Točkovni procesi i njihovi momenti

Blagajčević, Bernard

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bernard Blagajčević

TOČKOVNI PROCESI I NJIHOVI MOMENTI

Diplomski rad

Zagreb, rujan, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bernard Blagajčević

TOČKOVNI PROCESI I NJIHOVI MOMENTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami

Sadržaj

Uvod

Točkovni je proces stohastički proces čija se realizacija sastoji od određenog broja točaka u prostoru. Prostor može biti vrlo općenit, no u praksi je dovoljno uzeti $\mathbb{R}^d$. Točkovni proces predstavlja model za nasumično raspoređene točke u d-dimenzionalnom prostoru. Točke mogu predstavljati lokacije promatranih objekata ili događaja u određenom području. Pokazuje se kao koristan model u astronomiji, seizmologiji, računalnoj neuroznanosti, aktuarskoj matematici itd. Iz svega navedenog prirodno se nameće želja za uvođenjem matematičkih alata kojima bi definirali točkovni proces.

Točkovni se proces matematički može shvatiti na dva različita načina, kao slučajna brojeća mjera ili kao slučajan skup te kao takav ima važnu ulogu i u stohastičkoj geometriji. Cilj ovog diplomskog rada je definirati pojam točkovnog procesa koristeći brojeće mjere, prikazati matematičke alate koji se koriste za karakterizaciju razdioba točkovnih procesa te proučiti njihove mjere momenata.

Rad se sastoji od tri poglavlja. Prvo poglavlje sastoji se od pregleda osnovnih definicija i rezultata teorije mjere i integrala, vjerojatnosti i statistike te slučajnih procesa budući da je njihovo poznavanje potrebno za razumijevanje ostatka rada.
U drugom ćemo poglavlju nakon intiutivnog pristupa dati preciznu matematičku definiciju točkovnog procesa . Definirat ćemo matematičke koncepte poput konačno dimenzionalnih distribucija i Laplaceovih funkcionala koje karakteriziraju distribuciju točkovnog procesa. Posebno, definirat ćemo i funkcional kapaciteta stacionarnog točkovnog procesa. Upoznat ćemo dva jednostavna, ali izrazito važna primjera točkovnih procesa – binomni te Poissonov točkovni proces. Dodatno, definirat ćemo slučajnu varijablu kontaktne udaljenosti točkovnog procesa od fiksne točke te pokazati vezu između funkcije razdiobe spomenute varijable i funkcionala kapaciteta.
U trećem poglavlju upoznajemo mjere momenata točkovnih procesa. Definiramo mjeru intenziteta te funkciju intenziteta. Nadalje, dokazujemo Campbellovu formulu koja služi za računanje očekivanja i varijance slučajne sume. Nastavljamo s definicijom mjere drugog momenta te funkcije gustoće drugog momenta. Koristeći prethodno, definiramo funkciju korelacije koja je analogon korelaciji slučajnih varijabli. U nastavku se pobliže upozna-

jemo s drugim momentima stacionarnih procesa te K-funkcijom kojom možemo opisati interakciju između točaka procesa. Posebno, opisujemo metode statističke procjene K-funkcije te ilustriramo njihovu primjenu na stvarnim podacima koristeći statistički softwer R. Rad završavamo upoznavajući se s Janossyjevim mjerama točkovnih procesa te ih dovodimo u vezu s prethodno definiranim mjerama momenata.

Posebno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Bojanu Basraku na korisnim savjetima, strpljenju i pomoći prilikom izrade i pisanja ovog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i koncepti

U ovom uvodnom poglavlju definirat ćemo i iskazati osnovne pojmove i rezultate odabranih grana matematike potrebnih za razumijevanje ostatka rada. Posebno, iskazat ćemo granične teoreme teorije mjere i integrala, definirati Laplaceovu transformaciju slučajne varijable te definirati Poissonov slučajni proces koji je fundamentalni primjer slučajnog procesa i ujedno specijalni slučaj jednodimenzionalnog točkovnog procesa.

1.1 Mjera i integral

U ovom dijelu dajemo pregled osnovnih pojmova i rezultata iz teorije mjere i integrala. Prisjetit ćemo se definicije elementarnih pojmova poput σ-algebre, mjere, izmjerive funkcije te integrala. Iskazat ćemo granične teoreme te *Radon– Nikodymov* teorem.

Neka je X skup. Kažemo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra na X ukoliko vrijedi

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Neka je C familija podskupova od X. Definiramo σ-algebru generiranu s C, u oznaci $\sigma(C)$, kao presjek svih σ-algebri na X koje sadrže C. Lako se pokazuje da je $\sigma(C)$ zaista σ-algebra te kažemo da je $\sigma(C)$ najmanja σ-algebra koja sadrži C (u smislu relacije $\subset$). Ukoliko je C kolekcija svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$ tada se $\sigma(C)$ naziva Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^d$ i označava $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Lako se može pokazati da vrijedi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) : a_i, b_i \in \mathbb{R}) = \sigma((-\infty, b_1) \times \cdots \times (-\infty, b_d) : b_i \in \mathbb{R}).$$

Još jedna važna σ-algebra jest praslika neke σ-algebre po funkciji f. Naime, ukoliko je $f : X \to Y$ funkcija te $\mathcal{G}$ σ-algebra na Y, tada je $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$ σ-algebra.

Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $X \neq \emptyset$ takva da $\emptyset \in \mathcal{F}$ te $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$. Kažemo da je μ σ-aditivna ukoliko je $\mu(\emptyset) = 0$ te ako za $E_1, E_2 \ldots E_n \in \mathcal{F}$ takve da $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}$ vrijedi $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$. Ukoliko je $\mathcal{F}$ σ-algebra te $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ σ-aditivna funkcija onda μ zovemo mjerom. Uređen par $(X, \mathcal{F})$ nazivamo izmjeriv prostor, a uređenu trojku $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom. Reći ćemo da je mjera μ konačna ukoliko je $\mu(X) < 1$, vjerojatnosna ukoliko je $\mu(X) = 1$, te σ-konačna ukoliko postoje $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X$ i $\mu(A_i) < +\infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.1. *(i) Neka je $X \neq \emptyset$ i $x_0 \in X$. Tada je funkcija $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definirana formulom*

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

mjera koju nazivamo Diracova mjera u točki x_0.

(ii) Neka je $X \neq \emptyset$. Tada je funkcija $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definirana formulom

$$\mu(A) := \begin{cases} \operatorname{card}(A), & A \subset X \text{ konačan} \\ +\infty, & A \subset X \text{ nije konačan} \end{cases}$$

mjera na $(X, \mathcal{P}(X))$ koju nazivamo brojeća mjera na skupu X.

Nadalje, može se pokazati da postoji jedinstvena mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takva da za sve $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ vrijedi

$$\lambda((a, b]) = b - a.$$

Tu mjeru nazivamo Lebesgueova mjera. Lako se pokazuje da je Lebesgueova mjera σ-konačna mjera te da za proizvoljan prebrojiv skup A vrijedi $\lambda(A) = 0$. Slijedi jedan važan rezultat koji nam daje način za pokazivanje jednakosti dviju mjera. Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor te $\mathcal{C}$ π-sustav na X, tj. neprazna familija zatvorena na konačne presjeke, takav da je $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$. Ukoliko su λ, μ konačne mjere koje se podudaraju na $(X, \mathcal{F})$ te na svim elementima π-sustava $\mathcal{C}$, onda se te dvije mjere podudaraju u potpunosti.

Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori. Kažemo da je $f : X \to Y$ izmjeriva (u paru σ-algebri $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$) ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$, tj. $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ za svaki $G \in \mathcal{G}$. Lako se pokazuje da je kompozicija izmjerivih funkcija izmjeriva te da je svaka linearna kombinacija izmjerivih funkcija također izmjeriva. Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom te $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

izmjeriva. Ukoliko je f jednostavna nenegativna izmjeriva, $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, tada definiramo $\int f d\mu := \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$. Nadalje, ukoliko je f nenegativna izmjeriva, tada definiramo $\int f d\mu := \sup\left\{\int g d\mu : g \text{ nenegativna jednostavna izmjeriva, } g \leq f\right\}$. Konačno, ukoliko je f izmjeriva onda definiramo $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$, pri čemu su $f^+ := \max\{f, 0\}$ te $f^- := \max\{-f, 0\}$ tako da je $f = f^+ - f^-$. Kažemo da je izmjeriva funkcija f integrabilna ukoliko je zadovoljeno $\int f^+ d\mu < +\infty$ i $\int f^- d\mu < +\infty$.

Granični teoremi daju nam uvjete uz koje je opravdana *zamjena limesa i integrala*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \,.$$

Teorem 1.1.2. *(Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji – LTMK) Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom, te $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija. Ako vrijedi:*

(i) $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *za μ-g.s.* $x \in X$,

(ii) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ *za μ-g.s.* $x \in X$,

tada vrijedi

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \,.$$

Korolar 1.1.3. *(Beppo Levijev teorem) Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom i neka su $f_n : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{F}$-izmjerive funkcije, $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu \,.$$

Teorem 1.1.4. *(Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji – LTDK) Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija, te $g : X \to [0, +\infty]$. Ako vrijedi:*

(i) $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *za μ-g.s.* $x \in X$,

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *za μ-g.s.* $x \in X$,

(iii) $\int g d\mu < +\infty$,

tada vrijedi

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \,.$$

Za mjeru λ na $(X, \mathcal{F})$ kažemo da je apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru μ na $(X, \mathcal{F})$ ukoliko za proizvoljan $B \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda(A) = 0$ i pišemo $\lambda \ll \mu$. U nastavku slijedi teorem koji ima važnu primjenu u teoriji vjerojatnosti.

Teorem 1.1.5. *(Radon – Nikodymov teorem) Neka su λ i ν σ-konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$ takve da je $\lambda \ll \mu$. Tada postoji nenegativna izmjeriva funkcija $f : X \to [0, +\infty)$ takva da vrijedi*

$$\lambda(B) = \int_B f d\mu,$$

za svaki $B \in \mathcal{F}$. Funkcija je jedinstvena μ-g.s. i naziva se Radon–Nikodymova derivacija te pišemo $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ ili $d\lambda = f d\mu$.

Dokazi gornjih rezultata mogu se naći u [6].

1.2 Vjerojatnost i statistika

U nastavku dajemo pregled odabranih pojmova i rezultata iz teorije vjerojatnosti i statistike. Fundamentalni pojam svake statističke rasprave je slučajna varijabla. Definirat ćemo slučajnu varijablu te pojmove vezane uz opisivanje slučajnih varijabli koristeći teoriju mjere i integrala. Posebno, definirat ćemo i Laplaceovu transformaciju slučajne varijable budući da se pokazuje važnom u teoriju točkovnih procesa.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ proizvoljan izmjeriv prostor te neka je za $k \geq 1$ dan i izmjeriv prostor $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Slučajna varijabla $(k = 1)$ ili slučajni vektor $(k > 1)$, u oznaci s.v., je izmjerivo preslikavanje $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, odnosno preslikavanje za koje vrijedi

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^k,$$

pri čemu za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k \geq 2$ imamo $(-\infty, x] := (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k]$. Neka je $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada vjerojatnost $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, 1]$ definiranu s $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ zovemo zakonom razdiobe od X. Funkciju $F_X : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ definiranu s $F_X(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x])$ za $x \in \mathbb{R}^k$ nazivamo funkcija distribucije od X. Nadalje, za s.v. X kažemo da je neprekidna ukoliko postoji funkcija $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ takva da vrijedi $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) d\lambda_k(y)$. Zapravo, ukoliko je $\mathbb{P}_X \ll \lambda_k$, prema Radon–Nikodymovom teoremu postoji funkcija f takva da vrijedi $\mathbb{P}_X(B) = \int_B f d\lambda_k$ za $B = (-\infty, x]$. Dakle, funkcija gustoće f je Radon–Nikodymova derivacija vjerojatnosti $\mathbb{P}_X$ u odnosu na Lebesgueovu mjeru λ_k. Kažemo da je s.v. X diskretna ukoliko postoji prebrojiv podskup $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ takav da vrijedi $\mathbb{P}_X(D) = 1$. Neka je $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ i $\mathbb{P}_X(D) = 1$. Tada je s $\mu_D(B) := \sum_i \mathbb{1}_{\{a_i\}}(B)$ definirana brojeća mjera mjera na $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ koja je σ-konačna. $\mathbb{P}_X$ je apsolutno neprekidna u odnosu na μ_D te zbog $\int_A g d\mu_D = \sum_{a_i \in A} g(a_i)$ vrijedi

$$f_X(a_i) = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\mu_D}(a_i) = \int_{\{a_i\}} \frac{d\mathbb{P}_X}{d\mu_D} d\mu_D = \mathbb{P}_X(\{a_i\}) = \mathbb{P}(X = a_i).$$

Kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje ukoliko je X, kao izmjeriva funkcija na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, integrabilna u odnosu na mjeru $\mathbb{P}$ te definiramo $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P}$. Očekivanje diskretne slučajne varijable X sa zakonom razdiobe $\mathbb{P}(X = a_i) = p_i$ za $i \in \mathbb{N}$ dano je s $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i p_i$, dok je očekivanje neprekidne slučajne varijable Y s funkcijom gustoće f dano s $\int_\mathbb{R} y f_Y(y) dy$. Dodatno, r-ti moment slučajne varijable X definira se kao $\mathbb{E}[X^r]$. Ukoliko je očekivanje slučajne varijable X konačno, može se definirati varijanca od X sa $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. U nastavku dajemo primjere razdiobi slučajnih varijabli.

