Matematičke slagalice

Babić, Dora

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dora Babić

MATEMATIČKE SLAGALICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentorici, doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler, na podršci, pomoći pri odabiru teme i ukazanom povjerenju tijekom izrade diplomskog rada.

Najveće hvala mojim roditeljima na bezuvjetnoj podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom mog obrazovanja.

Sadržaj

Uvod

„Djeca uče igrajući se. Još važnije, igranjem djeca uče kako učiti."

O. Fred Donaldson

Matematika se kao školski predmet često svrstava u skupinu predmeta koji učenicima nisu najdraži. Tome je najčešće tako jer učenici nisu dovoljno motivirani i zainteresirani za istraživanje matematike. Učenici nisu svjesni da je matematika svuda oko nas, pa čak i u onome što im je blisko i drago a to je igra. Prema definiciji, igra je aktivnost koja služi za razonodu ili zabavu, a njezina bit je postići cilj pridržavajući se pravila. Ako sve navedeno uzmemo u obzir, zašto matematiku učenicima ne bi učinili zanimljivijom upravo kroz igru?

Jedna od dobro poznatih igara su slagalice ili *puzzle*, a najpoznatija matematička slagalica je tangram. Tangram u nastavi možemo učenicima predstaviti već od najnižih razreda. Slaganjem raznih likova i predmeta, te proučavanjem dijelova tangrama učenici će razviti pozitivan odnos prema matematici te apstraktno i prostorno mišljenje.

Matematičke slagalice su igre koje koje u učenicima pobuđuju znatiželju i koje neće ispustiti iz ruke dok ne slože određenu figuru, a pritom će naučiti mnogo toga. A to i je bit igre, jer igra je i učenje.

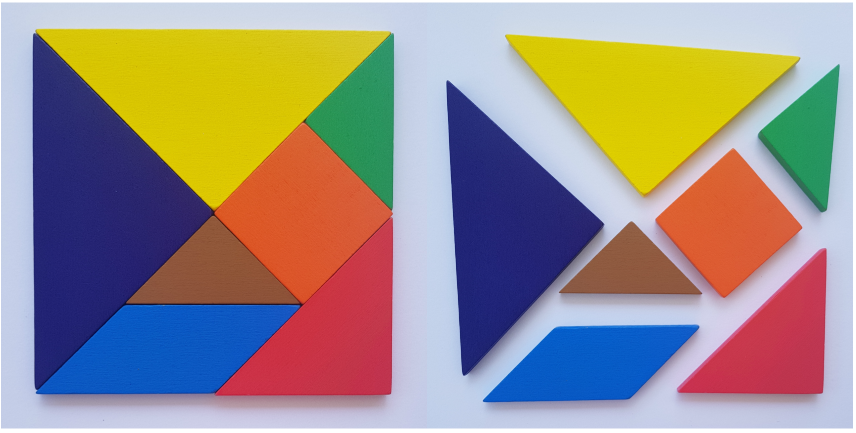
Diplomski rad podijeljen je u dva dijela. U prvom su opisane matematičke slagalice tangram, *Sei Shōnagon Chie no Ita*, stomahion i pentomino te njihova zanimljiva matematička svojstva. Naglasak je na slagalici tangram pa je u prvom dijelu dokazano da se od sedam dijelova tangrama može složiti točno 13 konveksnih likova. U drugom dijelu rada nalaze se primjeri aktivnosti s matematičkim slagalicama koje se mogu provesti u nastavi matematike a sve u svrhu razvoja različitih matematičkih koncepata kod učenika. Sve slike u diplomskom radu su napravljene osobno ili u programu dinamičke geometrije *Geogebra*.

Poglavlje 1

Tangram i druge slagalice

1.1 Što je tangram?

Tangram (slika 1.1.) je jedna od najstarijih kineskih slagalica, a vjeruje se da je nastala prije 1780. godine [2]. Tangram ili sedam pločica mudrosti (kin. *Qiqiaoban*), sastoji se od sedam dijelova, „tanova”, koji složeni daju određeni lik (figuru). Cilj slagalice je složiti svih sedam dijelova tako da tvore određenu prepoznatljivu figuru i da se dijelovi ne preklapaju.



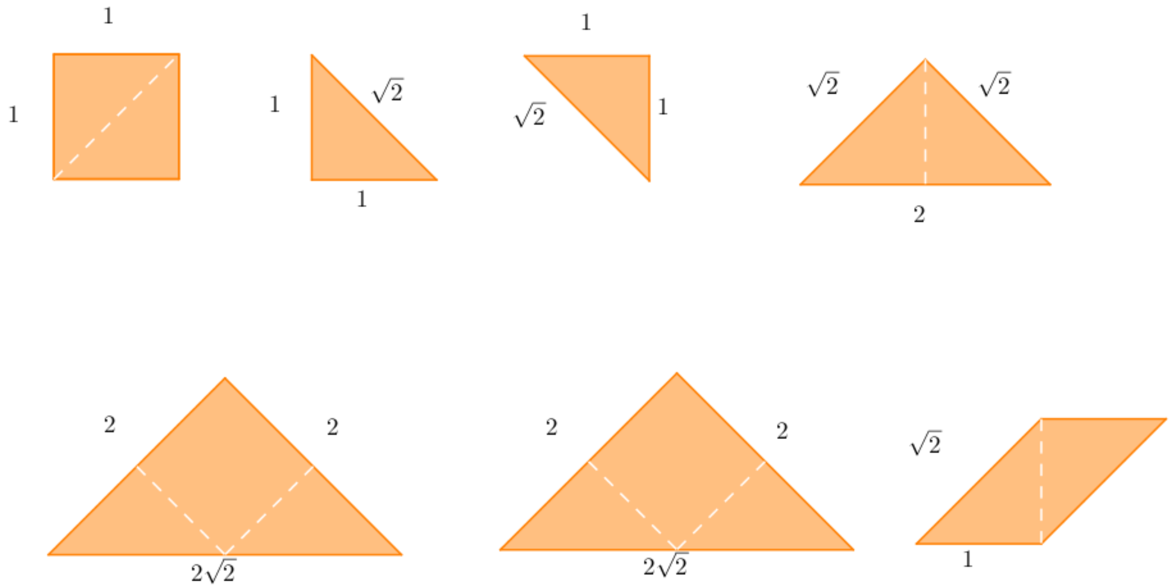
Slika 1.1: Tangram

O nastanku tangrama i njegovoj povijesti ne zna se puno. Jedna od legendi vezana uz tangram kaže da je sluga jednog kineskog cara zaslužan za nastanak tangrama tako što je slučajno razbio vrijednu keramičku pločicu. Sluga je pokušao sastaviti razbijene dijelove u kvadrat, a u tim pokušajima složio je razne druge figure ljudi, životinja i stvari.

Tangram se sastoji od sedam dijelova (pločica) od kojih pet ima oblik jednakokračnog pravokutnog trokuta, jedna oblik kvadrata i jedna oblik paralelograma. Tangram-pločice mogu se složiti u kvadrat.

Odredimo duljine stranica pločica tako da uzmemo da je duljina stranice malog kvadrata jednaka 1. Tada imamo (slika 1.2.):

- dva mala jednakokračna pravokutna trokuta kateta duljine 1 i hipotenuze duljine $\sqrt{2}$,
- jedan jednakokračni pravokutni trokut kateta duljine $\sqrt{2}$ i hipotenuze duljine 2,
- dva jednakokračna pravokutna trokuta kateta duljine 2 i hipotenuze duljine $2\sqrt{2}$,
- jedan paralelogram stranica duljine 1 i $\sqrt{2}$.



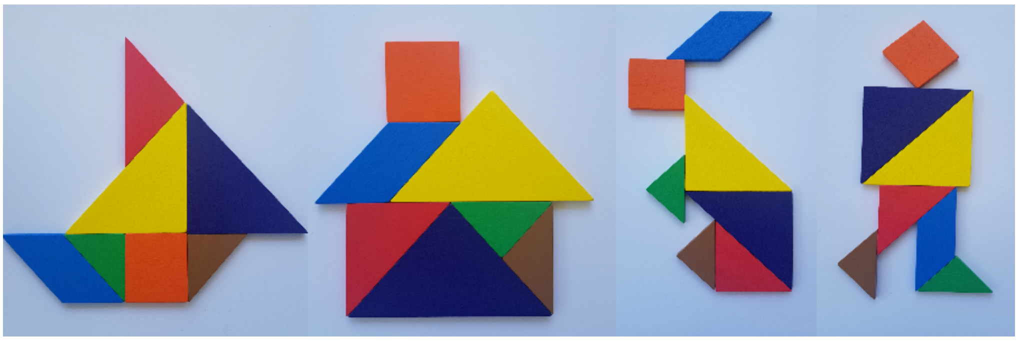
Slika 1.2: Dimenzije dijelova tangrama

Svaki od likova, osim dva najmanja jednakokračna pravokutna trokuta, možemo dobiti spajanjem dvaju malih jednakokračnih pravokutnih trokuta (srednji trokut i paralelogram) ili slaganjem kvadrata i dvaju malih jednakokračnih trokuta (dva velika trokuta). Ako tako promatramo likove, tada možemo uočiti da se tangram može „rastaviti" na 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta.

