasnije, pojavili su se stupnjevi topline koji bi odgovarali različitim prirodnim pojavama. To bi bila ordinalna skala. Izumom termometra počela se koristiti intervalna skala. Napokon, napretkom znanosti i pojavom termodinamike razvijena je omjerna skala temperature, Kelvinova skala."

Spomenimo još jednu vrstu skale koja se koristi u društvenim znanostima, log-intervalnu skalu. Klasa dopustivih transformacija log-intervalne skale je oblika

$$\phi(x) = \alpha x^{\beta}, \alpha, \beta > 0$$

Koristi se u psihologiji kao veza između fizičkih veličina, npr intenzitet zvuka, i psiholoških veličina poput poimanja glasnoće zvuka.

Pokažimo na primjeru kako funkcionira tip skale. Neka je skup $A = \{a, b, c\}$ i neka je zadana relacija R na skupu A sa $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$. Tada je relacijski sustav (A, R) homomorfan relacijskom sustavu $(Re, >)$. Jedan homomorfizam bio bi $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$. Vidimo da je f izomorfizam, pa prema koloraru 3.12, skala $((A, R), (Re, >), f)$ je regularna. Pogledajmo klasu dopustivih transformacija $\phi : f(A) \to Re$. Transformacija

ϕ je dopustiva ako i samo ako:

$$(\phi \circ f)(a) > (\phi \circ f)(b)$$
$$(\phi \circ f)(b) > (\phi \circ f)(c)$$
$$(\phi \circ f)(a) > (\phi \circ f)(c)$$

to jest,

$$\phi(3) > \phi(2)$$
$$\phi(2) > \phi(1)$$
$$\phi(3) > \phi(1)$$

Zato je ϕ dopustiva transofrmacija ako i samo ako je ϕ strogo rastuća funkcija na $f(A)$. Zaključujemo da je f ordinalna skala.

Do problema sa tipovima skale dolazi ako nemamo regularnu reprezentaciju $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Tada se može pojaviti slučaj da imamo 2 homomorfizma, f i g, ali da je f jedan tip skale a g drugi tip skale. Ali ako se radi o regularnoj reprezentaciji, do takvih problema ne može doći. To je iskaz sljedećeg teorema kojeg navodimo bez dokaza. Dokaz se može vidjeti u Robertsu.

Teorem 3.14. *(Roberts str. 67) Ako je reprezentacija* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *regularna i ako su f i g homomorfizmi sa $\mathfrak{A}$ u $\mathfrak{B}$, tada je f apsolutna, omjerna, intervalna, ordinalna ili nominalna skala ako i samo ako je g, respektivno, apsolutna, omjerna, intervalna, ordinalna ili nominalna skala.*

3.1.5 Fundamentalno mjerenje - Značajnost izjava

Sad kad smo uspostavili teoriju za tipove skala, vratimo se na definiciju značajnosti i testirajmo je na nekoliko izjava. Pretpostavljamo da sve skale dolaze iz regularnih reprezentacija, pa možemo koristiti jednostavniju definiciju značajnosti. Izjava koja uključuje numeričke skale je značajna ako se njezina istinitost ne mijenja pod dopustim transformacijama skale. Neka je $f(a)$ veličina dodijeljena elementu a, a $f(b)$ veličina dodijeljena elementu b. Promotrimo sljedeću izjavu

$$f(a) = 2f(b)$$

Da li je ta izjava značajna? Prema definiciji, izjava je značajna ako se njezina istinitost ne mijenja pod dopustivim transformacija skale ϕ, tj ako vrijedi sljedeće:

$$f(a) = 2f(b) \iff (\phi \circ f)(a) = 2[(\phi \circ f)(b)]$$

Za koju klasu dopustivih transformacija ϕ vrijedi gornja ekvivalencija? Idemo redom. Pretpostavimo da je ϕ bijekcija. Time testiramo značajnost izjave za nominalne skale. Neka je $f(a) = 1, f(b) = 2$, i $\phi(x) = x - 1$
Tada imamo

$$\begin{aligned} f(a) = 2f(b) &\iff (\phi \circ f)(a) = 2[(\phi \circ f)(b)] \\ &\iff \phi(f(a)) = 2\phi(f(b)) \\ &\iff \phi(2) = \phi(1) \\ &\iff 1 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Dakle, izjava je beznačajna ako je f nominalna skala.

Neka je ϕ striktno rastuća funkcija. Time testiramo značajnost izjave za ordinalne skale. Neka je $f(a) = 1, f(b) = 2$, i $\phi(x) = 3x$
Tada imamo

$$\begin{aligned} f(a) = 2f(b) &\iff (\phi \circ f)(a) = 2[(\phi \circ f)(b)] \\ &\iff \phi(f(a)) = 2\phi(f(b)) \\ &\iff \phi(2) = \phi(1) \\ &\iff 6 = 3 \end{aligned} \tag{6}$$

Dakle, izjava je beznačajna ako je f ordinalna skala.

Neka je ϕ pozitivna linearna transformacija,

$$\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta > 0$$

Time testiramo značajnost za intervalne skale. Neka je $f(a) = 1, f(b) = 2$, i $\phi(x) = 2x + 1$
Tada imamo

$$\begin{aligned} f(a) = 2f(b) &\iff (\phi \circ f)(a) = 2[(\phi \circ f)(b)] \\ &\iff \phi(f(a)) = 2\phi(f(b)) \\ &\iff \phi(2) = \phi(1) \\ &\iff 5 = 2 \end{aligned} \tag{7}$$

Dakle, izjava je beznačajna ako je f intervalna skala.

Neka je ϕ množenje pozitivnom konstantom,

$$\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$$

Time testiramo značajnost za ordinalne skale. Neka je $f(a) = 1, f(b) = 2$, i $\phi(x) = \alpha x$
Tada imamo

$$\begin{aligned} f(a) = 2f(b) &\iff (\phi \circ f)(a) = 2[(\phi \circ f)(b)] \\ &\iff \phi(f(a)) = 2\phi(f(b)) \\ &\iff \phi(a) = 2\phi(b) \\ &\iff \alpha f(a) = 2\alpha f(b) \end{aligned} \tag{8}$$

Ova ekvivalencija vrijedi za svaki $\alpha > 0$. Dakle, izjava je značajna za omjerne skale. Jasno je da će ekvivalencija vrijediti ako je ϕ identiteta, tako da je izjava značajna i za apsolutne skale. Ovo razmatranje nam govori zašto je izjava (1) imala smisla, dok izjava (2) nije. Temperatura je intervalna skala, dok je masa omjerna skala.
Promotrimo izjavu:

$$f(a) > 10$$

Ako je f apsolutna skala, kao u slučaju brojenja, tada za svaku transformaciju ϕ vrijedi

$$f(a) > 10 \iff (\phi \circ f)(a) > 10$$

zato jer je jedina dopustiva transformacija identiteta. Primjetimo da $f(a)$ ne mora biti veći od 10 da bi izjava bila značajna. Značajnost je različita od istine; mi samo želimo znati da li ima smisla izreći takvu izjavu. Ako je f omjerna skala, kao u slućaju mase, tada je gornja izjava beznačajna. Pretpostavimo da je izjava $f(a) > 10$ istinita za neki f, ako uzmemo dovoljno mali, ali pozitivan α, tada $f(a) > 10$ nije istinito.