Primjer 1.2.1. *(a) Kažemo da slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu s parametrima $n \in \mathbb{N}$ te $p \in (0, 1)$ ukoliko za $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Tada je $\mathbb{E}[X] = np$ te $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.*

(b) Kažemo da slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ukoliko za $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Tada je $\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

(c) Kažemo da slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ukoliko je funkcija gustoće dana sa $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Tada je $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ te $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Laplaceova transformacija integralna je transformacija s brojnim mogućnostima primjene u matematici, fizici, elektrotehnici, teoriji vjerojatnosti i drugdje. Nas će konkretno zanimati Laplaceova transformacija slučajnog vektora.

Definicija 1.2.2. *Neka je μ mjera na $[0, +\infty)$. Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\mu$ od μ definirana je s*

$$\mathcal{L}\mu(\lambda) := \int_{[0,+\infty)} e^{-\lambda x} d\mu(x) \quad za \quad \lambda > \sigma_0, \tag{1.1}$$

gdje je $\sigma_0 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \int_{[0,+\infty)} e^{-\lambda x} d\mu(x) < +\infty\}$.

Ukoliko je X nenegativna slučajna varijabla te $\mu = \mathbb{P}_X$ zakon razdiobe od X, slijedi $\mathcal{L}\mu(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$. Nadalje, ukoliko je $d\mu(x) = f(x)dx$ za neku nenegativnu funkciju f, onda je $\mathcal{L}\mu(\lambda) = \mathcal{L}f(\lambda) = \int_{[0,+\infty)} e^{-\lambda x} f(x)dx$. Dakle, ako je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X onda je $\mathcal{L}f_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X}]$. Može se pokazati da Laplaceova transformacija konačne mjere μ jedinstveno određuje tu mjeru (vidi Mimica [4]). Dakle, Laplaceova transformacija jedinstveno određuje razdiobu slučajne varijable.

Definicija 1.2.3. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}_+^n$ nenegativan slučajan vektor. Laplaceova transformacija slučajnog vektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je funkcija $L_{(X_1,X_2,\dots,X_n)} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ definirana s*

$$L_{(X_1,X_2,\dots,X_n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) := \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} e^{-y_i X_i}]. \tag{1.2}$$

Laplaceova transformacija jednistveno određuje razdiobu slučajnog vektora.

1.3 Slučajni procesi

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $X = \{X_t, t \in T\}$ je familija slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je $T \subset \mathbb{R}$ skup indeksa ili parametarski skup. Ukoliko je skup T prebrojiv kažemo da je X proces s diskretnim vremenom. Skup stanja S slučajnog procesa X je skup svih vrijednosti koje može poprimiti svaka slučajna varijabla X_t. Slučajni proces X možemo shvatiti kao funkciju dviju varijabli

$$X : T \times \Omega \to S.$$

Dakle, ukoliko fiksiramo $t \in T$ promatramo slučajnu varijablu koja opisuje realizaciju slučajnog procesa u trenutku t. S druge strane, ukoliko fiksiramo $\omega \in \Omega$ promatramo trajektoriju slučajnog procesa X, tj. funkciju koja svakom trenutku t pridružuje realizaciju $X_t(\omega)$. Elementarni primjer slučajnog procesa s diskretnim vremenom je homogeni Poissonov proces.

Definicija 1.3.1. *Slučajni proces $N = \{N_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s vrijednostima u skupu $\{0, 1, 2, \dots\}$ nazivamo homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ukoliko vrijedi*

(1) $N_0 = 0$

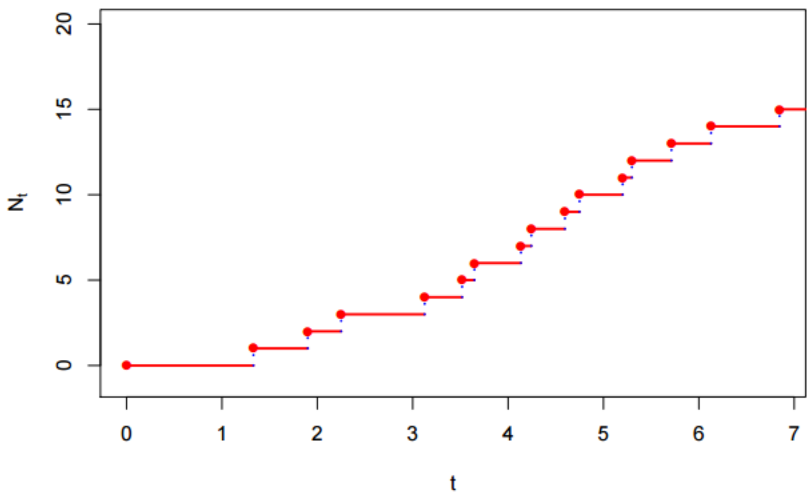
(2) N ima nezavisne priraste, tj. za $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ su slučajne varijable

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

nezavisne.

(3) Za $0 \leq s < t$ slučajna varijabla $N_t - N_s$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\lambda(t - s)$.

Vrijednost slučajne varijable N_t interpretira se kao broj realizacija određenog događaja u vremenskom intervalu duljine t. Uočimo da vrijedi $N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t-s}$ za $0 \leq s < t$, kažemo da Poissonov proces ima stacionarne priraste. Dodatno, za $n \in \mathbb{N}_0$ definiraju se vremena dolaska sa $T_n = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq n\}$ te za $n \in \mathbb{N}$ vremena međudolaska sa $W_n = T_n - T_{n-1}$. Može se pokazati da su $W_1, W_2, \cdots \sim Exp(\lambda)$ nezavisne pa slijedi $T_n = W_1 + W_2 + \dots W_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$. Spomenimo još i *superpoziciju* te *stanjivanje Poissonovih procesa*. Ukoliko su X i Y nezavisni Poissonovi procesi s intenzitetom $\lambda > 0$ i $\mu > 0$. Tada je sa $N_t = X_t + Y_t$ definiran Poissonov proces s intenzitetom $\lambda + \mu$. Takva je pojava poznata kao superpozicija Poissonovih procesa. Nadalje, neka je dan Poissonov proces



Slika 1.1: Prikaz jedne trajektorije homogenog Poissonovog procesa za $\lambda = 2$.

X s intenzitetom $\lambda > 0$ te vjerojatnost registriranja svakog događaja koji se dogodio $p \in (0, 1)$. Tada je proces N koji predstavlja broj registriranih događaja Poissonov proces s intenzitetom $p\lambda$. Takvu pojavu nazivamo stanjivanje Poissonovog procesa. Dokazi ovih tvrdnji mogu se naći u [7], str. 129-131. Dodajmo da je homogeni Poissonov proces specijalni slučaj nehomogenog Poissonovog procesa N čiji se intenzitet zadaje izmjerivom funkcijom $\lambda(t)$ tako da za $0 \leq s < t$ slučajna varijabla $N_t - N_s$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\int_s^t \lambda(u)du$, dok se preostala dva uvjeta podudaraju s onima iz defincije 1.3.1.

Poglavlje 2

Točkovni procesi

U ovom ćemo poglavlju prvo prikazati intuitivnu generalizaciju jednodimenzionalnog slučaja točkovnog procesa koja će nas motivirati za strogu definiciju. Korištenjem koncepata teorije vjerojatnosti definirat ćemo točkovni proces i njegovu distribuciju te zatim prikazati različite načine karakterizacije distribucije uvodeći pojmove Laplaceovog funkcionala i funkcionala kapaciteta. Konstruirat ćemo primjere, a posebno ćemo se usredotočiti na Poissonov točkovni proces. Poglavlje ćemo završiti uvodeći pojam kontaktne udaljenosti u točkovnom procesu koja se pokazuje korisnom u procjeni podataka.

2.1 Intuitivni pristup

Točkovni procesi koriste se za modeliranje slučajnog rasporeda točaka u d-dimenzionalnom prostoru. U slučaju jednodimenzionalnog prostora točke mogu predstavljati trenutke udara munje tijekom oluje, a u dvodimenzionalnom prostoru oznake za mjesta udara munje unutar određenog područja. Za jednodimenzionalni točkovni proces u kojem su sve točke međusobno različite, nameće se prirodni poredak točaka – po vremenu dolaska. Vremena dolaska su slučajne varijable $T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ gdje T_i predstavlja trenutak u kojem se pojavila i-ta točka. Kako su zbog činjenice $T_i \leq T_{i+1}$ vremena dolaska zavisna, korisno je razmatrati i vremena međudolaska $S_i := T_{i+1} - T_i$ koja su za određene modele nezavisna. U kontekstu teorije slučajnih procesa jednodimenzionalni točkovni proces možemo precizirati tako da uvedemo brojeći proces $N_t := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i)$ za $t \geq 0$ gdje N_t predstavlja broj pristiglih točaka do trenutka t. Zbog zavisnosti N_t za različite t, uvodi se takozvani *intervalni brojač*

$$N(a,b] := N_b - N_a, \qquad 0 \leq a \leq b,$$

koji predstavlja broj pristiglih točaka unutar intervala $(a,b]$.

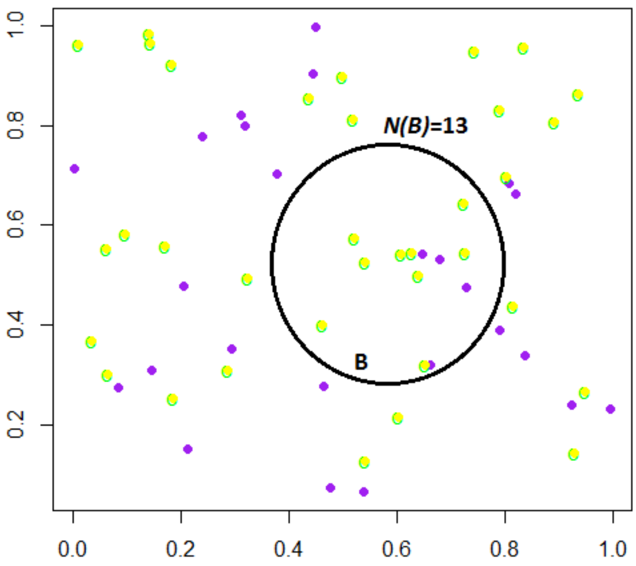
U višedimenzionalnom slučaju izostaje prirodni poredak stoga nije moguće generalizirati vremena dolaska S_i ni brojeći proces N_t. Pokazuje se da generalizacija takozvanog intervalnog brojača $N(a,b]$ može opisati općeniti točkovni proces. Dakle, promatra se

$$N(B) := \text{broj točaka unutar } B, \qquad B \subset \mathbb{R}^d.$$

Dodatno, pokazuje se korisnim proučavati *indikator praznina*

$$V(B) := \begin{cases} 1, & N(B) = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \qquad B \subset \mathbb{R}^d.$$

Brojeće varijable $N(B)$ su prirodne za promatranje aditivnih, a indikatori praznina $V(B)$ za promatranje geometrijskih i multiplikativnih svojstava točkovnog procesa. Neka su dana dva točkovna procesa na istom području, npr. promatramo rast ljubičica i tratinčica na jednoj livadi gdje točke predstavljaju mjesto na kojem je niknuo cvijet. Ako su $N_{lj}(B)$ i $N_t(B)$ pripadne brojeće varijable za ljubičice, odnosno tratinčice, onda je brojeća varijabla za *zbrojeni* proces (proces kojim modeliramo rast i tratinčica i ljubičica na polju) $N(B) = N_{lj}(B) + N_t(B)$. Analogno, indikator praznina za takav proces je $V(B) = V_{lj}(B)V_t(B)$.



Slika 2.1: Realizacija gore navedenog točkovnog procesa i brojeće varijable $N(B)$.

