SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonia Čoić

VIZUALIZACIJA VJEROJATNOSNIH KONCEPATA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Vjerojatnost je jedna od važnijih tema u matematici. Osim matematičarima, ona je bliska i svakom drugom čovjeku pošto smo svakodnevno okruženi informacijama iz okoline koje su vezane uz pojam vjerojatnosti. Tako i učenici nesvjesno koriste pojmove iz teorije vjerojatnosti tijekom cijelog života. Stoga je korisno usvojiti osnovne pojmove vjerojatnosti tijekom obrazovanja.

Međutim, vjerojatnost je trenutno u našim školama zastupljena u maloj mjeri, a ako i jest, naglasak je na rješavanju problema koristeći dane formule i definicije bez razumijevanja. Cilj moderne nastave matematike je učenike tijekom nastavnog procesa voditi kroz otkrivanje i istraživanje, gdje je fokus na konceptualnom razumijevanju i razvoju kritičkog mišljenja. Učenicima se vjerojatnost može predstaviti na zanimljiv i njima razumljiv način. Jedan od načina je vizualizacija vjerojatnosnih problema. Moderne tehnike vizualizacije omogućuju učenicima sistematično rješavanje problema, uz naglasak na vizualnom postavljanju zadataka, a zatim očitavanje rezultata koje prati i prigodna interpretacija. U ovom radu predstavljeni su primjeri takvih vizualizacija.

U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti koji se koriste u tehnikama vizualizacije opisanima u ovom radu. Osim toga, istaknut je koncept vjerojatnosti unutar matematičkog područja kurikuluma s opisanim ishodima učenja te uloga vizualizacije.

Prvu tehniku vizualizacije, koju opisujemo u drugom poglavlju, su Vennovi dijagrami, gdje se događaje tretira kao skupove. Korisni su pri vizualizaciji međusobno isključivih događaja, algebri događaja, ali i pri računanju uvjetnih vjerojatnosti. Opisani su primjeri u kojima trebamo predstaviti događaje skupovima, promatrati njihove odnose te očitavanjem doći do vjerojatnosti pojedinog ishoda. Vennovi dijagrami pomažu učenicima vizualizirati situaciju u kojoj su bitni klasifikacija i pripadanje grupi.

Nadalje, dvosmjerne tablice iz trećeg poglavlja prikladne su za prikaz dviju nezavisnih kategorija tj. prikaz para nezavisnih događaja s njihovim komplementima, gdje presjekom redaka i stupaca očitavamo vjerojatnosti. Učenici mogu računati vjerojatnosti tako da sve podatke zapišu u tablicu te potom samo očitavaju podatke koji su im potrebni i interpretiraju vjerojatnosti u kontekstu danog problema.

Najkorisniji trik vizualizacije, koji je već uvršten u plan i program nekih škola, je *sta-*

blo odlučivanja. To je dijagram u obliku stabla kojeg obrađujemo u četvrtom poglavlju. Korisno je kod složenijih zadataka s uvjetnim vjerojatnostima, ali i zadataka s hipotezama koji se inače rješavaju primjenom Bayesovog teorema. Na zanimljivim primjerima može se vidjeti kako se crta stablasti dijagram, zašto se koristi pravilo umnoška te kako se očitavaju vjerojatnosti pojedinih ishoda iz navedenog dijagrama.

Na kraju, kao tema petog poglavlja, geometrijska vjerojatnost je standardni trik pri rješavanju zanimljivih problema svođenjem na računanje površine likova u kojima vjerojatnosni prostor mora biti neprebrojiv. Opisani su primjeri aktivnosti otkrivanja geometrijske vjerojatnosti, te drugi učenicima zanimljivi primjeri za vježbu.

Poglavlje 1

Vjerojatnost u školi

1.1 Teorija vjerojatnosti

Vjerojatnost je grana matematike koja ima široku primjenu u svijetu oko nas. Intuitivno je pojam vjerojatnosti jasan svakome bez posebnog definiranja. No u matematici je formaliziran u okviru teorije vjerojatnosti. Stoga se teorija vjerojatnosti bavi proučavanjem slučajnih događaja te pronalazi zakonitosti i formule za određivanje mogućnosti realizacije događaja. U nastavku su opisani osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti koji će biti spomenuti u opisu različitih tehnika vizualizacije.

U teoriji vjerojatnosti osnovni pojmovi koji se definiraju su **pokus (eksperiment)** i **ishod (elementarni događaj)**. Za početak je važno definirati **prostor elementarnih događaja**. To je skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa, koji se označava s Ω. Ukoliko je prostor elementarnih događaja jednočlan skup, onda pokus ima samo jedan mogući ishod. Prostor elementarnih događaja koji ima više elemenata koristimo kada postoji više mogućih ishoda nekog pokusa. Takav pokus nazivamo **slučajan pokus**. Nadalje, svaki podskup $A \subseteq \Omega$ naziva se **slučajnim događajem** ili kraće **događajem**. Događaj A je nastupio ako je u pokusu realiziran bilo koji od ishoda (elementarnih događaja) iz skupa A. Jednostavnije rečeno, slučajan događaj je događaj koji se može, ali i ne mora realizirati. Ukratko, svaki element $\omega \in \Omega$ naziva se elementarnim događajem, a Ω skupom elementarnih događaja. (vidi knjigu [13])

Kako se definira vjerojatnost? U knjizi *Teorija vjerojatnosti* [13] autor intuitivno opisuje osnovu vjerojatnosnih metoda: *Teorija vjerojatnosti omogućava da se odredi stupanj mogućnosti (vjerojatnost) pojavljivanja slučajnih događaja, te da se događaji uspoređuju prema njihovim vjerojatnostima*. Intuitivno pod vjerojatnošću događaja smatramo broj pridružen tom događaju koji je mjera tj. ocjena mogućnosti pojavljivanja tog događaja pri jednom izvođenju tog pokusa. Ako pretpostavimo da je prostor elementarnih događaja konačan i poznat te da su svi elementarni ishodi slučajnog pokusa jednako mogući, možemo reći da vjerojatnost možemo odrediti bez iskustva tj. *a priori*. Prema tome, klasičnim pristupom vjerojatnost definiramo kao omjer broja povoljnih ishoda i broja svih mogućih ishoda nekog događaja.

Definicija 1.1.1. *Vjerojatnost P nekog događaja A jednaka je:*

$$P(A) = \frac{\textit{broj povoljnih ishoda}}{\textit{broj svih moguih ishoda}} = \frac{k(A)}{k(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Općenitija definicija je sljedeća (prema knjizi [13]).

Definicija 1.1.2. *Neka je Ω konačan i neprazan skup. Funkcija $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je vjerojatnost na Ω ako ona zadovoljava sljedea tri aksioma:*

P 1. P je nenegativna funkcija tj.

$$P(A) \geq 0, \textit{za svakiAinP}(\Omega). \tag{1.2}$$

P 2. P je aditivna funkcija tj. za bilo koja dva disjunktna podskupa A i B skupa Ω vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

P 3. P je normirana funkcija tj.

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.4}$$

Iz prethodnih definicija slijedi definicija vjerojatnosnog prostora.

Definicija 1.1.3. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, gdje je Ω konačan skup, $\mathcal{P}(\Omega)$ je partitivni skup od Ω i P je vjerojatnost na Ω zove se vjerojatnosni prostor.*

Pojednostavljeno, možemo reći da je vjerojatnost mjera mogućnosti da se ostvari neki događaj, koju izražavamo realnim brojem iz intervala [0,1].

Nadalje, važni za razumijevanje osnovnih vjerojatnosnih koncepata su i sljedeći pojmovi:

- *Ako smo sigurni da se događaj neće zbiti, kažemo da ima vjerojatnost 0 i zovemo ga* ***nemoguć događaj****.*
- *Vjerojatnost 1 pridružujemo događaju koji će se sigurno zbiti. Takav događaj zovemo* ***siguran događaj****.*

1.2 Vjerojatnost u nastavi

Primjena vjerojatnosti je široka. To su razna predviđanja i testiranja događaja. Vjerojatnosni principi primjenjuju se pri izračunima vremenske prognoze, usporedbi DNK nizova, proučavanju igara na sreću, raznim testiranjima, a grafičke prikaze i procjene vjerojatnosti susrećemo i u reklamiranju te procjeni zdrastvenog rizika. Upravo zbog toga, osnove vjerojatnosti dio su gradiva matematike, koje se poučava u određenoj mjeri, u osnovnim i srednjim školama. Učenje na realnim problemima i jednostavna istraživanja omogućuju učenicima shvaćanje osnovnih principa vjerojatnosti budućeg događaja. No u modernoj nastavi cilj nam je maknuti se od suhoparnih definicija i formula te učenike potaknuti na samostalno razmišljanje i zaključivanje. Naglasak pri učenju bi trebao biti na smislenom i sustavnom organiziranju podataka koje učenike potiče na valjane zaključke, a ne isključivo na učenju definicija i pravila [9].

Veza vjerojatnosti s drugim matematičkim područjima

Vjerojatnost spada u jednu od pet domena matematičkog područja kurikuluma, naziva *Podaci, statistika i vjerojatnost*. Osnovni ishodi koji se postižu tom domenom su prikupljanje i organiziranje podataka te prikazivanje na različite načine. Osim navedene domene kurikuluma, obrada vjerojatnosti je usko vezana i s domenom *Brojevi i mjerenja* jer učenici procjenjuju i računaju vjerojatnosti koristeći se osnovnim računskim operacijama. Vjerojatnost povezujemo s:

- razlomcima i postotcima (učenici ih mogu koristiti pri određivanju vjerojatnosti nekog događaja),
- omjerima (učenici uspoređujući vjerojatnosti dvaju događaja određuju njihove omjere).

Povezana je i s domenom *Algebra i funkcije* jer učenici analiziraju dane podatke, tj. vjerojatnosti slučajnih događaja, a posebno je važna domena *Oblik i prostor* jer prikazuju vjerojatnosne probleme grafički. Treba istaknuti i najvažniju vezu, a to je veza vjerojatnosti i statistike, pošto je svrha vjerojatnosti odgovoriti na pitanja vezana sa statistikom jer na temelju tih podataka određujemo vjerojatnosti događaja. Osim što vjerojatnost povezuje više domena matematičkog kurikuluma, ona povezuje i matematiku s ostalim područjima kurikuluma jer ima važnu primjenu u drugim znanostima, posebno u prirodoslovnim i društveno-humanističkim područjima.

Učenici se s osnovnim pojmovima vjerojatnosti prvi puta susreću u osnovnoj školi. Nastavni plan i program predviđa učenje vjerojatnosti u sedmom razredu osnovne škole. Ključni pojmovi s kojima se učenici tada upoznaju su: *slučajni događaj, relativna frekvencija* te *vjerojatnost slučajnog dogadaja*. Od učenika se očekuje da mogu navesti elementarne događaje i odrediti koji su povoljni za zadani događaj te da znaju odrediti vjerojatnost slučajnog događaja. Vjerojatnost se obrađuje i u četvrtim razredima prirodoslovno-matematičkih gimnazija te tehničkih škola koje imaju četiri sata matematike tjedno. Učenici ponavljaju naučeno u osnovnoj školi, ali i definiraju osnovna svojstva vjerojatnosti, proučavaju načine zadavanja vjerojatnosti te se bave uvjetnom vjerojatnošću događaja (neke od ovih ideja su prilagođena verzija Nacionalnog okvirnog kurikuluma [4]).

Učenicima se vjerojatnost može predstaviti na njima zanimljiv i razumljiv način, no trenutno u planu i programu matematike u hrvatskom obrazovnom sustavu koncept vjerojatnosti zauzima jako mali dio. U sedmom razredu je veći naglasak na statistici i samom prikupljanju podataka, dok se u srednjoj školi obrađuje u četvrtom razredu samo nekih škola, a i tada je naglasak na definicijima i formulama.

Nasuprot tome, konceptu vjerojatnosti se u obrazovnim sustavima drugih država daje velika važnost i okreće se interaktivnoj nastavi, gdje je poseban naglasak na jednostavnijem razumijevanju osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti, a najviše se oslanjaju upravo na vizualizaciju [17].

S obzirom na to, nastavnici matematike trebali bi motivirati učenike za rad i u njima pobuditi želju za stjecanjem novih znanja. Osmišljavanje zanimljivih aktivnosti i primjera često je zahtjevan posao jer je potrebno paziti na aktualnost i prilagođenost teme. No svaki bi nastavnik trebao proučavati i pronalaziti zanimljive načine kojima bi zainteresirao učenike. Stoga ćemo u ovom radu navesti neke primjere takvih aktivnosti otkrivanja određenih vjerojatnosnih koncepata te njihovu primjenu.

1.3 Vizualizacija vjerojatnosti

Zašto vizualizirati vjerojatnost? Vjerojatnost je svugdje oko nas, ali ju je ponekad teško razumijeti. Moderne tehnike vizualizacije omogućuju pojednostavljivanje određenih formula iz teorije vjerojatnosti, čime se učenike oslobađa formalizma i učenja formula bez razumijevanja. Vizualizacijom problema učenici mogu sažeti podatke, očitati vjerojatnosti koje su pri prvom pogledu "skrivene", ali najbitinije je što se vizualizacijom mogu pojednostavniti i složeniji problemi u vjerojatnosti.

Često povezujemo vizualizaciju u matematici s crtanjem slika ili dijagrama kao način rješavanja problema. Ali ona ima mnogo veću ulogu u rješavanju koja uključuje razvoj ideja i diskusiju o rezultatima te razumijevanje. Tri su svrhe vizualizacije (prema [8]): "uživljavanje" u problem, modeliranje i daljnje planiranje . Vizualizacija daje učenicima prostora da uđu dublje u situaciju te razjasne i potvrde svoje ideje prije bilo kakve generalizacije. Prikazivanjem vjerojatnosnih problema učenicima se osigurava očitavanje podataka, zatim analiza danih podataka i dobivenih ishoda na način da otkrivaju veze među danim podacima te donose zaključke, odnosno predviđanja.

Bitno je istaknuti da u susretu sa stvarnim neizvjesnim događajima ne trebamo zaboraviti da matematički modeli samo pokušavaju modelirati tu neizvjesnost. Većina modela korištenih u znanosti uključuje tzv. vjerojatnosne komponente, no oni su u pravilu samo približni. Iako približni, oni su dovoljno precizni za razne znanstvene i praktične svrhe, posebno za predviđanje rezultata pokusa. Korisnost modela u predikciji jedan je od glavnih pokazatelja njihove vrijednosti (vidi [8]).