Značajnost izjava sa numeričkom skalom se može provjeriti na gornji način, ali općenito, kombinacija izjave i tipa skale su sljedeće:
Omjerne skale se koriste za kvantitativno uspoređivanje

$$f(a) = \lambda f(b)$$

$$f(a)/f(b) = \lambda$$

Intervalne skale koriste se za usporedbu razlika

$$f(a) - f(b) > f(c) - f(d)$$

Dok se ordinalne skale koriste za usporedbu veličina

$$f(a) > f(b)$$

3.2 Izvedena mjerenja

3.2.1 Uvod u izvedena mjerenja

Često dobijemo gotove numeričke skale i želimo definirati nove skale definirane uz pomoć već gotovih, prije definiranih skala. Takve skale se nazivaju izvede skale, a proces dobivanja izvedenih skala naziva se izvedeno mjerenje. Većina skala u fizici su izvedene skale. Tipičan primjer izvedene skale je gustoća d koja se definira pomoću mase m i volumena V kao $d = m/V$. Ako je gustoća definirana na gornji način, preko mase i volumena, tada nema fundamentalnog mjerenja gustoće, nego je izvedena iz drugih skala, koje mogu, ali ne moraju biti fundamentalne skale. U ovom poglavlju, objasnit ćemo proces dobivanja izvedenih skala. Nema općeprihvaćene teorije za izvedeno mjerenje. Mi ćemo se voditi Robertsovim pristupom.

Neka je A skup. Neka su $f_1, f_2, ..., f_n$ realne funckije na A. Funkcije $f_1, f_2, ..., f_n$ zovemo primitivne skale. Definiramo realnu funkciju g na A pomoću funkcija $f_1, f_2, ..., f_n$. Funkciju g nazivamo izvedena skala.

Vratimo se primjeru gustoće d. Neka je A skup objekata, f_1 mjera mase, f_2 mjera volumena. f_1, f_2 su primitivne skale. Tada definiramo

$$g = \frac{f_1}{f_2} = \frac{m}{V}$$

g je primjer izvedene mjere. g je izvedena iz f_1, f_2 preko jednadžbe. Isto tako smo mogli uzeti i

$$g' = f_1 + f_2 = m + V$$

i to bi bio legitiman primjer izvedene mjere. Izvedena skala g ne mora biti zadana preko jednadžbe.
Neka je $u : A \to Re$ ordinalna funkcija korisnosti, tj. za $a, b \in A$, funkcija u zadovoljava

$$a \succ b \implies u(a) > u(b)$$

Neka je v funkcija na A za koju vrijedi

$$u(a) > u(b) \iff v(a) > v(b)$$

Tada je v izvedena skala.

3.2.2 Izvedena mjerenja - osnovni problemi

Kao i za fundamentalna mjerenja, osnovna dva problema su ostala ista: Problem reprezentacije i problem jedinstvenosti. Veću pažnju ćemo posvetiti problemu jedinstvenosti jer je drugačiji nego kod fundamentalnih mjerenja.

Počnimo s problemom reprezentacije. Teoremi reprezentacije daju dovoljne (i nužne) uvjete za postojanje funkcije koja zadovoljava uvjete definicije izvedene skale. Primitivne skale $f_1, f_2, ..., f_n$ i izvedena skala g biti će vezani nekim uvjetom

$$C(f_1, f_2, ..., f_n, g)$$

Svaku funckiju g koja zadovoljava uvjet C zvati ćemo primitivna skala.
Gore smo naveli 2 primjera primitivnih skala, gustoću i izvedenu funkciju korisnosti. Za gustoću je uvjet $C(m, V, d)$ glasio

$$d = \frac{m}{V}$$

Za izvedenu skalu korisnosti v uvjet $C(u, v)$ je glasio

$$u(a) > u(b) \iff v(a) > v(b)$$

Drugi osnovni problem je problem jedinstvenosti. On je malo drugačiji nego kod fundamentalnih mjerenja. Postoje dvije vrste jedinstvenosti, ovisno o tome dozvoljavamo li da primitivne skale $f_1, f_2, ..., f_n$ variraju ili ne. Za primjer, uzmimo gustoću definiranu kao gore. Ako ne dozvoljavamo da m i V variraju, tada je d jedinstveno definirana preko m i V. Ali, m i V su omjerne skale. Ako dozvolimo da m i V variraju, tj. da se zamijene dopustivim skalama m' i V', onda d varira. Neka su m' i V' dopustive skale, tada postoje brojevi α i β takvi da je za sve $a \in A$

$$m'(a) = \alpha m(a)$$

$$V'(a) = \beta V(a)$$

Tada je d' definirana kao

$$d'(a) = \frac{m'(a)}{V'(a)} = \frac{\alpha m(a)}{\beta V(a)} = \frac{\alpha}{\beta} d(a)$$

Dakle, d' je povezan sa d preko transformacije sličnosti $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ovisno o tome dopuštamo li da primitivne skale $f_1, f_2, ..., f_n$ variraju, dobivamo dvije vrste regularnosti, regularnost u užem smislu i regularnost u širem smislu. No, definirajmo prvo dopustive transformacije kao što smo uradili za fundamentalna mjerenja.

3.2.3 Izvedena mjerenja - regularne skale

Neka su $f_1, f_2, ..., f_n$ primitivne skale. Neka je g izvedena skala iz $f_1, f_2, ..., f_n$ uz uvjet $C(f_1, f_2, ..., f_n, g)$.

Kažemo da je funkcija $\phi : g(A) \to Re$ dopustiva transformacija u užem smislu ako funkcija $g' = \phi \circ g$ zadovoljava

$$C(f_1, f_2, ..., f_n, g')$$

Kažemo da je funkcija $\phi : g(A) \to Re$ dopustiva transformacija u širem smislu ako postoje dopustive skale $f'_1, f'_2, ..., f'_n$ za $f_1, f_2, ..., f_n$ tako da funkcija $g' = \phi \circ g$ zadovoljava

$$C(f_1, f_2, ..., f_n, g')$$

U slučaju gustoće, jedina dopustiva transformacija u užem smislu je identiteta. Pokazali smo da je svaka dopuštena transformacija u širem smislu zapravo transformacija sličnosti. Obratno, svak transformacija sličnosti je dopustiva u širem smislu. Neka je $d' = \alpha d$. Tada je uvjet $C(\alpha m, V, d')$ zadovoljen, pa je d' dobiven iz d preko dopustive transformacije u širem smislu.

Neka je g skala. Neka je uvjet $C(f_1, f_2, ..., f_n, g')$ zadovoljen. Ako postoji dopustiva transformacija u užem smislu $\phi : g(A) \to Re$ takva da je $g' = \phi \circ g$, tada g zovemo regularna skala u užem smislu.

Neka je g skala. Neka su $f'_1, f'_2, ..., f'_n$ prihvatljive skale za skale $f_1, f_2, ..., f_n$. Neka je uvjet $C(f_1, f_2, ..., f_n, g')$ zadovoljen. Ako postoji dopustiva transformacija u širem smislu $\phi : g(a) \to Re$ takva da je $g' = \phi \circ g$, tada g zovemo regularna skala u širem smislu.

Prema gornjim definicijama, gustoća d je regularna skala u užem smislu i u širem smislu.

3.2.4 Izvedena mjerenja - Tipovi skale i značajnost izjava

Tipove skale za regularne skale definiramo analogno kao što smo to učinili za fundamentalna mjerenja. Jedina razlika je što sada imamo uži i širi smisao regularnosti, pa samim time imamo i uži i širi smisao tipa skale. Za primjer, ako je f regularna skala u užem smislu, tada kažemo da je f omjerna skala u užem smislu ako je klasa dopustivih transformacija u užem smislu točno transformacija sličnosti. Zato, gustoća je apsolutna skala u užem smislu, jer je jedina dopustiva transformacija u užem smislu funkcija identiteta. Ali, gustoća je omjerna skala u širem smislu. Da bi to pokazali, imali smo dva smjera. Prvi je da pokažemo da je svaka dopustiva transformacija zapravo transformacija sličnosti, a drugi je da pokažemo da je svaka transformacija sličnosti dopustiva transformacija u širem smislu.