Sada možemo uočiti da su duljine stranica iz različitih skupova brojeva: racionalni brojevi (1, 2) i iracionalni brojevi ($\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$). Također, stranice koje čine pravi kut u svakom od sedam likova su ili obje racionalne duljine ili obje iracionalne duljine, a stranice koje čine kut od 45° ili 135° su jedna racionalna, a druga iracionalna.

1.2 Koliko konveksnih likova možemo složiti?

Od sedam dijelova tangrama može se složiti mnogo različitih figura – ljudi, životinje, predmeti (slika 1.3.) te razni geometrijski likovi.



Slika 1.3: Neki likovi složeni iz dijelova tangrama

Pitanje koje si sada možemo postaviti je koliko konveksnih likova se može složiti od sedam pločica, odnosno koliko geometrijskih likova možemo složiti takvih da skup točaka između bilo koje dvije točke tog lika također pripada liku.

Odgovor na to pitanje su 1942. godine dali kineski matematičari Fu Traing Wang i Chuan-Chih Hsiung. Njihov zajednički rezultat, kojeg su nazvali Teorem o tangramu, daje dokaz sljedećeg teorema [9].

Teorem 1.2.1. *Od sedam dijelova tangrama može se složiti točno* 13 *konveksnih likova.*

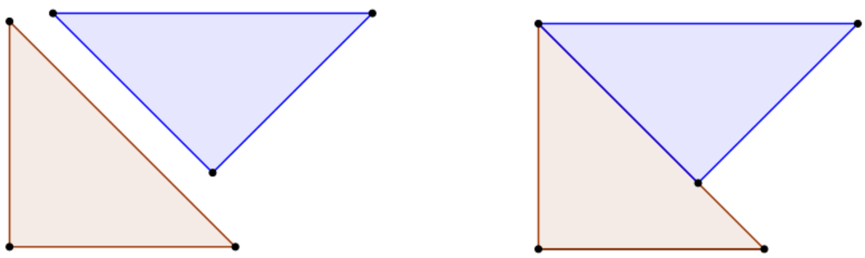
S obzirom na to da se tangram zapravo sastoji od 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta, teorem možemo dokazati tako da najprije odredimo koliko konveksnih likova (mnogokuta) možemo složiti od danih 16 takvih trokuta te odbacimo one mnogokute koji su nemogući za tangram.

Kako bismo to dokazali koristit ćemo sljedeće četiri leme.

Lema 1.2.2. *Ako* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta tvore konveksni mnogokut, tada stranica racionalne duljine jednog trokuta ne leži duž stranice iracionalne duljine drugog trokuta.*

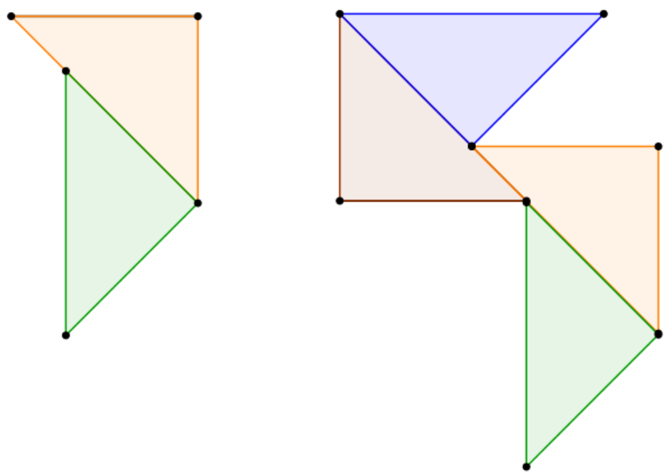
Dokaz. Pretpostavimo suprotno: 16 sukladnih jednakokračnih trokutâ čini konveksan mnogokut i stranica racionalne duljine jednog trokuta leži duž stranice iracionalne duljine drugog trokuta.

Uzmimo dva trokuta od danih 16 i posložimo ih tako da stranica racionalne duljine jednog trokuta leži duž stranice iracionalne duljine drugog trokuta. Iz pretpostavke da svih 16 trokutâ tvore konveksni mnogokut, možemo zaključiti da se prvi vrh prvog trokuta podudara s prvim vrhom drugog trokuta kao na slici (slika 1.4.).



Slika 1.4: Slika uz dokaz leme 1.2.2.

Tada postoji barem još jedan par trokutâ od preostalih 14 koji su složeni na isti način. Sada možemo oba para složiti tako da tvore mnogokut kao na slici (slika 1.5)



Slika 1.5: Slika uz dokaz leme 1.2.2.

Uočimo dva vanjska kuta dobivenog mnogokuta koja možemo popuniti s preostalim trokutima. Učinimo li tako opet će stranica racionalne duljine jednog trokuta ležati duž stranice iracionalne duljine drugog trokuta.

Ponavljanjem postupka možemo uočiti da mnogokut dobiven od danih trokuta nije konveksan, što je u kontradikciji s danom pretpostavkom. Dakle, 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta možemo složiti u konveksan mnogokut tako da stranica racionalne (iracionalne) duljine jednog trokuta leži uz stranicu racionalne (iracionalne) duljine drugog trokuta.

□

Iz Leme 1.2.2. direktno slijedi sljedeća Lema:

Lema 1.2.3. *Neka je konveksan mnogokut sastavljen od* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta. Tada vrijedi:*

1. *Svaka stranica mnogokuta sastoji se ili samo od racionalnih ili samo od iracionalnih stranica trokutâ.*

2. *Ako stranice mnogokuta sastavljene od racionalnih stranica trokutâ nazovemo racionalnim, a one druge iracionalnim, onda u tom mnogokutu racionalne i iracionalne stranice alterniraju, osim ako zatvaraju pravi kut. Stranice koje zatvaraju pravi kut su ili obje racionalne ili obje iracionalne.*

Lema 1.2.4. *Ako* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta tvore konveksni mnogokut, tada broj stranica mnogokuta nije veći od* 8.

Dokaz. Zbroj veličina svih kuteva u konveksnom mnogokutu s n stranica jednak je $(n-2)\cdot 180°$. Znamo da je najveći kut što ga mogu tvoriti dva jednakokračna pravokutna trokuta u ovom slučaju jednak $135°$. Iz toga slijedi da je $(n-2)\cdot 180° \leq 135° \cdot n$. Sređivanjem izraza dobivamo da je $n \leq 8$. Dakle, broj stranica mnogokuta nije veći od osam. □

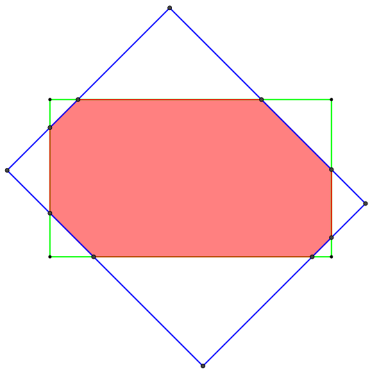
S obzirom na to da kutevi konveksnog mnogokuta dobiveni slaganjem danih trokuta mogu biti veličine $135°$, $90°$ i $45°$, korištenjem Leme 1.2.2. i Leme 1.2.3. slijedi:

Lema 1.2.5. *Ako* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta tvore konveksni mnogokut, tada taj mnogokut možemo upisati u pravokutnik tako da se ili sve stranice racionalne duljine ili sve stranice iracionalne duljine mnogokuta nalaze na stranicama pravokutnika.*

Sada dokažimo teorem uz pomoć navedenih lema, pri čemu koristimo pojednostavljeni pristup [7].

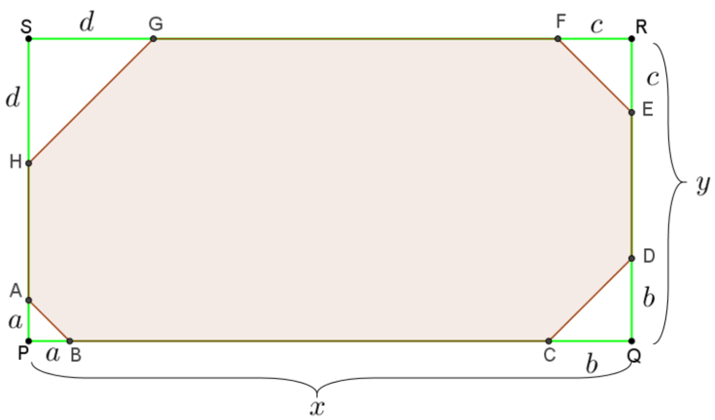
Dokaz. Teorem ćemo dokazati tako što ćemo pronaći konveksne mnogokute koji se mogu složiti od 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokutâ te po potrebi odbaciti one mnogokute koje ne možemo složiti od dijelova tangrama.

Koristeći Lemu 1.2.4. možemo pretpostaviti da je traženi konveksni mnogokut osmerokut *ABCDEFGH*. Iz Leme 1.2.3. i Leme 1.2.5. možemo također pretpostaviti da je osmerokut upisan u pravokutnik *PQRS* na način kako je prikazano na slici 1.6.:



Slika 1.6: Slika uz dokaz Teorema 1.2.1.

Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je osmerokut kojeg tražimo upisan u pravokutnik sa stranicama racionalnih duljina x, y. Neka su odsječci koje čini osmerokut upisan u pravokutnik označeni kao na slici (slika 1.7.):



Slika 1.7: Slika uz dokaz Teorema 1.2.1.