Poglavlje 2

Vennovi dijagrami

2.1 Vjerojatnost pomoću prebrojavanja skupova

Prvi način vizualizacije vjerojatnosnih problema su Vennovi dijagrami. Vennovi dijagrami su vrsta prikazivanja algebre skupova te operacija s njima. Učenici se s njima susreću već u nižim razredima osnovne škole, gdje rade sa skupovima. Cilj je da učenici predstave događaje skupovima, promatraju njihove odnose te očitavanjem dolaze do ishoda nekog događaja, tj. vjerojatnosti pojedinog ishoda. Naime, ukoliko imamo kontekst zadatka koji možemo prikazati pomoću skupovnih relacija i operacija, najlakše ćemo ih predstaviti Vennovim dijagramima.

Vennovi dijagrami su grafički prikaz u kojem se pomoću krugova koji se preklapaju (ili ne) prikazuju sličnosti, razlike i odnosi među kategorijama ili grupama. Sličnosti među grupama predstavljaju se preklapajućim dijelovima krugova, a razlike dijelovima krugova koji se ne preklapaju. Vennovi dijagrami pomažu učenicima vizualizirati situaciju u kojoj su bitni klasifikacija i pripadanje grupi (prilagođeno s [8]).

Prije primjera zadataka, utemeljimo teorijski skupovne relacije i operacije koje su nam potrebne za razumijevanje metode rješavanja zadataka.

Algebra skupova

Skup je zatvorena cjelina koju čine njegovi elementi. Svakom pokusu je pridružen prostor elementarnih događaja Ω koji predstavlja sve moguće ishode tog pokusa. Događaji vezani uz taj slučajni pokus su podskupovi od Ω.

Uvedimo neke definicije [16].

Definicija 2.1.1. *Unija dvaju događaja A i B, koju označavamo $A \cup B$, je skup elemenata* *iz Ω koji pripadaju barem jednom od tih događaja. Prema tome vrijedi:*

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}.$$

U vjerojatnosnoj interpretaciji imamo: *događaj $A \cup B$ se dogodi ako i samo ako se dogodi barem jedan od događaja A ili B.*

Definicija 2.1.2. *Presjek dvaju događaja A i B, kojeg označavamo $A \cap B$, je skup elemenata iz Ω koji pripadaju i u A i u B. Prema tome vrijedi:*

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ i } \omega \in B\}.$$

Interpretiramo: *Događaj $A \cap B$ se dogodi ako i samo ako se dogode i događaj A i događaj B.*

Ako je $A \cap B = \emptyset$, kažemo da se događaji međusobno isključuju tj. ne mogu se dogoditi istodobno. Za takve skupove kažemo da su **disjunktni**. Jednostavno rečeno, disjunktni skupovi nemaju zajedničkih elemenata.

Skupovima je često korisno odrediti i suprotan događaj ili komplement.

Definicija 2.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ dani vjerojatnosni prostor i $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ događaj. Suprotni događaj događaju A je njegov komplement, tj. događaj A^c. Vrijedi:*

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{2.1}$$

Sada možemo definirati i operaciju razlike:

Definicija 2.1.4. *Razlika dvaju događaja A i B, koju označavamo $A \setminus B$, je skup elemenata iz Ω koji pripadaju A, ali ne pripadaju B. Prema tome vrijedi:*

$$A \setminus B = A \cap B^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ i } \omega \notin B\}. \tag{2.2}$$

Interpretacija glasi: *događaj $A \setminus B$ se dogodi ako i samo ako se dogodi događaj A i događaj B se ne dogodi.*

Uvjetna vjerojatnost

Osim određivanja vjerojatnosti nekog događaja obzirom na pripadajući skup elementarnih događaja, naići ćemo i na situacije u kojima ćemo vezano uz neki događaj poznavati da se dogodio i neki drugi događaj. Intuitivno je jasno da će ta dodatna informacija promijeniti vjerojatnost događaja vezanih za njega te ćemo tako dobiti novi matematički model.

Npr. trebamo odrediti vjerojatnost događaja A uz poznati događaj B. Ulogu prostora elementarnih događaja tj. svih mogućih elementarnih ishoda pokusa preuzima skup B. Kažemo da događaj A ovisi o događaju B te nam je cilj odrediti vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B te definiramo **uvjetnu vjerojatnost** (vidi [13]).

Definicija 2.1.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B proizvoljni događaji iz Ω takvi da je $P(B) > 0$.* ***Uvjetna vjerojatnost*** *događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B jest broj koji označavamo sa $P(A \mid B)$, a definira se sa:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.3}$$

Broj $P(A|B)$ često kraće zovemo uvjetna vjerojatnost od A uz uvjet B.

Iz formule (2.3) proizlazi pravilo važno za određivanje presjeka dvaju događaja:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \tag{2.4}$$

Kada neki događaj B nema utjecaja na događaj A, kažemo da su događaji nezavisni, tj. **nezavisni događaji** su oni u kojima rezultat jednog događaja ne utječe na rezultat drugog događaja u eksperimentu.

Definicija 2.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i $A, B \subseteq \Omega$ tj. A i B su događaji. Kažemo da događaj A ne zavisi od događaja B ili da su događaji A i B nezavisni, ako vrijedi:*

$$P(A \mid B) = P(A). \tag{2.5}$$

Osim prethodno navedenog pravila, veza uvjetne vjerojatnosti i nezavisnih događaja je sljedeća:

Ako događaj A ne zavisi od događaja B, tada vrijedi:

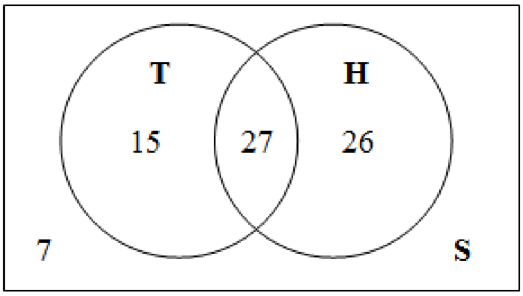
$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{2.6}$$

2.2 Primjeri zadataka

Nakon što smo uveli potrebnu terminologiju, navest ćemo neke primjere u kojima se vjerojatnosti mogu računati očitavanjem podataka iz Vennovog dijagrama. Učenici će razvrstavati elemente u skupove s odgovarajućim svojstvima, grafički prikazivati odnose među skupovima te očitavati tražene ishode nekog događaja. Ishodi učenja koji bi se postigli su računanje vjerojatnosti događaja koristeći vjerojatnost unije, komplementa, presjeka, definiciju nezavisnosti i uvjetne vjerojatnosti.

U prvom zadatku će se prvo baviti gotovim skupovima, gdje će očitavanjem podataka iz danog Vennovog dijagrama doći do rješenja, a zatim s obzirom na ta rješenja će se uvesti osnovne skupovne relacije i operacije te tako otkriti algebra skupova. U drugom zadatku će istraživati vjerojatnosti na dvije kategorije tj. dva skupa događaja, a u trećem zadatku na tri, u kojem će računati i uvjetnu vjerojatnost pomoću Vennovog dijagrama. Vidjet ćemo da i uvjetnu vjerojatnost možemo odrediti pomoću dijagrama, a osnova je da zapravo skup svih elementarnih događaja postaje skup događaja koji označava informaciju koju znamo te tako učenici mogu razumijeti što znači uvjetna vjerojatnost te je potom nastavnik definirati. Na taj način učenici prvo otkrivaju smisao uvjetne vjerojatnosti, a zatim sami otkrivaju formulu.

Zadatak 1. *(prilagođen iz knjige [17])*
Vennov diagram na slici prikazuje broj ljudi u sportskom klubu koji treniraju tenis (T) i hokej (H).



Slika 2.1: Vennov dijagram 1

Odredi broj ljudi:

a) u tom sportskom klubu,

b) koji treniraju hokej,

c) koji treniraju oba sporta,

d) koji treniraju barem jedan od dva sporta,

e) koji ne treniraju nijedan sport.

Rješenje:
Očitavanjem vrijednosti iz slike dobijemo:

a) Broj ljudi u sportskom klubu = 15 + 27 + 26 + 7 = 75.

b) Broj ljudi koji treniraju hokej = 27 + 26 = 53.

c) Broj ljudi koji treniraju oba sporta = 27.

d) Broj ljudi koji treniraju barem jedan od dva sporta = 15 + 27 + 26 = 68.

e) Broj ljudi koji ne treniraju nijedan od ta dva sporta = 7.

Nakon očitavanja rješenja, dobro je s učenicima provesti diskusiju te zapisati prethodna rješenja pomoću skupovnih relacija te na taj način uvesti algebru skupova.

a) Ovdje smo odredili veličinu skupa svih elemenata.

b) Odredili smo veličinu skupa H.

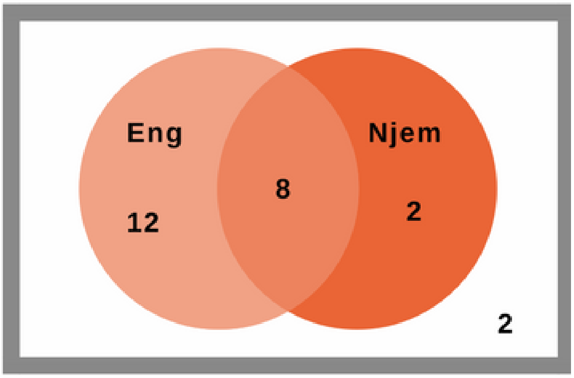
c) Veličina ovog skupa je zapravo je presjek skupa T i skupa H te se na temelju toga može uvesti definicija presjeka skupova (vidi Definiciju 2.1.2).

d) Ovdje se može uvesti unija skupova npr. $H \cup T$ (vidi Definiciju 2.1.1).

e) Na ovom primjeru se može uvesti komplement skupa, npr. $(T \cap H)^c$ i razlika skupova npr. $S \setminus (T \cup H)$ (vidi Definiciju 2.1.3 i Definiciju 2.1.4).

Zadatak 2. *(preuzet s [16])*
U studentskoj grupi su 24 studenta. Engleski govori 20 studenata, a njemački 10. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran učenik govori oba jezika, ako dvojica ne govore ni njemački ni engleski?

Rješenje.
Imamo dvije kategorije, a to su $\{$engleski$\}$ i $\{$njemački$\}$.
Prikažimo ih pomoću skupova (vidi sliku 2.2)



Slika 2.2: Vennov dijagram 2

Pravokutnik predstavlja skup svih mogućih elementarnih događaja (Ω). Prvo nam je lako zapisati da dvoje učenika ne uči nijedan jezik (to je van oba skupa). Algebarski, taj skup bismo zapisali $(A \cup B)^C$.

Nadalje, ako ih je još preostalo 22 te od tih 22 oduzmemo broj učenika koji uče njemački, dobijemo skup $\{Eng\} \setminus \{Njem\}$ tj.

$$22 - 10 = 12.$$

Ako ih 20 uči engleski, lako otkrivamo da je u presjeku skupova 8 učenika. Dakle, vjerojatnost da učenik uči oba jezika je:

$$P(\{Eng\} \cap \{Njem\}) = \frac{8}{24} \approx 0.33.$$

Zadatak 3. *(prilagođen iz knjige [17])*
Provelo se ispitivanje grupe od 100 ljudi. Trebali su kušati tri vrste soka te su zabilježeni sljedeći podaci:

- *86 ispitanika se svidio sok A,*
- *89 se svidio sok B,*
- *90 se svidio sok C,*
- *83 se svidio sok A i sok B,*
- *85 se svidio sok B i sok C,*
- *81 se svidio sok A i sok C,*

- *80 se svidjelo sva tri soka.*

Kolika je vjerojatnost da:

a) se ispitaniku nije svidio nijedan sok

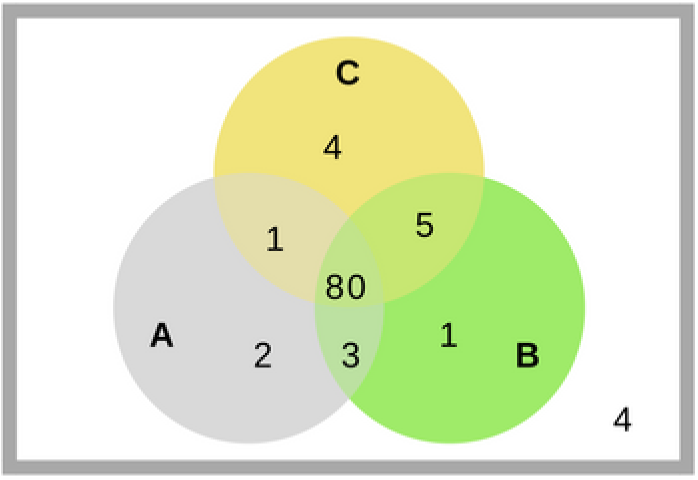
b) se ispitaniku svidio sok A, ali ne sok B

c) su se ispitaniku svidjeli svi sokovi osim soka C

d) su se ispitaniku svidjela točno dva od tri soka?

Ako znamo da se ispitaniku svidio sok A, kolika je vjerojatnost da mu se svidio i sok C?

Rješenje.
Nacrtajmo Vennov dijagram (vidi sliku 2.3).



Slika 2.3: Vennov dijagram 3

Imamo tri soka, tj. tri skupa, pa nacrtamo tri kruga koji se međusobno sijeku. Upišemo dane podatke u odgovarajuća područja, tako da počnemo od presjeka sva tri skupa, a to je 80. Dalje upisujemo na određena područja presjeke dvaju skupova, a zatim popunjavamo ostala područja s obzirom na dane podatke.

a) Broj ispitanika kojima se nije svidio nijedan sok je 4 pa je vjerojatnost jednaka:

$$P((A \cup B \cup C)^c) = \frac{4}{100} = 0.04.$$

b) Broj ispitanika kojima se svidio sok A, ali ne sok B očitamo tako da samo gledamo skupove A i B tj. područje $(A \setminus B)$, a to je $2 + 1 = 3$ pa je vjerojatnost jednaka:

$$P(A \setminus B) = \frac{3}{100} = 0.03.$$

c) Broj ispitanika kojima su se svidjeli svi sokovi osim soka C je $2 + 3 + 1 = 6$ pa je vjerojatnost:

$$P((A \cup B) \setminus C) = 0.06.$$

d) Da bismo otkrili broj ispitanika kojima su se svidjela točno dva soka od tri, gledamo područja presjeka dvaju skupova te tako očitavamo vrijednosti: $1 + 5 + 3 = 9$ pa je vjerojatnost jednaka 0.09.

Ako znamo da se ispitaniku svidio sok A, kolika je vjerojatnost da mu se svidio i sok C?