Značajnost izjave možemo prekopirati sa fundamentalnog mjerenja. Razlika je što dodajemo pojam šireg smisla i užeg smisla, pa dobivamo značajnost u širem smislu i značajnost u užem smislu. Na primjer, značajno je u širem smislu, reći da je jedan medij dva puta gušći od drugog medija. U praksi se češće želi dobiti značajnost u širem smislu.

3.3 Primjena teorije značajnosti

3.3.1 Aritmetička sredina

U ovom poglavlju, dati ćemo nešto kompliciranije primjere za teoriju značajnosti, i za fundamentalne skale i za izvedene skale. Pretpostavljamo da sve skale dolaze iz regurlarne reprezentacije. Zamislimo da promatramo n životinja koje su pod novom eksperimentalnom dijetom i m životinja koje jedu normalno. Želimo reći da je prosječna težina životinja pod eksperimentalnom dijetom veća od prosječne težine životinja koje jedu normalno. Težinu tretiramo kao fundamentalnu skalu. Preciznije, neka je f promatrana skala, te sad želimo promotriti izjavu

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) > \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(b_i) \tag{9}$$

Računamo prosjek u dva različita skupa, te ga uspoređujemo. Da bi gornja izjava bila značajna, njezina istinitost mora biti jednaka istinitosti sljedeće izjave

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\phi \circ f(a_i)) > \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\phi \circ f(b_i)) \tag{10}$$

za sve dopustive skale ϕ. Ako je ϕ transformacija sličnosti $\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha f(a_i)) &> \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\alpha f(b_i) \\
\alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)) &> \alpha\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f(b_i)) \\
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)) &> \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f(b_i))
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi ekvivalentnost izjava (9) i (10). Zaključujemo da je izjava značajna za omjerne skale. Provjerom za $\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ dobili bi ekvivalentnost izjava, te bi zaključili da je izjava značajna i za intervalne skale. Ali ako je ϕ strogo rastuća funckija, tada ne vrijedi ekvivalentnost izjava. Neka je $m = n = 2$ i $f(a_1) = 1, f(a_2) = 25, f(b_1) = 9, f(b_2) = 16$ i

$\phi(x) = \sqrt{x}$. Primjetimo da sada izjava

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)) &> \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(f(b_i)) \\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(f(a_i)) &> \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(f(b_i)) \\
\frac{1}{2}(1+25) &> \frac{1}{2}(9+16) \\
\frac{26}{2} &> \frac{25}{2}
\end{aligned}$$

nije ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{f(a_i)}) &> \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\sqrt{f(b_i)} \\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(\sqrt{1}+\sqrt{25}) &> \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\sqrt{9}+\sqrt{16}) \\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(1+5) &> \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(3+4) \\
\frac{6}{2} &> \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Dakle, izjava (9) nije značajna za ordinalne skale. Prema Stevensu, IQ je ordinalna skala. Gornji primjer nam govori da nije značajno reči da jedna grupa ljudi ima viši IQ od druge grupe ljudi. Prečesto se u društvenim znanostima koriste usporedbe sa aritmetičkim sredinama bez da se posveti pažnja da li su te izjave značajne.

3.3.2 Index cijena

U sljedećem primjeru razmatramo index cijena. Index cijena povezuje sadašnje cijene osnovnih potrepština poput hrane, goriva, odjeće, itd. sa cijenama u nekom zadanom trenutku. Pretpostavimo da se index računa na n potrepština. Neka je $p_i(0)$ cijena potrepštine i u zadanom trenutku, a $p_i(t)$ cijena u trenutku t. Tada se index cijena računa kao:

$$I(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i(0)$$

Index cijena je primjer izvedene skale. I je definiran preko $p_1, p_2, ..., p_n$. Svaka cijena p_i je omjerna skala, dopustive transformacije su konverzije sa kune u lipe, lipe u cente, itd. Ali, svaka skala p_i je nezavisna, tako da se dopustive transformacije od I u širem smislu razlikuju sa nezavisnim promjenama od $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Zato izjava

$$I(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) > I(p_1(s), p_2(s), ..., p_n(s))$$

nije značajna u širem smislu. Možemo naći takve α_i da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i(0) > \sum_{i=1}^{n} p_i(s) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i(0) \tag{11}$$

ali ne vrijedi

$$\alpha_i \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \Big/ \alpha_i \sum_{i=1}^{n} p_i(0) > \alpha_i \sum_{i=1}^{n} p_i(s) \Big/ \alpha_i \sum_{i=1}^{n} p_i(0) \tag{12}$$

Pokažimo to na konkretnom primjeru: Neka je $n = 2$, $p_1(0) = p_2(0) = 1$, $p_1(t) = 5$, $p_2(t) = 10$, $p_2(s) = 6$, $p_2(s) = 8$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Tada nejednakosti (11) i (12) izgledaju kao:

$$\frac{5+10}{1+1} > \frac{6+8}{1+1}$$

i

$$\frac{10+5}{2+0.5} < \frac{12+4}{2+0.5}$$

Ako inzistiramo da se sve cijene mjere u istim jedinicama, tada bi gornja usporedba bila značajna u širem smislu. Dopustive transformacije od I u širem smislu su zapravo množenja svakog $p_i(t)$ i $p_i(0)$ sa istim pozitivnim brojem α. Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(0) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i(0)$$

pa je sljedeća izjava značajna

$$I(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) > I(p_1(s), p_2(s), ..., p_n(s))$$

Također, značajno je reći da je index porasao za duplo ili se smanjio za trećinu. Lako se provjeri da su sljedeće izjave značajne

$$I(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) = 2I(p_1(s), p_2(s), ..., p_n(s))$$

$$I(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)) = 0.66I(p_1(s), p_2(s), ..., p_n(s))$$

3.3.3 Onečišćenje zraka

Za zadnji primjer, pogledajmo onečišćenje zraka. Trenutno postoje razni zagađivaći zraka, i svaki djeluje na drugačiji način. Najštetniji za zdravlje su ugljični monoksid, ugljikovodici, razni dušikovi oksidi i drugi. Također, kemijske reakcije između tih elemenata mogu biti štetne, ali mi ćemo se ograničiti na jednostavniji slučaj, gdje nema interakcije između onečiščivaća. Da bi mogli usporediti alternativne kontrole za sprečavanje onečišćenja zraka, prvo moramo znati usporediti efekte različitih zagađivaća. Hoćemo li smanjiti emisiju štetnih plinova i dozvoliti povećanje manje štetnih i u kojoj mjeri? Jedan od načina usporedbe je da uvedemo index onečišćenja zraka, koji bi ukazao na štetnost onečišćenja temeljem zagađivaća koji su prisutni. Dodatna prednost takvih indexa je kontroliranje onečišćenja kroz promatrano vrijeme (dan, mjesec, godina). Jednostavan način za napraviti index je da izmjerimo masu svakog zagađivaća i u promatranom razdoblju i sumiramo te brojke. Neka je $e(i,t,k)$ suma svih zagađivaća zagađivaća i po kubičnom centimetru u promatranom razdoblju t od izvora zagađenja k. Tako dobijemo index onečišćenja zraka

$$A(t,k) = \sum_i e(i,t,k)$$

Ovaj index je primjer izvedenog mjerenja. Izjava da je prijevoz najveći zagađivać zraka sa preko 50% ukupnog zagađenja je značajna u širem smislu. Da bi to pokazali moramo pokazati ekvivalentnost izjava (suma svih štetnih elemenata iz prijevoza je veća nego suma svih ostalih zagađivaća po svim ostalim štetnim elementima)

$$\sum_i e(i,t,k') > \sum_{i,k\neq k'} e(i,t,k)$$

i

$$\sum_i \alpha e(i,t,k') > \sum_{i,k\neq k'} \alpha e(i,t,k)$$

Te izjave su očigledno ekvivalentne. Iako je takva usporedba značajna u tehničkom smislu kojeg smo uveli, pitanje je koliko je ona značajna u praktičnom smislu. Uzmimo za primjer tvornicu koja ispušta sulfate i auto koji ispušta ugljični monoksid. Jedna jedinica mase dušikovog oksida je štetnija nego jedinica mase ugljikovog monoksida. Zato uvodimo težine α_i za svakog zagađivača zraka i koje dobijemo na temelju nekog empirijskog istraživanja. Izraz

$$\alpha_i e(i,t,k)$$

se u literaturi naziva stupanj štetnosti. Pomoću stupnja štetnosti možemo konstruirati novi index koji će uključivati i težinu onečišćenja.

