Trigonometrijske funkcijske jednadžbe

Filipašić, Melissa

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Melissa Filipašić

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJSKE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, lipanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

”Ti to hoćeš, ti to možeš, ti to budeš!”

Sadržaj

Uvod

Trigonometrijski identiteti motiviraju proučavanje trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi kojima su trigonometrijske funkcije samo jedno od mogućih rješenja. Tako na primjer trigonometrijski identitet

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$$

vodi do funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

kojoj funkcija kosinus nije jedino moguće rješenje. Ova funkcijska jednadžba poznata je kao *d'Alembertova funkcijska jednadžba*. Kako bi odredio sumu dva ili više vektora u euklidskoj i neeuklidskoj geometriji, Jean d'Alembert (1717.–1783.) sveo je problem na određivanje svih rješenja navedene funkcijske jednadžbe. Cauchy je odredio njena neprekidna rješenja 1821. godine, a Kannappan je 1968. godine odredio njeno opće rješenje. Rješavanje d'Alembertove funkcijske jednadžbe opisat ćemo u prvom poglavlju ovoga rada.

U drugom poglavlju proučavamo trigonometrijske funkcijske jednadžbe s dvjema nepoznanicama. Primjer je *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

dobivena iz trigonometrijskog identiteta

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x,$$

no funkcije sinus i kosinus nisu njena jedina rješenja. Uočit ćemo različite metode rješavanja te odrediti opća i neprekidna rješenja nekoliko različitih trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi.

Poglavlje 1

D'Alembertova funkcijska jednadžba

1.1 Neprekidna rješenja d'Alembertove jednadžbe

U sljedećem teoremu riješit ćemo d'Alembertovu jednadžbu uz pretpostavku neprekidnosti rješenja.

Teorem 1.1.1. *Neprekidna funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ *ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, & (1.1)\\ f(x) &= 1 \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, & (1.2)\\ f(x) &= \mathrm{ch}(\alpha x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, & (1.3)\\ f(x) &= \cos(\beta x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}, & (1.4) \end{aligned}$$

gdje su α, β *proizvoljne realne konstante.*

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (DE) dobivamo

$$2f(0) = 2[f(0)]^2,$$

pa je

$$f(0) = 0 \quad \text{ili} \quad f(0) = 1.$$

Ako je $f(0) = 0$, tada uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. To nam daje rješenje (1.1) . Zbog toga dalje pretpostavimo da je $f(0) \neq 0$.

Nadalje, dokazat ćemo da je bilo koje rješenje od (DE) parna funkcija. Da bismo to dokazali, uvrstimo $x = 0$ u (DE). Tada dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Kako je $f(0) \neq 0$, to je $f(0) = 1$, pa prethodna jednadžba prelazi u

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

odakle slijedi

$$f(-y) = f(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je parna funkcija. Kako je f neprekidna na $\mathbb{R}$, f je također integrabilna na bilo kojem segmentu. Zbog toga za svaki $t > 0$ imamo

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy + \int_{-t}^{t} f(x-y)dy = 2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.5}$$

Vrijedi

$$\int_{-t}^{t} f(x+y)dy = \int_{x-t}^{x+t} f(z)dz = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Slično,

$$\int_{-t}^{t} f(x-y)dy = \int_{x+t}^{x-t} f(w)(-dw) = \int_{x-t}^{x+t} f(w)dw = \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy.$$

Sada (1.5) postaje

$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy + \int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = 2f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy$$

odnosno

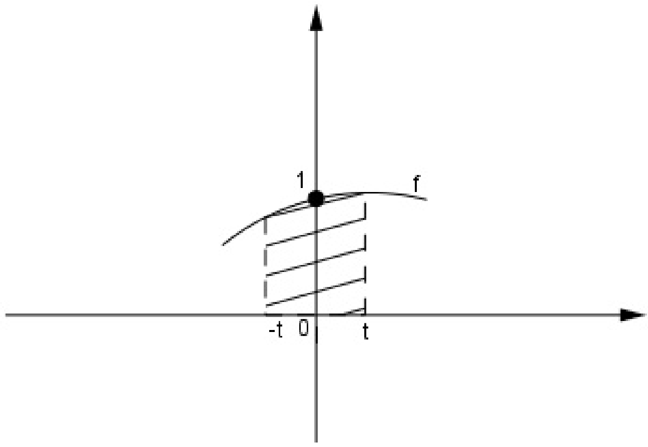
$$\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.6}$$

Nadalje, kako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna, postoji $t > 0$ takav da vrijedi (vidite sliku 1.1)

$$\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0.$$

Uočimo da je lijeva strana u (1.6) derivabilna po varijabli x prema osnovnom teoremu diferencijalnog računa. Uočimo također da je i desna strana u (1.6) derivabilna po varijabli x. Tada deriviranjem jednakosti (1.6) po x dobivamo

$$\frac{d}{dx}\int_{x-t}^{x+t} f(y)dy = \frac{d}{dx}\left[f(x)\int_{-t}^{t} f(y)dy\right]$$