Uočimo da moraju vrijediti sljedeći uvjeti:

$$a + b \leq x, c + d \leq x, b + c \leq y, a + d \leq y \tag{1.1}$$

Promotrimo površine:

- površina pravokutnika je $P_{PQRS} = xy$;

- površina osmerokuta jednaka je zbroju površina svih dijelova tangrama, odnosno $P_{ABCDEFGH} = 8$;

- površine malih trokuta koji nastaju kao odsječci osmerokuta upisanog u pravokutnik su: $P_{PBA} = \frac{a^2}{2}, P_{QDC} = \frac{b^2}{2}, P_{RFE} = \frac{c^2}{2}, P_{SGH} = \frac{d^2}{2}$.

Slijedi:

$$P_{PQRS} - P_{ABCDEFGH} = P_{PBA} + P_{QDC} + P_{RFE} + P_{SGH}, \tag{1.2}$$

$$xy - 8 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}, \tag{1.3}$$

$$2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{1.4}$$

Sada smo problem sveli na traženje cjelobrojnih (racionalnih) rješenja jednadžbe (1.4) uz uvjete (1.1).

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leq b, c, d$ (inače po potrebi zrcalimo ili rotiramo pravokutnik *PQRS*). S obzirom na to da zbroj svih stranica racionalnih duljina svih dijelova tangrama nije veći od 10, možemo zaključiti da je $x < 10$.

Slijedi $y \leq x < 10$. Dakle, za $2 \leq x \leq 9$ gledamo sve y takve da je $2 \leq y < x$. Za svaku takvu kombinaciju (x, y), točnije 44 takve kombinacije, mora vrijediti: $0 \leq a \leq y$, $a \leq b, c, d \leq y$.

Sada za svaku kombinaciju računamo $xy - a^2 - b^2 - c^2 - d^2$. Ako rješenje nije jednako 16 tada ga odbacimo, a ako jest onda moramo provjeriti uvjete (1.1). Nakon tog postupka preostat će nam samo 23 moguće kombinacije.

Kako bi što jednostavnije i brže dobili sve kombinacije, možemo napisati kratki programski kod koji će nam dati rješenja. Slika 1.8. prikazuje programski kod, a zatim su u tablici prikazane 23 moguće kombinacije.

```c
#include<stdio.h>

int main(){

int a, b, c, d, x, y, M, z=1;

printf("    |x  | y | a | b | c | d\n");
printf("---------------------\n");
for(x=2; x<=20; x++){
    for(y=2; y<=x; y++){
        for(a=0; a<=y; a++){
            for(b=a; b<=y; b++){
                for(c=a; c<=y; c++){
                    for(d=a; d<=y; d++){
                        M=2*x*y-(a*a+ b*b+ c*c+ d*d);
                        if(a+b<=x && c+d<=x && a+d<=y && b+c<=y && M==16){
                                                printf("%02d. | %d | %d | %d | %d | %d | %d\n",z, x, y, a, b, c, d);
                                                z++;
                                                                            }
                                            }
                                        }
                                    }
                                }
                            }



return 0;
}
```

Slika 1.8: Programski kod

redni broj	x	y	a	b	c	d	
1.	3	3	0	0	1	1	Tangram
2.	3	3	0	1	0	1	Tangram
3.	3	3	0	1	1	0	
4.	4	2	0	0	0	0	Tangram
5.	4	3	0	0	2	2	Tangram
6.	4	3	0	2	0	2	Tangram
7.	4	4	0	0	0	4	Tangram
8.	4	4	0	0	4	0	
9.	4	4	0	4	0	0	
10.	4	4	2	2	2	2	Tangram
11.	5	2	0	0	0	2	Tangram
12.	5	2	0	0	2	0	
13.	5	2	0	2	0	0	
14.	5	2	1	1	1	1	Tangram
15.	5	3	0	1	2	3	Tangram
16.	5	3	0	2	1	3	Tangram
17.	5	5	0	3	0	5	
18.	5	5	0	5	0	3	
19.	5	5	1	4	1	4	
20.	6	2	0	0	2	2	Tangram
21.	6	2	0	2	0	2	Tangram
22.	6	4	0	4	0	4	
23.	9	8	0	8	0	8	

Od dobivene 23 kombinacije odbacujemo njih 10 i to na sljedeći način:

- 3. slučaj ekvivalentan je 1. slučaju,
- slučajevi 8. i 9. ekvivalentni su 7. slučaju,
- slučajevi 12. i 13. ekvivalentni su 11. slučaju,
- 23. slučaj je dugački tanki paralelogram koji se ne može složiti od dijelova tangrama pa ga odbacujemo,
- u 19. slučaju zbroj duljina iracionalnih stranica iznosi $10\sqrt{2}$, što je jednako zbroju duljina svih iracionalnih stranica dijelova tangrama, no u ovom slučaju ne možemo koristiti obje iracionalne stranice paralelograma,
- slučajeve 17. i 22. možemo odbaciti na sličan način, u oba slučaja traži se osam stranica iracionalne duljine kao rubne stranice mnogokuta, što je nemoguće,
- 18. slučaj ekvivalentan je 17. slučaju.

Dakle, od sedam dijelova tangrama možemo složiti točno trinaest konveksnih mnogokuta. □

1.3 *Sei Shōnagon Chie no Ita*

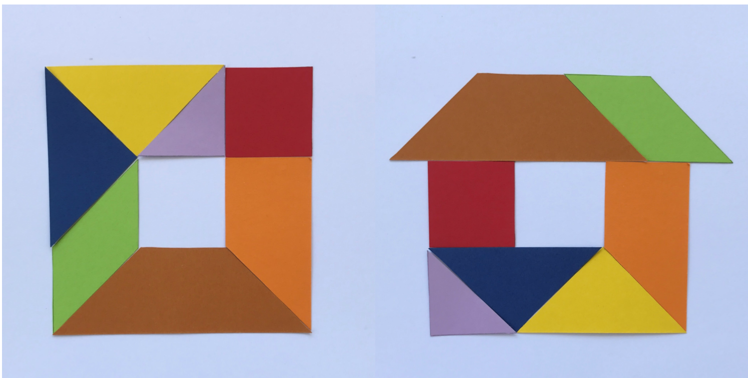
Sei Shōnagon Chie no Ita je matematička slagalica vrlo slična tangramu. Potječe iz Japana, a ime je dobila po japanskoj spisateljici i pjesnikinji Sei Shōnagon (966. – 1017./1025.), iako ne postoje dokazi da je slagalica postojala već za vrijeme njezinog života. *Chie no Ita* u prijevodi znači „ploče mudrosti”. Smatra se da je slagalica dobila ime po mudrosti Sei Shōnagon. Ime slagalice se u literaturi prvi put pojavljuje 1742. godine.[3] Slagalica se, kao i tangram, sastoji od sedam dijelova (slika 1.9.):

- jedan mali jednakokračni pravokutni trokut,
- dva veća jednakokračna pravokutna trokuta,
- jedan kvadrat,
- jedan paralelogram,
- jedan pravokutni trapez,
- jedan jednakokračni trapez.

Slika 1.9: Sei Shōnagon Chie no Ita

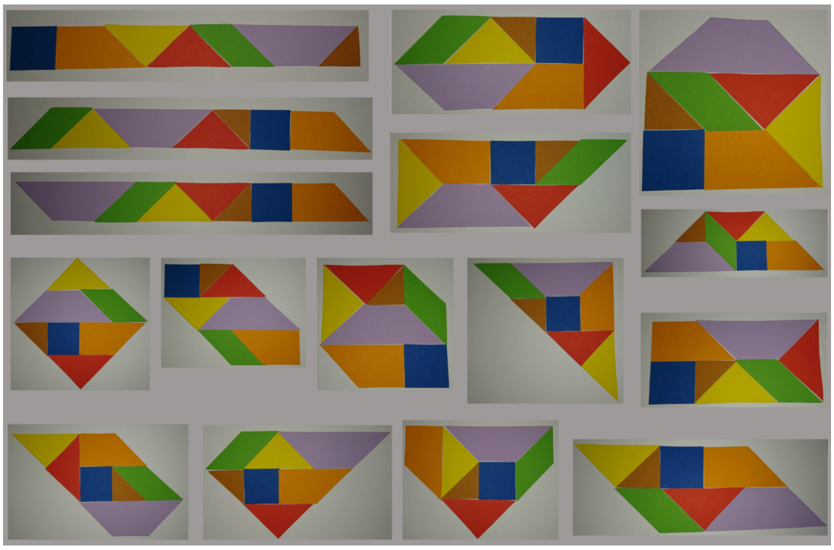
Iako se sastoje od različitih likova, *Sei Shōnagon Chie no Ita* se također kao i tangram može rastaviti na 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta.

U Japanu je tangram popularniji od *Sei Shōnagon Chie no Ita*, no slagalica je zanimljiva zato što se od njezinih dijelova mogu složiti figure koje se od dijelova tangrama ne mogu složiti (slika 1.10.).