Ovdje se radi o uvjetnoj vjerojatnosti jer znamo da se ispitaniku svidio sok A. Budući da imamo tu informaciju, skup svih elementarnih događaja sada predstavlja skup A. Trebamo odrediti koliko ispitanika se svidio i sok A i sok C (tj. broj elemenata od $(A \cap C)$), a to je 81 pa je tražena vjerojatnost po formuli 2.3 jednaka:

$$P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0.81}{0.86} \approx 0.95.$$

Poglavlje 3

Dvosmjerne tablice

3.1 Korištenje dvosmjernih tablica

Vjerojatnosni problemi se mogu rješavati i pomoću tablica, takozvanih dvosmjernih tablica (eng. *two-way tables*). Učenici mogu računati vjerojatnosti tako da sve podatke zapišu u tablicu te potom samo očitavaju podatke koji su im potrebni i interpretiraju vjerojatnosti u kontekstu danog problema. Naglasak je na razvoju razumijevanja nezavisnosti događaja te uvjetne vjerojatnosti, posebno razlike između $P(A \cap B)$ i $P(A \mid B)$ te da $P(A \mid B)$ nije isto što i $P(B \mid A)$. Osim toga, važno je uočiti što je u pojedinoj situaciji skup svih elementarnih događaja, odnosno da se skup svih elementarnih događaja smanjuje kada je u pitanju uvjetna vjerojatnost.

Kasnije ćemo objasniti kako se tablica crta, no prije toga ćemo navesti neke definicije koje su nam potrebne za razumijevanje računanja vjerojatnosti pomoću tablice.

Formula potpune vjerojatnosti

Korištenje uvjetnih vjerojatnosti može olakšati računanje vjerojatnosti u složenijim slučajevima. Jedna od metoda računanja vjerojatnosti je formula potpune vjerojatnosti. Primjenjuje se kada su dani događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ koji se međusobno isključuju i čija je unija cijeli Ω, dakle siguran događaj.

Elemente potpunog sustava događaja u teoriji vjerojatnosti nazivamo **hipotezama**. Napomena: *Hipoteze se međusobno isključuju i točno jedna od njih mora se dogoditi.*

Teorem 3.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka skupovi $H_1, H_2, ..., H_n$ čine potpun sustav događaja. Tada za proizvoljan događaj A vrijedi:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

(vidi dokaz u [13]).

Formula potpune vjerojatnosti nam je važna kada računamo vjerojatnosti s međusobno isključivim događajima, čiji je zbroj vjerojatnosti 1, te kada istražujemo vjerojatnosti događaja uz poznavanje neke hipoteze koja utječe na ishod promatranog događaja.

Bayesov teorem

Ponekad je korisno razmišljati o računanju vjerojatnosti da je postavljena hipoteza istinita ako utvrdimo da se realizirao neki događaj. Za izračunavanje vjerojatnosti tog oblika može se koristiti rezultat poznat pod nazivom *Bayesova formula*. Jedan od najvažnijih teorema u teoriji vjerojatnosti je *Bayesov teorem*.

Pretpostavimo da nam je zadan potpun sustav događaja $H_1, H_2, ..., H_n$ te da su nam poznate vjerojatnosti svih hipoteza $H_i, i = 1, 2, ..., n$. Nadalje, pretpostavimo da je pokus izveden i da se kao njegov ishod pojavio dogadaj A. Uvjetne vjerojatnosti događaja A uz svaku od hipoteza H_i, dakle vjerojatnosti $P(A \mid H_i)$, također su nam bile poznate prije izvođenja pokusa [13].

Sada je prirodno postaviti pitanje o iznosu vjerojatnosti hipoteza $H_i, i = 1, 2, ..., n$ nakon izvođenja pokusa, tj. uz poznatu činjenicu da se realizirao dogadaj A. Dakle, zanimaju nas uvjetne vjerojatnosti $P(H_i \mid A), i = 1, 2, ..., n$.

Teorem 3.1.2. *Neka je $H_1, H_2, ..., H_n$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i neka je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ takav da je $P(A) > 0$. Tada za svaki $i \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)} \tag{3.1}$$

(vidi dokaz u [13]).

Spoznaja da se dogodio događaj A mijenja naše uvjerenje o mogućnosti pojavljivanja hipoteza $H_1, H_2, ..., H_n$. Upotrebom Bayesove formule izvršili smo ponovnu procjenu vjerojatnosti hipoteza.

Mnogi vjerojatnosni problemi mogu se riješiti pomoću Bayesove formule, no ona je za učenike dosta komplicirana te uče formulu napamet. Međutim, postoje jednostavniji načini rješavanja takvih problema, tako da se podaci organiziraju pomoću posebnih prikaza te se potom lako očitaju tražene vjerojatnosti.

3.2 Struktura dvosmjerne tablice

Dvosmjerna tablica je vrsta vizualizacije frekvencija i relativnih frekvencija za dvije kategorije događaja. Jedna kategorija prikazana je recima, a druga stupcima. Pomoću tablice možemo odrediti i jesu li događaji nezavisni te računati uvjetne vjerojatnosti.

Karakteristike tablice su:

- kategorije su smještene u lijevom stupcu i gornjem retku,
- podaci su smješteni u središtu tablice,
- zbrojeve pišemo na kraju svakog retka i svakog stupca,
- ukupan zbroj svih podataka je u desnom donjem kutu tablice.

(Gornje obrazloženje prilagođeno je prema [8].)

Na sljedećem primjeru učenici mogu otkriti kreiranje dvosmjerne tablice te određivanje vjerojatnosti događaja očitavajući podatke iz tablice. Važno je učenicima osvijestiti da jednu kategoriju čine međusobno isključivi događaji, a same kategorije su međusobno nezavisne, što ćemo bolje razumijeti u sljedećem primjeru. Osnovno je da presjek događaja očitavaju kao presjek retka i stupca koji predstavljaju određene događaje različite kategorije. Također treba provesti diskusiju što predstavlja skup svih mogućih ishoda kada je u pitanju uvjetna vjerojatnost, tj. da se veličina skupa Ω smanjuje ukoliko znamo neku informaciju, a time se mijenja tražena vjerojatnost događaja uz dani uvjet.

Zadatak 4. *(preuzet s [2]) Neki test na mononukleozu ima 99% šanse za točnu dijagnozu pacijenta oboljelog od mononukleoze i 5% šanse za krivu dijagnozu pacijenta koji nema infekciju. Pretpostavimo da se testirala grupa ljudi od kojih 1% ima mononukleozu. Ako je slučajno odabran nalaz pozitivan, koja je vjerojatnost da taj pacijent ima mononukleozu?*

Rješenje.
Pretpostavimo da je testirano 10 000 ljudi, a 1% ih ima mononukleozu. Onda 100 ljudi ima i 9900 ljudi nema. Za 100 ljudi koji imaju bolest, 99% je ishod pozitivan i 1% negativan. Od 9900 ljudi koji nemaju, 5% će test biti pozitivan i 95% negativan. Izračunajmo koliko je to ljudi:

$$5\% \cdot 9900 = 495$$

$$9900 - 495 = 9405$$

tj. 495 ih ima infekciju i nalaz je pozitivan, a 9405 je nalaz negativan.

Konstruirajmo tablicu koja prikazuje prethodno navedene podatke (vidi sliku 3.1).

	Test je pozitivan	Test je negativan	Ukupan broj ljudi
Ima mono	99	1	100
Nema mono	495	9 405	9 900
Ukupan broj ljudi	594	9 406	10 000

Slika 3.1: Mononukleoza

- u lijevi stupac stavimo {pacijent ima mononukleozu} i {pacijent nema mononukleozu},
- u gornji redak stavimo {nalaz je pozitivan} i {nalaz je negativan},
- popunimo tablicu odgovaraućim podacima koje imamo zadane,
- upišimo u zadnji redak i posljednji stupac {ukupan broj ljudi}.

Vidimo da su 99 + 495 = 594 nalaza pozitivna, ali samo 99 su stvarno istinita.

Trebamo odrediti vjerojatnost da pacijent ima mononukleozu ako mu je nalaz pozitivan. Prvo iz tablice očitamo broj ljudi koji imaju mononukleozu i test je pozitivan, tako da nađemo presjek retka {ima mono} i stupca {test je pozitivan}. Matematički smo našli presjek dvaju događaja.

Da nam je lakše zapisati, označimo sljedeće događaje:

- M={pacijent ima mononukleozu}
- NM={pacijent nema mononukleozu}
- (+)={test je pozitivan}
- (-)={test je negativan}

Ako gledamo vjerojatnost događaja $P(\{\text{ima mono}\} \text{ i } \{\text{test je pozitivan}\})$, imamo sljedeće:

$$P(M \cap +) = \frac{99}{10000} = 0.0099.$$

No mi znamo informaciju da je test pozitivan, pa zapravo gledamo vjerojatnost da pacijent ima infekciju ako je nalaz pozitivan. U teoriji vjerojatnosti, skup svih elementarnih događaja sada nije ukupan broj ljudi, već broj pacijenata koji imaju pozitivan nalaz, a to je 594.

Konačno, imamo da je vjerojatnost jednaka:

$$P(M \mid +) = \frac{P(M \cap +)}{P(+)} = \frac{99}{594} \approx 0.167.$$

Stoga oko 0.167 od ukupnog broja pacijenata čiji su nalazi pozitivni stvarno imaju mononukleozu.

Slijedi diskusija o realnosti. Nije baš realno da se istražuje grupa od 10 000 ljudi, no dani postotci su istiniti. Naime, ako se broj testiranih smanji ili poveća, vrijednosti će se smanjiti/povećati, ali njihovi omjeri ostaju isti. Prema tome, veličina uzorka ne utječe na vjerojatnosti.

Komentar: Promotrimo malo prethodno riješeni zadatak. Naime, tražili smo vjerojatnost da pacijent ima mononukleozu ako mu je test pozitivan. No ishod $\{\text{pozitivan}\}$ proizlazi iz ishoda da pacijent ima mononukleozu odnosno događaj $\{\text{test je pozitivan}\}$ ovisi o događaju $\{\text{ima mono}\}$. Ako gledamo događaje $\{\text{ima mono}\}$ i $\{\text{nema mono}\}$ kao isključive događaje čiji je zbroj vjerojatnosti 1, imamo zapravo hipoteze iz kojih proizlaze događaji $\{\text{test je pozitivan}\}$ i $\{\text{test je negativan}\}$. Stoga pri određivanju vjerojatnosti da se dogodio događaj $\{\text{ima mono}\}$ ako znamo da je ishod $\{\text{test je pozitivan}\}$ zapravo određujemo po Bayesovoj formuli. Zaključak je da neke zadatke možemo riješiti i bez primjene Bayesove formule ukoliko ispravno nacrtamo i struktuiramo dvosmjernu tablicu, a zatim ispravno očitamo potrebne podatke.

Nakon uvođenja dvosmjerne tablice, slijedi primjer u kojem bi učenici očitavali te interpretitali vjerojatnosti iz dane tablice s podacima. Uočit će da tablica može imati više od dviju mogućnosti po kategoriji te će na ovakvom primjeru bolje razumijeti kako računati uvjetne vjerojatnosti pomoću tablice.

Zadatak 5. ***Titanik*** *(preuzeto s [15]). Svi smo čuli za veliku nesreću 1912. godine kad se brod Titanik sudario s ledenjakom. Podaci o preživjelima i umrlima nalaze se u sljedećoj tablici:*

	Preživjeli	Nisu preživjeli	Ukupno
1. klasa	201	123	324
2. klasa	118	166	284
3. klasa	181	528	709
Ukupan broj putnika	500	817	1317

Slika 3.2: Podaci o broju putnika

a) Ako je putnik slučajno odabran, koja je vjerojatnost da je putnik bio u 1. klasi?

b) Ako je putnik slučajno odabran, koja je vjerojatnost da je taj putnik preživio?

c) Ako je putnik slučajno odabran, koja je vjerojatnost da je putnik bio u 1. klasi i da je preživio?

d) Ako znamo da je putnik bio u 1. klasi, koja je vjerojatnost da je putnik preživio?

e) Ako znamo da je putnik preživio, koja je vjerojatnost da je putnik bio u 1. klasi?

f) Ako znamo da je putnik preživio, koja je vjerojatnost da je putnik bio u 3. klasi?

Rješenje.

a) Vjerojatnost da je putnik bio u 1. klasi je broj svih putnika 1. klase podijeljeno s ukupnim brojem svih putnika, to je:

$$P(\textit{putnik je u 1. klasi}) = \frac{324}{1317} \approx 0.246.$$

b) Vjerojatnost da je putnik preživio je broj svih preživjelih podijeljeno s ukupnim brojem svih putnika, a to je:

$$P(\textit{putnik je preživio}) = \frac{500}{1317} \approx 0.380.$$

c) Trebamo odrediti vjerojatnost da je putnik bio u 1. klasi i da je preživio. Matematički gledano trebamo odrediti presjek događaja {putnik je u 1. klasi} i {putnik je preživio}. Broj putnika očitavamo iz tablice, a to je presjek retka *1. klasa* i stupca *preživjeli* tj. 201. Tražena vjerojatnost je omjer svih putnika koji su u 1. klasi i preživjeli i ukupnog broja putnika:

$$P(\textit{putnik je bio u 1. klasi i preživio}) = \frac{201}{1317} \approx 0.153.$$

d) Ovdje se radi o uvjetnoj vjerojatnosti. Da bi našli vjerojatnost da je putnik preživio ako znamo da je putnik u 1. klasi, računamo omjer preživjelih putnika od svih putnika u 1. klasi tj.:

$$P(\textit{putnik je preživio} \mid \textit{putnik je bio u 1. klasi}) = \frac{201}{324} \approx 0.620.$$

e) Sada znamo da je putnik preživio, a trebamo odrediti vjerojatnost da je bio u 1. klasi ako je preživio. Iz tablice očitavamo broj putnika koji su preživjeli i bili u 1. klasi, a to je 201 te broj preživjelih, a to je 500 pa imamo:

$$P(\textit{putnik je bio u 1. klasi} \mid \textit{putnik je preživio}) = \frac{201}{500} \approx 0.402.$$

f) Analogno kao u prijašnjem podzadatku, očitavamo presjek događaja {preživjeli} i {3. klasa}, a to je 181. Računamo udio presjeka u ukupnom broju preživjelih pa vrijedi:

$$P(\textit{putnik je bio u 3. klasi} \mid \textit{putnik je preživio}) = \frac{181}{500} \approx 0.362.$$

Nakon rješavanja prethodnih zadataka, učenici uspoređuju rješenja, posebice zadnja tri podzadatka, te interpretiraju dobivene vjerojatnosti u kontekstu zadatka.

Nadalje, za vježbu prepoznavanja nezavisnih događaja te uvjetne vjerojatnosti, mogu se postaviti pitanja:

1. Jesu li događaji putnik je preživio i putnik je bio u 1. klasi nezavisni?
2. Jesu li događaji putnik je preživio i putnik je bio u 3. klasi nezavisni?
3. Jesu li svi putnici Titanika imali jednaku vjerojatnost preživljavanja?

(Učenici odgovore trebaju potkijepiti računom.)

Rješenje.
1. Kažemo da su dva događaja A i B nezavisna ako je $P(A \mid B) = P(A)$ (2.5). Stoga ćemo usporediti uvjetnu vjerojatnost $P(preživio \mid 1.\ klasa)$ sa $P(preživio)$.

$$P(preživio \mid 1.\ klasa) \approx 0.620,$$

$$P(preživio) \approx 0.380.$$

Vidimo da vjerojatnosti nisu iste pa su događaji zavisni.