Slika 1.1: Postoji $t > 0$ sa svojstvom $\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0$

odakle slijedi

$$f(x+t) - f(x-t) = f'(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.7}$$

Ovo pokazuje da je f dvostruko derivabilna te je

$$f'(x+t) - f'(x-t) = f''(x) \int_{-t}^{t} f(y)dy.$$

Iz toga slijedi da je f trostruko derivabilna. Nastavljajući korak po korak, zaključujemo da su neprekidna rješenja od (DE) beskonačno derivabilna.

Uvrštavanjem $x = 0$ u (1.7) dobivamo

$$f(t) - f(-t) = f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy. \tag{1.8}$$

Kako je f parna, vrijedi $f(t) = f(-t)$, pa (1.8) postaje

$$f'(0) \int_{-t}^{t} f(y)dy = 0. \tag{1.9}$$

Kako je $\int_{-t}^{t} f(y)dy > 0$, iz (1.9) slijedi

$$f'(0) = 0.$$

Kako je $f \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, deriviramo (DE) po y dva puta kako bismo dobili

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y),$$

$$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $y=0$ dobivamo

$$2f''(x)=2f(x)f''(0).$$

Neka je $k=f''(0)$. Tada je

$$f''(x)=kf(x)$$

što povlači sljedeći problem početne vrijednosti (PPV):

$$\boxed{\tfrac{d^2y}{dx^2}=ky,\ \ y(0)=1\ \text{ i }\ y'(0)=0. \qquad \text{(PPV)}}$$

Kako bismo riješili ovaj problem početne vrijednosti, moramo obuhvatiti 3 slučaja: $k=0$, $k>0$ i $k<0$.

Prvi slučaj. Neka je $k=0$. Tada (PPV) postaje

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Odatle slijedi

$$y(x)=c_1x+c_2$$

za neke $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Kako je $y(0)=1$, to je $c_2=1$. Također, iz $y'(0)=0$ dobivamo $c_1=0$. Dakle, $y(x)=1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa u ovom slučaju dobivamo (1.2).

Drugi slučaj. Neka je $k>0$. Uvrštavanjem $y=e^{mx}$ u

$$\frac{d^2y}{dx^2}=ky \tag{1.10}$$

dobivamo $m^2=k$, odnosno $m=\pm\sqrt{k}$. Zbog toga je

$$y(x)=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x},$$

gdje je $\alpha=\sqrt{k}\neq 0$. Sada vrijedi

$$1=y(0)=c_1e^{\alpha\cdot 0}+c_2e^{-\alpha\cdot 0}=c_1+c_2.$$

Slijedi

$$c_2=1-c_1,$$

pa je

$$y(x)=c_1e^{\alpha x}+(1-c_1)e^{-\alpha x}.$$

Sada je

$$0=y'(0)=c_1\alpha e^{\alpha x}+(1-c_1)(-\alpha)e^{-\alpha x}.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo

$$0 = c_1\alpha + (1 - c_1)(-\alpha) = c_1\alpha - \alpha + c_1\alpha = 2c_1\alpha - \alpha.$$

Iz toga slijedi

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.3).

Treći slučaj. Neka je $k < 0$. Uvrštavanjem $y = e^{mx}$ u (1.10), dobivamo $m^2 = k < 0$. Stoga je $m = \pm i\beta$, gdje je $\beta = \sqrt{-k} \neq 0$. Zbog toga je rješenje od (1.10) dano sa

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}.$$

Kako je

$$1 = y(0) = c_1 + c_2,$$

imamo

$$c_2 = 1 - c_1.$$

Dakle,

$$y(x) = c_1 e^{i\beta x} + (1 - c_1)e^{-i\beta x}.$$

Nadalje, kako je

$$0 = y'(0) = i\beta c_1 - i\beta(1 - c_1) = 2i\beta c_1 - i\beta,$$

to je

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Zbog toga imamo

$$y(x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = \cos(\beta x).$$

Dakle, u ovom slučaju dobivamo (1.4).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.1) ili (1.2) u (DE), lako se uvjerimo da su ona rješenja od (DE). Uvrštavanjem (1.3) u (DE), koristeći parnost funkcije kosinus hiperbolni i neparnost funkcije sinus hiperbolni, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \operatorname{ch}(\alpha(x+y)) + \operatorname{ch}(\alpha(x-y)) \\ &= \operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x)\operatorname{sh}(\alpha y) + \operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(-\alpha y) + \operatorname{sh}(\alpha x)\operatorname{sh}(-\alpha y) \\ &= 2\operatorname{ch}(\alpha x)\operatorname{ch}(\alpha y) \\ &= 2f(x)f(y), \qquad (1.11) \end{aligned}$$

odnosno (1.3) je rješenje jednadžbe (DE).