Vrijednosti brojećih varijabli $N(B)$ za sve podskupove B pružaju mogućnost rekonstrukcije pozicija svih točaka procesa. Naime, x je točka procesa ukoliko je zadovoljeno $N(\{x\}) > 0$.

Dakle, slučajne varijable $N(B)$ sadrže potpunu informaciju o točkovnom procesu. S druge strane, ukoliko je poznata vrijednost $V(B)$ za sve $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ moguće je odrediti poziciju svake točke procesa. Neka je G unija svih otvorenih skupova B za koje vrijedi $V(B) = 1$, tada komplement skupa G čine upravo točke procesa. Nakon ovih razmatranja možemo dati strogu definiciju točkovnog procesa.

2.2 Definicija

Točkovni proces može se opisati statističkim terminima definirajući prostor mogućih ishoda i određivanjem vjerojatnosti različitih događaja. Cilj nam je odrediti distribuciju točkovnog procesa.

Neka je E podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^d$ i $\mathcal{E}$ σ-algebra Borelovih skupova na E. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ definiramo *brojeću mjeru* $m : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ sa

$$m(B) := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}(B), \qquad B \in \mathcal{E}, \tag{2.1}$$

pri čemu je δ_{x_n} tzv. *Diracova mjera u točki* x_n. Ukoliko je $m(B)$ konačan broj za svaki ograničeni skup $B \in \mathcal{E}$ onda m zovemo *točkovnom mjerom*. Dakle, $m(B)$ predstavlja broj točaka x_n koje se nalaze unutar skupa B.

Označimo sa $M_p = M_p(E)$ skup svih točkovnih mjera na E. Promatramo skupove oblika

$$E_{B,k} := \{m \in M_p : m(B) = k\}, \qquad k \geq 0,\ B \in \mathcal{E}. \tag{2.2}$$

Sa $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(E)$ označimo σ-algebru generiranu skupovima $E_{B,k}$. Primjetimo da se u $\mathcal{M}_p$ nužno nalaze skupovi oblika

$$E_{B_1,k_1} \cap E_{B_2,k_2} \cap \cdots \cap E_{B_s,k_s} = \{m \in M_p : m(B_1) = k_1, m(B_2) = k_2 \ldots, m(B_s) = k_s\},$$

koji opisuju događaj da se točno k_i točaka nalazi unutar područja B_i, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Također, $\mathcal{M}_p$ sadrži i događaj koji opisuje da ne postoji niti jedna točka unutar bilo kojeg skupa B:

$$\{m \equiv 0\} = \{m \in M_p : m(B) = 0, \forall B\} = \cap_{n\in\mathbb{N}} E_{K(0,n),0}.$$

Sada imamo sve potrebno za definiciju točkovnog procesa.

Definicija 2.2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Točkovni proces sa skupom stanja u E je izmjerivo preslikavanje*

$$N : (\Omega,\ \mathcal{F}) \to (M_p,\ \mathcal{M}_p). \tag{2.3}$$

Dakle, za svaki $E \in \mathcal{M}_p$ vrijedi

$$\{N \in E\} = \{\omega \in \Omega : N(\omega) \in E\} \in \mathcal{F},$$

pa je dobro definirana vjerojatnost događaja $\{N \in E\}$.

Kažemo da je točkovni proces *lokalno konačan* ukoliko vrijedi

$$\mathbb{P}(\{N(B) < +\infty\}) = 1, \text{ za sve omeđene } B \in \mathcal{E}. \tag{2.4}$$

U daljnjem razmatranju pretpostavljat ćemo lokalnu konačnost točkovnih procesa. Tada je $N(\omega)$ točkovna mjera za dano $\omega \in \Omega$. Nadalje, primjetimo da je matematički ispravno pisati N kao funkciju dva argumenta $N(\omega, B)$. Mi ćemo sa $N(\omega) = N(\omega, \cdot)$ označavati točkovnu mjeru za fiksni $\omega \in \Omega$, a sa $N(B) = N(\cdot, B)$ slučajnu varijablu za fiksni $B \in \mathcal{E}$.

Posebno se promatraju oni točkovni procesi koji ne dopuštaju ponavljanje iste točke. Takav točkovni proces zovemo jednostavnim.

Definicija 2.2.2. *Za točkovni proces reći ćemo da je jednostavan ukoliko vrijedi*

$$\mathbb{P}(\{N(\{x\}) \leq 1, \forall x \in E\}) = 1. \tag{2.5}$$

Jednostavni točkovni proces može se poistovjetiti sa *slučajnim skupom točaka*. Štoviše, teorija slučajnih skupova koristi se za alternativnu definiciju točkovnih procesa. Za nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, $n \in \mathbb{N}$, točkovni proces je slučajni skup $\boldsymbol{X} = \{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$. Nedostatak takvog pristupa je nemogućnost modeliranja ponavljanja iste točke. U nastavku ćemo određeni točkovni proces označavati sa $\boldsymbol{X}$ (zamišljajući ga kao *slučajni skup* točaka), a pripadajuću točkovnu mjeru sa $N_{\boldsymbol{X}}$. Na primjer, u skladu s tom notacijom vrijedi $\{\boldsymbol{X} = \emptyset\} \Leftrightarrow \{N_{\boldsymbol{X}} \equiv 0\}$.

Nakon što smo precizno definirali točkovni proces možemo definirati i njegovu distribuciju.

Definicija 2.2.3. *Distribucija točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ na izmjerivom prostoru $(M_p,\ \mathcal{M}_p)$ koja zadovoljava*

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(A) = \mathbb{P}(N_{\boldsymbol{X}} \in A), \quad A \in \mathcal{M}_p. \tag{2.6}$$

Dakle, ukoliko je poznata distribucija točkovnog procesa moguće je odrediti vjerojatnost bilo kojeg događaja koji ovisi o N. Za dva točkovna procesa $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ kažemo da su jednako distribuirana ukoliko vrijedi $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{P}_{\boldsymbol{Y}}$ te pišemo $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Y}$. Nakon definicije distribucija točkovnog procesa prirodno se nameće pitanje kako ih možemo karakterizirati.

2.3 Karakterizacije distribucije točkovnog procesa

Poznavanje točkovnog procesa povezujemo s poznavanjem njegove distribucije koja ga u potpunosti opisuje. Pronalaženje karakterizacije omogućava elegantniji način opisivanja točkovnog procesa.

Definicija 2.3.1. *Konačno dimenzionalne distribucije točkovnog procesa su distribucije slučajnih vektora*

$$(N(B_1),\ N(B_2), \ldots,\ N(B_k)),$$

pri čemu su $k \in \mathbb{N}$ *te* $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_k$ *iz* $\mathcal{E}$ *proizvoljni.*

Uočimo da su time određene vjerojatnosti svih događaja oblika

$$\{N(B_1) = n_1,\ N(B_2) = n_2, \ldots,\ N(B_k) = n_k\},$$

za bilo koje nenegativne cijele brojeve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ te proizvoljni $k \in \mathbb{N}$. S druge strane, vjerojatnost događaja $\{\boldsymbol{X} = \emptyset\}$ nije određena budući da se ne može prikazati kao konačan presjek gore opisanih događaja. Ipak, pokazuje se da je distribucija točkovnog procesa jedinstveno određena konačno dimenzionalnim distribucijama. Naime, zbog činjenice da je familija svih konačnih presjeka skupova oblika

$$\{m \in M_p : m(B) = k\}, \quad k \geq 0, \quad B \in \mathcal{E},$$

$\Pi -$ *sustav* koji generira $\mathcal{M}_p$ slijedi da je svaka mjera iz $\mathcal{M}_p$ jedinstveno određena vjerojatnostima događaja iz opisane familije. Kako je distribucija točkovnog procesa mjera definirana na $\mathcal{M}_p$, a njene vrijednosti na gore opisanoj familiji su upravo konačno dimenzionalne distribucije zaključujemo da vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 2.3.2. *Konačno dimenzionalne distribucije točkovnog procesa jedinstveno određuju njegovu distribuciju.*

Zbog toga će dva točkovna procesa biti jednako distribuirana ukoliko im se podudaraju konačno dimenzionalne distribucije.

Temeljne definicije i svojstva koncepta Laplaceove transformacije prikazali smo u prvom poglavlju. Napomenuli smo da Laplaceova transformacija slučajnog vektora jedinstveno određuje njegovu razdiobu. U nastavku pokazujemo da sličan koncept opisuje distribuciju točkovnog procesa. Neka je $\mathcal{B}_+ = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ nenegativna , ograničena i izmjeriva}\}$. Za $m \in M_p$ i $f \in \mathcal{B}_+$ definiramo

$$m(f) := \int_E f(x) dm(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n),$$

pri čemu su $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ točke iz definicije točkovne mjere.

Definicija 2.3.3. *Laplaceov funkcional točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ je preslikavanje $\Psi_{N_{\boldsymbol{X}}} : \mathcal{B}_+ \to \mathbb{R}$ definirano sa*

$$\Psi_{N_{\boldsymbol{X}}}(f) = \mathbb{E}[e^{-N_{\boldsymbol{X}}(f)}]. \tag{2.7}$$

Propozicija 2.3.4. *Laplaceov funkcional točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ jedinstveno određuje njegovu distribuciju $\mathbb{P}_{N_{\boldsymbol{X}}}$.*

Dokaz. Za proizvoljni $k \in \mathbb{N}$ definiramo jednostavnu funkciju $f \in \mathcal{B}_+$ sa

$$f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{B_i},$$

pri čemu su $\lambda_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{E}$ proizvoljni za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\Psi_{N_{\boldsymbol{X}}}(f) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_E f dN_{\boldsymbol{X}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_E \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{B_i} \right) dN_{\boldsymbol{X}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_E \mathbb{1}_{B_i} dN_{\boldsymbol{X}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i N_{\boldsymbol{X}}(B_i) \right) \right],
\end{aligned}$$

a to je upravo Laplaceova transformacija slučajnog vektora $(N(B_1),\ N(B_2),\ \ldots,\ N(B_k))$ koja jedinstveno određuje njegovu distribuciju. Specijalno, time su jedinstveno određene konačno dimenzionalne distribucije točkovnog procesa. Sada tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije. □

Jednostavni točkovni procesi mogu se promatrati kao slučajan skup točaka. Prisjetimo se, za jednostavni točkovni proces $\boldsymbol{X}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\, N_{\boldsymbol{X}}(\{x\}) \leq 1,\ \forall x \in E) = 1.$$

Za takve procese definirat ćemo poseban objekt za koji se pokazuje da u potpunosti određuje distribuciju točkovnog procesa.

Definicija 2.3.5. *Funkcional kapaciteta jednostavnog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ jest preslikavanje $T_{\boldsymbol{X}} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ definirano sa*

$$T_{\boldsymbol{X}}(K) := \mathbb{P}(\, N_{\boldsymbol{X}}(K) > 0\,)\ , \quad K \in \mathcal{E}. \tag{2.8}$$

Uočimo, $T_{\boldsymbol{X}}(K) = 1 - \mathbb{P}(\, N_{\boldsymbol{X}}(K) = 0\,)$ što je relativno *mali* podskup informacija koje određuju konačno dimenzionalne distribucije. Unatoč tome, može se pokazati da *funkcional kapaciteta* jednostavnog točkovnog procesa jedinstveno određuje njegovu distribuciju.

U proučavanju točkovnih procesa važan je i koncept *stacionarnosti*.

Definicija 2.3.6. *Reći ćemo da je točkovni proces $\boldsymbol{X}$ na prostoru $\mathbb{R}^d$ stacionaran ukoliko vrijedi*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{X} + v, \ \forall v \in \mathbb{R}^d. \tag{2.9}$$

Može se pokazati da vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 2.3.7. *Jednostavni točkovni proces $\boldsymbol{X}$ je stacionaran ako i samo ako je funkcional kapaciteta $T_{\boldsymbol{X}}$ invarijantan obzirom na translacije, to jest ukoliko je zadovoljeno*

$$T_{\boldsymbol{X}}(K) = T_{\boldsymbol{X}}(K + v), \quad \forall K \in \mathcal{E}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Dokaze gornjih rezultata mogu se naći u [3]. Slično, za točkovni proces kažemo da je *izotropan* ukoliko je distribucija invarijantna obzirom na rotacije u $\mathbb{R}^d$.

Sve važne rezultate ovog dijela možemo sažeti u sljedeći teorem.