$$B(t,k) = \sum_i \alpha_i e(i,t,k)$$

Izjava, kao i prije, da je prijevoz najveći zagađivać zraka sa preko 50% ukupnog zagađenja je značajna u širem smislu. Sa uvedenim težinama, tvornice koje ispuštaju jako štetne stvari u malim količinama sa ovim indexom napreduju na ljestvici zagađivača. Problem nastaje kod usporedbe u stvarnom životu. Ako imamo zagađenost ugljičnim monoksidom na smrtonosnoj razini, bez drugog zagađivača, to će dati isti index (ili manji) kao da imamo sve ostale zagađivače na prihvatljivim razinama. Zbog toga je ovaj primjer indexa dobar za naša teoretska razmatranja, ali ipak nedovoljno dobar za pravu primjenu.

3.4 Ekstenzivna mjerenja

3.4.1 Uvod u Hölderov teorem

U ovom dijelu, proučit ćemo problem reprezentacije fundamentalnog mjerenja. Uzet ćemo primjer kojim smo se koristili na početku, primjer mjerenja mase. To je reprezentacija

$$(A, \succeq, \circ) \to (Re, \geq, +)$$

gdje je $\succeq$ binarna relacija na skupu A i $\circ$ operacija na A. Predstaviti ćemo aksiome na $(Re, \geq, +)$ koji će biti nužni i dovoljni za postojanje željenog homomorfizma f. Također, pozabavit ćemo se sa teoremom jedinstvenosti za danu reprezentaciju.

Tražimo dovoljne (i nužne) uvjete na $(Re, \geq, +)$ za postojanje realne funkcije f na A koja zadovoljava jednađbe

$$a \succeq b \iff f(a) \geq f(b)$$

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b)$$

Ove reprezentacije pojavljuju se u primjerima poput mjerenja mase ili preferencija, gdje želimo da funkcija f "čuva" kombinaciju objekata. Atributi koji imaju svojstvo aditivnosti, poput mase objekta, tradicionalno se zovu ekstenzivni. Zbog toga se problem nalaženja dovoljnih uvjeta na $(A, \succeq, \circ)$ za postojanje homomorfizma na $(Re, \geq, +)$ naziva problem ekstenzivnog mjerenja.

Da bi razvili teoriju ekstenzivnog mjerenja trebamo uvesti polugrupu i grupu, te pojam arhimedovosti.

Definicija 3.15. *Neka je A neprazan skup, B i $\succeq$ binarne relacije na A, te $\circ$ i binarna operacija sa B u A. Tada četvorku $(A, \succeq, B, \circ)$ nazivamo uređena polugrupa ako za sve $a, b, c, d \in A$ vrijede sljedećih 5 aksioma.*
(A1) Relacijski skup $(A, \succeq)$ ima jednostavan uređaj
(A2) Ako je $(a, b) \in B$, $a \succeq c$ i $b \succeq d$ tada $(c, d) \in B$
(A3) Ako je $(c, a) \in B$, $a \succeq b$ tada $c \circ a \succeq c \circ b$
(A4) Ako je $(a, c) \in B$, $a \succeq b$ tada $a \circ c \succeq b \circ c$
(A5) $(a, b) \in B$ i $(a \circ b, c) \in B$ ako i samo ako $(b, c) \in B$ i $(a, b \circ c) \in B$; te ako vrijedi jedan od uvjeta, tada vrijedi i $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Definicija 3.16. *(A6) (Pozitivnost) Neka je $(A, \succeq, B, \circ)$ uređena polugrupa. $(A, \succeq, B, \circ)$ nazivamo pozitivnom polugrupom ako $\forall a, b \in A$ vrijedi implikacija: $(a, b) \in B$ tada je $a \circ b \succeq a$*

Definicija 3.17. *(A7) (Regularnost) Pozitivnu polugrupu $(A, \succeq, B, \circ)$ nazivamo regularnom ako $\forall a, b \in A$ vrijedi: Ako je $a \succ b$ tada postoji $c \in A$ takav da je $a \succeq b \circ c$*

Definicija 3.18. *(A8) (Arhimedovost) Za svaki $a \in A$ induktivno definiramo skup Na, koji je podskup prirodnih brojeva, te definiramo $'na'$ za svaki $n \in Na$ na sljedeći način:*
(a) $1 \in Na$ i vrijedi $1a = a$
(b) Ako je $n - 1 \in Na$ i $((n-1)a, a) \in B$ tada je $n \in Na$ i $'na'$ definiramo kao $((n-1)a \circ a)$
(c) Ako je $n - 1 \in Na$ i $((n-1)a, a) \notin B$ tada za sve $m \geq n, \ m \notin Na$
Na je skup prirodnih brojeva za koje je $'na'$ definirano.
Polugrupu $(A, \succeq, B, \circ)$ nazivamo Arhimedovski uređena polugrupa ako je $\forall a, b \in A$ skup $\{n : n \in Na \ \& \ b \succ n \circ a\}$ konačan skup.

Primjer 3.19. Primjer strukture koja zadovoljava gornje 4 definicije je relacijski sustav $(Re^+, \geq, R_\omega, +)$ gdje je $\geq$ relacija veće ili jednako, $+$ normalna operacija zbrajanja na Re^+, te R_ω skup definiran kao

$$R_\omega = \{(x, y) : x, y \in Re^+ \ \& \ x + y < \omega\}, 0 < \omega \leq \infty$$

Zbog toga, $+$ je definiran za sve parove pozitivnih realnih brojeva čija je suma manja od ω.

Kad bi uzeli sve parove pozitivnih realnih brojeva čija je suma kvadrata manja od ω, tada ne bi dobili Arhimedovsku, pozitivnu, regularnu uređenu polugrupu. Pogledajmo primjer, $t = 1, x = y = 0.2, z = 0.97$. Tada je $x^2+y^2 = 0.08 < 1$ pa je $(x, y) \in Re_1$; $(x+y)^2+z^2 = 0.97$ pa je $(x+y, z) \in Re_1$; ali $x^2 + (y + z)^2 = 1.25$ pa $(x, y + z) \notin Re_1$ zbog (A5).

Teorem 3.20. *Neka je $(A, \succeq, B, \circ)$ Arhimedovski uređena, regularna, pozitivna polugrupa. Tada postoji funkcija $\phi : A \to Re^+$ takva da $\forall a, b \in A$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad a \succeq b \iff \phi(a) \geq \phi(b) \\ &(2) \quad \textit{Ako je } (a,b) \in B, \textit{ tada je } \phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b) \end{aligned}$$

Ako su ϕ i ϕ' dvije funkcije sa A u Re^+ koje zadovoljavaju (1) i (2), tada postoji $\alpha > 0$ takav da za svaki nemaksimalni element $a \in A$ vrijedi

$$\phi'(a) = \alpha\phi(a)$$

Teorem 3.20 nam govori o postojanju funkcije iz A u Re^+, ali sljedeći teorem nam govori da se zapravo radi o izomorfizmima.