Uvrštavanjem (1.4) u (DE), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y)+f(x-y) &= \cos(\beta(x+y))+\cos(\beta(x-y)) \\ &= \cos(\beta x)\cos(\beta y)-\sin(\beta x)\sin(\beta y)+\cos(\beta x)\cos(\beta y)+\sin(\beta x)\sin(\beta y) \\ &= 2\cos(\beta x)\cos(\beta y) \\ &= 2f(x)f(y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je (1.4) rješenje jednadžbe (DE). Ovime smo završili dokaz teorema. □

Napomena. Uočimo da neprekidnost funkcije f u funkcijskoj jednadžbi povlači beskonačnu derivabilnost od f. Drugim riječima, deriviranjem funkcijske jednadžbe dobivamo diferencijalnu jednadžbu koju zatim rješavamo i na taj način pronalazimo rješenje polazne funkcijske jednadžbe. To je standardna metoda rješavanja funkcijskih jednadžbi kada je pretpostavljena neprekidnost njenih rješenja.

Propozicija 1.1.2. *Neka je $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) *Neprekidna je u svakoj točki $x\in\mathbb{R}$.*

(ii) *Zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x,y\in\mathbb{R}$.

(iii) *Postoji najmanji nenegativan korijen λ takav da je $f(\lambda)=0$.*

(iv) $f(0)>0$.

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f(x)>0$ *za svaki* $x\in\langle 0,\lambda\rangle$.

(b) $f(0)=1$.

(c) $f(-x)=f(x)$ *za svaki* $x\in\mathbb{R}$.

(d) $f(x+2\lambda)=-f(x)$ *za svaki* $x\in\mathbb{R}$..

(e) $f(2x)=2f(x)^2-1$ *za svaki* $x\in\mathbb{R}$.

(f) $f\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}$ *za svaki* $x\in\mathbb{R}$.

(g) $|f(x)|\leq 1$ *za svaki* $x\in\mathbb{R}$.

(h) Funkcija f je periodična s najmanjim pozitivnim periodom 4λ.

Dokaz. (a) Iz svojstva (iii) i (iv) možemo zaključiti da je $\lambda > 0$. Kako je λ najmanji pozitivan korijen od f, za bilo koji $x \in \langle 0, \lambda \rangle$ vrijedi da je $f(x) \neq 0$. Neprekidnost funkcije f i činjenica da je $f(0) > 0$ povlače da je $f(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 0, \lambda \rangle$.

(b) Uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $2f(x) = 2f(x)f(0)$, odnosno

$$f(x)(f(0) - 1) = 0.$$

Ova jednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa i za $x \in \langle 0, \lambda \rangle$. Kako prethodno svojstvo povlači da je $f(x) \neq 0$, zaključujemo da mora vrijediti $f(0) = 1$.

(c) Uvrštavanjem $x = 0$ u (DE) dobivamo

$$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y).$$

Primjenom prethodnog svojstva, to jest, $f(0) = 1$, dobivamo $f(-y) = f(y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$.

(d) Zamjenom x sa $x + \lambda$ i y sa λ u (DE) dobivamo

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 2f(x + \lambda)f(\lambda).$$

Prema svojstvu (iii) slijedi

$$f(x + 2\lambda) + f(x) = 0.$$

(e) Uvrstimo li $y = x$ u (DE), dobivamo $f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2$ pa prema tvrdnji (b) slijedi $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$.

(f) Rješavanjem prethodne kvadratne jednadžbe po $f(x)$ dobit ćemo

$$f(x) = \pm\sqrt{\frac{1 + f(2x)}{2}},$$

što je ekvivalentno traženom svojstvu zamijenimo li x sa $\frac{x}{2}$.

(g) Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(a)| > 1$. Uvrštavanjem $x = \lambda + a$ i $y = \lambda - a$ u (DE) slijedi

$$f(2\lambda) + f(2a) = 2f(\lambda + a)f(\lambda - a). \tag{1.12}$$

Primijenimo li svojstvo (e) na lijevu stranu prethodne jednakosti, ona će postati

$$[2[f(\lambda)]^2 - 1] + [2[f(a)]^2 - 1].$$

Kako je $f(\lambda) = 0$, lijeva strana od (1.12) postaje

$$2[[f(a)]^2 - 1]$$

što je pozitivan broj. Kako je $f(\lambda - a) = f(2\lambda - (\lambda + a)) = f(-(\lambda + a) + 2\lambda)$, što je prema svojstvu (d) i (c) jednako $-f(-(\lambda + a)) = -f(\lambda + a)$, desna strana jednakosti (1.12) je jednaka

$$-2[f(\lambda + a)]^2.$$

Kako taj broj nije pozitivan, zaključujemo da jednakost (1.12) nije moguća pa mora vrijediti $|f(x)| \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(h) Primijenimo li svojstvo (d) dva puta, vidjet ćemo da je f periodična funkcija:

$$f(4\lambda + x) = f\Big(2\lambda + (2\lambda + x)\Big) = -f(2\lambda + x) = f(x).$$