Slika 1.10: Neki likovi složeni od dijelova *Sei Shōnagon Chie no Ita*

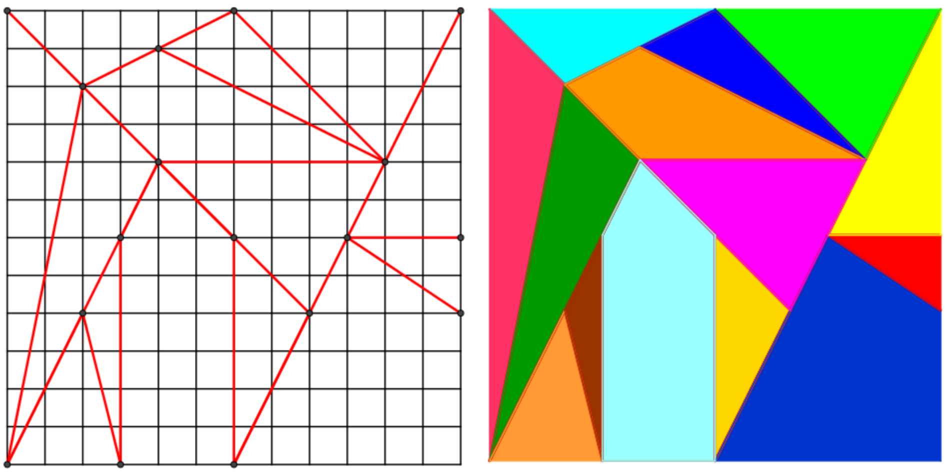
Kao i kod tangrama, prirodno je upitati se koliko konveksnih mngokuta možemo složiti od dijelova slagalice *Sei Shōnagon Chie no Ita*. Odgovor možemo dobiti koristeći se već navednim rezultatom Teorema o tangramu. Od sedam dijelova slagalice *Sei Shōnagon Chie no Ita* možemo složiti točno 16 konveksnih mnogokuta (slika 1.11.)[3].



Slika 1.11: Šesnaest konveksnih mnogokuta složenih od dijelova *Sei Shōnagon Chie no Ita*

1.4 Stomahion

Stomahion je vjerojatno jedna od najstarijih matematičkih slagalica, a sastoji se od 14 dijelova dobivenih iz kvadratne mreže 12×12, od kojih su dva lika duplicirana (slika 1.12.).



Slika 1.12: Dijelovi stomahiona

Smatra se da stomahion potječe još iz doba Arhimeda (287. – 212. prije Krista), štoviše da ga je on i osmislio. Stomahion je slagalica koju možemo pronaći i pod nazivima: *Ostomachion, Syntemachion*, a poznata je i pod nazivom *Loculus of Archimedes* što možemo prevesti kao Arhimedov kvadrat. Jedini pisani izvor o stomahionu iz tog doba je *Palimpsest*, rukopis (izbrisan i ponovo napisan) koji sadrži neke Arhimedove rezultate. Palimpsest je od svoga nastanka pa sve do danas prošao kroz ruke mnogo ljudi i razne nepovoljne uvjete, no 1998. godine došao je u ruke nepoznatog vlasnika koji je znanstvenicima dopustio istraživanje palimpsesta.

Tada su znanstvenici već bili upoznati sa slagalicom naziva „*stomach-ache*" koja se sastoji od 14 dijelova koji se mogu složiti tako da čine kvadrat. Cilj igre, barem za većinu ljudi, bio je složiti što više različitih prepoznatljivih figura, primjerice slona, kuću ili ratnika.

S druge strane, jedan od znanstvenika sa Stanforda, Reviel Netz, smatrao je da stomahion Arhimedu nije bila igra. Arhimed je stomahion promatrao jer je zanimljiv geometrijski i kombinatorni problem. Vjeruje se da je Arhimed proučavao načine na koje se od 14 dijelova stomahiona može složiti kvadrat. S obzirom na to, Reviel Netz je kontaktirao matematičare i rekao im je o kojem problemu je riječ [5].

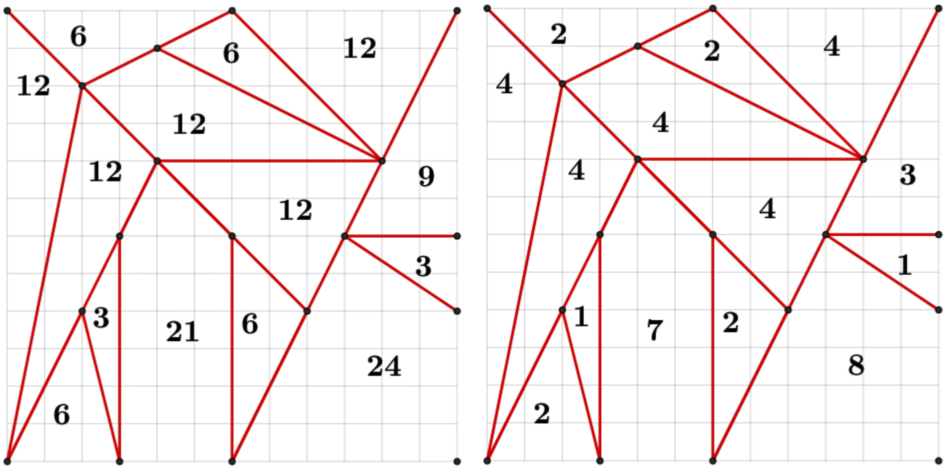
Odgovor na pitanje dali su matematičari sa Stanforda 2003. godine, a kao rezultat svog istraživanja dobili su 17152 moguća načina. Pritom su tu uključene i konfiguracije koje su ekvivalentne obzirom na rotaciju ili zrcaljenje. U isto vrijeme odgovor na pitanje dao je i matematičar Bill Cutler, koji je pomoću računalnog programa došao do rezultata od 536 moguća načina za složiti kvadrat. Naravno, oba rezultata su točna, jedan uključujući rotacije i zrcaljenja, a drugi ne [6].

Sliku koja pokazuje svih 536 načina može se pogledati ovdje.

Ne možemo znati je li Arhimed uspio pokazati koliko načina ima, no sama spoznaja da se Arhimed u 3. stoljeću pr. Kr. bavio problemima iz kombinatorike (prebrojavanjem) je vrlo značajna i pokazuje koliko je Arhimed bio ispred svog vremena.

Još jedno zanimljivo svojstvo stomahiona je činjenica da je površina svakog dijela stomahiona proporcionalna površini cijelog kvadrata.

Izračunajmo najprije površinu svakog lika stomahiona (desno naslici 1.13.) te uočimo da svaki iznos površine svakog lika možemo podijeliti s najvećim zajednčkim djeliteljem 3 (lijevo na slici 1.13.).



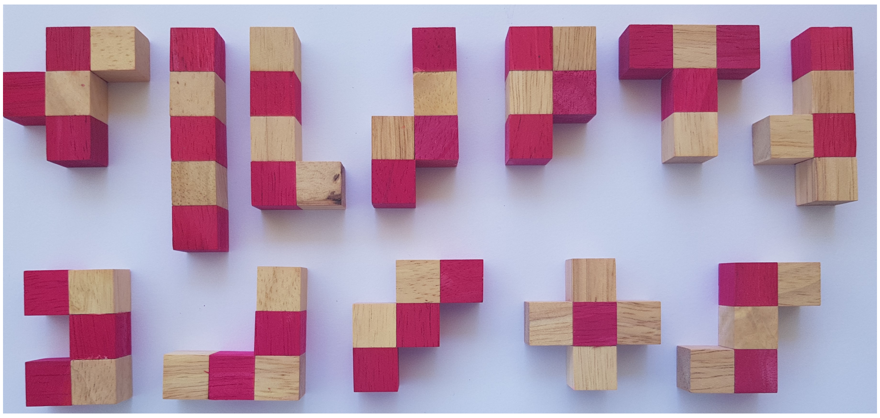
Slika 1.13: Dijelovi stomahiona i njihove površine

Sada možemo uočiti da je površina svakog dijela Stomahiona višekratnik od $\frac{1}{48}$ površine cijelog kvadrata.

1.5 Pentomino

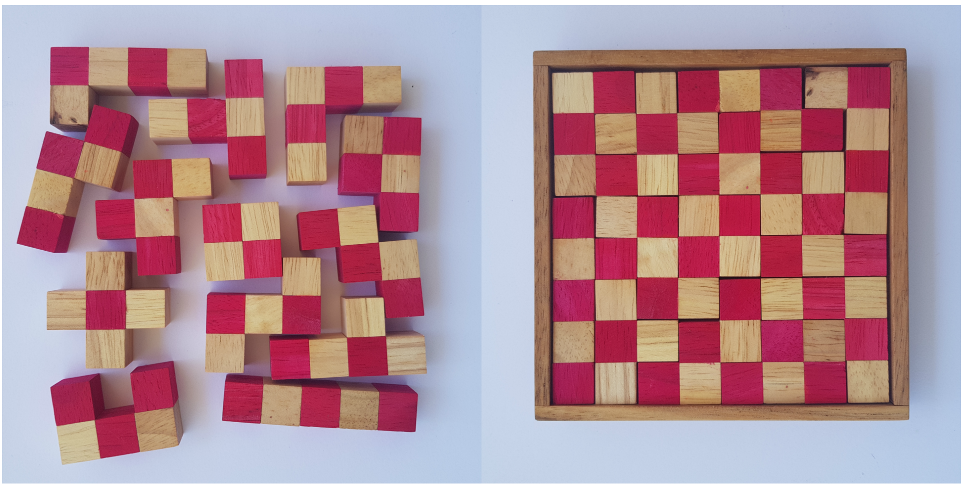
Pentomino (ili pentamino) je poliomino. Pojam poliomino prvi je predstavio matematičar Solomon W. Golomb u svom članku „*Checker Boards and Polyominoes*" koji je objavljen 1954. godine. Poliomino je figura (lik) sastavljen od n kvadrata istih dimenzija duž njihovih stranica. Najjednostavniji poliomino je monomino kojeg čini jedan kvadratić, od kojeg su sastavljenji svi ostali poliomini. Domino je sastavljen od dva kvadratića, trimino od tri, tetramino od četiri, pentomino od pet kvadratića, itd.