Teorem 2.3.8. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $(M_p, \mathcal{M}_p)$ ranije definiran izmjerivi prostor te neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ dva točkovna procesa. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
(i) $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Y}$,
(ii) $(N_{\boldsymbol{X}}(B_1),\, N_{\boldsymbol{X}}(B_2), \ldots,\, N_{\boldsymbol{X}}(B_k)) \stackrel{d}{=} (N_{\boldsymbol{Y}}(B_1),\, N_{\boldsymbol{Y}}(B_2), \ldots,\, N_{\boldsymbol{Y}}(B_k))$, za sve $B_1,\, B_2, \ldots,\, B_k$ iz $\mathcal{E}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$,
(iii) $\Psi_{N_{\boldsymbol{X}}}(f) = \Psi_{N_{\boldsymbol{Y}}}(f)$, za sve $f \in \mathcal{B}_+$,
Ukoliko su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ jednostavni, onda je svaka od gore navedenih tvrdnji ekvivalentna sa
(iv) $T_{\boldsymbol{X}}(B) = T_{\boldsymbol{Y}}(B)$ za sve $B \in \mathcal{E}$.

2.4 Primjeri

Binomni točkovni proces

Razmotrimo prvo jedan vrlo jednostavan i intuitivan primjer. Želimo razmjestiti n točaka na slučajne pozicije unutar omeđenog područja $W \subset \mathbb{R}^2$. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable uniformno distribuirane na W. Pojedina varijabla predstavlja slučajnu točku unutar W. Kako je funkcija gustoće slučajne varijable X_i dana sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2(W)}, & x \in W, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

gdje je $\lambda_2(W)$ površina od W, slijedi da za proizvoljni ograničeni skup $B \subset \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i \in B) &= \int_B f(x)dx \\ &= \frac{\lambda_2(B \cap W)}{\lambda_2(W)}, \qquad \text{za sve } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Za tako definirani točkovni proces slučajna varijabla $N(B)$ eksplicitno je dana izrazom

$$N(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B} \; .$$

Za cjelobrojno $k \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(B) = k) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B} = k) \\ &= \mathbb{P}(k \text{ varijabli unutar područja } B, n - k \text{ izvan}) \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)}, \end{aligned}$$

gdje je $p = \frac{\lambda_2(B \cap W)}{\lambda_2(W)}$, $q = 1 - p$. Dakle, $N(B)$ ima binomnu distribuciju s parametrima n i $p = \frac{\lambda_2(B \cap W)}{\lambda_2(W)}$ pa je zbog tog razloga jasno zašto se ovakav točkovni proces naziva *binomni*. Primjetimo još da za funkcional kapaciteta $T(K)$ vrijedi

$$\begin{aligned} T(K) = \mathbb{P}(N(K) > 0) &= 1 - \mathbb{P}\left(N(K) = 0\right) \\ &= 1 - q^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\lambda_2(B \cap W)}{\lambda_2(W)}\right)^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Slika 2.1 dobivena je simuliranjem realizacija 60 nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ (od kojih 35 predstavljaju tratinčice, a 25 ljubičice). Dakle, na navedenoj slici prikazana je realizacija binomnog točkovnog procesa. Gore opisani primjer specijalni je slučaj sljedeće definicije.

Definicija 2.4.1. *Neka je f funkcija gustoće na $W \subset \mathbb{R}^d$ i $n \in \mathbb{N}$. Točkovni proces $\boldsymbol{X}$ koji se sastoji od n nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih točaka (varijabli) čija je funkcija gustoće f nazivamo binomni točkovni proces i pišemo $\boldsymbol{X} \sim Bin(W, n, f)$.*

Poissonov točkovni proces

Poissonov točkovni proces igra fundamentalnu ulogu u teoriji točkovnih procesa. Posjeduje svojstvo *ne-interakcije* između točaka te služi kao referentni proces pri proučavanju točkovnih procesa. U prvom poglavlju upoznali smo se s Poissonovim slučajnim procesom, a sada ćemo uvesti generalizaciju.

Definicija 2.4.2. *Neka je μ mjera na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$ koja je konačna na svakom kompaktnom podskupu $B \subset E$. Poissonov proces na E s mjerom inteziteta μ, u oznaci $PRM(\mu)$, je točkovni proces koji zadovoljava:*
(1) Za svaki $B \in \mathcal{E}$ takav da $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\mu(B)$,
(2) za proizvoljne $m \in \mathbb{N}$ te međusobno disjunktne skupove $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iz $\mathcal{E}$, slučajne varijable $N(B_1), N(B_2), \ldots, N(B_n)$ su nezavisne.

Dakle, $\boldsymbol{X}$ je Poissonov točkovni proces ukoliko slučajan broj točaka unutar kompakta B ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem $\mu(B)$ te ako su brojevi točaka na disjunktnim kompaktima nezavisne slučajne varijable. Uočimo da μ određuje očekivani broj točaka unutar B,

$$\mathbb{E}[N(B)] = \mu(B).$$

Od ranije znamo da distribuciju točkovnog procesa karakterizira i Laplaceov funkcional, a za Poissonov točkovni proces taj rezultat dan je sljedećim teoremom.

Teorem 2.4.3. *Distribucija Poissonovnog točkovnog procesa $PRM(\mu)$ jedinstveno je određena tvrdnjama (1) i (2) iz prethodne definicije. Nadalje, točkovni proces $\boldsymbol{X}$ je $PRM(\mu)$ ako i samo ako je Laplaceov funkcional tog procesa oblika*

$$\Psi_{N_{\boldsymbol{X}}}(f) = \exp\left(-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\right), \quad f \in \mathcal{B}_+.$$

Dokaz se može pogledati u Resnick [5], str. 337.
Nadalje, mjera μ iz definicije 2.4.2 naziva se srednja mjera te se često zadaje sa

$$\mu(B) = \int_B f(x)dx,$$

za neku nenegativnu i ograničenu funkciju f. Funkcija f naziva se funkcija intenziteta. Za Poissonov točkovni proces kažemo da je homogen ukoliko je funkcija intenziteta konstantna, tj. ukoliko je

$$\mu(B) = \beta\lambda_d(B),$$

pri čemu $\lambda_d(B)$ označava Lebesgueovu mjeru ograničenog skupa $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, inače kažemo da je nehomogen. Promatrajmo homogeni Poissonov proces s intenzitetom β. Tada je

$$\mathbb{P}(N(B) = k) = \frac{(\beta\lambda_d(B))^k}{k!} e^{-\beta\lambda_d(B)},$$

za svaki cjelobrojni $k \geq 0$. Posebno,

$$\mathbb{P}(N(B) = 0) = e^{-\beta\lambda_d(B)},$$

pa slijedi da je funkcional kapaciteta Poissonovog procesa s intenzitetom β

$$T(K) = 1 - e^{-\beta\lambda_d(K)}. \tag{2.11}$$

Iz gornjeg zaključujemo da je homogeni Poissonov proces stacionaran i izotropan. Nadalje, neka je $W \subset \mathbb{R}^2$ ograničen i neka je $N(W) = n$ dano. Za $B \subset W$ možemo promatrati uvjetnu distribuciju od $N(B)$. Za $0 \leq k \leq n$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(B) = k \mid N(W) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(B) = k,\ N(W \backslash B) = n - k)}{\mathbb{P}(N(W) = n} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(B) = k)\, \mathbb{P}(N(W \backslash B) = n - k)}{\mathbb{P}(N(W) = n)} \\
&= \frac{e^{-\beta\lambda_2(B)} \frac{(\beta\lambda_2(B))^k}{k!} e^{-\beta\lambda_2(W\backslash B)} \frac{(\beta\lambda_2(W\backslash B))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\beta\lambda_2(W)} \frac{(\beta\lambda_2(W))^n}{n!}} \\
&= \frac{e^{-\beta(\lambda_2(B)+\lambda_2(W\backslash B))} \frac{\beta^{k+n-k}\lambda_2(B)^k\lambda_2(W\backslash B)^{n-k}}{k!(n-k)!}}{e^{-\beta\lambda_2(W)} \frac{\beta^n\lambda_2(W)^{n-k+k}}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2(W)}\right)^k \left(\frac{\lambda_2(W\backslash B)}{\lambda_2(W)}\right)^{n-k},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

gdje druga jednakost slijedi iz uvjeta (2) definicije Poissonovog točkovnog procesa. Dakle, uvjetna distribucija od $N(B)$ uz dano $N(W) = n$ je binomna distribucija s parametrima n i $p = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2(W)}$. Zaključujemo da su uvjetne distribucije od $N(B_1), N(B_2), \ldots, N(B_m)$ za proizvoljne $B_1, B_2, \ldots, B_m$ iz W jednake kao distribucije takvih varijabli binomnog procesa. Posebno, ako je dan broj točaka n homogenog Poissonovog procesa u W, slijedi da su te točke uvjetno nezavisne i uniformno distribuirane u W. Prethodni zaključak daje nam izravan način za simuliranje Poissonovog procesa. Za generiranje realizacije Poissonovog procesa intenziteta β u W prvo generiramo slučajnu varijablu M iz Poissonove razdiobe s očekivanjem $\beta\lambda_2(W)$ i zatim uz $M = m$ generiramo m nezavisnih uniformni slučajnih točaka unutar W. Na taj se način Slika 2.1, uz nerazlikovanje boja, može shvatiti kao realizacija Poissonovog procesa u $W = [0, 1]^2$ u kojoj se *dogodilo* da je točno 60 točaka unutar W. Razlika u odnosu na binomni točkovni proces je ta da se u različitim realizacijama Poissonovog procesa može pojaviti različit broj točaka.

2.5 Udaljenost

Dani točkovni proces može se promatrati i pomoću koncepta udaljenosti između točaka.

Definicija 2.5.1. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces te $a \in \mathbb{R}^d$. Kontaktna udaljenost (engl. contact distance) točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ od a, u oznaci* $\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X})$*, jest najkraća udaljenost točke procesa $\boldsymbol{X}$ od točke a, tj.*

$$\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X}) := \inf\{r \geq 0 : N_{\boldsymbol{X}}(K(a, r)) > 0\}. \tag{2.13}$$

Dakle, $\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X}) \leq r$ ako i samo ako je $N_{\boldsymbol{X}}(K(a, r)) > 0$. Kako je $N_{\boldsymbol{X}}(K(a, r))$ slučajna varijabla za fiksne a i r, slijedi da je $\{N_{\boldsymbol{X}}(K(a, r)) > 0\}$ izmjeriv. Posebno, skup $\{\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X}) \leq r\}$ je izmjeriv pa je *kontaktna udaljenost* dobro definirana slučajna varijabla.

Nadalje, ukoliko je $\boldsymbol{X}$ Poissonov proces u $\mathbb{R}^d$ s intenzitetom β sljedeći račun daje distribuciju od $\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X}) \leq r) &= \mathbb{P}(N_{\boldsymbol{X}}(\ K(a, r)\ ) > 0) \\
&= 1 - \exp(-\beta \lambda_d(K(a, r))) \\
&= 1 - \exp(-\beta \kappa_d r^d),
\end{aligned}$$

gdje je $\kappa_d = \lambda_d(K(0, 1))$ volumen jedinične kugle u $\mathbb{R}^d$. Iz upravo provedenog računa slijedi da za slučajnu varijablu $V = \kappa_d \mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X})^d$ vrijedi

$$\mathbb{P}(V \leq v) = 1 - \exp(-\beta v), \quad \forall v \geq 0,$$

pa možemo zaključiti da V dolazi iz eksponencijalne distribucije s intenzitetom β. Uočimo da V predstavlja volumen kugle slučajnog polumjera $\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X})$ odnosno kugle sa središtem u a takva da ne sadrži niti jednu točku procesa $\boldsymbol{X}$.

Naposljetku, pokažimo vezu između kontaktne udaljenosti i funkcionala kapaciteta stacionarnog procesa $\boldsymbol{X}$.

Definicija 2.5.2. *Neka je $\boldsymbol{X}$ stacionarni točkovni proces u $\mathbb{R}^d$. Funkcija razdiobe praznog prostora (engl. empty space distribution function) $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ je funkcija distribucije slučajne varijable kontaktne udaljenosti* $\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X})$*, tj.*

$$F(r) := \mathbb{P}(\mathrm{dist}(a, \boldsymbol{X}) \leq r), \quad \forall r \geq 0. \tag{2.14}$$

Zbog stacionarnosti F ne ovisi o a. Naime,

$$F(r) = \mathbb{P}(N(K(a, \boldsymbol{X})) > 0) = T(K(a, r)) = T(K(0, r)),$$

gdje je T funkcional kapaciteta stacionarnog procesa $\boldsymbol{X}$. Uočimo da nam funkcija praznog prostora daje vrijednosti funkcionala kapaciteta na svim kuglama. Kako funkcional kapaciteta u potpunosti opisuje jednostavni točkovni proces, funkcija praznog prostora zapravo daje mnogo informacija o procesu. Zbog svega navedenog, funkcija praznog prostora pokazuje se vrlo korisnom u analizi i procjeni podataka. Detaljnije o procjeni funkcije F može se vidjeti u Baddeley [1], str. 23-24.