Preostaje dokazati da je 4λ najmanji period funkcije f. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji period T takav da je $0 < T < 4\lambda$. Tada je

$$f(T) = f(0 + T) = f(0) = 1.$$

Uvrstimo sada $x = y = \frac{T}{2}$ u (DE):

$$f(T) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{2}\right) = 1 \text{ ili } f\left(\frac{T}{2}\right) = -1.$$

Ako je $f\left(\frac{T}{2}\right) = -1$, uvrštavanjem $x = y = \frac{T}{4}$ u (DE) dobit ćemo

$$f\left(\frac{T}{2}\right) + f(0) = 2\left[f\left(\frac{T}{4}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Drugim riječima, $\frac{T}{4}$ je pozitivan korijen od $f(x)$ što je kontradikcija sa svojstvom (iii) jer je $0 < \frac{T}{4} < \lambda$.

Ako je $f\left(\frac{T}{2}\right) = 1$, uvrštavanjem $x = \lambda + \frac{T}{4}$ i $y = \lambda - \frac{T}{4}$ u (DE) dobit ćemo

$$f(2\lambda) + f\left(\frac{T}{2}\right) = 2f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right).$$

Prema svojstvima (d) i (b) vrijedi $f(2\lambda) = f(0 + 2\lambda) = -f(0) = -1$, pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right)f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right) = 0. \tag{1.13}$$

Primjenom svojstava (d) i (c) dobivamo

$$f\left(\lambda + \frac{T}{4}\right) = f\left(2\lambda - \left(\lambda - \frac{T}{4}\right)\right) = -f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right)$$

pa je jednakost (1.13) ekvivalentna

$$\left[f\left(\lambda - \frac{T}{4}\right)\right]^2 = 0.$$

No, kako je $0 < \lambda - \frac{T}{4} < \lambda$ što je kontradikcija s (iii), zaključujemo da je 4λ najmanji period funkcije f. □

Uzevši u obzir teorem 1.1.1, tvrdnjama (a)-(h) su dana svojstva funkcije kosinus. Slijedi još jedna karakterizacija funkcije kosinus pomoću funkcijske jednadžbe.

Teorem 1.1.3. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, različita od nul-funkcije, zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x - y + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(x)f(y) \tag{1.14}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, ako i samo ako je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right) \tag{1.15}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Dokaz. Zamijenimo li y sa $-y$, iz (1.14) slijedi:

$$f(x + y + \alpha) - f(x - y + \alpha) = 2f(x)f(-y). \tag{1.16}$$

Zbrajanjem (1.14) i (1.16) dobivamo

$$f(x)f(y) = -f(x)f(-y),$$

odnosno

$$f(-y) = -f(y)$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je neparna funkcija. Zamjenom x i y u (1.14) slijedi:

$$f(y - x + \alpha) - f(x + y + \alpha) = 2f(y)f(x). \tag{1.17}$$

Oduzimanjem (1.14) od (1.17) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(x - y + \alpha) &= f(y - x + \alpha) \\ &= f(-(x - y - \alpha)) \\ &= -f(x - y - \alpha). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Za $y = 0$, iz (1.18) slijedi

$$f(x+\alpha) = -f(x-\alpha) \tag{1.19}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dodavanjem α u argument funkcije, iz (1.19) slijedi:

$$\begin{aligned} f(x+2\alpha) &= -f(x), \\ f(x+3\alpha) &= -f(x+\alpha), \\ f(x+4\alpha) &= -f(x+2\alpha) = f(x). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Zaključujemo,

$$f(x+4\alpha) = f(x) \tag{1.21}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno f je periodična funkcija s periodom 4α. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > 0$. Zamjenom x sa $x + \alpha$ i y sa $y + \alpha$ u (1.14) slijedi:

$$f(x-y+\alpha) - f(x+y+3\alpha) = 2f(x+\alpha)f(y+\alpha). \tag{1.22}$$

Uvrštavanjem (1.20) u (1.22) dobivamo

$$f(x-y+\alpha) + f(x+y+\alpha) = 2f(x+\alpha)f(y+\alpha). \tag{1.23}$$

Neka je

$$g(x) = f(x+\alpha).$$

Tada (1.23) postaje

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y).$$

Kako je f neprekidna, to je i g neprekidna funkcija, pa prema teoremu 1.1.1 vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji: $g(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ch}(ax)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = \cos(bx)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje su a, b proizvoljne konstante.