Monomino i domino su jedinstveni, odnosno možemo reći da imaju samo po jedan tip. Trimino i svi ostali poliomini nisu jedinstveni, primjerice postoje dva tipa trimina (L-trimino, I-trimino), pet tipova tetramina (I-tetramino, L-tetramino, T-tetramino, Z-tetramino, O-tetramino). Pentomino ima 12 različitih tipova prikazanih na slici 1.14.



Slika 1.14: Dvanaest pentomina

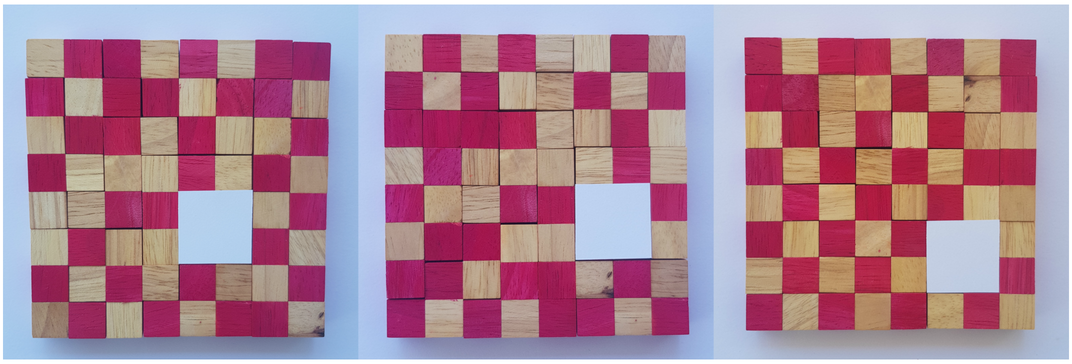
Uz poliomine veže se pojam prekrivanja (popločavanja) ploče dimenzija $m \times n$. Jedan od prvih takvih problema zadao je H. E. Dudeney u svojoj knjizi *The Canterbury Puzzles* iz 1907. godine. Problem započinje anegdotom o šahovskoj ploči iz vremena Williama Osvajača kada je njegov brat princ Henry ploču slomio udarivši ga pločom u glavu. Ploča se slomila na trinaest dijelova, točnije dvanaest pentomina i kvadratni tetramino. Zadatak je bio sastaviti ploču od razbijenih dijelova.
Problem se može postaviti na sljedeći način: „Kako prekriti šahovsku ploču 8×8 pomoću zadanih poliomina?" (slika 1.15.)



Slika 1.15: Prekrivanje šahovske ploče pentominima

Dudeney je u svojoj knjizi dao i rješenje problema u kojem kvadratni tetramino zauzima bočni položaj na ploči. Trideset godina nakon Dudeneyeve knjige i danog rješenja za problem su se počeli interesirati čitatelji britanskog časopisa za ljubitelje šaha *The Fairy Chess Review* te su najzanimljiviji rezultati bili objavljeni 1954. godine u navedenom časopisu.

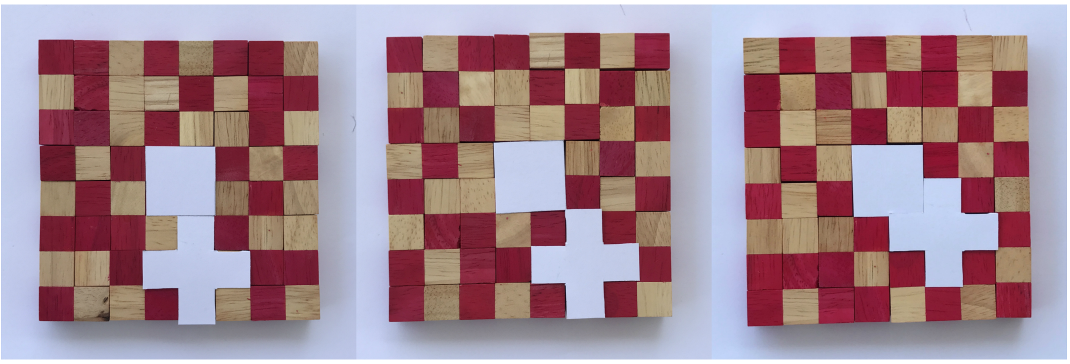
Prvi koji je pokazao da Dudeneyev problem može biti riješen neovisno o položaju kvadratnog tetramina na ploči bio je T. R. Dawson, osnivač spomenutog časopisa. Dawson je pokazao da kvadratni tetramino složen uz L-pentomino tvori kvadrat 3×3. Na slici 1.16. možemo vidjeti položaje kako ih je postavio Dawson.



Slika 1.16: Dawsonovo rješenje Dudeneyevog problema

Rotacijom cijelog kvadrata (šahovske ploče), kvadratni tetramino možemo dovesti u četiri različita položaja na svakoj od tri šahovske ploče. S obzirom na to da cijelu ploču (njezine dijelove) možemo rotirati i zrcaliti lako je vidjeti da kvadratni tetramino može biti postavljen na bilo koje mjesto na ploči.

Točan broj različtih rješenja ovog problema nije poznat ni dan danas, no pretpostavlja se da ima više od 10000 različitih rješenja. Problem u kojem se traži broj različith rješenja, ali tako da je kvadratni tetramino u sredini ploče, riješila je matematičarka Dana S. Scott 1958. godine. Scott je pomoću računalnog programa koji je tada računao tri i pol sata došla do rezultata od 65 različitih rješenja ne računajući one koji se jedni iz drugih mogu dobiti rotacijama i zrcaljenjima. Dobivenih 65 rješenja možemo razvrstati u tri kategorije prikazane na slici 1.17.



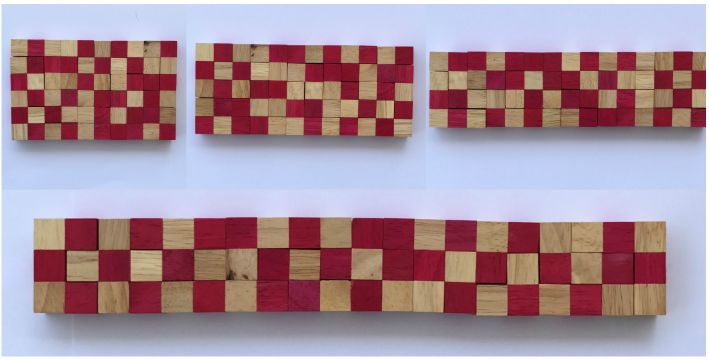
Slika 1.17: Scottina rješenja Dudeneyevog problema

Pregledavajući rješenja došlo se do zanimljivih činjenica:

- ne postoji rješenje u kojem I-pentomina ne leži duž ruba ploče;
- sedam rješenja, koja se nalaze u prvoj i trećoj kategoriji, su takva da nemaju „križanje”, odnosno ne postoji točka u kojoj se dodiruju rubovi četiri pločice (prva kategorija na slici 1.17.).

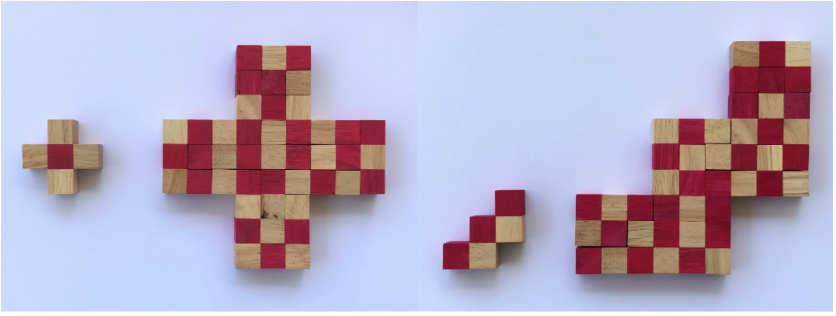
Navedimo još neke zanimljive probleme s pentominama:

1. Pentomine je moguće složiti u pravokutnike sljedećih dimenzija: 6×10, 5×12, 4×15 i 3×20 (slika 1.18.), od kojih je najteže složiti posljednji te postoje samo dva različita rješenja ne računajući rotacije i zrcaljenja.



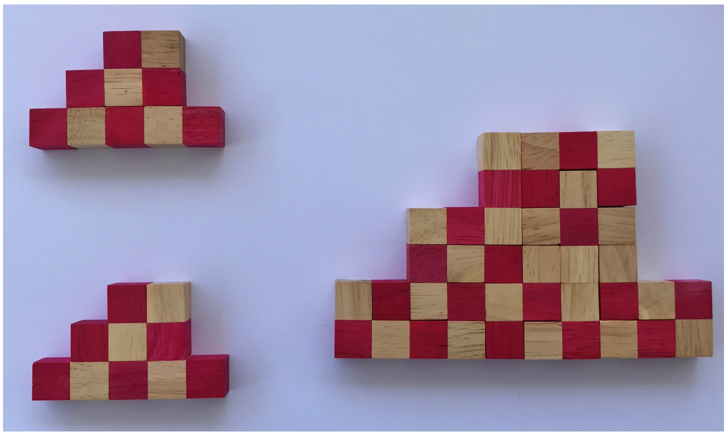
Slika 1.18: Pravokutnici složeni iz pentomina

2. Problem utrostručenja predstavio je matematičar Raphael M. Robinson. Problem je sljedeći: Izaberimo jedan pentomino, zatim od preostalih jedanaest izaberimo njih devet i od njih složimo veliki model prvog izabranog pentomina. Model će biti tri puta širi i dulji od prvog izabranog pentomina (slika 1.19.). Može se pokazati da se problem može riješiti za sve pentomine.