Poglavlje 3

Momenti točkovnih procesa

U ovom ćemo poglavlju opisati analogone momenata slučajnih varijabli za točkovne procese. Znamo da su momenti izrazito značajni za teorijsko proučavanje i statističku analizu slučajnih varijabli pa očekujemo da njihovi analogoni za točkovne procese budu podjednako korisni. Uvest ćemo *intenzitet* točkovnog procesa kao analogon očekivanju slučajne varijable. Dokazat ćemo *Campbellovu formulu* koja se pokazuje značajna za intenzitet te mjere drugog momenta. *Mjere drugog momenta* intuitivno odgovaraju pojmovima varijance i kovarijance slučajne varijable. Definirat ćemo *faktorijelnu mjeru drugog momenta* te pokazati njenu dekompoziciju u slučaju stacionarnih procesa. Upoznat ćemo *K-funkcije*, metode njihove procjene te na primjeru ilustrirati njihovu primjenu na stvarnim podacima. Poglavlje završavamo uvodeći pojam *Janossyjevih mjera* konačnih točkovnih procesa te ih povezujemo s njihovom distribucijom i faktorijelnim mjerama k-tog momenta.

3.1 Intenzitet

Intenzitet ili prvi moment točkovnog procesa je analogon očekivanju slučajne varijable.

Definicija 3.1.1. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na $E \subset \mathbb{R}^d$. Mjera intenziteta od $\boldsymbol{X}$ je preslikavanje $\nu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ definirano izrazom*

$$\nu(B) := \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)], \qquad B \in \mathcal{E}. \tag{3.1}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\nu(\emptyset) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(\emptyset)] = \mathbb{E}[0] = 0, \tag{3.2}$$

$$\nu(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} N_{\boldsymbol{X}}(B_n)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_n)], \tag{3.3}$$

za svaki niz međusobno disjunktnih skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{E}$. Druga jednakost u (3.3) vrijedi zbog činjenice da su skupovi B_n međusobno disjunktni, a treća zbog *Beppo Levijevog* *teorema*. Dakle, opravdano je ν zvati mjerom. Štoviše, zbog pretpostavke o lokalnoj konačnosti točkovnog procesa slijedi da je ν lokalno konačna mjera. Razmotrimo mjeru intenziteta binomnog te Poissonovog točkovnog procesa.

Primjer 3.1.2. *Neka je $\boldsymbol{X} \sim Bin(W, n, f)$ pri čemu su $W \subset \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ te f funkcija gustoće slučajne varijable uniformno distribuirane na W. Pokazali smo da je tada $N_{\boldsymbol{X}}(B) \sim Bin(n, p)$ gdje je $p = \frac{\lambda_d(B\cap W)}{\lambda_d(W)}$ za svaki $B \in \mathcal{E}$, što povlači*

$$\nu(B) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)] = np = n\frac{\lambda_d(B \cap W)}{\lambda_d(W)}.$$

Dakle, mjera intenziteta binomnog točkovnog procesa $\nu(B)$ proporcionalna je Lebesgueovoj mjeri skupa $B \cap W$.

Primjer 3.1.3. *Neka je $\boldsymbol{X}$ PRM(μ), tada je $\nu \equiv \mu$. Posebno, u slučaju homogenog Poissonovog procesa s intenzitetom β slijedi da za svaki skup $B \in \mathcal{E}$ vrijedi*

$$\nu(B) = \beta\lambda_d(B).$$

Zaključujemo da je mjera intenziteta homogenog Poissonovog procesa $\nu(B)$ proporcionalna Lebesgueovoj mjeri skupa B.

U slučaju stacionarnog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ na $\mathbb{R}^d$ vrijedi

$$\nu(B + v) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B + v)] = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)] = \nu(B)$$

za svaki $v \in \mathbb{R}^d$. Dakle, mjera intenziteta stacionarnog točkovnog procesa invarijantna je obzirom na translacije. Za svaku mjeru μ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(R^d))$ invarijantnu obzirom na translacije koja zadovoljava $\mu([0, 1]^d) < +\infty$ postoji $c \geq 0$ tako da vrijedi $\mu = c\lambda_d$ (vidi Schilling [6], str. 34-35). Posebno, za mjeru intenziteta ν stacionarnog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ na $\mathbb{R}^d$ postoji konstanta $c \geq 0$ tako da vrijedi $\nu = c\lambda_d$. Konstantu c nazivamo *intenzitetom* stacionarnog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$.

Definicija 3.1.4. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ i ν pripadna mjera intenziteta. Ukoliko postoji funkcija $\beta : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava*

$$\nu(B) = \int_B \beta(u)\mathrm{d}u, \tag{3.4}$$

tada se funkcija β naziva funkcija intenziteta od $\boldsymbol{X}$.

Intuitivno, očekivani broj točaka unutar *male* okoline volumena dx točke x dan je sa $\beta(x)\mathrm{d}x$. U nastavku dokazujemo tvrdnju čija će posljedica dati jednu od upotreba funkcije intenziteta.

Teorem 3.1.5. *(Campbellova formula) Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces s vrijednostima u E te ν pripadna mjera intenziteta. Neka je $f : E \to [-\infty, +\infty]$ izmjeriva. Tada je $N_{\boldsymbol{X}}(f) = \int f(x) dN_{\boldsymbol{X}}(x)$ slučajna varijabla te vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\int f(x) dN_{\boldsymbol{X}}(x)\right] = \int f(x) d\nu(x), \tag{3.5}$$

pri čemu je f nenegativna ili zadovoljava $\int |f(x)| d\nu(x) < +\infty$.

Dokaz. Teorem dokazujemo takozvanom *Lebesgueovom indukcijom*.

1. Neka je $f = \mathbb{1}_B$ za neki $B \in \mathcal{E}$. Tada je

$$\int f dN_{\boldsymbol{X}} = \int_B dN_{\boldsymbol{X}} = N_{\boldsymbol{X}}(B).$$

Dakle, $N_{\boldsymbol{X}}(f) = N_X(B)$ pa je $N_{\boldsymbol{X}}(f)$ slučajna varijabla i vrijedi

$$\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(f)] = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)] = \nu(B) = \int f d\nu.$$

2. Neka je f nenegativna jednostavna izmjeriva funkcija, tj.

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i},$$

za $n \in \mathbb{N}$ i neke $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ te $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$. Tada je

$$N_{\boldsymbol{X}}(f) = \int f dN_{\boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^{n} b_i \int \mathbb{1}_{B_i} dN_{\boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^{n} b_i N_X(B_i),$$

gdje druga jednakost slijedi iz linearnosti integrala, a treća iz prvog koraka indukcije. Slijedi da je $\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(f)$ slučajna varijabla kao linearna kombinacija slučajnih varijabli te je zadovoljeno

$$\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(f)] = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_i)] = \sum_{i=1}^{n} b_i \nu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \int \mathbb{1}_{B_i} d\nu = \int f d\nu.$$

3. Neka je f nenegativna izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ tako da vrijedi $f_n \leq f$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ (vidi Schilling [6], str. 61-62). Sada imamo

$$N_{\boldsymbol{X}}(f) = \int \lim_{n\to+\infty} f_n dN_{\boldsymbol{X}} = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dN_{\boldsymbol{X}} = \lim_{n\to+\infty} N_{\boldsymbol{X}}(f_n),$$

pa zaključujemo da je $N_{\boldsymbol{X}}(f)$ izmjeriva kao limes niza izmjerivih funkcija pri čemu druga jednakost slijedi iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji. Pokazali smo da vrijedi $N_{\boldsymbol{X}}(f) = \lim_{n\to+\infty} N_{\boldsymbol{X}}(f_n)$, a zbog monotonosti integrala vrijedi $0 \leq \int f_1 dN_{\boldsymbol{X}} \leq \cdots \leq \int f_n dN_{\boldsymbol{X}} \leq \int f dN_{\boldsymbol{X}}$. Dakle, ispunjene su pretpostavke LTMK-a. Koristeći prethodni korak indukcije i LTMK dobivamo

$$\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(f)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(f_n)] = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\nu = \int f d\nu.$$

4. Za izmjerivu f koja zadovoljava $\int |f(x)| d\nu(x) < +\infty$ postoje nenegativne ν-integrabilne izmjerive funkcije f^+ i f^- td. $f = f^+ - f^-$. Iz prethodnog koraka indukcije slijedi da su $N_{\boldsymbol{X}}(f^+)$ i $N_{\boldsymbol{X}}(f^-)$ slučajne varijable. Koristeći linearnost integrala slijedi $N_{\boldsymbol{X}}(f) = N_{\boldsymbol{X}}(f^+) - N_{\boldsymbol{X}}(f^-)$ pa je $N_{\boldsymbol{X}}(f)$ slučajna varijabla kao razlika slučajnih varijabli. Konačno, zbog linearnosti integrala i prethodnog koraka indukcije slijedi $\mathbb{E}[\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(f)] = \int f d\nu$.

□

Zbog činjenice da je $N_{\boldsymbol{X}}$ točkovna mjera možemo pisati $N_{\boldsymbol{X}}(f) = \sum_{x\in\boldsymbol{X}} f(x)$. Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ s funkcijom intenziteta β. Iz Campbellove formule slijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{X}} f(x)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\beta(x)dx. \tag{3.6}$$

Jednakost (3.6) dobivena je pomoću sljedeće leme koja se također dokazuje Lebesgueovom indukcijom.

Lema 3.1.6. *Neka su μ i ν mjere na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ tako da vrijedi $\nu(A) = \int_A \beta d\mu$, za svaki $A \in \mathcal{F}$ i neku izmjerivu funkciju $\beta : X \to [0, +\infty]$. Tada vrijedi*

$$\int f d\nu = \int f\beta d\mu,$$

za svaku izmjerivu funkciju $f : X \to [-\infty, +\infty]$ koja je nenegativna ili koja zadovoljava $\int |f| d\nu < +\infty$.

Za ilustraciju pretpostavimo da se $\boldsymbol{X}$ sastoji od fiksnog, konačnog broja slučajnih točaka u $\mathbb{R}^d$, tj. $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$, pri čemu slučajna varijabla X_i ima vjerojatnosnu gustoću f_i za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tada za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$N_{\boldsymbol{X}}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_B(X_i).$$

Lako se pokazuje da je $N_{\boldsymbol{X}}$ zaista točkovni proces. Računamo pripadajuću mjeru intenziteta

$$\begin{aligned} \nu(B) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_B f_i(u)du \\ &= \int_B \sum_{i=1}^{n} f_i(u)du. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Zaključujemo da je $\beta \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i$ funkcija intenziteta takvog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$.

3.2 Mjere drugog momenta

Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na E. Za $B \in \mathcal{E}$ želimo proučavati varijancu od $N_{\boldsymbol{X}}(B)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(N_{\boldsymbol{X}}(B)) &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)^2] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)]^2 \\ &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)^2] - \nu(B)^2, \end{aligned}$$

te kovarijancu od $N_{\boldsymbol{X}}(B_1)$ i $N_{\boldsymbol{X}}(B_2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(N_{\boldsymbol{X}}(B_1), N_{\boldsymbol{X}}(B_2)) &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_1)N_{\boldsymbol{X}}(B_2)] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_1)]\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_2)] \\ &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B_1)N_{\boldsymbol{X}}(B_2)] - \nu(B_1)\nu(B_2), \end{aligned}$$

gdje je ν mjera intenziteta od $\boldsymbol{X}$. Preostaje precizirati što predstavlja izraz $N_{\boldsymbol{X}}(B_1)N_{\boldsymbol{X}}(B_2)$. Prisjetimo se, ukoliko su $(X, \mathcal{F}, \mu_1)$ i $(Y, \mathcal{G}, \mu_2)$ prostori s mjerom, tada $\pi = \mu_1 \otimes \mu_2$ označava produktnu mjeru na $\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\})$, pri čemu je $\pi(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ za $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$. Dakle, $\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(\,\cdot\,)\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(\,\cdot\,)$ definira mjeru na $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Pregled teorije produktne mjere može se naći u [7], dodatak.

Za $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ vrijedi

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{X}}(B_1)N_{\boldsymbol{X}}(B_2) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(B_1) \sum_{m \in \mathbb{N}} \delta_{x_m}(B_2) \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(B_1)\delta_{x_m}(B_2) \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \delta_{(x_n, x_m)}(B_1 \times B_2), \end{aligned} \tag{3.8}$$

pa je time definirana točkovna mjera procesa $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$. Sada možemo definirati mjeru drugog momenta točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$.