Ako je g nul-funkcija, tada je i f nul-funkcija, suprotno pretpostavci.

Ako je $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tada je $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Međutim, uvrštavanjem $f(x) = 1$ u (1.14), dobivamo $0 = 2$ što je kontradikcija pa zaključujemo da ni ono nije rješenje.

Neka je $g(x) = \operatorname{ch}(ax)$. Tada je

$$f(x) = g(x-\alpha) = \operatorname{ch}(a(x-\alpha)),$$

odnosno

$$f(x+4\alpha) = \operatorname{ch}(a(x+3\alpha)).$$

Prema (1.21) tada slijedi

$$\operatorname{ch}(a(x+3\alpha)) = \operatorname{ch}(a(x-\alpha)).$$

Posebno, za $x = \alpha$ dobivamo $\mathrm{ch}(4a\alpha) = 1$, pa je $4a\alpha = 0$, odakle slijedi $a = 0$. Dakle, $g(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što ne može biti.

Neka je $g(x) = \cos(bx)$. Kako je f periodična funkcija s periodom 4α, isto vrijedi i za funkciju g:

$$g(x + 4\alpha) = f(x + 5\alpha) = f(x + \alpha) = g(x),$$

odakle slijedi

$$\cos(bx + 4b\alpha) = \cos(bx)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi

$$4b\alpha = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

pa je

$$b = \frac{k\pi}{2\alpha},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Kako je $f(x) = g(x - \alpha) = \cos(b(x - \alpha))$, slijedi da je

$$f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x - \alpha)\right).$$

Primjenom adicijskih formula dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2} \\ &= \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2} \end{aligned} \tag{1.24}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Sada s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x-y+\alpha) - f(x+y+\alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x+y)\right) \\ &= \left(\cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi y}{2\alpha} + \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &\quad -\left(\cos\frac{k\pi x}{2\alpha}\cos\frac{k\pi y}{2\alpha} - \sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\right) \\ &= 2\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}, \end{aligned}$$

a s druge, primjenom (1.24), imamo

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\left(\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\sin\frac{k\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{k\pi x}{2\alpha}\sin\frac{k\pi y}{2\alpha}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema (1.14), izjednačavanjem desnih strana zaključujemo da je $\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2 = 1$, odakle slijedi da je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Dakle, $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$ neparan.

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.15) u (1.14), slijedi da je lijeva strana jednaka

$$\begin{aligned} f(x-y+\alpha) - f(x+y+\alpha) &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-y)\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x+y)\right) \\ &= \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) \\ &\quad - \cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right). \end{aligned}$$

S desne strane imamo

$$\begin{aligned} 2f(x)f(y) &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(x-\alpha)\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}(y-\alpha)\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right] \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right)\left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]^2 \\ &= 2\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2\alpha}y\right). \end{aligned}$$

Kako su lijeva i desna strana jednake, zaključujemo da je (1.15) rješenje jednadžbe (1.14). Ovime smo završili dokaz teorema. □

Teorem 1.1.4. *Neka je (S,+) komutativna polugrupa, a $\mathbb{F}$ polje sa svojstvima:*

(i) $2x = 0$ $(x \in \mathbb{F})$ *povlači* $x = 0$,

(ii) za svaki $x \in \mathbb{F}$ *postoji* $y \in \mathbb{F}$ *takav da je* $y^2 = x$.

Neka je σ endomorfizam od S takav da vrijedi $\sigma(\sigma x) = x$ za svaki $x \in S$. Tada je $g\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe

$$g(x+y) + g(x+\sigma y) = 2g(x)g(y) \tag{1.25}$$

za sve $x, y \in S$, ako i samo ako je

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2} \tag{1.26}$$

za svaki $x \in S$, gdje je $h\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe $h(x + y) = h(x)h(y)$ za sve $x, y \in S$.

Dokaz. Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) vidimo da funkcija g zadovoljava danu funkcijsku jednadžbu. Preostaje dokazati da je g jedino rješenje od (1.25).

Ako je $g(x) = 0$ za svaki $x \in S$ ili $g(x) = 1$ za svaki $x \in S$, uvrštavanjem u (1.25) se uvjeravamo da su obje funkcije rješenja od (1.25). U nastavku pretpostavljamo da g nije konstantna funkcija. Uvrštavanjem $y = 0$ u (1.25) dobivamo

$$g(x) = g(x)g(0) \tag{1.27}$$

za svaki $x \in S$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (1.25) i primjenom (1.27) dobivamo

$$g(y) + g(\sigma y) = 2g(0)g(y) = 2g(y),$$

pa je

$$g(\sigma x) = g(x) \tag{1.28}$$

za svaki $x \in S$.