2. Analogno provjeravamo kao u prethodnom podzadatku:

$$P(preživio \mid 3.\ klasa) \approx 0.255,$$

$$P(preživio) \approx 0.380.$$

Događaji su zavisni. Usput možemo vidjeti da je putnik u 3. klasi imao manje šanse biti spašen od putnika u 1. klasi.

3. Jedan od načina za odgovoriti na ovo pitanje je usporedba vjerojatnosti preživljavanja za putnika iz prve, druge odnosno treće klase. Računamo sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

$P(preživio \mid 1.\ klasa) \approx 0.620,$
$P(preživio \mid 2.\ klasa) \approx 0.415,$
$P(preživio \mid 3.\ klasa) \approx 0.255.$

Uspoređujući ove vjerojatnosti možemo reći da nisu svi putnici Titanika imali istu šansu preživljavanja. Preciznije, vjerojatnost preživljavanja ovisila je o klasi na brodu, tj. o bogatstvu, tako da su putnici iz 1. klase imali najveću, a iz 3. klase najmanju šansu biti spašeni.

Slijedi zadatak za vježbu u kojem učenici određuju vjerojatnosti pomoću tablice, ali su im dani podaci kao udjeli ispitane populacije u postocima.

Zadatak 6. *(prilagođen iz materijala Metodike nastave matematike 1)*
Nakon provedene reklamne kampanje povodom stavljanja na tržište nove paste za zube, proizvođač je proveo istraživanje o njezinoj uspješnosti. Slučajno izabrani ispitanici odgovarali su na pitanja jesu li vidjeli reklamu za ovaj novi proizvod te jesu li ga probali. Rezultati pokazuju da je reklamu vidjelo 35% ispitanika. Pritom $\frac{5}{7}$ ispitanika koji su vidjeli reklamu nisu probali novu pastu za zube, a $\frac{1}{13}$ ispitanika koji nisu vidjeli reklamu probalo je novu pastu za zube. Odredite vjerojatnost da slučajno odabrani ispitanik:

a) nije vidio reklamu za novu pastu za zube,

b) jest vidio reklamu za novu pastu za zube i probao taj proizvod,

c) za kojeg znamo da je vidio reklamu, jest probao novu pastu za zube,

d) za kojeg znamo da je probao novu pastu za zube, jest vidio reklamu za taj proizvod.

Rješenje:

Da bismo nacrtali i ispunili tablicu, trebamo prvo odrediti nepoznate podatke:

$$\frac{5}{7} \cdot 35\% = 25\%,$$

$$\frac{1}{13} \cdot 65\% = 5\%.$$

Sada nacrtajmo tablicu te ju ispunimo podacima (vidi sliku 3.3)

		PROBALI NOVU PASTU ZA ZUBE	
		DA	NE
VIDJELI REKLAMU ZA NOVU PASTU ZA ZUBE	DA	10%	25%
	NE	5%	60%

Slika 3.3: Reklama

a) Ako je vjerojatnost da je vidio reklamu 35%, onda je vjerojatnost da nije vidio:

$$100\% - 35\% = 65\%.$$

b) Trebamo očitati iz tablice gdje se sijeku događaj {vidio je reklamu} i {probao novu pastu za zube}. Vjerojatnost da je ispitanik vidio reklamu i probao novu pastu za zube je 10%.

c) Vjerojatnost da je ispitanik vidio reklamu je 0.35, a da je vidio reklamu i probao novu pastu je 0.1 pa je konačna vjerojatnost:

$$\frac{0.1}{0.35} \approx 0.286.$$

d) Vjerojatnost da je ispitanik probao novu pastu za zube je 0.15, a vidio reklamu i probao novu pastu je 0.1 pa je rješenje:

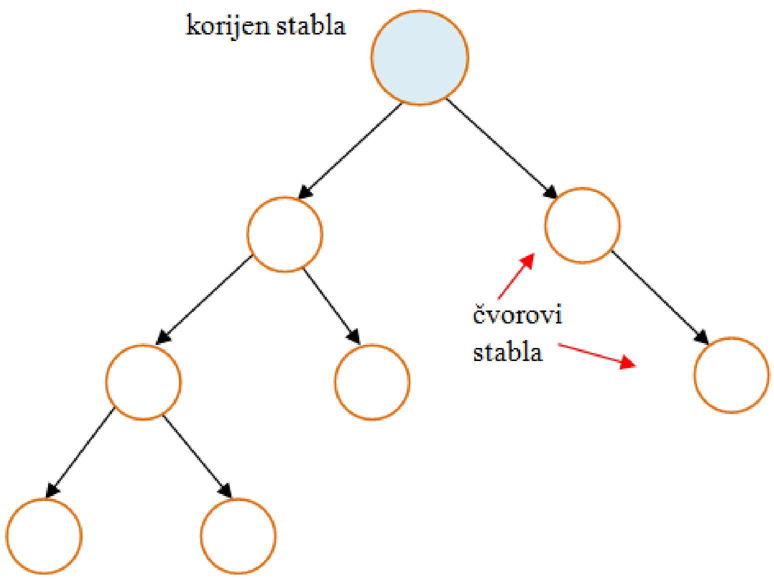
$$\frac{0.1}{0.15} \approx 0.67.$$

Poglavlje 4

Stabla odlučivanja

4.1 Struktura stabla vjerojatnosti

Kako bismo kreirali prostor elementarnih događaja dvaju nezavisnih događaja dobro je koristiti dijagrame koji događaje razdvajaju i prikazuju sve moguće kombinacije njihovih ishoda. Stablasti dijagram je dobra metoda prikazivanja prostora elementarnih događaja za bilo koji broj događaja jer razdvaja i prikazuje sve moguće kombinacije ishoda (vidi sliku 4.1). Prikazom stabla vjerojatnosti modeliramo probleme u teoriji vjerojatnosti (vidi [7]).



Slika 4.1: Struktura stabla

U izgradnji stabla polazimo od jedinstvene početne točke koja se zove *glavni ili korijenski čvor* te predstavlja cijeli skup podataka na vrhu stabla. Zatim se iz te točke šire grane stabla koje završavaju elementarnim ishodima tog pokusa, koji su međusobno isključivi te zbroj njihovih vjerojatnosti iznosi 1. Tražena vjerojatnost je rezultat niza događaja koji se trebaju dogoditi, a rezultat svakog događaja ovisi o rezultatima iz prethodnog niza događaja. Vjerojatnosti iz pojedinog niza su umnošci vjerojatnosti ispisanih na granama koje ulaze i izlaze iz istog čvora. Kada znamo vjerojatnosti elementarnih ishoda, lako izračunavamo sve ostale vjerojatnosti ([7]).

4.2 Obrada stabla vjerojatnosti u nastavi

Stablo vjerojatnosti bi bilo pimjereno obrađivati u nastavi u srednjoj školi, te se već sada obrađuje u četvrtim razredima nekih škola. Ishodi koji bi se postigli učenjem navedenog sadržaja su (prema [9]) :

- odrediti vjerojatnost događaja koristeći vjerojatnosno stablo
- računati vjerojatnost događaja koristeći definiciju nezavisnosti i uvjetne vjerojatnosti
- odabrati vjerojatnosno stablo, formulu potpune vjerojatnosti ili Bayesovu formulu za određivanje vjerojatnosti u problemima koji sadrže hipoteze
- primijeniti vjerojatnost u rješavanju problema iz matematike, ostalih odgojno-obrazovnih područja i stvarnoga života interpretirajući dobivena rješenja u zadanom kontekstu

U primjeni ga najčešće koristimo kada za svaki podatak znamo kojoj klasi pripada. Slijedi primjer koji predstavlja jedan od načina uvođenja stabla vjerojatnosti kao vrste dijagrama vjerojatnosnih problema. Cilj je da učenicima bude bar intuitivno jasnije zašto pri računanju ishoda vjerojatnosnog problema prikazanog stablom vjerojatnosti koristimo pravilo množenja, u što će se uvjeriti kasnije, kada otkriju Bayesovu formulu.

Učenici će prvo gledati događaje i rezultate kao cijele brojeve, a zatim doći do omjera prirodnih frekvencija tj. do razlomaka te u tom trenutku otkriti vjerojatnosti. Stoga razlikujemo dijagram stabla s cijelim brojevima (brojevi su u kutijama na krajevima grana) i stablo vjerojatnosti, gdje su ishodi na kraju grana. Učenicima se treba objasniti zašto je vjerojatnost svake cjelovite grane dobivena množenjem vjerojatnosti određenih dijelova te grane. Za te primjere odabrane su veličine uzorka koje osiguravaju jednostavno računanje i svi ishodi testa su uzet u obzir. Najbitnije, prikaz prati priča koja opisuje kako interpretirati dobivene rezultate ([6]).

Skandal u sportskom svijetu

Svi znaju za trenutno najuspješnijeg hrvatskog tenisača Marina Čilića! Njegovi uspjesi su se nizali godinama sve do 2013. godine, kada su sav njegov trud, uspjeh i snovi u jednom trenutku naizgled propali. Naime, na testiranju se pokazalo da Čilić u krvi ima nedozvoljene tvari tj.imao je pozitivan nalaz na dopinškoj kontroli, zbog čega je pauzirao četiri mjeseca, a prijetili su mu i kaznom od dvije godine zabrane igranja tenisa. A nakon nekoliko mjeseci saznajemo da nije bio dopingiran.

Kako funkcionira doping testiranje? Igrač koji će biti podvrgnut doping-testu tj. analizi urina na zabranjene supstance, bude nasumično odabran. Ukoliko mu se u krvi nađu nedozvoljene tvari, kaže se da je „doping pozitivan", odnosno ako u krvi nije pronađeno ništa nedozvoljeno, kaže se da je „doping negativan". Kako je moguće da sportaši poput Čilića budu krivo optuženi, a što im ozbiljno može utjecati na karijere?

Proučit ćemo detaljnije jednu od provedenih istraga.

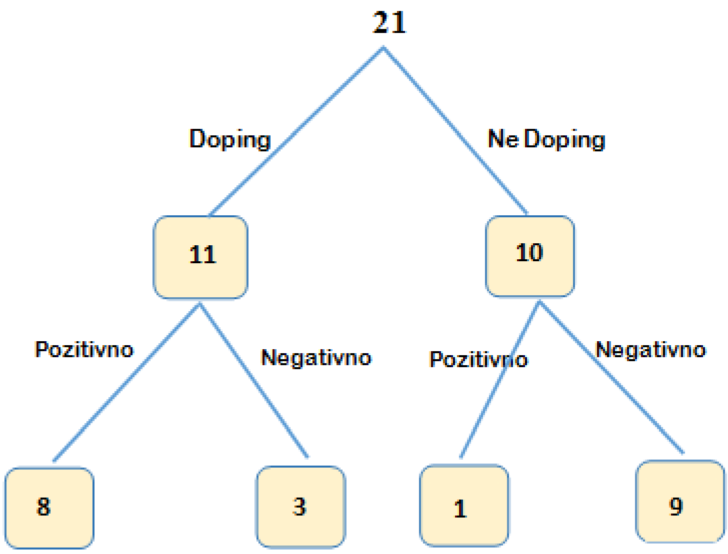
Zadatak 7. *U jednoj istrazi godinu dana se pratio 21 sportaš, analizirajući mjesečne pretrage krvi. Od njih 21:*

- *nedopuštene lijekove je uzimalo njih 11,*
- *od tih 11 na testu su označeni kao sumnjivi s 99% valjanosti testa njih 8,*
- *samo je 1 sportaš koji nije uzimao zabranjene lijekove bio lažno pozitivan.*

Za koji postotak sportaša koji su varali tj. uzimali zabranjene lijekove je doping test pokazao istinu tj. pozitivno?

Rješenje.
Prikažimo preglednije podatke koje imamo. To možemo koristeći stablasti dijagram kao na slici 4.2. Crtamo prvo vrh gdje je broj testiranih. Zatim se stablo počinje granati prema dole tj. razdvaja se u dvije grane koje završavaju s kvadratima (*plodovima stabla*): na lijevo *Doping* što označava broj sportaša koji su uzimali nedopuštene lijekove i na desno *Ne Doping*, broj sportaša koji nisu ništa uzimali. Nadalje, iz tih kvadrata se razdvajaju ponovo na one koje su pozitivne i negativne. Vidimo da je 8 od njih 11 bilo doping pozitivno. Međutim, očekujemo da $\frac{3}{21}$ sportaša prevari testiranje. Možemo reći da je to vjerojatnost da netko tko je uzimao nedozvoljene lijekove prevari test i ishod bude negativan (lažan).

No ne želimo uvijek istraživati brojku od 21 sportaša. Treba nam općenitija metoda koja će nam dati odgovore za bilo koji broj sportaša. Zato se trebamo usredotočiti na razlomke, a ne na brojeve. Kako bismo iskoristili stablo za računanje udjela $\frac{3}{21}$, počevši od 21 sportaša?



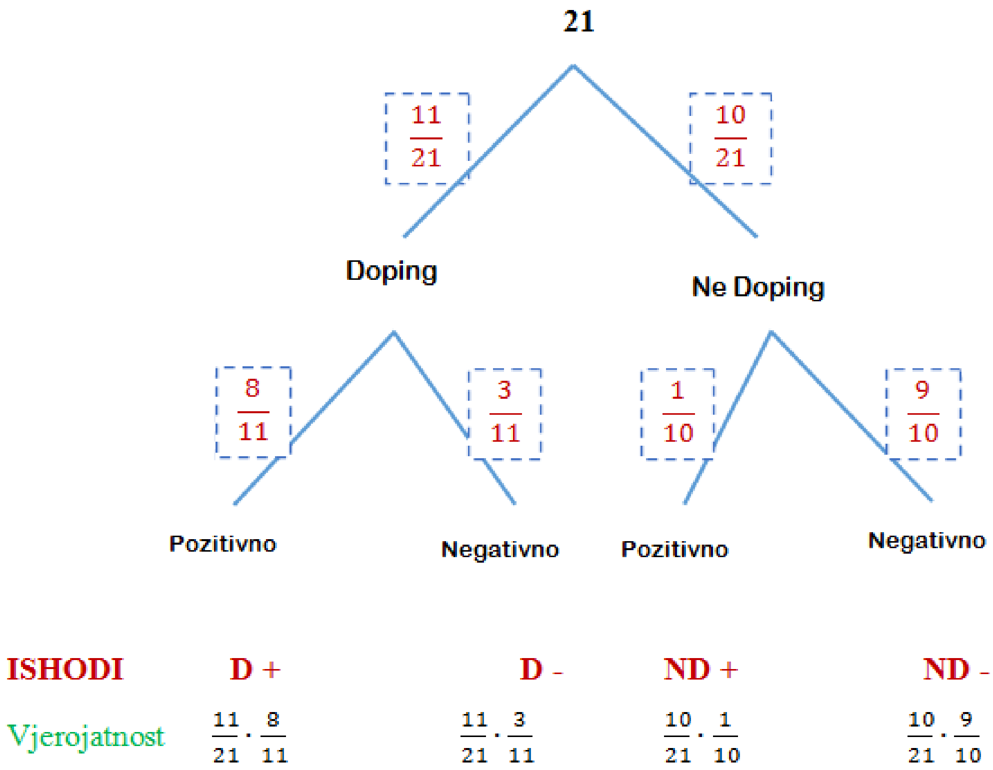
Slika 4.2: Stablo 1a)

Preoblikujmo staro stablo (vidi sliku 4.3). Sada grane imaju vrijednosti vjerojatnosti, a događaji su na krajevima grana.