Definicija 3.2.1. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na E. Mjera drugog momenta od $\boldsymbol{X}$ je preslikavanje $\nu_2 : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to [0,+\infty]$ definirano izrazom*

$$\nu_2(B_1 \times B_2) := \mathbb{E}[\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(B_1)\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(B_2)], \qquad B_1, B_2 \in \mathcal{E}. \tag{3.9}$$

Dakle, mjera drugog momenta točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ jest mjera intenziteta točkovnog procesa $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$. Mjera drugog momenta sadrži sve potrebne informacije o varijanci i kovarijanci. Primijenimo li Campbellovu formulu na proces $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ dobivamo

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x,y\in\boldsymbol{X}} f(x,y)\right] = \int_{E\times E} f(x,y)d\nu_2(x,y),$$

za izmjerivu funkciju $f : E\times E \to \mathbb{R}$.

Promotrimo homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\beta > 0$ i točkovnom mjerom N te nađimo pripadnu mjeru drugog momenta ν_2. Za ograničene $A, B \in \mathcal{E}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\nu_2(A\times B) &= \mathbb{E}[N(A)N(B)] \\
&= \mathbb{E}[N(A\backslash B)N(B) + N(A\cap B)N(B)] \\
&= \mathbb{E}[N(A\backslash B)N(B) + N(A\cap B)N(B\backslash A) + N(A\cap B)^2] \\
&= \mathbb{E}[N(A\backslash B)]\mathbb{E}[N(B)] + \mathbb{E}[N(A\cap B)]\mathbb{E}[N(B\backslash A)] + \mathbb{E}[N(A\cap B)^2] \\
&= \beta^2\lambda_2(A\backslash B)\lambda_2(B) + \beta^2\lambda_2(A\cap B)\lambda_2(B\backslash A) + \beta\lambda_2(A\cap B) + \beta^2\lambda_2(A\cap B)^2 \\
&= \beta^2\lambda_2(A\backslash B)\lambda_2(B) + \beta^2\lambda_2(A\cap B)\lambda_2(B) + \beta\lambda_2(A\cup B) \\
&= \beta^2\lambda_2(A)\lambda_2(B) + \beta\lambda_2(A\cap B),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

pri čemu smo u računu koristili svojstva iz definicije Poissonovog točkovnog procesa te poznate činjenice o očekivanju i varijanci Poissonove slučajne varijable. Uočimo da se mjera ν_2 sastoji od dva sumanda. Prvi se sumand sastoji od konstante β^2 koja množi mjeru skupa $A\times B$ i predstavlja umnožak očekivanog broja točaka u skupu A i B dok drugi sumand predstavlja očekivani broj točaka koje se nalaze u presjeku skupova A i B. Ukoliko se točka x nalazi u $A\cap B$ onda se i uređeni par (x,x) nalazi u $A\times B$ te možemo reći da se takva točka nalazi na *dijagonali*. Uklanjajući *dijagonalu* dobivamo jednostavniji oblik mjere drugog momenta.

Promotrimo sada opći točkovni proces $\boldsymbol{X}$. Sa $\boldsymbol{X} * \boldsymbol{X}$ označimo proces svih uređenih parova točaka procesa $\boldsymbol{X}$ izuzev parove oblika (x, x) (tj. $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ bez *dijagonale*). Tada je pripadna točkovna mjera dana sa

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{X}*\boldsymbol{X}}(A \times B) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}\ x_m \neq x_n} \delta_(x_n, x_m)(A \times B) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(A) \sum_{m \in \mathbb{N}\ m \neq n} \delta_{x_m}(B) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(A) \sum_{m \in \mathbb{N}} \delta_{x_m}(B) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(A) \delta_{x_n}(B) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(A) \sum_{m \in \mathbb{N}} \delta_{x_m}(B) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(A \cap B) \\ &= N_{\boldsymbol{X}}(A) N_{\boldsymbol{X}}(B) - N_{\boldsymbol{X}}(A \cap B). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pokazuje se korisnim promatrati mjeru intenziteta točkovnog procesa $\boldsymbol{X} * \boldsymbol{X}$.

Definicija 3.2.2. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na E. Faktorijelna mjera drugog momenta od $\boldsymbol{X}$ je preslikavanje $\nu_{[2]} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ definirano izrazom*

$$\nu_{[2]}(A \times B) := \mathbb{E}[\mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(A) \mathbb{N}_{\boldsymbol{X}}(B)] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A \cap B)], \qquad A, B \in \mathcal{E}. \tag{3.12}$$

Naziv faktorijelne mjere došao je zbog

$$\begin{aligned} \nu_{[2]}(A \times A) &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)^2] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)] \\ &= \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)(N_{\boldsymbol{X}}(A) - 1)]. \end{aligned}$$

Nadalje, primijenimo li Campbellovu formulu na proces $\boldsymbol{X} * \boldsymbol{X}$ i izmjerivu funkciju $f : E \times E \to \mathbb{R}$ dobivamo

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \boldsymbol{X}} \sum_{y \in \boldsymbol{X}\ y \neq x} f(x, y) \right] = \int_{E \times E} f(x, y) d\nu_{[2]}(x, y).$$

Dodajmo još da je faktorijelna mjera drugog momenta homogenog Poissonovog točkovnog procesa s intenzitetom $\beta > 0$ na $\mathbb{R}^d$ dana sa

$$\nu_{[2]} = \beta^2 \lambda_d \otimes \lambda_d.$$

Definicija 3.2.3. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na E i $g_2 : E \times E \to [0, +\infty]$ izmjeriva funkcija. Funkcija g_2 naziva se gustoća drugog momenta procesa $\boldsymbol{X}$ ukoliko vrijedi*

$$\nu_{[2]}(C) = \int_C g_2(x, y) dx dy, \tag{3.13}$$

za svaki kompaktni skup $C = A \times B \subset E \times E$.

Neformalno, $g_2(x,y)$ daje vjerojatnost postojanja točaka procesa $\boldsymbol{X}$ na dva određena područja *malog* volumena, tj. $\mathbb{P}(N_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{d}x) > 0, N_{\boldsymbol{X}}(\mathrm{d}y) > 0) \approx g_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Nadalje, uočimo da je funkcija gustoće drugog momenta Poissonovog homogenog procesa s intenzitetom $\beta > 0$ na $\mathbb{R}^d$ dana sa $g_2 \equiv \beta^2$.

Dosad smo uveli funkciju intenziteta koju povezujemo s mjerom prvog momenta te funkciju gustoće koju povezujemo s mjerom drugog momenta. Navedene ćemo funkcije povezati te njihov odnos opisati takozvanom funkcijom korelacije.

Definicija 3.2.4. *Neka je $\boldsymbol{X}$ točkovni proces na E s funkcijom intenziteta $\beta : E \to [0,+\infty]$ i funkcijom gustoće drugog momenta $g_2 : E\times E \to [0,+\infty]$. Definiramo funkciju korelacije $\rho_2 : E \times E \to [0,+\infty]$ točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ sa*

$$\rho_2(x,y) = \frac{g_2(x,y)}{\beta(x)\beta(y)}. \tag{3.14}$$

Uočimo da je funkcija korelacije nenegativna te je svojevrsni *necentrirani* analogon korelacije slučajnih varijabli. Vrijednost $\rho_2 \equiv 1$ odgovara nekoreliranosti u običajenim statističkim terminima. Naime, za disjunktne skupove A i B iz $\mathcal{E}$ vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \equiv 1\\
\Rightarrow\ & g_2(x,y) = \beta(x)\beta(y), \quad \forall x,y\\
\Rightarrow\ & \int_{A\times B} g_2(x,y)dxdy = \int_{A\times B} \beta(x)\beta(y)dxdy\\
\Rightarrow\ & \nu_{[2]}(A\times B) = \left(\int_A \beta(x)dx\right)\left(\int_B \beta(y)dy\right)\\
\Rightarrow\ & \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)N_{\boldsymbol{X}}(B)] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A\cap B)] = \nu(A)\nu(B)\\
\Rightarrow\ & \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)N_{\boldsymbol{X}}(B)] - \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(\emptyset)] = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)]\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(B)]\\
\Rightarrow\ & \mathrm{Cov}(N_{\boldsymbol{X}}(A), N_{\boldsymbol{X}}(B)) = 0.
\end{aligned}$$

Iz primjera 3.1.3 znamo da je funkcija intenziteta Poissonovog homogenog procesa s intenzitetom $\beta > 0$ dana sa $\beta(x) = \beta$, a pokazali smo da je funkcija gustoće drugog momenta $g_2 \equiv \beta^2$ pa slijedi da je pripadna funkcija korelacije $\rho_2 \equiv 1$.

Primjer 3.2.5. *Neka je $\boldsymbol{X}$ binomni točkovni proces na $W \subset \mathbb{R}^d$. Podsjetimo se, za fiksni $n \in \mathbb{N}$ dane su nezavisne slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uniformno distribuirane na W. Funkcija gustoće pojedine varijable X_i dana je sa $f(x) = \frac{1}{\lambda_d(W)}$ za $x \in W$ dok je inače 0. Za proizvoljni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\mathbb{P}(X_i \in B) = \int_B f(x)dx = \frac{\lambda_d(B\cap W)}{\lambda_d(W)}$, a točkovna je mjera tog* *procesa dana sa* $N_{\boldsymbol{X}}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in B}$. *Sada računamo*

$$\begin{aligned}
\nu_{[2]}(A \times B) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{1}_{(X_i \in A, X_j \in B)}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in B) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A)\mathbb{P}(X_j \in B) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\lambda_d(A \cap W)}{\lambda_d(W)} \frac{\lambda_d(B \cap W)}{\lambda_d(W)} \\
&= \frac{\lambda_d(A \cap W)\lambda_d(B \cap W)}{\lambda_d(W)^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{\lambda_d(W)^2} \lambda_d(A \cap W)\lambda_d(B \cap W),
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je funkcija gustoće drugog momenta $g_2(x, y) = \frac{n(n-1)}{\lambda_d(W)^2}$ *za* $x, y \in W$, *a 0 inače. Kako je* $\nu(B) = n\frac{\lambda_d(B \cap W)}{\lambda_d(W)}$ *slijedi da je funkcija intenziteta* $\beta(x) = \frac{n}{\lambda_d(W)}$ *za* $x \in W$. *Prethodni zaključci impliciraju da je funkcija korelacije binomnog točkovnog procesa koji se sastoji od n točaka u području W dana sa* $\rho_2(x, y) = 1 - \frac{1}{n}$.

Neka je točkovni proces dan sa $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$, pri čemu slučajna varijabla X_i ima vjerojatnosnu gustoću f_i, a slučajni vektor (X_i, X_j) gustoću f_{ij} za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Slično kao u prethodnom primjeru imamo

$$\begin{aligned}
\nu_{[2]}(A \times B) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{1}_{(X_i \in A, X_j \in B)}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in B) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \int_{A \times B} f_{ij}(x, y)dxdy,
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $g_2(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n f_{i,j}$ funkcija gustoće drugog momenta procesa $\boldsymbol{X}$. Zajedno sa zaključkom dobivenim računom (3.7) slijedi da je funkcija korelacije točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ dana sa

$$\rho_2(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n f_{i,j}(x,y)}{\sum_{i=1}^n f_i(x) \sum_{j=1}^n f_j(y)}. \tag{3.15}$$

3.3 Drugi momenti stacionarnih procesa i K-funkcija

Za stacionaran točkovni proces $\boldsymbol{X}$ na $\mathbb{R}^d$ vrijedi

$$\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A+v)N_{\boldsymbol{X}}(B+v)] = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)N_{\boldsymbol{X}}(B)],$$

za sve $v \in \mathbb{R}^d$ pa slijedi da su mjera drugog momenta ν te faktorijelna mjera drugog momenta $\nu_{[2]}$ invarijantne obzirom na simultane pomake

$$(x,y) \mapsto (x+v, y+v).$$

Nadalje, primijenimo transformaciju $T(x,y) = (x, y-x)$ na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Time smo $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ preslikali na samog sebe. Simultani pomaci postaju pomake prve koordinate, tj.