Sada slijedi

$$g(x + \sigma y) = g(\sigma(x + \sigma y)) = g(\sigma x + y).$$

Razlikujemo dva slučaja: (1) $g(x+y) = g(x+\sigma y)$ za sve $x, y \in S$ i (2) postoje $x_0, y_0 \in S$ takvi da je $g(x_0 + y_0) \neq g(x_0 + \sigma y_0)$.

Prvi slučaj. Pretpostavimo da je $g(x + y) = g(x + \sigma y)$ za sve $x, y \in S$. Tada iz (1.25) slijedi

$$g(x + y) = g(x)g(y)$$

za sve $x, y \in S$. Dakle, g je eksponencijalna funkcija. Neka je $h = g$. Tada je $2g(x) = h(x) + h(x)$. Iz (1.28) slijedi da je $h(x) = g(x) = g(\sigma x) = h(\sigma x)$, pa je $2g(x) = h(x) + h(\sigma x)$, odnosno

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}$$

za svaki $x \in S$.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da postoje $x_0, y_0 \in S$ takvi da je

$$g(x_0 + y_0) - g(x_0 + \sigma y_0) \neq 0. \tag{1.29}$$

Neka je $f\colon S \to \mathbb{F}$ funkcija zadana pravilom

$$f(x) = g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0). \tag{1.30}$$

Tada iz (1.29) slijedi da je $f(x_0) \neq 0$. Iz (1.30) dobivamo:

$$\begin{aligned} f(\sigma x) &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma x + \sigma y_0) \\ &= g(\sigma x + y_0) - g(\sigma(x + y_0)) \\ &= g(x + \sigma y_0) - g(x + y_0) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = -f(\sigma x)$ pa je

$$f(x + \sigma y) = -f(\sigma(x + \sigma y)) = -f(\sigma x + y). \tag{1.31}$$

Daljnjim korištenjem (1.30) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g(x + y + y_0) - g(x + y + \sigma y_0), \\ f(x + \sigma y) &= g(x + \sigma y + y_0) - g(x + \sigma y + \sigma y_0). \end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih dviju jednakosti te korištenjem (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + f(x + \sigma y) &= g\big((x + y_0) + y\big) + g\big((x + y_0) + \sigma y\big) \\ &\quad -g\big((x + \sigma y_0) - y\big) + g\big((x + \sigma y_0) + \sigma y\big) \\ &= 2g(x + y_0)g(y) - 2g(x + \sigma y_0)g(y). \end{aligned}$$

Faktoriziranjem desne strane prethodne jednakosti dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2g(y)[g(x + y_0) - g(x + \sigma y_0)].$$

Primjenom (1.30), prethodna jednakost postaje

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)g(y). \tag{1.32}$$

Zamjenom x i y u (1.32) slijedi

$$f(y + x) + f(y + \sigma x) = 2f(y)g(x). \tag{1.33}$$

Zbrajanjem (1.32) i (1.33) dobivamo

$$2f(x + y) + f(x + \sigma y) + f(\sigma x + y) = 2f(x)g(y) + 2f(y)g(x).$$

Primjenom (1.31) zaključujemo

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \tag{1.34}$$

za sve $x, y \in S$. Preostaje riješiti funkcijsku jednadžbu (1.34). Zapišimo $f(x+t+y)$ kao $f((x+t)+y)$ i $f(x+(t+y))$. Korištenjem (1.34) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+t+y) &= f(x+t)g(y) + f(y)g(x+t) \\ &= [f(x)g(t) + f(t)g(x)]g(y) + f(y)g(x+t), \\ f(x+t+y) &= f(x)g(t+y) + f(t+y)g(x) \\ &= f(x)g(t+y) + [f(t)g(y) + f(y)g(t)]g(x). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza, dobivamo

$$[g(x+t) - g(x)g(t)]f(y) = [g(t+y) - g(t)g(y)]f(x). \tag{1.35}$$

Neka je $y = x_0$ i $s(t) := f(x_0)^{-1}[g(t+x_0) - g(t)g(x_0)]$. Tada (1.35) postaje

$$g(x+t) - g(x)g(t) = s(t)f(x). \tag{1.36}$$

Kako je lijeva strana ove jednadžbe simetrična po x i t, slijedi da je i desna pa vrijedi $s(t)f(x) = s(x)f(t)$. Uvrštavanjem $x = x_0$ dobivamo $s(t) = f(x_0)^{-1}s(x_0)f(t)$. Kako je $\mathbb{F}$ polje zatvoreno na kvadrate, postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $\alpha^2 = f(x_0)^{-1}s(x_0)$, pa je $s(t) = \alpha^2 f(t)$. Zamjenom t sa y u jednadžbi (1.36), dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x)g(y) + s(y)f(x) \\ &= g(x)g(y) + s(x)f(y) \\ &= g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Množenjem jednakosti (1.34) sa α te dodavanjem i oduzimanjem od izraza (1.37), dobivamo:

$$\begin{aligned} g(x+y) + \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) + \alpha f(y)] + \alpha f(x)[g(y) + \alpha f(y)] \\ &= [g(x) + \alpha f(x)][g(y) + \alpha f(y)], \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} g(x+y) - \alpha f(x+y) &= g(x)[g(y) - \alpha f(y)] - \alpha f(x)[g(y) - \alpha f(y)] \\ &= [g(x) - \alpha f(x)][g(y) - \alpha f(y)]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Neka je $h_1(x) = g(x) + \alpha f(x)$ i $h_2(x) = g(x) - \alpha f(x)$. Iz (1.38) i (1.39) slijedi da su h_1 i h_2 rješenja funkcijske jednadžbe $h(x+y) = h(x)h(y)$ za sve $x, y \in S$. Njihovim zbrajanjem dobivamo

$$g(x) = \frac{h_1(x) + h_2(x)}{2}.$$

Kako je

$$h_1(\sigma x) = g(\sigma x) + \alpha f(\sigma x) = g(x) - \alpha f(x) = h_2(x),$$

za $h_1 = h$ dobivamo

$$g(x) = \frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}.$$

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (1.26) u (1.25) dobivamo

$$\begin{aligned}
g(x+y) + g(x+\sigma y) &= \frac{h(x+y) + h(\sigma(x+y))}{2} + \frac{h(x+\sigma y) + h(\sigma(x+\sigma y))}{2} \\
&= \frac{h(x)h(y) + h(\sigma x)h(\sigma y)}{2} + \frac{h(x)h(\sigma y) + h(\sigma x)h(y)}{2} \\
&= \frac{h(x)[h(y) + h(\sigma y)] + h(\sigma x)[h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\
&= \frac{[h(x) + h(\sigma x)][h(y) + h(\sigma y)]}{2} \\
&= 2\frac{h(x) + h(\sigma x)}{2}\frac{h(y) + h(\sigma y)}{2} \\
&= 2g(x)g(y).
\end{aligned}$$

Dakle, (1.26) je rješenje jednadžbe (1.25) čime smo završili dokaz teorema. □

O funkcijskoj jednadžbi $f(x+y) = f(x)f(y)$, gdje je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, bit će više riječi u sljedećem poglavlju.

1.2 Opće rješenje d'Alembertove jednadžbe

Prije negoli odredimo opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe, definirajmo eksponencijalnu funkciju i dokažimo neka njena osnovna svojstva.

Kažemo da je funkcija $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eksponencijalna* ako vrijedi:

$$E(x+y) = E(x)E(y) \tag{1.40}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Ako je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija različita od nul-funkcije, tada uvodimo oznaku:

$$E^*(y) = [E(y)]^{-1}$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Propozicija 1.2.1. *Ako je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija i $E(0) = 0$, tada je E nul-funkcija.*

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0$ u (1.40) dobivamo:

$$E(x) = E(x)E(0).$$

Kako je $E(0) = 0$, slijedi

$$E(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, E je nul-funkcija. □

Propozicija 1.2.2. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, tada je $E(0) = 1$.*

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (1.40), dobivamo

$$E(0)[1 - E(0)] = 0,$$

pa je

$$E(0) = 0 \quad \text{ili} \quad E(0) = 1.$$

Tvrdimo da je $E(0) = 1$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $E(0) = 0$. Tada prema propoziciji 1.2.1 slijedi da je E nul-funkcija, što je kontradikcija. Dakle, $E(0) = 1$. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako je $E(x_0) = 0$ za neki $x_0 \neq 0$, tada je E nul-funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \neq x_0 \in \mathbb{R}$. Tada, zbog $E(x_0) = 0$, imamo

$$E(x) = E((x - x_0) + x_0) = E(x - x_0)E(x_0) = 0.$$

Dakle, $E(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

Propozicija 1.2.4. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, onda vrijedi*

$$E^*(-x) = E(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uvrštavanjem $y = -x$ u (1.40), dobivamo

$$E(0) = E(x)E(-x).$$

Kako E nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi da je $E(0) = 1$, pa je

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)},$$

odnosno

$$E(-x) = E^*(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamjenom x i $-x$ dobivamo

$$E^*(-x) = E(x)$$

čime smo dokazali propoziciju. □

Propozicija 1.2.5. *Neka je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Ako E nije nul-funkcija, onda vrijedi:*

$$E^*(x+y) = E^*(x)E^*(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Kako E nije nul-funkcija, prema propoziciji 1.2.3 slijedi da je $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Primjenom (1.40) dobivamo:

$$\begin{aligned} E^*(x+y) &= \frac{1}{E(x+y)} \\ &= \frac{1}{E(x)E(y)} = E^*(x)E^*(y) \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, čime smo dokazali propoziciju. □

Dokažimo sada jedno svojstvo d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

Propozicija 1.2.6. *Svako rješenje različito od nule $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

je parna funkcija.