Teorem 3.21. *Neka vrijede pretpostavke teorema 3.20 i neka je ϕ funkcija sa A u Re^+ koja zadovoljava (1) i (2). Neka je ω najmanja gornja međa skupa $\{\phi(a) : a \in A\}$. Neka je A' skup elemenata koji nisu maksimalni u A i neka je $B' = \{(a,b) \in B : a \circ b \in A'\}$. Tada je funkcija ϕ izomorfizam iz $(A', \succeq, B', \circ)$ u $(Re^+, \geq, Re_\omega, +)$*

Poanta teorema 3.21 je da ϕ ne samo da prenosi relaciju $\succeq$ u $\geq$ i operaciju $\circ$ u $+$, nego i B' u Re_ω u smislu da vrijedi

$$(a,b) \in B' \iff (\phi(a), \phi(b)) \in Re_\omega$$

Prvo ćemo napraviti detaljnu skicu dokaza, pa tek onda sam dokaz.

Da bi aproksimirali $\phi(b)/\phi(c)$, uzmemo mali a i pogledamo koliko kopija od a treba da se aproksimira b, a koliko kopija treba da se aproksimira c. Ako je $ma \approx b$ i $na \approx c$, tada je $m/n \approx \phi(b)/\phi(c)$. Ova ideja je dobra jer će zadovoljavati svojstva (1) i (2) iz iskaza teorema. Zato je prvi korak definiranje za svaki a, b takve da je $a \succeq b$, broj $N(a,b)$ takav da je $N(a,b)a \approx b$. Preciznije, $N(a,b)$ je najveći prirodni broj takav da je $\big[N(a,b) - 1\big]a$ definiran i $b \succ \big[N(a,b) - 1\big]a$. Arhimedovo svojstvo osigurava da takav broj postoji. Sada razklikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj, ako postoji najmanji element skupa A, označimo ga sa a. Tada je za svaki $b \in B$, $N(a,b)a = b$. Jer ako to ne vrijedi, tada zbog regularnosti možemo konstruirati takav a' da vrijedi $b \succ \big[N(a,b) - 1\big]a \circ a'$, pa zaključujemo da je $a \succ a'$ što je kontradikcija s time da je a najmanji element. U ovom slučaju, $\phi(b) = N(a,b)$ daje traženi izomorfizam u $(Re^+, \geq, R_\omega, +)$.

Drugi slučaj je kad ne postoji najmanji element skupa A. Tada moramo pokazati da kako uzimamo sve manji a, tada $N(a,b)/N(a,c)$ konvergira za svaki b, c. Taj limes ćemo definirati kao $\phi(b)/\phi(c)$. Limes postoji, jer za a' puno manji od a, $N(a', b) \approx N(a', a)N(a, b)$. To je intuitivno jasno, jer ako trebamo $N(a', a)$ kopija od a' da bi aproksimirali a i $N(a, b)$ kopija od a da bi aproksimirali b, tada trebamo $N(a', a)N(a, b)$ kopija od a' da bi aproksimirali b. Zaključujemo da vrijedi aproksimacija $N(a', b)/N(a', c) \approx N(a, b)/N(a, c)$, jer $N(a', b)$ i $N(a', c)$ imaju zajednički faktor $N(a', a)$. Za primjer uzmimo pretvaranje skale iz metra (a) u centimetre (a'). Sve mjere će biti pomnožene sa brojem $N(a', a)$, tj. brojem centimetara u jednom metru, pa će svi omjeri ostati isti. Metoda kojom biramo dovoljno mali a' je sljedeća. Uzmimo bilo koji a' takav da je $a \succ a'$ i zatim uzmimo a'' takav da je $a \succeq a' \circ a''$. To možemo zbog regularnosti. Tada za manjeg od a' i a'' vrijedi da je "manji od polovice" elementa a.

Jednom kad konstruiramo ϕ, ostatak dokaza će biti lagan. Aditivnost se pokaže pomoću aksioma (A3) i (A4). $N(a, b)a \approx b$ i $N(a, c)a \approx c$, tada $\big[N(a, b) + N(a, c)\big]a \approx b \circ c$. Uređenost slijedi pomoću aditivnosti. Jer ako $b \succ c$, tada za neki a, $b \succeq c \circ a$. ϕ smo konstruirali tako da $\phi(b) \geq \phi((c) + \phi(a)$, gdje je $\phi(a) > 0$; zbgo toga je $\phi(b) > \phi(c)$.

Svaki aksiom ima svoju ulogu. Aksiomi (A2) i (A5) karakteriziraju polugrupu: operacija $\circ$ je dobro definirana i asocijativna za sve dovoljne male a, b. Zato možemo generirati na od a bez brige kako će se kopije od a udruživati i stvoriti na. Aksiom (A6) garantira da niz $a, 2a, ...$ raste postepeno, dok nam aksiom (A8) osigurava da će niz u jednom trenutku aproksimirati bilo koji b.

Iskažimo prvo nekoliko rezultata u obliku lema, koje ćemo kasnije koristiti u dokazu. (Krantz str. 47)

Lema 3.22. *Neka su $m, n \in Na$. Tada je $(ma, na) \in B$ ako i samo ako je $m + n \in Na$. Ako vrijedi jedan od uvjeta, tada je $(ma) \circ (na) = (m + n)a$*

Lema 3.23. *Ako je $a \succeq a'$ i $b \succeq b'$ i $(a, b) \in B$, tada je $a \circ b \succeq a' \circ b'$*

Lema 3.24. *ako je $a \succeq b$ i $n \in Na$ tada je $na \succeq nb$*

Lema 3.25. *Neka vrijedi aksiom (A6). Neka su $m, n \in Na$. Tada je $ma \succeq na$ ako i samo ako $m \geq n$*

Lema 3.26. *Neka je $m \in Na$. Tada je $n \in N_m a$ ako i samo ako $nm \in Na$ i vrijedi $n(ma) = (nm)a$*

Sad smo spremni za dokaz teorema 3.20.

Dokaz. Neka je $b \succ a$. Po aksiomu (A8) postoji najveći pozitivni broj $N(a, b)$ takav da je $N(a, b) - 1 \in Na$ i $b \succ (N(a, b) - 1)a$. Definirajmo $N(a, a) = 1$.

Prvo, pretpostavimo da postoji minimalan element $a \in A$. Pokažimo da za svaki $b \in A, N(a, b) \in Na$ i $N(a, b)a = b$. Po aksiomu (A7) postoji c takav da $((N(a,b)-1)a,c) \in B$ i $b \succeq \big[(N(a,b)-1)a\big] \circ c$. Po minimalnosti od a, $c \succeq a$. Prema aksiomu (A2) znamo da je $N(a,b) \in Na$. Prema aksiomu (A3) znamo da je $b \succeq N(a,b)a$. Ali tada po maksimalnosti od $N(a,b)$ ne može biti $b \succ N(a,b)a$, pa je $b = N(a,b)a$.