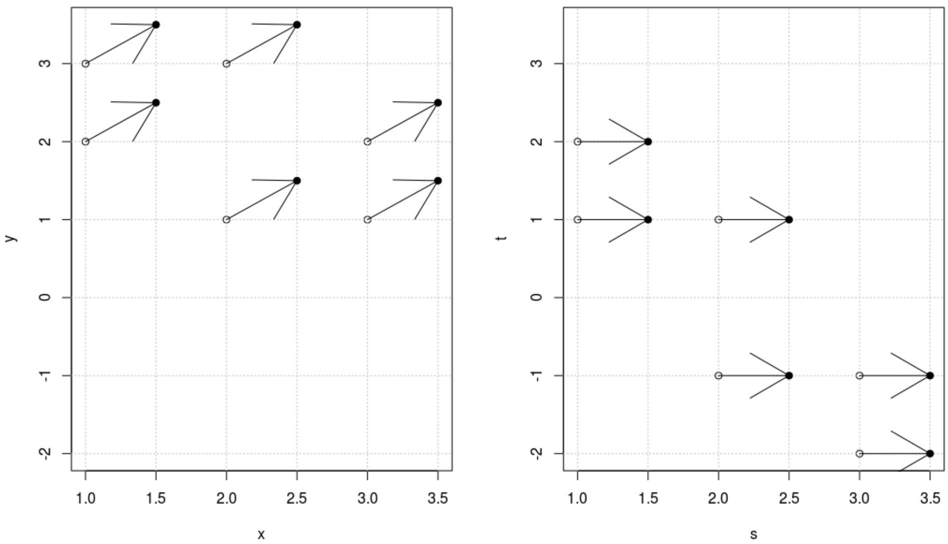
$$(s,t) \mapsto (s+v, t),$$

za sve $v \in \mathbb{R}^d$. Slika od $\nu_{[2]}$ uz transformaciju T je mjera μ koja je invarijantna na translacije u prvom argumentu. Kako su mjere koje su invarijantne na translacije skalirane Lebesgueove mjere μ možemo zapisati u obliku

$$\mu = \beta\lambda_d \otimes \mathcal{K}, \tag{3.16}$$

gdje je β intenzitet stacionarnog točkovnog procesa, a $\mathcal{K}$ mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ koju nazivamo reducirana mjera drugog momenta procesa $\boldsymbol{X}$. Dakle, faktorijelnu mjeru drugog momenta rastavili smo na produkt Lebesgueove mjere te reducirane mjere duž $u = y - x$. Campbellova formula za funkciju f koja zadovoljava uvjete teorema 3.1.5 daje

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{X}} \sum_{y\in\boldsymbol{X}, x\neq y} f(x,y)\right] &= \int\int f(x,y)d\nu_{[2]}(x,y) \\ &= \int\int f(x,x+u)d\mu(x,u) \\ &= \beta\int\int f(x,x+u)dxd\mathcal{K}(u).\end{aligned} \tag{3.17}$$



Slika 3.1: Pretpostavimo da je jedna realizacija procesa dana sa $S = \{1, 2, 3\}$. S lijeve je strane prikazan $S * S$ te istovremeni pomak tih točaka za $v = \frac{1}{2}$. S desne je strane prikazan isti proces, ali transformiran sa T.

Time smo dokazali sljedeći rezultat.

Teorem 3.3.1. *Neka je $\boldsymbol{X}$ stacionarni točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ s intenzitetom β. Tada postoji mjera $\mathcal{K}$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ da za proizvoljnu izmjerivu funkciju f vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{X}}\sum_{y\in\boldsymbol{X},x\neq y} f(x,y)\right] = \beta\int\int f(x, x+u)dxd\mathcal{K}(u). \tag{3.18}$$

Mjera $\mathcal{K}$ naziva se reducirana mjera drugog momenta procesa $\boldsymbol{X}$.

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(x, y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y - x)$ za neke $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{X}}\sum_{y\in\boldsymbol{X},x\neq y} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y-x)\right] &= \int\int \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y-x)d\nu_{[2]}(x,y) \\
&= \int\int \mathbb{1}_A(s)\mathbb{1}_B(t)d\mu(s,t) \\
&= \mu(A\times B) \\
&= \beta\lambda_d(A)\mathcal{K}(B).
\end{aligned}$$

Kako je $\beta\lambda_d(A) = \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)]$ slijedi

$$\mathcal{K}(B) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{X}\cap A} N_{\boldsymbol{X}}(\{B+x\}\setminus\{x\})\right]}{\mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(A)]}. \tag{3.19}$$

Desna se strana gornje formule može shvatiti kao prosjek, po svim točkama x, broja točaka y koje zadovoljavaju $y - x \in B$. Dodajmo da za Poissonov homogeni proces s intezitetom $\beta > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\nu_{[2]} &= \beta^2\lambda_d \otimes \lambda_d,\\ \mu &= \beta^2\lambda_d \otimes \lambda_d,\\ \mathcal{K} &= \beta\lambda_d.\end{aligned}$$

Neka je $\boldsymbol{X}$ stacionaran te g_2 pripadna gustoća drugog momenta. Tada uspoređujući (3.13) sa (3.18) možemo zaključiti da $g_2(x, y)$ ovisi samo o $y - x$, tj. postoji funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$g_2(x, y) = g_2(0, y - x) = g(y - x), \quad \text{za svaki } x, y \in \mathbb{R}.$$

Sličnim računom kao ranije dobivamo

$$\begin{aligned}\beta\lambda_d(A)\mathcal{K}(B) &= \int\int \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y-x)d\nu_{[2]}(x, y)\\ &= \int\int \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y-x)g_2(x, y)dxdy\\ &= \int\int \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(u)g(u)dxdu\\ &= \lambda_d(A)\int_B g(u)du,\end{aligned}$$

pa slijedi

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{\beta}\int_B g(u)du. \tag{3.20}$$

Za praktičnu analizu točkovnog procesa potrebno je pojednostaviti mjeru $\mathcal{K}$.

Definicija 3.3.2. *Neka je $\boldsymbol{X}$ stacionaran točkovni proces na $\mathbb{R}^d$ te $\mathcal{K}$ pripadna mjera reduciranog drugog momenta. Funkcija $K : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ definirana sa*

$$K(r) = \frac{1}{\beta}\mathcal{K}(b(0, r)), \quad r \geq 0, \tag{3.21}$$

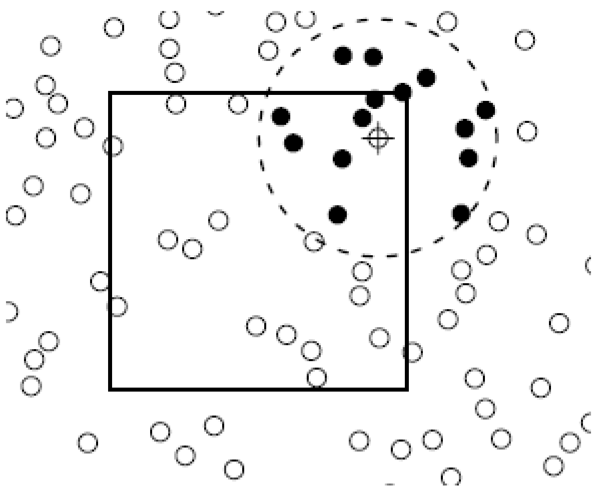
naziva se K-funkcija.

Dakle, $\beta K(r)$ predstavlja prosječan broj točaka y procesa $\boldsymbol{X}$, uz danu točku x, koje zadovoljavaju $y \in b(0,r)+x$, odnosno $y \in b(x,r)$. Nadalje, uočimo da za homogeni Poissonov proces s intenzitetom β vrijedi $K(r) = \frac{1}{\beta}\beta\lambda_d(b(0,r)) = \lambda_d(0,1)r^d$. U ovom slučaju faktor $\frac{1}{\beta}$ čini K-funkciju neovisnom o intenzitetu β. Spomenimo da za općeniti stacionarni proces $\boldsymbol{X}$ za koji ima gustoću drugog momenta g_2 vrijedi $K(r) = \frac{1}{\beta^2}\int_{b(0,r)} g_2(0,u)du = \int_{b(0,r)} \rho_2(0,u)du$ zbog čega se K-funkcija povezuje s funkcijom korelacije ρ_2.

U nastavku želimo procijeniti K-funkciju. U primjeni, promatrani uzorak u prostoru dolazi u obliku konačnog skupa točaka $\mathbf{x} = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ unutar područja (okvira) $W \subset \mathbb{R}^2$, pri čemu je $x_i \in W$ te $n = n(\mathbf{x}) \geq 0$ varijabilan. Takvi se podaci tretiraju kao realizacija stacionarnog točkovnog procesa $\boldsymbol{X}$ unutar W. Iz definicije K-funkcije te izraza (3.19) za $A = W$ te $B = b(0,t)$ dobivamo

$$K(r) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \boldsymbol{X} \cap W} N_{\boldsymbol{X}}(b(x,r) \setminus \{x\})\right]}{\beta \mathbb{E}[N_{\boldsymbol{X}}(W)]}, \qquad \text{za svaki } r \geq 0. \tag{3.22}$$

Primjenom gornje jednakosti javlja se tzv. *problem s rubom* (engl. *edge effect problem*) zbog toga što u brojniku promatramo samo $\boldsymbol{X} \cap W$. Naime, ukoliko je točka x u blizini ∂W,



Slika 3.2: Problem s rubom pri procijeni K-funkcije. Kako promatramo točke unutar okvira W (pravokutnika na slici), broj točaka unutar kugle radijusa r nije poznat ukoliko kugla prelazi granice pravokutnika.

kugla $b(x, r)$ može *izlaziti* izvan granica okvira W. Kako se proces $\boldsymbol{X}$ ne promatra izvan W, tako se ni broj točaka od $\boldsymbol{X}$ unutar kugle $b(x, r)$ u tom slučaju ne može promatrati. Jedno jednostavno rješenje tog problema je tzv. *metoda granice* (engl. *border method*). Pri procijeni $K(r)$, u jednakosti (3.22) zamijenimo W sa skupom

$$W_{-r} = \{x \in W : \mathrm{dist}(x, \partial W) \geq r\}, \tag{3.23}$$

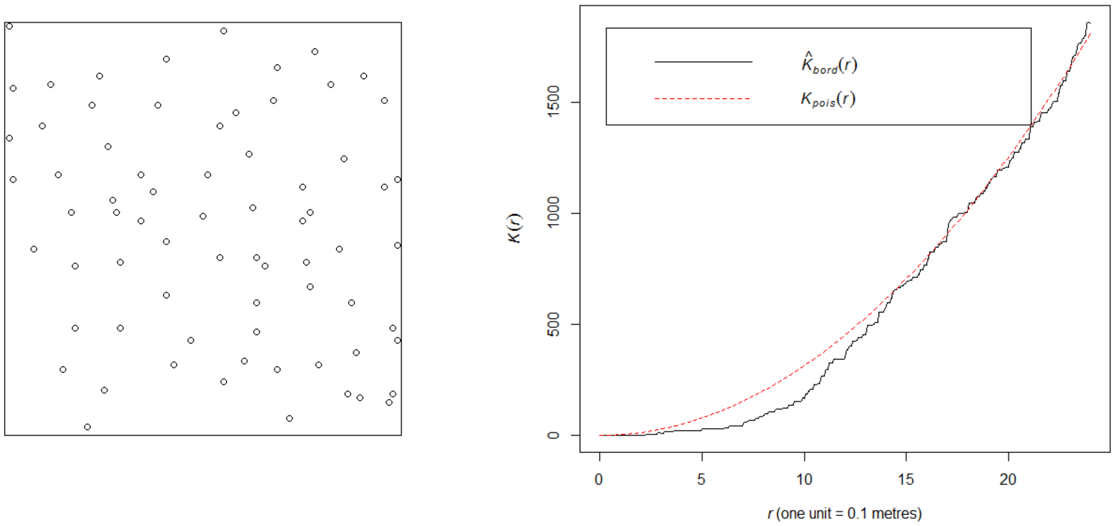
koji se sastoji od onih točaka unutar W koje su od ruba ∂W udaljene barem r. Tada je $u \in W_{-r}$ ako i samo ako je $b(u, r) \subset W$. Zbog toga se $K(r)$ procjenjuje sa

$$\begin{aligned}\hat{K}(r) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{x \in W_{-r}} N_{\boldsymbol{X}}(b(x, r) \backslash \{x\})\right]}{\hat{\beta} n(\mathbf{x} \cap W_{-r})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \mathbb{1}_{\|x_i - x_j\| \leq r}}{\hat{\beta} n(\mathbf{x} \cap W_{-r})},\end{aligned} \tag{3.24}$$

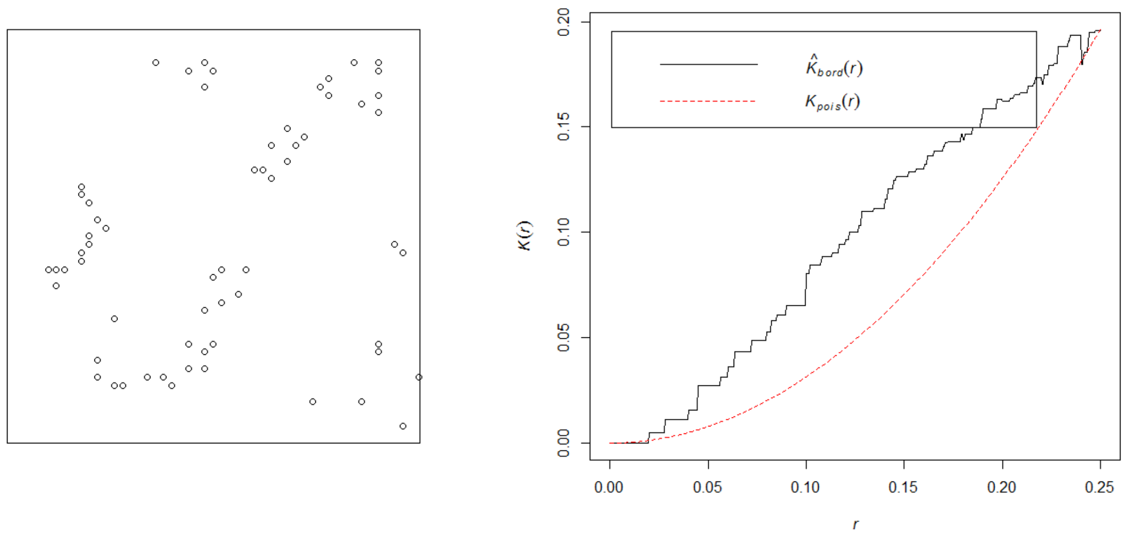
gdje se za $\hat{\beta}$ obično uzima $\frac{n(\mathbf{x})}{\lambda_2(W)}$. Više o K-funkciji i metodama uklanjanja problema s rubom može se vidjeti u [2], poglavlje 7.