Slika 1.19: Problem utrostručenja

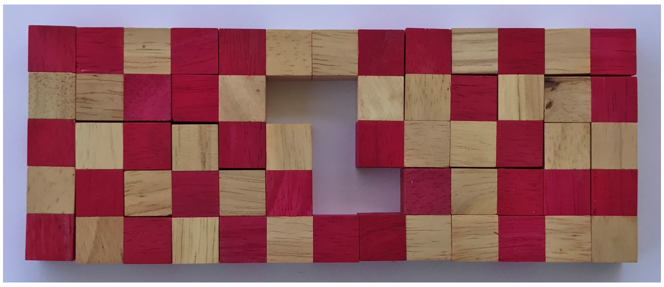
3. *Double double problem* predstavio je jedan od čitatelja spomenutog časopisa Harry Brueggemann, a problem glasi: Izaberemo dvije pentomine i složimo bilo koji lik, zatim od preostalih deset pentomina izaberemo još dvije pentomine i napravimo isti takav lik. Preostalih osam pentomina se tada mogu složiti u lik koji je dva puta veći od prvog lika (slika 1.20.)



Slika 1.20: *Double double problem*

4. Čitatelj spomenutog časopisa Paul J. Slate postavio je problem u kojem se korištenjem svih dvanaest pentomina mora složiti pravokutnik 5×13 s prazninom unutar pravo-

kutnika koja ima oblik jedne od pentomina. Problem je rješiv za sve pentomine. Jedno rješenje prikazano je na slici 1.21.



Slika 1.21: Slateov problem

5. Problem koji je postao igra postavio je već spomenuti S. W. Golomb, a problem glasi: „Koji je najmanji broj pentomina složenih na ploču tako da je nemoguće smjestiti ostale pentomine?”. Golomb je dao i odgovor na problem, a odgovor je pet pentomina. Od tog problema Golomb je napravio natjecateljsku igru za dvoje ili više igrača: Igrači redom uzmaju pentomine i slažu ih na ploču na mjesto koje žele, prvi igrač koji ne može smjestiti pentominu je gubitnik. Golomb je rekao da igra može trajati najmanje pet poteza, odnosno najviše dvanaest [4].

Poglavlje 2

Upotreba matematičkih slagalica u nastavi matematike

2.1 Primjena matematičkih slagalica u školi

Matematičke slagalice nastavnici već dugo primijenjuju u nastavi. Pokazalo se da su u nastavi matematičke slagalice vrlo korisne, među njima naravno tangram kao najčešća. Postoji niz aktivnosti koje se mogu primijeniti u nastavi, posebice u osnovnoj školi.
Tangram, stomahion i pentomino uklopljeni u proces učenja pomažu učenicima u razvijanju:

- geometrijskog znanja i mišljenja;
- rasuđivanja i rješavanja geometrijskih problema;
- vizualno - prostornih vještina;
- kreativnosti i mašte [1].

Van Hielove razine geometrijskog mišljenja

Najpoznatiji opis razvoja geometrijskog mišljenja kod učenika, neovisno o godinama starosti, dao je nizozemac Pierre van Hiele. Prema njegovoj teoriji učenici kroz razne aktivnosti razvijaju svoje geometrijsko mišljenje i napreduju po određenim razinama. Razine su sljedeće:

1. vizualizacija;
2. analiza;

3. neformalna dedukcija;
4. dedukcija;
5. strogost [8].

Tangram je, kao geometrijska matematička slagalica, odličan materijal za razne aktivnosti po pojedinim razinama. Aktivnosti nisu namijenjene za posebnu dob, ali najbolje su za provođenje u dobi od 7 do 10 godina, to jest u prva četiri razreda osnovne škole. Primjeri aktivnosti koje možemo provesti po razinama su sljedeće:

1. Svakom učeniku podijelimo tangram set. Pustimo učenike da istraže dobivene likove, te ih pitamo što mogu učiniti s dobivenim dijelovima. U ovoj fazi učenike treba pustiti da što više sami istražuju i pokušaju složiti razne likove. Time ih potičemo na razmišljanje o svojstvima i vezama među likovima.

2. Na ovoj razini želimo učenike usmjeriti na određena svojstva dijelova tangrama. Učenike možemo uputiti da od nekih dijelova tangrama (primjerice od malog trokuta i paralelograma) probaju složiti što više različitih likova. Potaknemo raspravu među učenicima o tome koje likove su dobili, znaju li nekima ime ili imaju ideju kako bi se zvali. Učenici će tijekom aktivnosti uočiti razna svojstva likova kao što su paralelne stranice, stranice jednake duljine, itd. što će dovesti do boljeg razumijevanja svojstava likova.

3. Cilj aktivnosti na ovoj razini je razviti učenički vokabular vezan uz geometriju. Nastavnik može učenicima zadati da uz svaki od likova napiše nekoliko svojstava koje vrijede za taj lik. Učenicima možemo zadati da izdvoje one likove koji imaju pravi kut, pa one koji imaju paralelne stranice ili one koji imaju dvije stranice iste duljine, itd. Nastavnik može osmisliti igru u kojoj neki učenici opisuju lik koristeći njegova svojstva, a ostali učenici pogađaju o kojem je liku riječ.

4. Na ovoj razini učenicima možemo dati zadatke otvorenog tipa, cilj toga je da učenici povežu sve što su do sada usvojili i primjene u rješavanju zadatka. Primjeri zadataka: *Na koliko načina možete složiti kvadrat od svih dijelova?*, *Slaganje pločica tako da tvore neki zadani lik – zec, kuća, brod.*

5. Učenici koji su došli do ove razine trebali bi biti u mogućnosti rezimirati i reproducirati do sad naučeno. S učenicima možemo igrati razne igre (*memory*, kartice pogađanja) kojima će do izražaja doći sve što su usvojili o likovima koji tvore tangram.

2.2 Koje aktivnosti provesti?

U ovom, posljednjem poglavlju, navodimo konkretne primjere školskih aktivnosti.

Aktivnost 1. *Razlomci i Tangram*

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti koji dio tangrama zauzimaju pojedini dijelovi

Oblik rada: samostalan rad

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram za svakog učenika, nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Svakom učeniku podijeliti tangram (ukoliko ima vremena učenici mogu sami izraditi tangram) i nastavne listiće s pitanjima koja će učenika dovesti do zaključka.

Primjer pitanja na nastavnom listiću:

1. Od dobivenih sedam likova pokušajte složiti kvadrat tako da se dijelovi ne preklapaju.
2. Za svaki od dijelova tangrama odredite koji je taj lik dio cijelog tangrama:
   - Veliki pravokutni trokut zauzima ___ cijelog kvadrata.
   - Srednji pravokutni trokut zauzima ___ cijelog kvadrata.
   - Mali pravokutni trokut zauzima ___ cijelog kvadrata.
   - Mali kvadrat zauzima ___ cijelog kvadrata.
   - Paralelogram zauzima ___ cijelog kvadrata.
3. Od danih dijelova tangrama napravite lik koji ima površinu $\frac{5}{8}$.

Ova aktivnost je zanimljiva jer se može po potrebi prilagoditi učeničkom znanju i nastavnim situacijama, primjerice može se učenicima postaviti zadatak u kojem će biti promijenjene veličine (npr. veliki kvadrat je jedno cijelo) ili se može iskoristiti za uspoređivanje razlomaka. Aktivnost je primjerena za učenike 5. i 6. razreda.

Aktivnost 2. *Kutovi i stranice tangrama*

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti kakvi su kutovi i stranice dijelova tangrama

Oblik rada: rad u paru

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram za svakog učenika, nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u parove kako sjede u klupi te podijelimo svakom učeniku tangrame i nastavne listiće. Nastavni listići su koncipirani tako da svaki učenik ima svoj listić: jedan učenik će razvrstavati dijelove tangrama po kutovima, a drugi učenik po stranicama.

Primjer listića „**po kutovima**":

Razvrstajte dijelove tangrama na sljedeće načine:

1. Pravi kut
2. Šiljasti kut
3. Tupi kut
4. Jeste li neke likove mogli staviti u više skupina? Koja skupina je imala samo jedan lik?
5. Usporedite šiljaste kutove svih dijelova? Kakvi su?

Primjer listića „**po stranicama**":

Razvrstajte dijelove tangrama na sljedeće načine:

1. Trokut
   a) Raznostranični
   b) Jednakostranični
   c) Jednakokračni
2. Četverokut
   a) Sve stranice jednake duljine
   b) Nasuprotne stranice paralelne
   c) Nasuprotne stranice jednake duljine
3. Kakvi su svi trokuti tangrama s obzirom na stranice i kutove? Kakvi su četverokuti? Kako nazivamo te četverokute?