Definirajmo $\phi(b) = N(a,b)$. Pokazat ćemo da ϕ zadovoljava (1) i (2) iz teorema 3.20. Da bi dokazali (1), pretpostavimo da je $b \succeq c$. Prema gore pokazanom, $b = N(a,b)a$, $c = N(a,c)a$. Prema lemi 3.25 $N(a,b) \geq N(a,c)$, a to je zapravo $\phi(b) \geq \phi(c)$. Time je (1) pokazano. Da bi pokazali (2) treba nam sljedeće:

$$\begin{aligned} N(a, b\circ c)a &= b \circ c \\ &= \big[N(a,b)a\big] \circ \big[N(a,c)a\big] \\ &= \big[N(a,b) + N(a,c)\big]a \qquad\qquad (lema \ \ 3.22) \end{aligned}$$

Po lemi 3.25, $N(a, b\circ c) = N(a,b) + N(a,c)$, ili drugačije zapisano, $\phi(b \circ c) = \phi(b) + \phi(c)$. Time je pokazano svojstvo (2).
Ako je ϕ' neka druga funkcija koja zadovoljava (1) i (2), tada za svaki $b \in A$

$$\begin{aligned} \phi'(b) &= \phi'(N(a,b)a) \\ &= N(a,b)\phi'(a) \qquad\qquad (svojstvo \ \ (2)) \\ &= \phi(b)\alpha \end{aligned}$$

gdje je $\alpha = \phi'(a) > 0$. Time je dokazan teorem 3.20 u slučaju da postoji minimalan element.

Pretpostavimo da u A ne postoji minimalan element. Konstruirat ćemo niz $a_1, a_2, ...$ u A takav da je za svaki $b \in A$, broj $N(a_m, b)$ definiran za dovoljno veliki m, te da taj broj divergira u $+\infty$. Tada ćemo pokazati da za bilo koji takav niz $a_1, a_2, ...$, limes $\lim\limits_{m\to\infty} N(a_m, b)/N(a_m, c)$ postoji u Re^+ za svaki $b, c \in A$. Limes će biti neovisan o nizu a_m.

Neka je a_1 proizvoljan. Niz definiramo induktivno. Ako je a_m definiran, odaberimo $a'_m \prec a_m$. Takav a'_m sigurno postoji jer ne postoji minimalan element. Po aksiomu (A7), možemo odabrati a''_m takav da je $(a'_m, a''_m) \in B$ i $a_m \succeq a'_m \circ a''_m$. Definiramo $a_{m+1} := min\{a'_m, a''_m\}$ (minimum po relaciji $\succeq$). Po lemi 3.23 za zadnju jednakost, za $m \geq 1$

$$a_m \succeq a'_m \circ a''_m \succeq a_{m+1} \circ a_{m+1} = 2a_{m+1}$$

Također, zbog $(a'_m, a''_m) \succeq (a_{m+1}, a_{m+1})$ i $(a'_m, a''_m) \in B$ te aksioma (A2) vrijedi da je $(a_{m+1}, a_{m+1}) \in B$, iz čega dolazimo do $2 \in Na_{m+1}$. Primjenom leme 3.23 opet dobivamo

$$a_m \succeq 2a_{m+1} \succeq 2a_{m+2} \circ 2a_{m+2} = 4a_{m+2}$$

Slično kao i gore dolazimo do zaključka da je $2^2 = 4 \in Na_{m+2}$. Ponavljajući taj argument, induktivno dolazimo do

$$a_m \succeq 2^n a_{m+n}, \quad m, n \geq 1$$

i do $2^n \in Na_{m+n}$.

Sad kad smo definirali niz a_m i ustanovili osnovno svojstvo niza, da je $a_m \succeq 2^n a_{m+n}$, idemo pokazati da je $N(a_m, b)$ definiran za dovoljni veliki m i da divergira u $+\infty$. Pretpostavimo prvo da je $a_2 \succ b$. To znači da smo uzeli preveliki a_1, te da se nismo dovoljni smanjili u prvom koraku sa a_2, ali pokažimo da će ovaj padajući niz u nekom $m - tom$ koraku biti 'manji' od b. Po aksiomu (A8) postoji najveći takav broj $N(b, a_2)$ da vrijedi $a_2 \succ \big[N(b, a_2) - 1\big]b$. Budući da je $(a_2, a_2) \in B$, po aksiomu (A2), $((N(b, a_2) - 1)b, b) \in B$, tako da je i $N(b, a_2) \in N_b$. Po odabiru broja $N(b, a_2)$, znamo da je $N(b, a_2)b \succeq a_2$. Sad biramo dovoljni veliki m takav da je $2^m > N(b, a_2)$. Pokazat ćemo da pretpostavka da je $a_{m+2} \succeq b$ vodi na kontradikciju, što znači da u m-tom koraku dolazimo ispod b. Ako je $a_{m+2} \succeq b$, tada po lemi 3.24 i $2^m \in N_b$ imamo

$$N(b, a_2)b \succeq a_2 \succeq 2^m a_{m+2} \succeq 2^m b$$

Ali po lemi 3.25, $2^m > N(b, a_2)$ implicira da je $2^m b \succ N(b, a_2)b$. Dolazimo do kontradikcije. Zbog toga vrijedi $b \succ a_{m+2}$.

Dakle, za svaki b postoji m takav da za sve $n \geq 0$, $b \succ a_{m+n+2}$ Sada imamo

$$\begin{aligned} b &\succ \big[N(a_{m+2}, b) - 1\big] a_{m+2} && (konstrukcija) \\ &\succeq \big[N(a_{m+2}, b) - 1\big] 2^n a_{m+n+2} && (lema\ 3.24) \\ &= (2^n \big[N(a_{m+2}, b) - 1\big]) a_{m+n+2} && (lema\ 3.26) \end{aligned} \tag{13}$$

Prema aksiomu (A8) postoji najveći takav broj $N(a_{m+n+2}, b)$ da je $b \succ (N(a_{m+n+2}, b) - 1)a_{m+n+2}$, i $N(a_{m+n+2}, b)a_{m+n+2} \succeq b$. Iz ovog i gornje nejednakosti, prema lemi 3.24 slijedi $N(a_{m+n+2,}, b) > 2^n \big[N(a_{m+2}, b) - 1\big]$. Iz toga zaključujemo da $N(a_{m+n+2}, b) \to \infty$ kada $n \to \infty$.

Da bi ocijenili $N(a_m, b)/N(a_m, c)$ kada $m \to \infty$, trebamo sljedeće: Ako je $(a, a') \in B$ i $b \succeq a \succeq a'$,tada

$$N(a', a)N(a, b) > N(a', b) - 1 \geq \big[N(a', a) - 1\big]\big[N(a, b) - 1\big] \tag{14}$$

Radi lakšeg zapisa, uvedimo oznake $N(a', a) = m + 1$ i $N(a, b) = n + 1$. Ako je $b = a$ ili $a = a'$, tada nejednakost odmah vrijedi. Zato pretpostavimo da je $b \succ a \succ a'$, dakle $m, n \geq 1$. Imamo $a \succ ma'$ i $(a, a') \in B$, tako da je

$m+1 \in N_{a'}$ i $(m+1)a' \succeq a$. Pretpostavimo da je $(n+1)(m+1) \in N_{a'}$. Po lemi 3.26, $(n+1) \in N_{(m+1)a'}$, zato, po lemi 3.24, $(n+1) \in Na$. Po definiciji je $(n+1)a \succeq b$, dakle $(n+1)(m+1)a' \succeq b$. To pokazuje da je ili $(n+1)(m+1) \notin Na'$ ili $(n+1)(m+1)a' \succeq b$. U oba slučaja imamo $(n+1)(m+1) \geq N(a', b)$ koja daje lijevu stranu tražene nejednakosti. Iz $b \succ na$ i $a \succ ma'$ imamo $nm \in N_{a'}$, i $b \succ nma'$ (po lemi 3.24 i lemi 3.26). Zbog toga, $N(a', b) - 1 \geq nm$, što je desna strana tražene nejednakosti. Iz nejednakosti (14) slijedi nova nejednakost koju dobijemo kad za brojnik uzmemo gornju ogradu, a za nazivnik donju ogradu. Dobijemo da za svaki b, c, za sve dovoljne velike m i $n \geq m$ vrijedi

$$\frac{\left[N(a_n, b) - 1\right]}{\left[N(a_n, c) - 1\right]} < \frac{N(a_n, a_m)N(a_m, b)}{\left[N(a_n, a_m) - 1\right]\left[N(a_m, c) - 1\right]} \tag{15}$$