U sljedećem ćemo primjeru koristeći statistički softver R prikazati procjenu K-funkcije na konkretnim podacima.

Primjer 3.3.3. *Koristit ćemo paket* spatstat *unutar kojeg su pohranjeni brojni uzorci. Razmotrit ćemo podatke dva uzorka:* swedishpines *i* redwood*. Podaci uzorka* swedishpines *čine lokacije stabala bora u jednoj šumi u Švedskoj, a podaci uzorka* redwood *čine lokacije gigantskih stabala iz porodice sekvoja u Kaliforniji. Funkcijom* Kest *izračunavamo procjene K-funkcije za pojedini uzorak. Procjenjenu vrijednost K-funkcije uspoređujemo s teorijskom vrijednosti K-funkcije dvodimenzionalnog homogenog Poissonovog točkovnog procesa,* $K(r) = r^2\pi$*. Na slici koja slijedi možemo uočiti da je u slučaju podataka* swedishpines*, gdje su točke poprilično slučajno i ravnomjerno raspoređene u okviru, vrijednost procjenje K-funkcije uglavnom manja od teorijske dok je u slučaju podataka* redwood*, gdje se točke izrazito grupiraju, vrijednost procjenjene K-funkcije veća od teorijske.*



Slika 3.3: Prikaz podataka swedishpines (lijevo) i procjene K-funkcije (desno).



Slika 3.4: Prikaz podataka redwood (lijevo) i procjene K-funkcije (desno).

3.4 Janossyjeve mjere

U ovom ćemo se dijelu usredotočiti na *konačne točkovne procese*, tj. pretpostavit ćemo da su zadovoljeni sljedeći uvjeti

1. Točke su smještene u potpunom metričkom prostoru E koji je separabilan (postoji prebrojiv podskup $S \subset E$ tako da vrijedi $\overline{S} = E$). Dovoljno je uzeti $E = \mathbb{R}^d$ kao i u dosadašnjem razmatranju.

2. Dana je vjerojatnosna distribucija $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kojom je zadan ukupan broj točaka.

3. Za proizvoljan $n \geq 1$ zadana je vjerojatnosna distribucija $\Pi_n(\cdot)$ na Borelovim skupovima od $E^n = E \times \cdots \times E$ koja određuje zajedničku distribuciju pozicija točaka procesa tako da je ukupan broj točaka n.

Prethodni uvjeti daju način simuliranja procesa: generiramo slučajan broj $N \geq 0$ te uzimajući $N = n$ u slučaju $n \neq 0$ generiramo slučajni vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Uočimo da točke zapravo čine skup koji je neuređen, odnosno točke međusobno ne razlikujemo pa se prirodno nameće da distribucije $\Pi_n(\cdot)$ daju istu težinu svim $n!$ permutacija n-torke $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Drugim riječima, nameće se simetričnost distribucije Π_n. Simetričnost se može postići redefiniranjem distribucije $\Pi_n(\cdot)$. Za bilo koju particiju $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ od E definiramo

$$\Pi_n^{\text{sym}}(A_1 \times A_2 \cdots \times A_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm}} \Pi_n(A_{i_1} \times A_{i_2} \cdots \times A_{i_n}), \tag{3.25}$$

gdje $\sum_{\text{perm}}$ označava sumiranje po svim $n!$ permutacija n-torke $(i_1, \ldots, i_n)$ prirodnih brojeva $(1, 2, \ldots, n)$, a faktor $\frac{1}{n!}$ ima svrhu normiranja. Alternativno, uvode se sljedeće (nevjerojatnosne) mjere

$$\begin{aligned} J_n(A_1 \times A_2 \cdots \times A_n) &:= p_n \sum_{\text{perm}} \Pi_n(A_{i_1} \times A_{i_2} \cdots \times A_{i_n}) \\ &= n! p_n \Pi_n^{\text{sym}}(A_1 \times A_2 \cdots \times A_n), \end{aligned} \tag{3.26}$$

koje se nazivaju *Janossyjeve mjere*. Ukoliko je $E = \mathbb{R}^d$ te $j_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gustoća od $J_n(\cdot)$ obzirom na Lebesgueovu mjernu na $(\mathbb{R}^d)^n$ onda $j_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ intuitivno predstavlja vjerojatnost da se proces sastoji od točno n točaka pri čemu se po jedna točka nalazi u svakom od n disjunktnih infinitezimalnih područja $(x_i, x_i + dx_i)$. Ovakva interpretacija daje *Janossyjevim gustoćama* j_n fundamentalnu ulogu u opisivanju konačnih točkovnih procesa.

U nastavku slijede temeljni rezultati koji ističu važnost *Janossyjevih mjera*. Kako je $J_n(E^n) =$

$p_n \sum_{\text{perm}} \Pi_n(E^n) = p_n n!$ za svaki $n \geq 1$ te kako možemo pisati $J_0(E^0) = p_0$, iz $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(E^n)}{n!} = 1. \tag{3.27}$$

Zaključujemo da iz proizvoljne familije simetričnih mjera J_n koja zadovoljava (3.27) možemo konstruirati vjerojatnosnu distribuciju $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i simetrične vjerojatnosne mjere $\Pi_n^{\text{sym}}(\cdot)$ tako da su zadovoljeni uvjeti s početka ovog dijela, i obratno. Sada želimo povezati distribuciju slučajne varijable broja točaka $N(A_i)$ s *Janossyjevim mjerama.* Neka je $(A_1, \ldots, A_k)$ particija od E, tada je vjerojatnost događaja da se točno n_i točaka nalazi u skupu A_i za $i = 1, 2, \ldots, k$ uz $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ dana sa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(A_i) = n_i, i = 1, 2, \ldots k) &= \frac{J_n(A_1^{n_1} \times A_2^{n_2} \times \ldots A_k^{n_k})}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \\ &= p_n \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} \Pi_n^{\text{sym}}(A_1^{n_1} \times A_2^{n_2} \times \ldots A_k^{n_k}), \end{aligned} \tag{3.28}$$

gdje se multinomni koeficijent interpretira kao broj načina na kojih se n točaka mogu grupirati tako da n_i točaka pripada skupu A_i.

Dosad smo se susreli s faktorijelnom mjerom drugog momenta. Definicija se može poopćiti na faktorijelnu mjeru k-tog momenta. Prisjetimo se, *r-ta faktorijel padajuća potencija broja n* definira se sa $n^{[r]} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ čim je $r = 0, 1, \ldots n$, dok je inače 0. Za proizvoljan pravokutnik oblika $A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}$ pri čemu je $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = k$ te su A_i disjunktni skupovi iz $\mathcal{E}$, faktorijelna mjera k-tog momenta definira se sa

$$\mu_{[k]}(A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}) := \mathbb{E}[N(A_1)^{[k_1]} N(A_2)^{[k_2]} \ldots N(A_r)^{[k_r]}]. \tag{3.29}$$

Ukoliko je $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ particija od E te je $\mathbb{E}[N(E)^k] < +\infty$ može se pokazati da vrijedi

$$\mu_{[k]}(A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J_{k+n}((A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r} \times E^n), \tag{3.30}$$

a za općeniti skup $B \subset \mathcal{E}^n$

$$\mu_{[k]}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_{k+n}(B \times E^n)}{n!}. \tag{3.31}$$

Slično, može se pokazati

$$J_n((A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_{[n+k]}(A_1^{k_1} \times A_2^{k_2} \times \cdots \times A_r^{k_r} \times E^n), \tag{3.32}$$

te za $B \subset \mathcal{E}^n$

$$J_n(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_{[k+n]}(B \times E^k). \tag{3.33}$$

Više o Janossyjevim mjerma te detaljni raspis gornjih jednakosti može se vidjeti u [3] str. 123-137.

Bibliografija

[1] A. Baddeley, *Spatial point processes and their applications*, Stochastic Geometry, str. 1–75., Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[2] A. Baddeley, E. Rubak i R. Turner, *Spatial point patterns: methodology and applications with R*, CRC Press, 2015.

[3] D. J. Daley i D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes: volume II: general theory and structure*, Springer Science & Business Media, 2007.

[4] A. Mimica, *Laplace transform*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~amimica/lt.pdf`, (kolovoz 2017.).

[5] S. I. Resnick, *Adventures in stochastic processes*, Springer Science & Business Media, 2013.

[6] R. L. Schilling, *Measures, integrals and martingales*, sv. 13, Cambridge University Press, 2005.

[7] Z. Vondraček, *Slučajni procesi, predavanja*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`, (kolovoz 2017.).

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada bio je upoznati točkovne procese i mjere njihovih momenata. Nakon prvog poglavlja upoznati smo s osnovnim konceptima potrebnim za razumijevanje ostatka rada. Nakon definicije točkovne mjere slijedi precizna definicija točkovnog procesa. Prikazani su matematički alati koji se koriste za karakterizaciju distribucije točkovnih procesa. Dani su najvažniji primjeri točkovnih procesa koji se koriste za ilustraciju važnih pojmova. Dodatno, upoznajemo se sa stacionarnim točkovnim procesima. Navodimo definiciju kontaktne udaljenosti procesa od točke te njenu distribuciju dovodimo u vezu s funkcionalom kapaciteta. Nastavljamo s definicijom mjere intenziteta kao očekivanja slučajne varijable koja predstavlja broj točaka u određenom području. Lebesgueovom indukcijom dokazana je Campbellova formula koja se koristi za računanje očekivanja slučajne varijable $\sum_{x\in\boldsymbol{X}} f(x)$. Zatim su definirane mjere drugog momenta te funkcija gustoće drugog momenta. U nastavku se upoznajemo s mjerama drugog momenta stacionarnih točkovnih procesa te s K-funkcijom koja služi za opisivanje interakcije između točaka. Ilustriramo primjenu K-funkcije na stvarnim podacima. Na kraju je dan prikaz Janossyjevih mjera koje dovodimo u vezu s distribucijom točkovnih procesa te njihovim mjerama momenta.

Summary

The aim of this thesis was to get acquainted with point processes and their moment measures. In the first chapter, we introduce the basic concepts needed to understand the rest of the work. After the definition of point measure, a precise definition of point process is given. We have presented the mathematical tools which are used for characterization of the point processes distribution. The most important examples of point processes that illustrate the main concepts are given. In addition, we introduce with stationary point processes. There is the definition of contact distance of the process from the given point and its distribution is brought into connection with the capacity functional. We continue with the definition of the intensity measure as the expectation of a random variable that represents the number of points in a given area. Campbell's formula is used to calculate expected value of random variable $\sum_{x \in \boldsymbol{X}} f(x)$, which is proved by Lebesgue induction. Second moment measures and second moment density are defined as well. We present the second moment measures of stationary point processes and the K-function that describes the interaction between points. We illustrate the application of K -function on real data. Finally, we define Janossy measures that we connect with the distribution of point processes and their moment measures.

Životopis

Rođen sam 9. veljače 1994. godine u Puli. Nakon završene Osnovne škole Tone Peruška, upisao sam Gimnaziju Pula, opći smjer. Godine 2012. upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2015. godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.