Ova aktivnost primjerena je za 6. razred osnovne škole. Aktivnost se može realizirati i drugačije, primjerice učitelj može na ploči ispisati sve kategorije koje bi učenici popunjavali tako da izlaze pred ploču i lijepe svoj dio tangrama u određenu kategoriju.

Aktivnost 3. *Sličnost i tangram*

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti što je sličnost te koeficijent sličnosti pomoću tangrama i proporcionalnosti

Oblik rada: rad u paru

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram za svakog učenika, nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u parove te jedan učenik mora izrezati dijelove tangrama koji čine kvadrat 20×20, a drugi učenik mora izrezati dijelove tangrama koji čine kvadrat 10×10. Zatim moraju spariti dijelove tangrama prema vrsti mnogokuta (odgovarajuće trokute, odgovarajuće kvadrate i odgovarajuće paralelograme). Učitelj tada može postaviti sljedeća pitanja:

1. Kako možete odrediti jesu li parovi proporcionalni?
2. Postoji li koeficijent proporcionalnosti?
3. Koje podatke bi trebali imati da bi odredili koeficijent proporcionlanosti?

Nakon postavljenih pitanja učenici izrađuju tablicu u koju ucrtavaju sparene dijelove tangrama i računaju koeficijent proporcionalnosti kao omjer duljine stranice dijela većeg tangrama i duljine stranice dijela manjeg tangrama. S učenicima komentiramo rezultat i eventualna odstupanja u mjerenju zbog nepreciznosti. Učenicima sada postavljamo sljedeća pitanja:

1. Kakvi su kutovi sparenih dijelova?
2. U kakvom su odnosu stranice sparenih dijelova?
3. Kako bi nazvali takve parove likova?
4. Tada koeficijent proporcionalnosti možemo zvati i koeficijent __________.

U diskusiji treba dopustiti učenicima da sami dođu do definicije sličnosti i koeficijenta. Aktivnost je predviđena za 7. razred osnovne škole. Učitelj može aktivnost proširiti na način da učenici uspoređuju i površine i opsege likova te utvrđuju kako se odnose površine i opsezi sličnih likova. Ova aktivnost se može primijeniti i u 1. razredu srednje škole kao ponavljanje o sličnosti. Slična aktivnost može se napraviti s Geopločom tako da učenici pomoću gumica naprave tangram, a zatim uspoređuju dijelove.

Aktivnost 4. *Tangram i jednadžbe*

Cilj aktivnosti: učenici će pomoću tangrama uvježbati rješavanje sustava linearnih jednadžbi

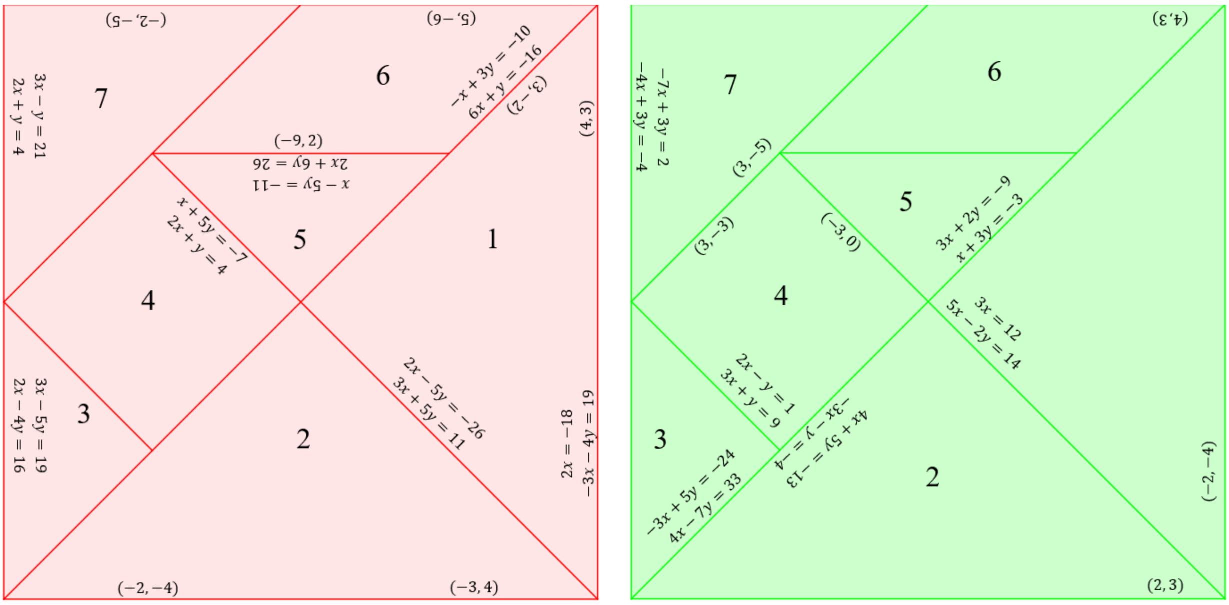
Oblik rada: rad u paru, natjecateljski

Nastavne metode: metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram za svakog učenika sa zadacima, bilježnica, pribor za pisanje

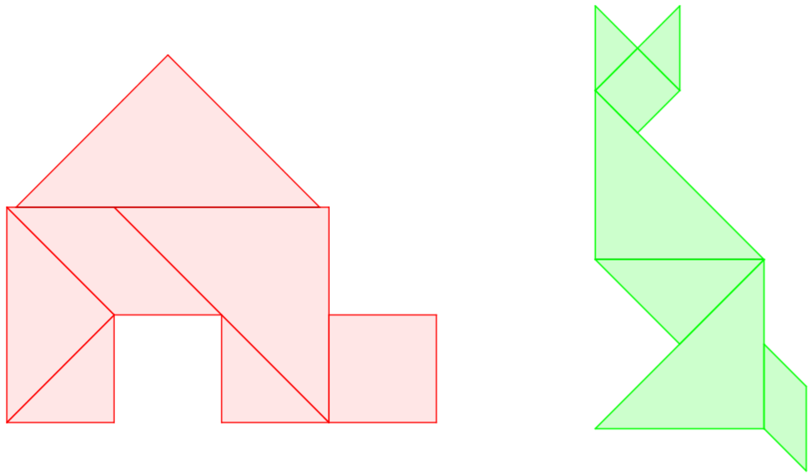
Tijek aktivnosti: Svakom učeniku podijelimo dijelove tangrama, na svakom dijelu nalazi se ili rješenje sustava ili sustav kojeg treba riješiti. Učenici slažu dijelove tangrama tako da stranica na kojoj se nalazi rješenje sustava leži duž stranice na kojoj se nalazi sustav. Prvi učenik koji dobije prepoznatljivi lik (stvar, životinja, itd.) je pobjednik.

Primjer takvog tangrama vidimo na slici 2.1.



Slika 2.1: Tangram i sustav linearnih jednadžbi

Rješavanjem i slaganjem dijelova učenici bi trebali dobiti sljedeće likove (slika 2.2.):



Slika 2.2: Rješenje

Ova aktivnost može se primijeniti i u srednjoj školi, u obliku ponavljanja ili novog gradiva. Navedena aktivnost bila je dio projekta *Večer matematike*, u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva, 2016. godine.

Aktivnost 5. *Iracionalni brojevi i tangram*

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti iracionalne brojeve

Oblik rada: samostalan rad

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram za svakog učenika, nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Svakom učeniku podijelimo tangram i nastavne listiće na kojima će računati. Učenicima damo uputu o rješavanju i vrijeme rješavanja. Nakon što je većina učenika riješila listić započinjemo diskusiju.

Primjer nastavnog listića:

1. Duljina stranice malog kvadrata iznosi 5 cm. Izračunajte duljine stranica svih likova koji čine tangram.

2. Kakve brojeve ste dobili? Jeste li već vidjeli takve brojeve?

3. Kako bi nazvali takve brojeve?

4. U kojem skupu brojeva se ti brojevi nalaze?

S učenicima treba prokomentirati dobivene rezultate i na taj način uvesti iracionalne brojeve. Aktivnost je pogodna za 8. razred osnovne škole.