Broj sportaša koji su varali je 11 od 21 tj. $\frac{11}{21}$ i to je prva grana. Od tih 11 trojica su negativna tj. postoji $\frac{3}{21}$ šanse da će imati negativan test (grana *Negativno* u drugom redu). Te grane čine ukupni udio $\frac{1}{21}$. Ono što smo učinili je pronašli koliko je $\frac{3}{21}$ od $\frac{11}{21}$. To odgovara operaciji množenja. Provjerimo metodu tražeći odgovor o vjerojatnosti da sportaš koji nije uzimao zabranjene lijekove na testu bude doping pozitivan. Prvo gledamo granu $\frac{10}{21}$ koja prikazuje udio „poštenih" sportaša. Jedan od njih je bio pozitivan na testu i to pokazuje grana $\frac{1}{10}$. Dakle, tražena vjerojatnost (lažno pozitivni u oznaci $P(ND \cap +)$) jednak je:

$$P(ND \cap +) = \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{21} = 4.8.\%$$

Razlozi ovakvih grešaka su različiti, ali sigurno je da su potrebne detaljnije znanstvene studije testova koji se koriste za uvidjeti koriste li sportaši zabranjene lijekove.



Slika 4.3: Stablo 1b)

Zadatak 8. *Ako je na nekom turniru 36 sportaša, pretpostavimo da je trećina uzimalo zabranjene lijekove, a to je* $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$*, a zatim je 1 od 12 lažno pozitivan tj.* $\frac{1}{12}$.

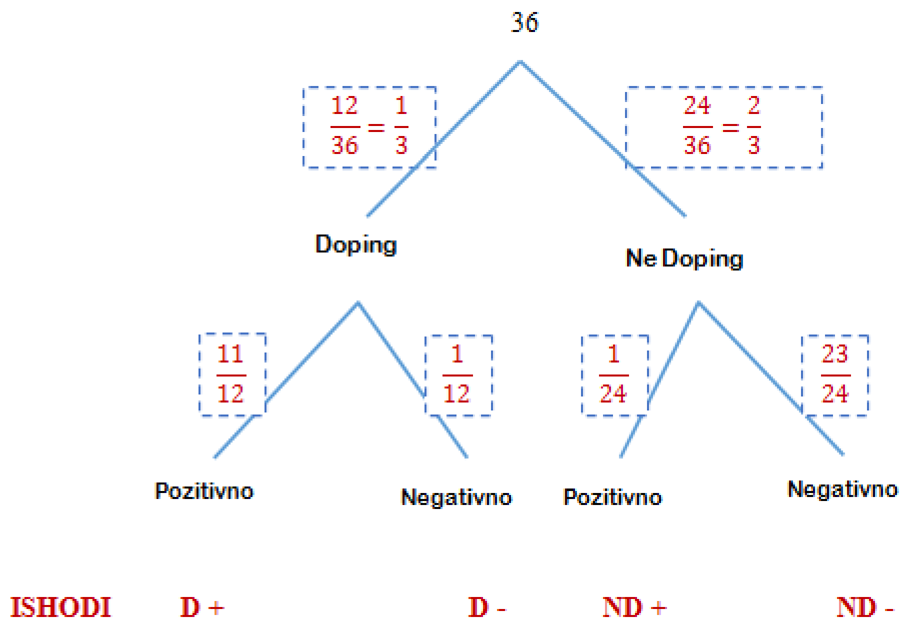
a) Izračunajte vjerojatnost da test bude „lažno“ pozitivan. (Čilić je optužen na turniru u Munchenu na kojem je sudjelovalo 36 tenisača.)

b) Kolika je vjerojatnost da sportaš uspije prevariti testiranje tj. vjerojatnost da je sportaš uzimao zabranjene tvari, a na testu je bio doping negativan (D-)?

Rješenje. Prikažimo stablom vjerojatnosti (vidi sliku 4.4).

a) Gledamo granu Ne Doping i u drugom retku granu Pozitivno. Tada je vjerojatnost lažno pozitivnog ishoda testiranja (ND +) jednaka:

$$P(ND \cap +) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{24} = 0.02777\ldots \approx 2.77\%.$$



Slika 4.4: Stablo 2

Uočavamo da je vjerojatnost da se sportaša optuži krivo jednaka 2.77%.

b) Gledamo granu Doping i u drugom retku granu Negativno. Tada je tražena vjerojatnost prevare jednaka:

$$P(ND \cap +) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} = 0.02777\ldots \approx 2.77\%.$$

4.3 Primjeri zadataka sa stablom

U nastavku su neki zanimljivi primjeri prikaza zavisnih događaja stablastim dijagramom. Zavisne događaje imamo kada događaj drugog niza događaja ovisi o prvom događaju. U dijagramu grane pokazuju kako je drugi ishod vezan s prvim, dok su ishodi prvog niza vezani granom koja proizlazi iz jedne točke odnosno korijena stabla. Vjerojatnosti da se događaj dogodio ili nije su zapisane na granama.

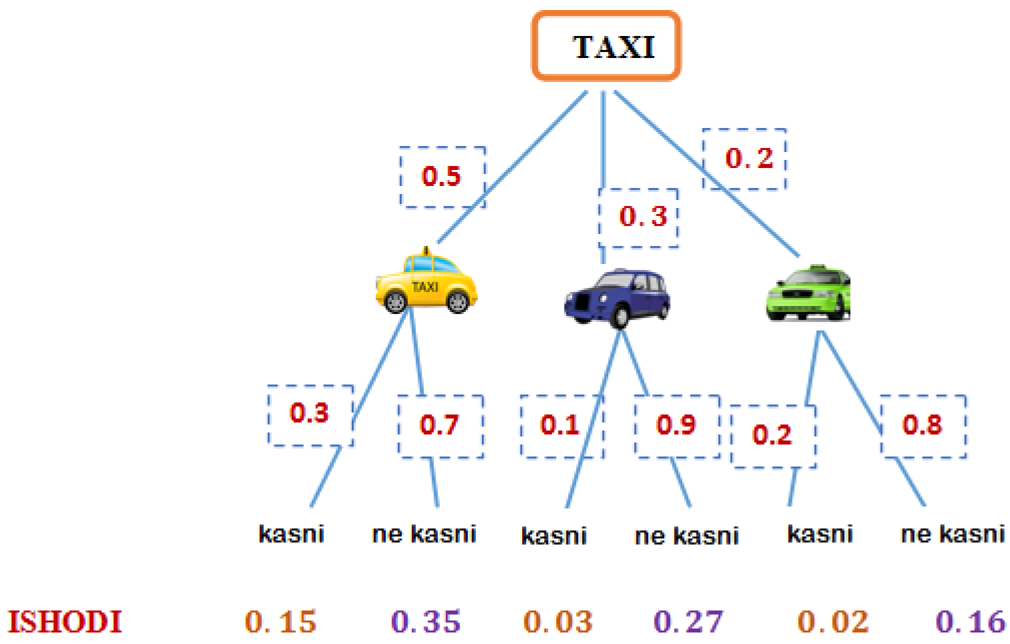
Zadatak 9. *(preuzet s [1])*
U nekom gradu na aerodrom vozi 50% taksija žute boje, 30% taksija plave boje i 20% taksija zelene boje. Oni putnike na aerodrom dovedu prekasno na let s vjerojatnostima 0.3, 0.1, 0.2. Jednog dana, žureći na aerodrom, neki putnik je zaustavio taksi na ulici i rekao vozaču da vozi na aerodrom.

a) Izračunajte vjerojatnost da putnik nije zakasnio.

b) Ako znamo da putnik nije zakasnio, izračunajte vjerojatnost da se putnik vozio u žutom taksiju.

c) Izračunajte vjerojatnost da putnik koji se vozio plavim taksijem nije zakasnio.

Rješenje.
Prikažimo situaciju vjerojatnosnim stablom (vidi sliku 4.5). Iz osnovnog čvora se granaju tri nezavisna događaja tj. tri boje taksija. Stoga na prvi niz grana stavljamo vjerojatnosti izbora taksija pojedine boje. Nadalje, za svaki taksi su dva moguća događaja, da taj taksi kasni ili ne kasni. Stoga iz svakog čvora koji predstavlja određeni taksi proizlaze po dvije grane (jer su dva nezavisna događaja u pitanju).



Slika 4.5: Taxi

Označimo s:

K ={taksi je kasnio}

NK ={taksi nije kasnio}.

Krajnji ishodi su umnošci pojedinih grana koje imaju zajednički čvor. Zato iz dijagrama očitavamo rješenja:

a) Vjerojatnost da putnik nije zakasnio dobijemo tako da zbrojimo vjerojatnosti ishoda u kojima svaki od taksija stigne na vrijeme:

$$P(NK) = 0.35 + 0.27 + 0.16 = 0.78 = 78\%.$$

b) Zanima nas vjerojatnost da se putnik vozio žutim taksijem uz uvjet da nije zakasnio.

Niz događaja {kasni} i {ne kasni} je niz događaja ispod niza događaja boje taksija. Iz stabla možemo očitati vjerojatnost da se vozio žutim taksijem i nije zakasnio, a to je 0.35. Kako bi to matematički zapisali? Matematički bismo to zapisali kao presjek događaja ne kasni i žuti taksi pa je to zapravo vjerojatnost $P(NK \cap \text{žuti})$.

No zahvaljujući informaciji da taksi nije kasnio, skup elementarnih događaja se mijenja tj. smanjuje na skup događaja {nije kasnio}. Ako se pozovemo na formulu uvjetne vjerojatnosti (2.3), imamo sljedeće:

$$P(\text{žuti}|NK) = \frac{P(\text{žuti} \cap NK)}{P(NK)} = \frac{0.35}{0.78} \approx 0.45 = 45\%.$$

c) Treba izračunati $P(K|plavi)$ tj. vjerojatnost da putnik nije kasnio ako znamo da se vozio plavim taksijem.

$$P(NK|plavi) = \frac{P(NK \cap plavi)}{P(plavi)} = \frac{0.27}{0.3} = 0.9 = 90\%.$$

Možemo i na drugi način. Znamo da je vjerojatnost da je plavi taksi zakasnio 0.1 pa je događaj da plavi taksi nije zakasnio jednak

$$P(NK|plavi) = 1 - (K|plavi) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

Komentar:

Nakon rješavanja ovog zadatka treba provesti diskusiju o podzadatku *b)*. Naime na temelju tog primjera učenici mogu otkriti formulu potpune vjerojatnosti i Bayesovu formulu budući da se zapravo u ovom zadatku tj. u stablu vjerojatnosti te formule *skrivaju*. Definiramo događaje *boje taksija* kao hipoteze koje se međusobno isključuju. To je u stablastom dijagramu prvi niz događaja. Drugi niz događaja su ishodi koji proizlaze iz tih hipoteza. Međutim, kada se traži vjerojatnost događaja iz prvog niza tj. hipoteze uz uvjet da se dogodio događaj iz drugog niza (koji ovise o hipotezama) koristi se Bayesova formula. Presjek dvaju događaja iz različitog niza se računa kao presjek, ali zapravo je taj presjek dobiven formulom potpune vjerojatnosti npr. za $P(NK \cap zuti)$ umnožak prve grane koja predstavlja vjerojatnost $P(zuti)$ i druge grane koja zapravo predstavlja $P(NK \mid zuti)$, što jest formula potpune vjerojatnosti. Kada taj presjek podijelimo s vjerojatnosti skupa svih mogućih ishoda, a taj skup je u našem primjeru $P(NK)$ (jer znamo da nije kasnio), dobijemo Bayesovu formulu. Vidimo da stablo vjerojatnosti uvelike olakšava računanje složenijih problema, samo trebamo znati ispravno nacrtati stablo vjerojatnosti i očitati podatke.

U nastavku je još nekoliko primjera u koima se određuju vjerojatnosti bez korištenja Bayesove formule.

Zadatak 10. *(preuzeto s [12]) Izbila je epidemija nove bolesti koja zahvaća 1% stanovništva. Odlučili ste se testirati, iako nemate simptome. Test je 90% pouzdan (za 90% zaraženih rezultat testa je pozitivan, za 90% nezaraženih rezultat testa je negativan). Vaš test je pozitivan. Trebate li se zabrinuti?*

Rješenje.
Nacrtajmo odgovarajuće stablo vjerojatnosti (slika 4.6)

Trebamo odrediti vjerojatnost da je pacijent zaražen ako je test pozitivan tj. uz uvjet da je test pozitivan. Pratimo granu *zaražen* te iz nje granu *pozitivno*. Kad pomnožimo vrijednosti tih grana, dobijemo vjerojatnost da pacijent ima pozitivan nalaz i zaražen je, što matematički možemo zapisati kao presjek tj.