Razlomak $N(a_n, a_m)/(N(a_n, a_m) - 1) < 2$ za $N(a_n, a_m) > 1$. $N(a_n, a_m) \neq 1$ jer smo pretpostavili $a \succ a'$. Zbog toga, za sve $n \geq m$ vrijedi

$$\frac{\left[N(a_n, b) - 1\right]}{\left[N(a_n, c) - 1\right]} \leq 2\frac{N(a_m, b)}{\left[N(a_m, c) - 1\right]}$$

Dakle, niz $\left[N(a_n, b) - 1\right]/\left[N(a_n, c) - 1\right]$ je omeđen odozgo za proizvoljne b, c. Zamjenom uloge b i c, dobivamo da je invertiran niz omeđen odozgo, što znači da je i sam početni niz omeđen odozdo sa pozitivnom donjom međom. Neka su L_* i L^* najveća donja međa i najmanja gornja međa niza. Tada vrijedi $0 < L_* \leq L^* < \infty$. Držeći m fiksnim i puštanjem $n \to \infty$ u nejednakosti (15), dobivamo

$$L^* \leq N(a_m, b)/\left[N(a_m, c) - 1\right]$$

Kada pustimo da $m \to \infty$ vidimo da vrijedi $L^* \leq L_*$. Dakle, mora biti $L^* = L_*$. To znači da i niz $\left[N(a_n, b) - 1\right]/\left[N(a_n, b) - 1\right]$ konvergira u neki $c \in Re^+$, pa konvergira i $N(a_n, b)/N(a_n, c)$.

Za svaki $b \in A$ definiramo

$$\phi(b) = \lim_{m\to\infty} N(a_m, b)/N(a_m, a_1)$$

Kako je $\phi(a_1) = 1$, a_1 smo uzeli kao jedinicu mjere, ali izbor je proizvoljan. Pokazat ćemo da ϕ definirana na gornji način ima svojstva (1) i (2) iz teorema. Počnimo sa svojstvom (2). Neka je $(b, c) \in B$. Za m takav da su $b, c \succ a_m$, imamo $b \succ \left[N(a_m, b) - 1\right]a_m$, $c \succ \left[N(a_m, c) - 1\right]a_m$, odakle pomoću lema 3.22 i 3.23 slijedi $b \circ c \succeq \left[N(a_m, b) + N(a_m, c) - 2\right]a_m$. Ako je $N(a_m, b) + N(a_m, c) \in Na_m$ tada je sigurno

$$\left[N(a_m, b) + N(a_m, c)\right]a_m \succeq b \circ c$$

Dobivamo nejednakost

$$N(a_m, b) + N(a_m, c) \geq N(a_m, b \circ c) > N(a_m, b) + N(a_m, c) - 2$$

Dijeleći sa $N(a_m, a_1)$ i puštanjem $m \to \infty$ dobivamo

$$\phi(b) + \phi(c) = \phi(b \circ c)$$

iz čega slijedi tvrdnja (2) Neka je $b \succ c$. Prema aksiomu (A7), postoji c' takav da je $(c, c') \in B$ i $b \succeq c \circ c'$. Za svaki m $N(a_m, b) \geq N(a_m, c \circ c')$. Odatle vrijedi

$$\begin{aligned} \phi(b) &\geq \phi(c \circ c') \\ &= \phi(c) + \phi(c') && (prema(2)) \\ &> \phi(c) && (\phi(c') > 0) \end{aligned} \tag{16}$$

Zaključujemo da je $b \succeq c$ ako i samo ako je $\phi(b) \geq \phi(c)$, tj vrijedi (1)

Ostalo nam je dokazati jedinstvenost do na pozitivnu konstantu. Pretpostavimo da je ϕ' neka druga funkcija sa A u Re^+ i neka vrijedi (1) i (2). Ako b nije maksimalan element u A, tada po aksiomu (A7) postoji c takav da je $(b, c) \in B$. Za $a_m \prec c$, $N(a_m, b) \in Na_m$ i $N(a_m, b)a_m \succeq b$. Po (1) i (2) vrijedi

$$N(a_m, b)\phi'(a_m) \geq \phi'(b) > \big[N(a_m, b) - 1\big]\phi'(a_m)$$

Kako a_2 nije maksimalan element, za $m \geq 2$ imamo

$$N(a_m, a_2)\phi'(a_m) \geq \phi'(a_2) > \big[N(a_m, a_2) - 1\big]\phi'(a_m)$$

Dijeleći gornje dvije nejednakosti, manji iz prve sa većim iz druge i obrnuto, dobivamo

$$N(a_m, b)\big[N(a_m, a_2) - 1\big] > \phi'(b)/\phi'(a_2) > \big[N(a_m, b) - 1\big]/N(a_m, a_2)$$

Puštajući $m \to \infty$ dobivamo

$$\phi'(b)/\phi'(a_2) = \phi(b)/\phi(a_2)$$

iz čega dobijemo

$$\phi'(b) = \frac{\phi'(a_2)}{\phi(a_2)}\phi(b)$$

Stavimo $\alpha = \phi'(a_2)/\phi(a_2) > 0$ i dobijemo

$$\phi'(b) = \alpha\phi(b)$$

$\square$

U dokazu teorema 3.21 koristiti ćemo niz a_m koji smo definirali u dokazu teorema 3.20. Sam dokaz je slian teoremu 3.20, pa emo preskoiti tehnike detalje.

Dokaz. Neka su ω i R_ω definirani kao u teoremu. Kako bi pokazali da je ϕ izomorfizam, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$(a,b) \in B \iff (\phi(a), \phi(b)) \in R_\omega$$

Pokažimo smjer $\rightarrow$. Neka je $(a,b) \in B'$. Tada je $a \circ b \in A'$, pa je $\phi(a) + \phi(b) < \omega$. Dakle, $(\phi(a), \phi(b) \in R_\omega$ čime je prvi smjer pokazan. Pokažimo i obrnuto. Neka je $(\phi(a), \phi(b) \in R_\omega$, tj. $\phi(a) + \phi(b) < \omega$. Kako je ω najmanja gornja međa, tako postoji $c \in A$ takav da $\phi(a) + \phi(b) < \phi(c)$. Ako postoji minimalan element u $a_1 \in A$, tada $(N(a_1, a) + N(a_1, b) \in Na_1$, pa po lemi 3.22, $(N(a_1, a)a_1, N(a_1, b)a_1) \in B'$ što je zapravo $(a, b) \in B'$. Ako ne postoji minimalan element u A, znamo da niz $\phi(a_m) \to 0$, gdje je niz a_m definiran kao u teoremu 3.20. Odaberemo a_m tako da vrijedi

$$\phi(a_m) < \frac{1}{2}\big[\phi(c) - \phi(a) - \phi(b)\big]$$

Iz toga slijedi je

$$N(a_m, a) + N(a_m, b) \in Na_m$$

Dakle, $(N(a_m, a)a_m, (a_m, b)a_m) \in B$, pa vrijedi $(a, b) \in B'$. Time je dokazan i drugi smjer, pa vrijedi ekvivalencija, dakle ϕ je izomorfizam.