Aktivnost 6. *Stomahion*

Cilj aktivnosti: učenici će uvježbati računanje duljina stranica i opsega likova koristeći Stomahion

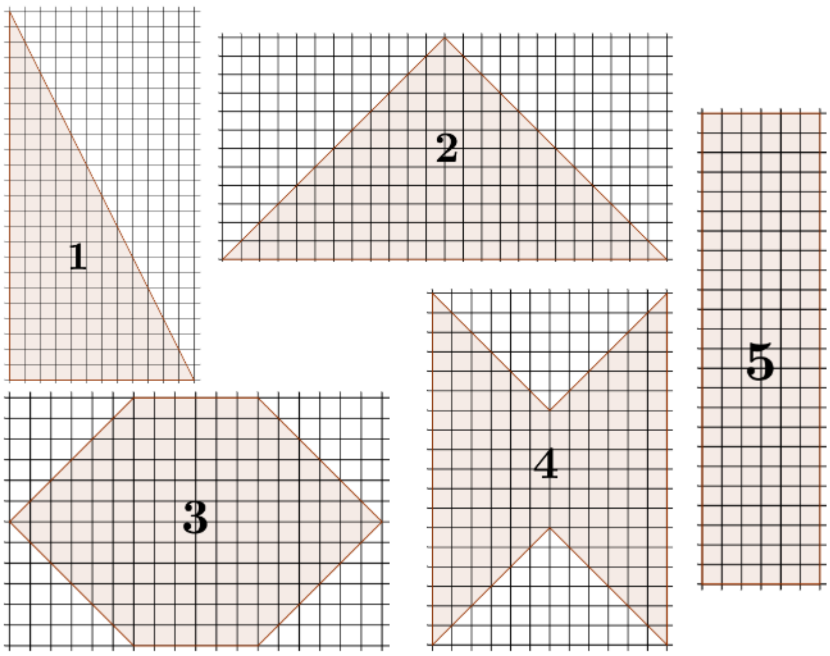
Oblik rada: rad u paru, natjecateljski

Nastavne metode: metoda dijaloga

Potreban materijal: nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u parove kako sjede u klupama, te svakom učeniku podijelimo nastavni listić na kojem se nalaze likovi koji se mogu složiti od dijelova stomahiona. Učenici će računati opsege svih likova (za neke likove će najprije morati izračunati duljinu stranice) te uspoređivati opsege. Na kraju zadatka jedan učenik slaže lik s najvećim opsegom, a drugi učenik lik s najmanjim opsegom.

Primjeri likova za koje učenici računaju opseg prikazani su na slici 2.3.



Slika 2.3: Primjer likova za računanje opsega

Aktivnost je primjerena za učenike 8. razreda ili starije, jer pri rješavanju učenici moraju koristiti Pitagorin poučak. Navedena aktivnost bila je dio projekta *Večer matematike*, u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva, 2016. godine.

Aktivnost 7. *Pentomino*

Cilj aktivnosti: učenici će ponoviti pojmove translacija, rotacija i zrcaljenje pomoću pentomina

Oblik rada: rad u paru

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: 60 pločica za svakog učenika, nastavni listić, pribor za pisanje

Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u parove kako sjede u klupama, te svakom učeniku podijelimo 60 pločica oblika kvadra (čija je osnovica kvadrat). Učenike prvo podsjetimo na domine (od čega su sastavljene), zatim ih upitamo kako bi sastavili trimine, tetramine i na kraju kako bi sastavili pentomine. Dakle, od dobivenih 60 pločica učenici će slagati pentomine (njih 12). Prije samog početka slaganja učenike upitamo sjećaju li se pojmova translacija, rotacija i zrcaljenje te znaju li svojim riječima objasniti što navedeni pojmovi znače. Nakon uvodnog ponavljanja učenici slažu pentomine. Učenik koji složi svih 12 javlja se i nastavnik provjerava dobivene pentomine. Ovaj trenutak je najzanimljiviji jer će sigurno biti učenika koji su dobili duplicirane pentomine, ali nisu primijetili. Za kraj aktivnosti učenicima možemo podijeliti nastavni listić s nekoliko kratkih zadataka vezanih uz translacije, rotacije i zrcaljenja. Primjerice, nastavnik može postaviti istu petominu u nekoliko različitih položaja te pitati učenike kako je dobiven određeni položaj.

Ova aktivnost je zanimljiva jer se može prilagoditi za bilo koji uzrast učenika. Također, pentomine mogu poslužiti i u proučavanju površine, opsega, geometrijskih tijela (primjerice od kojih pentomina se može sastaviti otvorena kocka), itd.

Aktivnost 8. *Konveksnost i tangram*

Cilj aktivnosti: učenici će otkriti konveksne mnogokute koristeći se tangramom

Oblik rada: rad u paru

Nastavne metode: heuristička metoda, metoda dijaloga

Potreban materijal: tangram set za svakog učenika

Tijek aktivnosti: Svakom učeniku podijelimo tangram set (mogu ga i sami izraditi) i nastavne listiće. Sve upute za rješavanje pišu na listiću.

Primjer nastavnog listića:

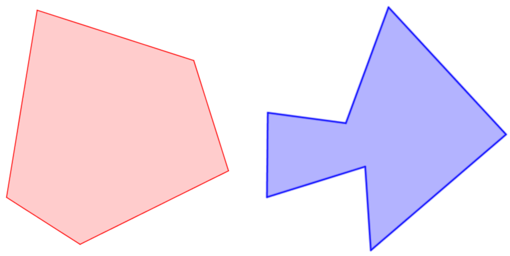
1. Koristeći sve dijelove tangrama složi kvadrat. Na koliko različitih načina možeš složiti kvadrat? Usporedi dobiveni rezultat s učenikom do sebe.

2. Možeš li od samo dva dijela tangrama složiti kvadrat?

3. Možeš li s tri dijela tangrama složiti kvadrat? Pokušaj složiti kvadart sa samo četiri dijela tangrama i zatim samo s pet dijelova.

4. Od svih sedam dijelova pokušaj složiti nekoliko različitih mnogokuta, te nacrtaj dobivene mnogokute ovdje.

   Konveksni mnogokut je onaj u kojemu spojnica dviju po volji odabranih točaka mnogokuta leži unutar tog mnogokuta. Crveni mnogokut je konveksan, a plavi nije (slika 2.4.).



Slika 2.4: Konveksnost

5. Koliko različitih konveksnih mnogokuta možeš složiti od svih dijelova tangrama? Nacrtaj sve dobivene mnogokute ovdje.

6. Usporedi svoje mnogokute s učenikom do sebe. Dodaj one koje nemaš.

Ova aktivnost može se provesti u prvom razredu srednje škole kao aktivnost otkrivanja, ali i kasnije u obliku ponavljanja.

Poglavlje 3

Zaključak

Naposljetku možemo reći da je matematika igra i da je igra učenje. Svi učenici, neovisno o dobi, vole igru i izazov. Matematičke slagalice su igra, izazov i matematika. One na zabavan način mogu pridonijeti razvoju kreativnosti i originalnosti, razvijanju prostornih vještina, proširivanju matematičkog rječnika te osposobljavaju učenike za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima. Odrastanjem igra ne smije biti zanemarena, a nastavnici matematike imaju mogućnost igru uklopiti u nastavu te na taj način matematiku učiniti zanimljivijom i bližom učenicima.

Svaka od navedenih slagalica se može u nastavi matematike koristiti kroz razne aktivnosti. Tangram, kao najpoznatija slagalica, je najzastupljenija u nastavi, te se zaista može koristiti kroz razne aktivnosti pomoću kojih kod učenika razvijamo koncepte površine, opsega, kutova, sličnosti, konveksnosti, razlomaka, iracionalnih brojeva i drugih.

Koristeći slagalice na taj način matematika zaista je zabavna, a igra postaje učenje.

Bibliografija

[1] J. Brinckovâ, M. Haviar, I. Dzúriková, Tangram In Mathematics For Lower Secondary School,
http://losstt-in-math.dm.unipi.it/bp/TangramInMathematics.htm

[2] S. T. Coffin, The Puzzling World of Polyhedral Dissections,
http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/contents.htm

[3] E. Fox-Epstein, R. Uehara, The Convex Configurations of "Sei Shōnagon Chie no Ita" and Other Dissection Puzzles, https://arxiv.org/pdf/1407.1923.pdf

[4] M. Gardner, Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions: The First Scientific American Book of Puzzles & Games, University of Chicago Press, 1988.

[5] D. Mackenzie, What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 7, American Mathematical Society, 2009.

[6] M. Pittici, Geometric Dissections,
http://www.math.cornell.edu/~mec/GeometricDissections/0.Frontpage.html

[7] P. Scott, Convex Tangrams,
http://paulscottinfo.ipage.com/tangrams/

[8] H. Vlasnović, M. Cindrić, Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hieleovoj teoriji, Školski vjesnik: časopis za pedagogijsku teoriju i praksu, 63(1-2): 35-51, 2014.

[9] F.T.Wang, C.-C. Hsiung, A Theorem on the Tangram, The American Mathematical Monthly 49 (1942), 596-599

Sažetak

U ovome radu matematika je predstavljena kao igra. Predstavljene su četiri matematičke slagalice: tangram, *Sei Shōnagon Chie no Ita*, stomahion te pentomino. Za svaku slagalicu navedena su svojstva i zanimljivosti, a naglasak je na najpoznatijoj slagalici, a to je tangram. Za tangram je dokazano da se od njegovih dijelova može složiti točno 13 konvesnih likova.
U drugom dijelu rada dani su razni primjeri aktivnosti s matematičkim slagalicama koje se mogu provesti u nastavi.

Summary

In this thesis, mathematics is presented as a game. Four dissection puzzles are described: Tangram, Sei Shōnagon Chie no Ita, Stomachion and Pentomino. For each puzzle, we have described properties and certain curiosities, with emphasis on the most famous of them, the tangram. It is proved that exactly 13 convex shapes can be made from the tangram pieces. In the second part of the thesis, one can find different examples of classroom activities involving dissection puzzles.

Životopis

Rođena sam 9. travnja 1994. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Zagrebu u Osnovnoj školi Antuna Mihanovića. 2008. godine upisujem III. Gimnaziju u Zagrebu, Opći smjer. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, 2012. godine, upisujem preddiplomski studij Matematike, smjer: nastavnički na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2015. stječem akademski naziv prvostupnice edukacije matematike te iste godine nastavljam diplomski studij Matematike, smjer: nastavnički na već spomenutom fakultetu.