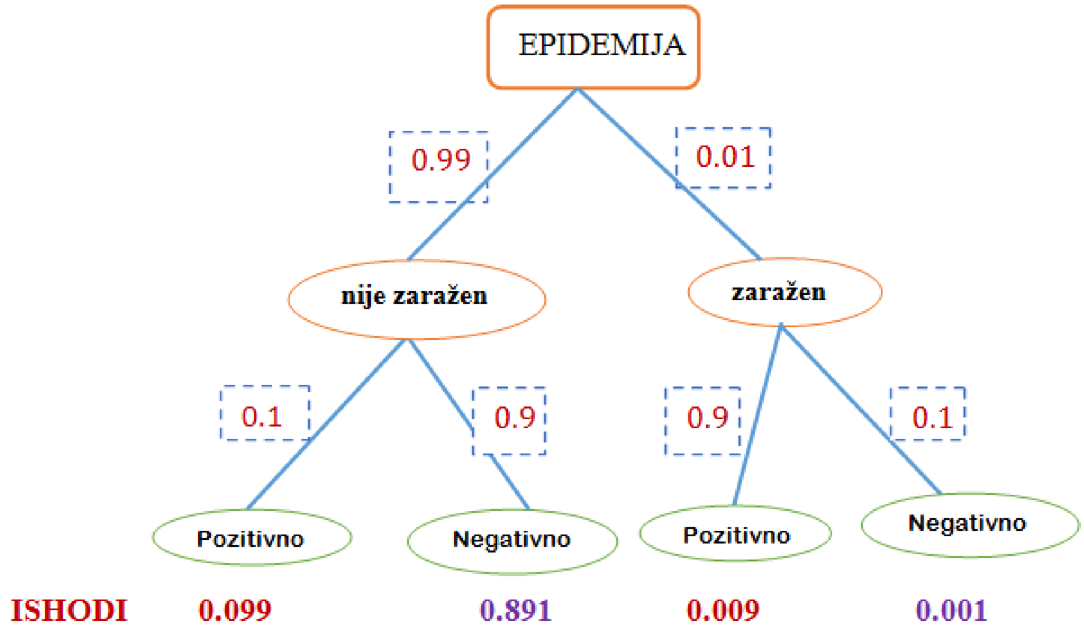
$$P(Z \cap +) = 0.01 \cdot 0.9 = 0.009.$$

No budući da znamo informaciju da je nalaz pozitivan, skup elementarnih ishoda je vjerojatnost da je nalaz pozitivan, neovisno o tome je li zaražen ili ne, a to je:

$$P(+) = 0.099 + 0.009 = 0.108.$$

Konačno, vjerojatnost da je pacijent zaražen ako je test pozitivan tj. uz uvjet da je test pozitivan iznosi:

$$P(Z|+) = \frac{P(Z \cap +)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.108} \approx 0.083 = 8.3\%.$$



Slika 4.6: Epidemija

Sljedeći zadatak pokazuje da u opisanoj igri nema tranzitivnosti relacije „pobjeđuje" pa se spomenuti fenomen zove *netranzitivne kocke*. Ovaj zadatak je zanimljiv jer na početku bi nekim učenicima bilo intuitivno da je veća vjerojatnost da na kockici A padne broj veći od broja koji bi pao na kockici C. No provjerom vjerojatnosti uočavaju da je relacija netranzitivna.

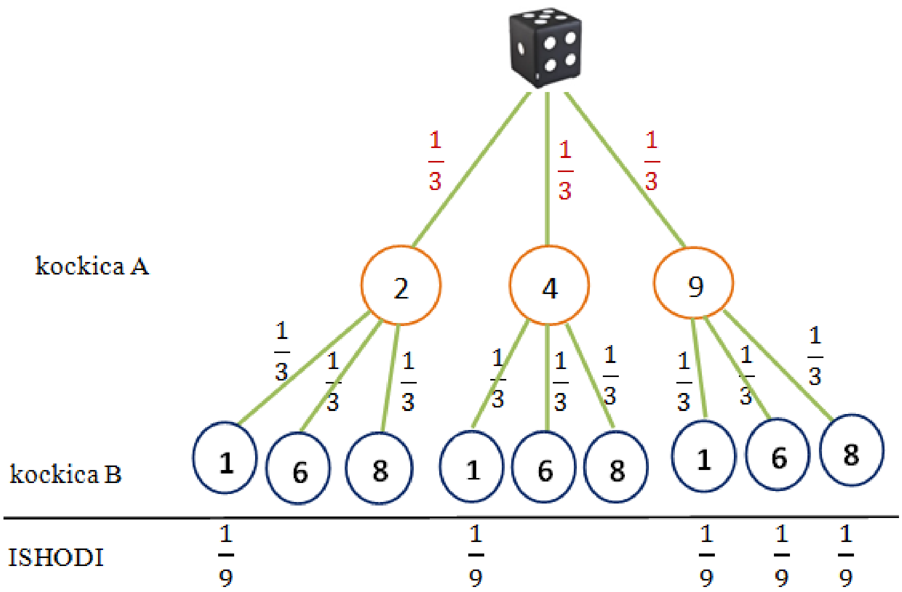
Zadatak 11. *(preuzet s [5]) Na tri kockice napisani su redom brojevi:*

- *kockica A: 2, 2, 4, 4, 9, 9,*
- *kockica B: 1, 1, 6, 6, 8, 8,*
- *kockica C: 3, 3, 5, 5, 7, 7.*

Tri igrača A, B, C koriste te kockice u igri gdje svaka dvojica bacaju svoju kocku i pobjeđuje onaj s većim brojem. Pokažite da igrač A češće pobjeđuje igrača B (nego obratno), igrač B češće pobjeđuje igrača C, dok igrač C češće pobjeđuje igrača A.

Rješenje.

Prikažimo bacanje kockica stablastim dijagramom (vidi sliku 4.7).



Slika 4.7: Bacanje kockica A i B

Mogući ishodi bacanja kockice A su brojevi 2,4 i 9 te je vjerojatnost da padne neki od tih brojeva jednaka $\frac{1}{3}$. Nadalje, iz svakoga od tih ishoda proizlaze po tri grane jer su tri moguća ishoda bacanja kockice, a to su brojevi na kockici B: 1,6 i 8. Također, vjerojatnost da padne bilo koji od ta tri broja je očito $\frac{1}{3}$. Za otkriti vjerojatnost s kojom kockica A će okrenuti veći broj od kockice B očitavamo samo ishode koji zadovoljavaju dani uvjet. Rješenje je:

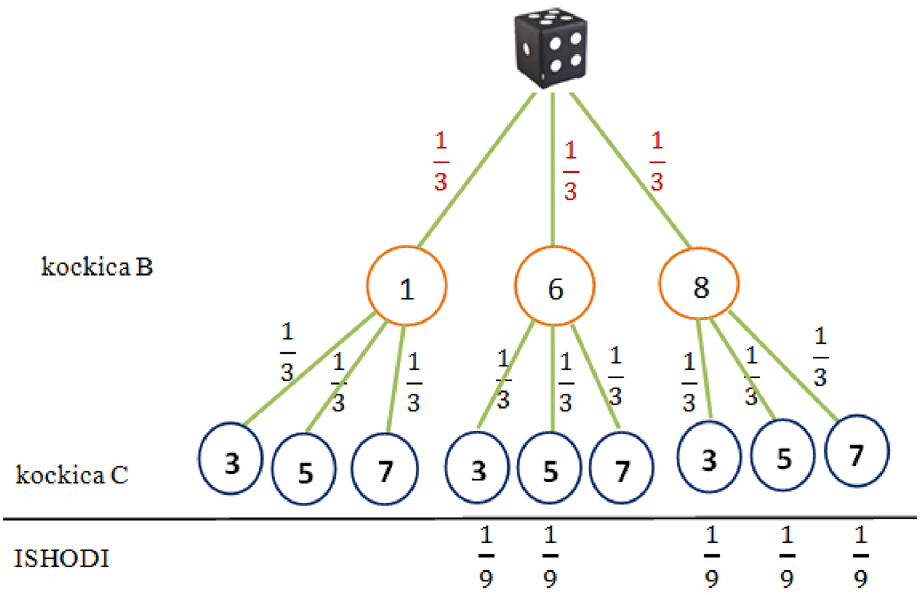
$$P(A > B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Iz toga proizlazi da je vjerojatnost da će pasti manji broj na kockici A jednaka:

$$P(A < B) = 1 - P(A > B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Nadalje, prikažimo analogno za kockicu B i C (vidi sliku 4.8). Očitavamo da je

$$P(B > C) = \frac{5}{9}.$$



Slika 4.8: Bacanje kockica B i C

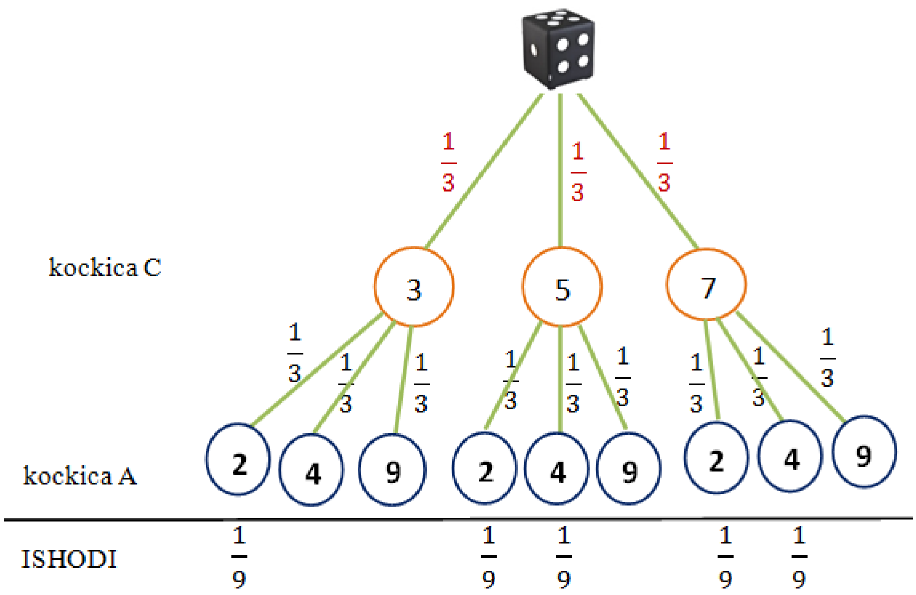
Prikažimo tada za C i A (vidi sliku 4.9). Uočavamo da je također:

$$P(C > A) = \frac{5}{9}.$$

Konačno prikažimo sve rezultate na jednom mjestu i uvjerimo se da smo pokazali istinitost tvrdnje:

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{5}{9}$$

Pokazali smo da tvrdnja vrijedi.



Slika 4.9: Bacanje kockica C i A

Monty Hall problem

Prije formalnog izračuna vjerojatnosti nekog događaja svi imamo neku intuiciju o rezultatima koja može biti vrlo korisna. Međutim, nekad se pokaže da nam je intuicija često manjkava i da neke odgovore možemo naći tek koristeći matematičke argumente. Jedna poznata dilema koja testira našu intuiciju je opisana sljedećim primjerom.

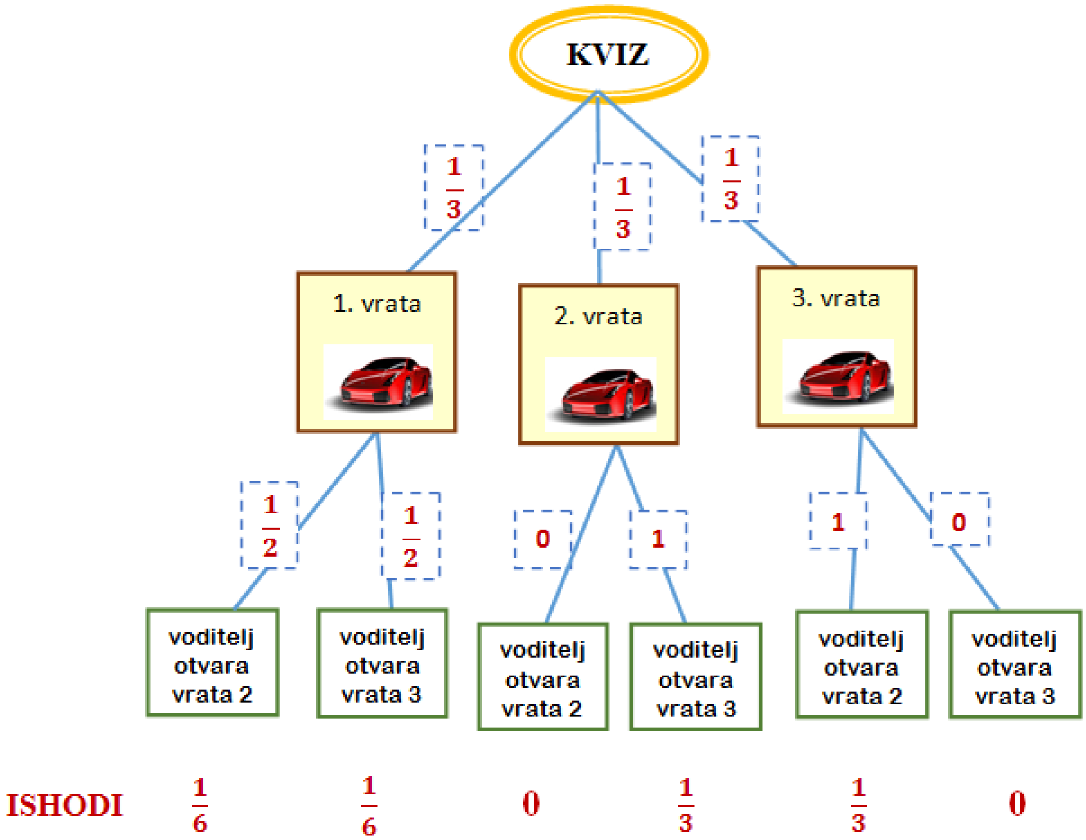
U SAD-u je bio popularan jedan kviz u kojem se popularizirala vjerojatnost te zaintrigirala umove cijelog svijeta. Kviz je funkcionirao na sljedeći način (prilagođeno iz [10]).

Natjecatelj ste u kvizu. Birate između troja vrata. Iza dvoja vrata nalaze se koze, a iza jednih automobil. Voditelj bi zamolio natjecatelja da izabere jedna vrata. Nakon što bi natjecatelj izabrao, voditelj otvara jedna od vrata iza kojih se nalazi koza i pita natjecatelja želi li promijeniti vrata koja je izabrao. Postavlja se pitanje treba li natjecatelj promijeniti prijašnji izbor, ostati pri njemu, ili to nije važno?

Pronađimo odgovor na konkretnom primjeru:

Odlučili ste se za vrata broj 1. Voditelj kviza otvara jedna od preostala dvoja vrata iza kojih je koza (voditelj zna gdje je automobil pa ta vrata ne otvara). Pita vas „Hoćete li promijeniti svoj izbor?“ Hoćete li?

Prikažimo situaciju stablom vjerojatnosti (vidi sliku 4.10).



Slika 4.10: Kviz

Označimo događaje s:
A_1={auto je iza prvih vrata},
A_2={auto je iza drugih vrata},
A_3={auto je iza trećih vrata},
V_2={voditelj je otvorio druga vrata},
V_3={voditelj je otvorio treća vrata}.