$\square$

3.4.2 Hölderov teorem

Za Hölderov teorem trebamo pojam Arhimedovski uređene grupe.

Definicija 3.27. *Neka je A skup i $\circ$ operacija na skupu A. Relacijski sustav $(A, \circ)$ zovemo grupa ako vrijedi:*
(G1) (Asocijativnost) $\forall a, b, c \in A$, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
(G2) (Identiteta) Postoji element $e \in A$ takav da $\forall a \in A$, $a \circ e = e \circ a = a$
(G3) (Inverz) $\forall a \in A$ postoji element $b \in A$ takav da vrijedi $a \circ b = b \circ a = e$

Definicija 3.28. *Neka je relacijski sustav $(A, \succeq)$ jednostavnog uređaja, te operacija $\circ$ na A takva da je $(A, \circ)$ grupa. Trojku $(A, \succeq, \circ)$ nazivamo jednostavno uređena grupa ako $\forall a, b, c \in A$ vrijedi implikacija:*
ako je $a \succeq b$ tada $a \circ c \succeq b \circ c$ i $c \circ a \succeq c \circ b$.

Definicija 3.29. *Neka je relacijski sustav $(A, \succeq, \circ)$ grupa i neka je e identiteta grupe. Grupa je arhimedovski uređena ako za svaki $a \in A$ za kojeg vrijedi $a \succ e$ i $b \in A$ postoji prirodni broj n takav da je $na \succ b$*

Sada smo spremni iskazati i dokazati Hölderov teorem.

Teorem 3.30. *Neka je* $(A, \succeq, \circ)$ *jednostavna Arhimedovski uređena grupa. Tada je* $(A, \succeq, \circ)$ *izomorfna sa nekom podgrupom od* $(Re, \geq, +)$. *Ako su* ϕ *i* ϕ' *dva izomorfizma, tada postoji* $\alpha > 0$ *takav da je* $\phi' = \alpha\phi$.

Dokaz. Neka je $A^+ = \{a : a \succ e\}$, gdje je e identiteta. Neka je $B = A^+ \times A^+$, i neka je $\succeq^+$ restrikcija od $\succeq$ na A^+. Ako su $a, b \in A^+$, tada $a \circ b \succeq a \circ e = a \succ e$, pa je $a \circ b \in A^+$. Zbog toga, $\circ$ inducira funkciju $\circ^+$ sa B u A^+. Pokazat ćemo da relacijski sustav $(A^+, \succeq^+, B, \circ^+)$ zadovoljava aksiome $(A1) - (A8)$.

Aksiomi (A1)-(A5) su zadovoljeni, pa imamo uređenu polugrupu.

Da bi pokazali da vrijedi pozitivnost, aksiom (A6), pretpostavimo da je $c \in A^+$ i vrijedi $a \succeq a \circ c$. Tada

$$e = a^{-1} \circ a \succeq a^{-1} \circ (a \circ c) = c$$

što je kontradikcija sa $c \in A^+$. Zato vrijedi $a \circ c \succeq a$.

Da bi pokazali da vrijedi regularnost, aksiom (A7), pretpostavimo da je $c \succ a$ i neka je $b = c \circ a^{-1}$. Ako je $e \succeq b$ tada

$$a = e \circ a \succeq b \circ a = c$$

što je kontradikcija, pa je $b \in A^+$ i $c = b \circ a$.

Arhimedovost, aksiom (A8), smo pretpostavili u iskazu teorema.

Sve pretpostavke za teorem 3.21 su zadovoljene, pa znamo da postoji izomorfizam ϕ^+ sa A^+ u Re^+. Proširimo ga na A: ako je $e \succ a$ tada $a^{-1} \in A^+$. Koristimo isti argument regularnosti kao i gore. Sada možemo definirati ϕ kao

$$\phi(a) = \begin{cases} \phi^+(a) & , a \in A^+ \\ 0 & , \text{a=e} \\ -\phi^+(a^{-1}) & , e \succ a \end{cases}$$

□

Pogledajmo primjer preferencije. Neka je a euro, b nijedan euro, c život bogalja, d zdrav i sretan život. Uvjerljivo je reći da nijedan iznos eura ne može kompenzirati život bogalja, pa ne postoji takav n da vrijedi $(na \circ c) \succeq (nb \circ d)$, tj. ne vrijedi Arhimedov aksiom.

Ekstenzivna mjerenja su osnova za fizička mjerenja, ali do problema dolazimo ako ih želimo primjeniti u socijalnim mjerenjima i socijalnim znanostima.

Literatura

[1] F. S. Roberts, *Measurement theory*, Cambridge University Press, 1985.

[2] L. Čaklović, *Teorija vrednovanja s naglaskom na metodu potencijala*, Naklada Slap, 2014.

[3] D. H. Krantz, A. Tversky, P. Suppes, R. D. Luce ,*Foundations of Measurement Volume I: Additive and Polynomial Representations*, Academic Press, 1971.

[4] Bilješke sa predavanja iz matematičke analize 1

[5] Bilješke sa predavanja iz Algebarskih struktura

[6] Bilješke sa predavanja iz Elementarne matematike 1

[7] https://www.slideshare.net/GauriSShrestha/measurement-theory-7844052

[8] ftp://ftp.sas.com/pub/neural/measurement.html

Sažetak

Teorija mjerenja je novija matematička disciplina koja je zaživjela krajem 19. i početkom 20. stoljeća. Bavi se problemom mjerenja veličina zadanog objekta. U ovom radu pokušao sam približiti teoriju mjerenja čitatelju, navesti osnovne probleme s kojima se susrećemo, te njihova rješenja u obliku ideja i teorema. Baviti ćemo se i sa značajnošću izjave vezanih uz rezultat mjerenja. Primjer gdje često griješimo su izjave glede temperature: Danas je duplo toplije nego je bilo jučer. Cilj sa značajnosti izjava je navesti čitatelja na kritičko razmišljanje kod odlučivanja na temelju izjava koje svakodnevno čujemo. Posebnu pozornost posvećujemo ekstenzivnom mjerenju i Hölderovom teoremu. Ekstenzivna mjerenja su osnova za fizička mjerenja i njima smo posvetili cijelo zadnje poglavlje.

Summary

The theory of measurement is mathematical discipline that came to life in the late 19'th and early 20'th centuries. It deals with the problem of measuring the magnitude of the given object. In this paper, I tried to bring closer the theory of measurement to reader, specify the basic problems we encounter and their solutions in the form of ideas and theorems. We will deal with the meaningfulnesss of the statement relating to the result of measurement. An example of where mistakes are often made, are statements regarding temperature: Today is two times warmer than it was yesterday. The goal of meaningfulness of statement is to make the reader think critically when deciding on the basis of the statement that we hear every day. Special attention is paid to the extensive measurement and Hölder's theorem. Extensive measurements are the basis for physical measurements and we have devoted them the entire last chapter.

Životopis

Matija Benčić, rođen 29.10.1991. godine u Zagrebu. Osnovnu školu sam završio u svom rodnom mjestu, u Maču. Već u osnovnoj školi me privlačila matematika, možda zato jer su učiteljice bile domišljate i razlomke nas učile pomoću čokolade. Srednju školu sam pohađao u gradu Zlataru. Profesorica matematike, a ujedno i razrednica, gospođa Božena Palanović bila je najbolja motivatorica za učenje matematike. Zahvaljujući njoj sam shvatio da želim studirati matematiku. 2010. godine upisao sam preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji sam završio 2014 godine. Iste godine upisao sam diplomski studij financijske i poslovne matematike, kojeg trenutno završavam.