Igrač odabire prva vrata. Neka je voditelj otvorio druga vrata. Ako igrač ostane pri odabiru vrata broj 1, vjerojatnost da je automobil iza njih je:

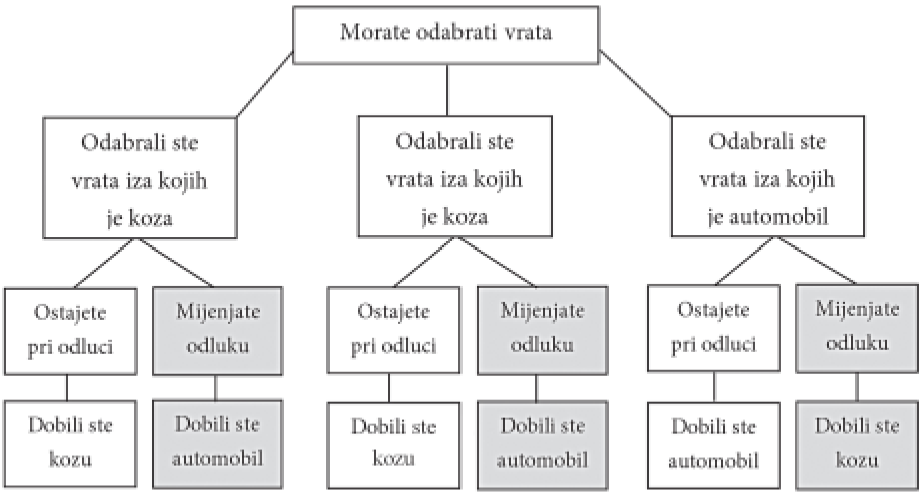
$$P(A_1|V_2) = \frac{P(A_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

No ako igrač promijeni odabir vrata na vrata broj 3, vjerojatnost da je automobil iza njih je:

$$P(A_3|V_2) = \frac{P(A_3 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Uočavamo da je veća vjerojatnost osvajanja automobila ako se promijeni odabir vrata.

Uvjerimo se i na općenitijem prikazu pomoću stabla vjerojatnosti svih mogućih ishoda (slika preuzeta s [10]):



Slika 4.11: Kviz, prikaz svih ishoda

Uočavamo da, ako promijenimo prvi izbor vrata, u 2 od 3 slučaja osvajamo automobil, a ako ostanemo pri prvom izboru, osvajamo automobil samo u jednom od tri slučaja.

Poglavlje 5

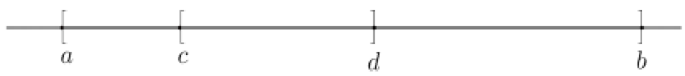
Geometrijska vjerojatnost

5.1 Geometrija u vjerojatnosti

Geometrijska vjerojatnost jedna je vrsta vizualizacije vjerojatnosnih problema koja ima prirodnu geometrijsku interpretaciju, a koja nam pomaže da jednostavno riješimo mnoge zanimljive probleme u vjerojatnosti.

Geometrijsku vjerojatnost definiramo na sljedeći način (vidi [13]).

Započet ćemo s jednodimenzionalnim modelom. Neka je $[a, b]$ ograničeni segment u $\mathbb{R}$. Neka je pokus slučajni odabir točke ω unutar segmenta $[a, b]$. Ako je $[c, d] \subseteq [a, b]$, možemo se pitati kolika je vjerojatnost da slučajno izabrana točka ω iz segmenta $[a, b]$ padne u segment $[c, d]$. (vidi sliku 5.1, slika preuzeta s [11])



Slika 5.1: Mjera u $\mathbb{R}$

Sljedeće pretpostavke će nam pomoći:

a) Slučajno bačena točka može pasti u bilo koju točku segmenta $[a, b]$.

b) Vjerojatnost da točka padne u bilo koji segment $[c, d]$, gdje je $[c, d] \subseteq [a, b]$ proporcionalna je duljini $d - c$ tog segmenta i ne ovisi o njegovom položaju.

Prema tome, ako je A događaj da točka padne u $[c, d]$, tada je:

$$P(A) = k(d - c),$$

gdje je k konstanta koju zovemo koeficijent proporcionalnosti.

Budući da točka može pasti jedino u segment $[a, b]$, događaj $\Omega = \{$točka je pala u segment$[a, b]\}$ siguran je događaj. Zato slijedi:

$$1 = P(\Omega) = k(b - a),$$

a odavde slijedi

$$k = \frac{1}{b - a}.$$

Prema tome, vrijedi

$$P(A) = \frac{d - c}{b - a}.$$

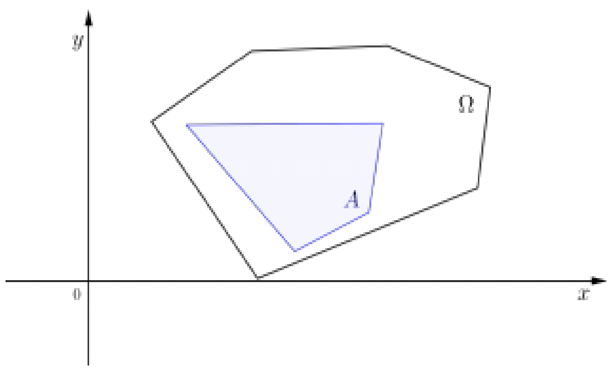
Ako duljinu segmenta interpretiramo kao njegovu mjeru i označimo je s m, tada prethodna relacija prelazi u:

$$P(\omega \in [c, d]) = \frac{m([c, d])}{m([a, b])}. \tag{5.1}$$

Što nam to znači u $\mathbb{R}^2$? U $\mathbb{R}^2$ ulogu mjere ima površina, tako da skupove koje promatramo imaju svoju površinu. Neka je Ω ograničen skup u $\mathbb{R}^2$. To znači da je njegova mjera tj. površina konačna, odnosno $m(\Omega) \leq \infty$. Možemo pretpostaviti:

a) Slučajno bačena točka može pasti u bilo koju točku skupa Ω.

b) Vjerojatnost da točka ω padne u neki podskup A od Ω proporcionalna je površini $m(A)$ tog podskupa i zavisi samo o površini, a ne i o obliku skupa A i njegovu položaju (slika 5.2 preuzeta je s [11]).



Slika 5.2: Mjera u $\mathbb{R}^2$

Prema tome, vrijedi:

$$P(A) = P(\omega \in A) = km(A),$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti. Budući da točka može pasti samo u skup Ω vrijedi:

$$1 = P(\Omega) = P(\omega \in \Omega) = km(\Omega)$$

pa je

$$k = \frac{1}{m(\Omega)}.$$

Konačno dobijemo:

$$P(A) = P(\omega \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad \text{za } A \subseteq \Omega. \tag{5.2}$$

Nadalje, u $\mathbb{R}^3$ mjera je obujam. Ako je pokus slučajno biranje točke ω unutar skupa Ω, tada analogno dobijemo:

$$P(A) = P(\omega \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad A \subseteq \Omega, \tag{5.3}$$

gdje ulogu mjere m sada preuzima obujam.

Funkciju P definiranu sa (5.1), (5.2) odnosno (5.3) nazivamo **geometrijska vjerojatnost**. Dakle, ako je prostor elementarnih događaja Ω neki podskup skupa realnih brojeva ili općenitije podskup skupa $\mathbb{R}^n$, koji nije diskretan, govorimo o geometrijskoj vjerojatnosti.

Mi znamo da općenito nije moguće izračunati mjeru baš svakog podskupa od Ω pa moramo precizirati kakve skupove A jedino gledamo. Tzv. **Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$** je najmanja familija podskupova od $\mathbb{R}^n$ koja sadrži intervale (tj. Kartezijeve produkte jednodimenzionalnih intervala) i zatvorena je na prebrojive skupovne operacije (tj. skupovne razlike, unije i presjeke). Podskupove iz te kolekcije nekad kratko nazivamo **Borelovim**. Na njima je dobro definirana tzv. **Lebesgueova mjera**, kao prebrojivo aditivna skupovna funkcija koja kao gore poopćuje duljinu, površinu, odnosno volumen. Njezina konstrukcija nadilazi mogućnosti srednjoškolskog gradiva (vidjeti [14]) i učenik jedino treba vjerovati da su duljina/površina/volumen dobro definirani za sve podskupove koji mu se pojavljuju u zadatku, s čime obično nema problema, jer se radi o elementarno definiranim likovima ili tijelima.

Definicija 5.1.1. *Neka se slučajni pokus sastoji u slučajnom izboru točke u Borelovom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ za kojeg vrijedi $\lambda(\Omega) > 0$, gdje je λ geometrijska mjera (Lebesgueova mjera) (za n=1 duljina, n=2 površina, n=3 volumen). Neka je događaj $A \subseteq \Omega$ izbor točke iz skupa*

A (pri čemu je A Borelov skup). ***Geometrijska vjerojatnost*** *događaja A (vjerojatnost da je izabrana točka iz skupa A) je broj*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}. \tag{5.4}$$

5.2 Uvođenje geometrijske vjerojatnosti u nastavu matematike

U nastavku ćemo pokazati jedan primjer uvođenja geometrijske vjerojatnosti u nastavnom procesu. Cilj je da učenici vizualno uoče što znači određivati vjerojatnost događaja metodom određivanja površina. Ova aktivnost je primjerena za rad u grupama, gdje učenici sami istražuju te dolaze do zaključaka. Nakon što bi sami računali površine te pokušavali otkriti vjerojatnost pomoću dobivenih podataka, precizno bi se uveo pojam geometrijske vjerojatnosti.

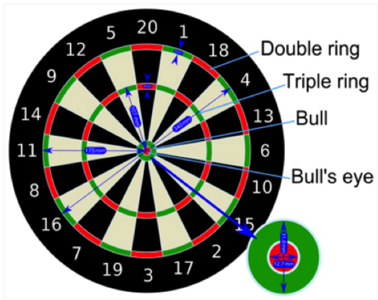
Pikado

Naredni primjer je preuzet iz priručnika [12]
Na primjeru igre *pikado* učenici bi procjenjivali odgovore na postavljena pitanja koja uključuju određivanje vjerojatnosti pogotka nekog polja. Prvo bi zajednički ponovili igru i što je cilj u igri. Zatim bi izmjerili potrebne dimenzije, izračunali površine pa i vjerojatnosti. Pitanja koja se mogu postaviti za razmišljanje ili radove učenika su:

- *Za koje polje je najveća vjerojatnost za pogodak, a za koje najmanja?*
- *Kolika je vjerojatnost pogotka u polje koje nosi najviše bodova? Kolika je vjerojatnost pogotka u polje koje nosi najmanje bodova?*
- *Možete li na osnovu izračunatih vjerojatnosti i rasporeda polja osmisliti taktiku za lošeg igrača pikada?*

Zadatak 12. *Upoznajmo bolje igru pikado. Meta ima promjer 340 mm i podijeljena je na 20 isječaka. Centar (Bull's eye) ima dijametar 12.7 mm i nosi 50 bodova, a prsten oko njega (Bull) nosi 25 bodova i ima promjer 31.8 mm. Vanjski prsten (Double) širine je 8 mm i on udvostručava broj bodova tog isječka. Središnji prsten (Triple) ima također širinu 8 mm, njegov vanjski rub je 107 mm udaljen od centra, a pogodimo li ovaj dio bodovi se utrostruče. Ako igramo pikado nasumično i uvijek pogađamo metu, kolika je vjerojatnost da pogodimo:*
1. Bulls eye,
2. broj 20,

3. Triple,
4. Triple 20,
5. Bull,
6. Double 8?



Slika 5.3: Pikado ploča (slika preuzeta s [12])

Rješenje.

Izračunajmo površine nekih područja (vidi tablicu 5.4 preuzetu s [12]):

Područje	Radijus (u mm)	Površina (u mm^2)
cijela meta	170	$P_m = r^2\pi = 28900\pi$
Bull's eye	6.35	$P_{be} = r^2\pi = 40.3225\pi$
Bull	$r_1 = 6.35, r_2 = 15.9$	$P_b = (r_2^2 - r_1^2)\pi = 212.4875\pi$
neki broj	-	$P_i = \frac{P_m - P_b}{20} = 1432.36\pi$
Double	$r_1 = 162, r_2 = 170$	$P_d = (r_2^2 - r_1^2)\pi = 2656\pi$
Triple	$r_1 = 99, r_2 = 107$	$P_t = (r_2^2 - r_1^2)\pi = 1648\pi$

Slika 5.4: Površine polja pikado ploče

Sada imamo:

1. Vjerojatnost da slučajno pogodimo centar (Bull's eye) je omjer površine centra i površine cijele mete.

$$P(\mathit{Bull's\ eye}) = \frac{m(\mathit{Bull's\ eye})}{m(\mathit{meta})} = \frac{P_{be}}{P_m} = \frac{40.3225\pi}{28900\pi} \approx 0.001395 \approx 0.1\%.$$

2. Kako su površine koje pripadaju nekom broju jednake, pogadjamo bilo koji broj s istom vjerojatnošću.

$$P(20) = \frac{P_i}{P_m} = \frac{1432.36\pi}{28900\pi} \approx 0.04956 \approx 5\%.$$

3. Triple koji pripada jednom broju ima površinu

$$\frac{P_t}{20} = 82.4\pi mm^2.$$

Zato je

$$P(Triple) = \frac{P_t}{P_m} = \frac{1468\pi}{28900\pi} \approx 0.05702 \approx 5.7\%.$$

4. Triple 20 nosi najviše bodova, no ako niste dobri u pikadu promašaj *Triple 20* se kažnjava sa 1 ili 5 bodova koji su oko polja 20.

$$P(Triple20) = \frac{82.4\pi}{28900\pi} \approx 0.00285 \approx 0.3\%.$$

5. Vjerojatnost da pogodimo *Bull* iznosi:

$$P(Bull) = \frac{P_b}{P_m} = \frac{212.4875\pi}{28900\pi} \approx 0.00735 \approx 0.7\%.$$

Možemo primijetiti da je vjerojatnost da slučajno pogodimo *Bull* veća od vjerojatnosti da pogodimo *Triple* 20.

6. Double koji pripada jednom broju ima površinu $\frac{P_d}{20} = 132.8\pi mm^2$.

Zato je

$$P(Double8) = \frac{132.8\pi}{28900\pi} \approx 0.0046 \approx 0.46\%.$$

5.3 Primjeri zadataka s geometrijskom interpretacijom

Nakon što smo definirali geometrijsku vjerojatnost, slijedi nekoliko primjera vjerojatnosnih problema koji bi se mogli uvrstiti u nastavu matematike, a rješavaju se računanjem površina.

Zadatak 13. *(preuzet iz knjige [13])*
Dva vlaka duljine 200 m kreću se brzinom 20 m/s prugama koje se međusobno križaju. Trenutak u kojem će oni ući u križanje slučajan je, između 22 sata i 22 sata i 30 minuta. Kolika je vjerojatnost da će se vlakovi sudariti?

Rješenje.
Označimo s:
x - trenutak ulaska prvog vlaka u križanje,
y - trenutak ulaska drugog vlaka u križanje.
Ako prvi vlak uđe u križanje točno u 22 sata stavimo $x = 0$, a ako uđe u križanje u 22 sata i 30 minuta stavimo $x = 1800$ (30 min=1800 s).
Prema tome x može primiti sve vrijednosti u segmentu [0, 1800], a isto vrijedi i za y.

Ako shvatimo istraživanje vjerojatnosti sudara kao pokus, za ishod slučajnog pokusa smatramo uređen par (x, y) (trenutak ulaska prvog odnosno drugog vlaka u križanje). Prostor elementarnih dogadjaja ovog slučajnog pokusa je skup $\Omega \subset \mathbb{R}$ definiran sa:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1800, 0 \leq y \leq 1800\}.$$

Iz duljine vlakova i njihove brzine možemo zaključiti da svaki od vlakova prolazi kroz križanje u trajanju od 10s. Odavde zaključujemo da će se vlakovi sudariti ako i samo ako ulaze u križanje za razliku vremena ulaska od 10 s tj.

$$|x - y| \leq 10.$$

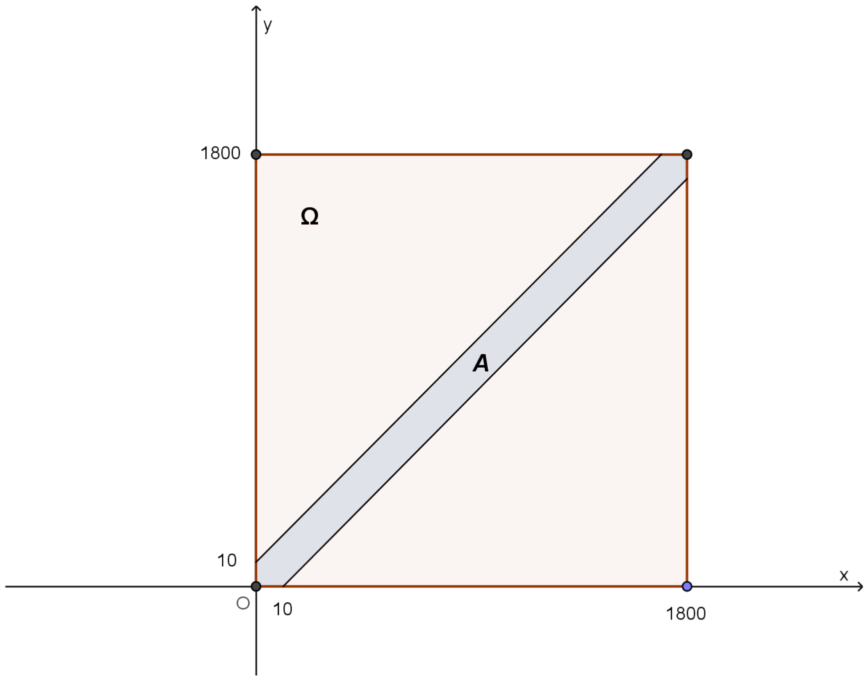
Neka je događaj A označava događaj da su se vlakovi sudarili pa možemo staviti:

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 10\} = \{(x, y) \in \Omega : x - 10 \leq y \leq x + 10\}.$$

Sada nacrtajmo u koordinatnom sustavu skup elementarnih događaja Ω i skup A (vidi sliku 5.5).

Događaj A dogodit će se ako i samo ako točka koja se slučajno izabire unutar skupa Ω padne u skup A. Prema definiciji geometrijske vjerojatnosti u ravnini zaključujemo da je vjerojatnost događaja da će se vlakovi sudariti jednaka:

$$P(A) = P(\omega \in A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1800^2 - 1790^2}{1800^2} \approx 0.011.$$



Slika 5.5: Prolasci vlakova

Zadatak 14. *(preuzet s [3]) Dva prijatelja dogovore se da će se naći na Trgu bana Jelačića kraj sata u 8 sati navečer. Tko prvi dođe čekat će najviše 20 minuta. Obojica će sigurno doći na trg između 8 i 9 sati. Izračunajte vjerojatnost da se dva prijatelja sastanu.*

Rješenje.
Susret je unutar vremenskog razmaka od 60 minuta pa je skup elementarnih događaja:
$\Omega = [0, 60] \times [0, 60] = \{$vrijeme dolaska prvog i drugog prijatelja između 8 i 9h$\}$.

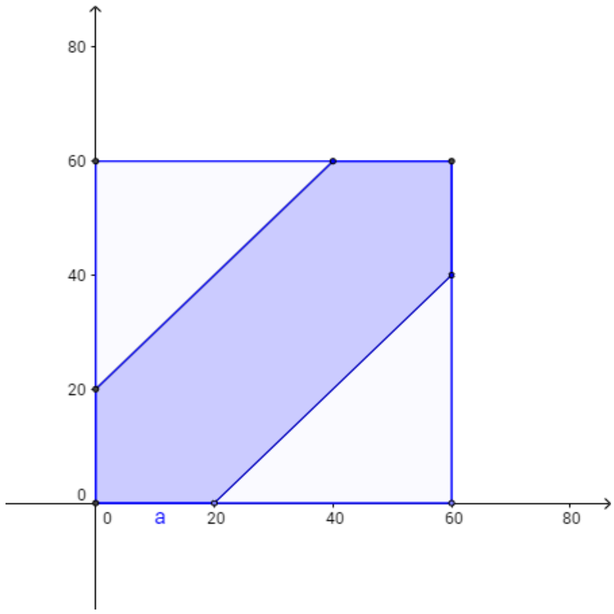
Npr. $\Omega = (15, 22)$ znači da se prvi pojavio u 20:15, a drugi u 20:22.

Definirajmo A=$\{$dva prijatelja su se susrela$\}$.
Događaj A čine ishodi za koje smatramo da su uređeni parovi (x, y) za koje vrijedi:

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 20\}.$$

Treba odrediti vjerojatnost događaja A. Nacrtamo li to u koordinatnom sustavu, područje u oznaci A predstavlja događaj da su se prijatelji sastali (vidi 5.6). Stoga koristeći geometrijsku vjerojatnost dobivamo:

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{60^2 - \frac{(60-20)^2}{2} - \frac{(60-20)^2}{2}}{60^2} = \frac{5}{9}.$$



Slika 5.6: Susret prijatelja

Vjerojatnost da će se dva prijatelja susresti je približno 0.55, odnosno 55%.

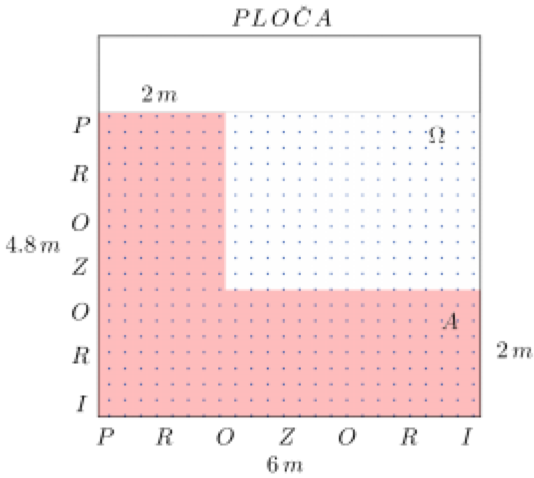
Zadatak 15. *(preuzet iz [11]) Marija se nadala da će na testu uspjeti sjesti barem na 2 metra udaljenosti od prozora jer tada, zbog jače svjetlosti i svježeg zraka, ima bolju koncentraciju. Predavaonica u kojoj se piše ispit je kvadratnog oblika širine 6 m, dok se prozori protežu na 80% duljine s lijeve strane prostorije i cijelom širinom u zadnjem dijelu, a u tom dijelu se nalaze i stolice. Kolika je vjerojatnost da će Ivana sjesti gdje želi?*

Rješenje.
Prvo skicirajmo razred (slika 5.7 preuzeta s [11]). S lijeve strane prostorije prozori zauzimaju $80\% \cdot 6m = 4.8m$.
Površina područja u kojem se nalaze stolice je:

$$4.8m \cdot 6m = 28.8m^2.$$

Ta površina označava skup elementarnih događaja Ω.
Ako s A označimo događaj {Ivana je sjela gdje želi}, uočimo da je površina tog događaja jednaka površini osjenčanog dijela tj.

$$4m \cdot 2m + 4.8m \cdot 2m = 17.6m^2$$



Slika 5.7: Učionica

pa je vjerojatnost traženog događaja:

$$P(A) = \frac{17.6}{28.8} \approx 0.611 \approx 61\%.$$

Bibliografija

[1] *Materijali s vježbi, kolegij Vjerojatnost i statistika*, (2014).

[2] *False Positive Test Results*, https://www.illustrativemathematics.org/content-standards/tasks/1601, (pristupljeno: 27. srpnja 2017.).

[3] *Geometrijske vjerojatnosti; kolegij Uvod u vjerojatnost*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/uuv/files/ch5.pdf, (pristupljeno: 7. rujna 2016.).

[4] *Nacionalni okvirni kurikulum*, http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf, (pristupljeno: 25. srpnja 2017.).

[5] *Nontransitive dice*, https://en.wikipedia.org/wiki/Nontransitive_dice, (pristupljeno: 23. kolovoza 2017.).

[6] J. Gage, *Who Is Cheating?*, (2013), http://nrich.maths.org/9840/note, (pristupljeno: 10. travnja 2017.).

[7] ______, *Probability calculations from tree diagrams*, http://nrich.maths.org/9648, (pristupljeno: 5. travnja 2017.).

[8] ______, *Tree Diagrams, 2-way Tables and Venn Diagrams*, https://nrich.maths.org/9861, (pristupljeno: 5. travnja 2017.).

[9] XV. gimnazija, *Matematika između realnog i virtualnog, kurikulum fakultativne nastave*, XV. gimnazija, Zagreb, https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/Kurikulum-fakultativne-nastave-matematike-1.pdf, (pristupljeno: 17. kolovoza 2017.).

[10] M. Čičak, *Monty Hall problem*, Matka 23 (2014), br. 90.

[11] A. Kozić i D. Jankov Maširević, *Geometrijska vjerojatnost u svakodnevnom životu*, Osječki matematički list **13** (2015), br. 15, 19–31.

[12] I. Martinić, M. Radočaj i M. Ćulav Markičević, *Matematika, priručnik za nastavnike*, http://e-learning.gornjogradska.eu/wp-content/uploads/2016/10/Matematika_prirucnik_za_nastavnike-1.pdf, (pristupljeno: 15. listopada 2016.).

[13] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika, 1. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[14] ______, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[15] C. Shore, *Titanic two way frequency tables*, https://mathprojects.com/2017/05/16/titanic-two-way-frequency-tables/, (pristupljeno: 5. kolovoza 2017.).

[16] E. Striko Kovač, B. Ivanković i T. Fratrović, *Vjerojatnost i statistika*, http://e-student.fpz.hr/Predmeti/V/Vjerojatnost_i_statistika/Materijali/2_Vjerojatnost.pdf, (pristupljeno: 10. rujna 2016.).

[17] P. Vollmar, M. Haese, R. Haese, S. Haese i M. Humphries, *Mathematics for the international student 9*, Haese and Harris publications, 2003.

Sažetak

U radu je izloženo nekoliko tehnika i trikova vizualizacije koji mogu pomoći u određenim tipovima zadataka iz elementarne teorije vjerojatnosti. Posebni naglasak je na sistematičnom rješavanju problema, tj. kako učenik može vizualno postaviti zadatak i potom relativno lako očitati rezultat.

Prva opisana tehnika vizualizacije su Vennovi dijagrami kod kojih se događaje tretira kao skupove. Uz pomoć njih vizualiziramo algebru događaja te očitavanjem podataka iz dijagrama računamo vjerojatnosti događaja.

Nadalje, dvosmjerne tablice ili eng. *two way tables* mogu pomoći kod jednostavnih problema s nekoliko događaja, ali i vizualizacije nezavisnosti događaja. Opisani su primjeri struktuiranja tablice te očitavanja vjerojatnosti iz njih.

Najkorisniji trik vizualizacije vjerojatnosti su *stabla vjerojatnosti*, koja su korisna u složenijim zadacima s uvjetnim vjerojatnostima, ali i u otkrivanju te razumijevanju Bayesove formule. Zbog toga su opisani primjeri aktivnosti kako učenici mogu sami otkriti strukturu stablastog dijagrama te iz njega očitavati složenije vjerojatnosti.

Na kraju, ideja geometrijske vjerojatnosti tj. svođenje vjerojatnosnih problema na računanje površina likova je standardni trik pri rješavanju zadataka u kojima vjerojatnosni prostor mora biti neprebrojiv. Osim raznih primjera rješavanja zadataka pomoću geometrijske vjerojatnosti, naveden je i primjer aktivnosti kojom se može uvesti geometrijska vjerojatnost u nastavnom procesu.

Summary

This work presents some techniques and tricks of visualization which can help us with certain types of problems from elementary probability theory. The emphasis is on systematical solutions of the problems and the way how pupils can visually set the task and then relatively easy read off the results.

The first technique of visualization is the Venn diagram in which events are treated as sets. By using them, we visualize the algebra of sets and we are evaluating the probability of an event by reading off data from the diagram.

Furthermore, the two-way tables can help us with simple problems with several events, but also with visualization of independence of the events. There are some examples of construction of tables from which we can read off data in order to calculate the probability of some event.

The most useful trick of visualization of probabilities is a tree diagram which can help us with more complex problems concerning conditional probabilities, but also for the discovery and understanding of the Bayes theorem. Therefore, we provide some examples of activities how pupils can reveal the structure of the tree diagram by themselves and then read more complex probability from it.

In the end, the idea of a geometric probability is actually reducing probability problems to calculating areas of different shapes. That is a standard trick in solving the problems in which the space of elementary events must be uncountable. Besides various examples of solving tasks with geometric probability, we also specified an example of the activity that can be used as a motivation for the discovering of geometric probability during the teaching process.

Životopis

Rođena sam 7. lipnja, 1992. u Dubrovniku. Osnovnu školu sam završila u Dubrovniku, kao i srednju školu Gimnaziju Dubrovnik. Sa školovanjem sam nastavila u Zagrebu gdje sam 2011. upisala Prirodoslovno-matematički fakultet, matematiku, nastavnički smjer. 2014. godine završila sam preddiplomski studij te upisala diplomski studij matematike, također nastavnički smjer.

Tijekom školovanja sudjelovala sam u raznim projektima, poput volontiranja na Znanstvenom pikniku za Tiflološki muzej u kojem sam posjetiteljima međuostalim pokazivala i različite matematičke igre. Nadalje, posljednje tri godine bila sam voditelj matematičkih radionica u sklopu projekta RADDAR u organizaciji FER-a i XV. gimnazije (MIOC). U sklopu toga održavala sam naprednu nastave matematike za nadarene učenike osnovnih škola u prostorijama FER-a te u XV.gimnaziji (MIOC) te vodila učenika u posjet laboratorijima na FER-u. Sudjelovala sam i u radu u Udruzi studenata Dubrovnika Libertas u Zagrebu, gdje sam vodila, organizirala i pisala brojne projekte za mlade te vodila malo knjigovodstvo udruge. Osim hrvatskog, govorim engleski i njemački jezik, za koje sam završila i tečaj. Osim spomenutoga, pjevam u Akademskom zboru Ivan Goran Kovačić te u ženskoj klapi Figurin u Zagrebu.