Dokaz. Zamjenom y sa $-y$ u (DE), dobivamo:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(-y). \tag{1.41}$$

Iz (DE) i (1.41) slijedi

$$2f(x)f(y) = 2f(x)f(-y).$$

Kako f nije nul-funkcija, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \neq 0$, pa zaključujemo

$$f(y) = f(-y)$$

za sve $y \in \mathbb{R}$, odnosno f je parna funkcija. □

Sada ćemo odrediti opće rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe.

Teorem 1.2.7. *Nenul-funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je rješenje d'Alembertove funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

ako i samo ako je oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \tag{1.42}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija.

Dokaz. Neka je f netrivijalno rješenje jednadžbe (DE), odnosno f nije nul-funkcija. Uvrštavanjem $y = 0$ u (DE) dobivamo $2f(x) = 2f(x)f(0)$. Ako je $f(0) = 0$, tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da f nije nul-funkcija. Dakle, $f(0) \neq 0$. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (DE) dobivamo $f(0)[1 - f(0)] = 0$ iz čega slijedi:

$$f(0) = 1. \tag{1.43}$$

Uvrštavanjem $x = y$ u (DE) dobivamo

$$f(2x) + f(0) = 2[f(x)]^2,$$

odnosno, primjenom (1.43) slijedi

$$f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1. \tag{1.44}$$

Zamjenom x sa $x + y$ i y sa $x - y$ u (DE) dobivamo

$$f(x + y + x - y) + f(x + y - x + y) = 2f(x + y)f(x - y),$$

odnosno

$$f(2x) + f(2y) = 2f(x + y)f(x - y). \tag{1.45}$$

Primjenom (1.45) i (1.44) dobivamo:

$$\begin{aligned}
[f(x + y) - f(x - y)]^2 &= [f(x + y) + f(x - y)]^2 - 4f(x + y)f(x - y)\\
&= [2f(x)f(y)]^2 - 4f(x + y)f(x - y)\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[f(2x) + f(2y)]\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 2[2[f(x)]^2 - 1 + 2[f(y)]^2 - 1]\\
&= 4[f(x)]^2[f(y)]^2 - 4[f(x)]^2 - 4[f(y)]^2 + 4\\
&= 4\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\},
\end{aligned}$$

pa je

$$f(x + y) - f(x - y) = \pm 2\sqrt{\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}}.$$

Zbrajanjem prethodne jednakosti s (DE), dobivamo

$$f(x+y) = f(x)f(y) \pm \sqrt{\{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}},$$

pa je

$$[f(x+y) - f(x)f(y)]^2 = \{[f(x)]^2 - 1\}\{[f(y)]^2 - 1\}. \tag{1.46}$$

Sada ćemo promotriti dva različita slučaja s obzirom na vrijednost funkcije f:

(1) $f(x) \in \{-1, 1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili (2) postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da $f(x) \notin \{-1, 1\}$.

Prvi slučaj. Pretpostavimo da je $f(x) \in \{-1, 1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada prema (1.46) slijedi

$$[f(x+y) - f(x)f(y)]^2 = 0,$$

odnosno

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dakle, f je eksponencijalna funkcija. Kako je $f(x) \in \{-1, 1\}$, to je

$$f^*(x) = f(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dodavanjem $f(x)$ na obje strane prethodne jednakosti, dobivamo

$$f^*(x) + f(x) = 2f(x),$$

pa je

$$f(x) = \frac{f(x) + f^*(x)}{2},$$

odnosno

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2},$$

gdje je E eksponencijalna funkcija sa svojstvom $E(x) \in \{-1, 1\}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Drugi slučaj. Pretpostavimo da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da $f(x_0) \notin \{-1, 1\}$, odnosno $f(x_0)^2 \neq 1$. Ako stavimo $\alpha = f(x_0)$, tada je $\alpha^2 - 1 \neq 0$. Neka je $\beta \neq 0$ takav da vrijedi

$$\beta^2 = \alpha^2 - 1. \tag{1.47}$$

Sada definirajmo

$$\begin{aligned}
E(x) &= f(x) + \frac{1}{\beta}\Big[f(x+x_0) - f(x)f(x_0)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta}f(x+x_0) + \left[1 - \frac{1}{\beta}f(x_0)\right]f(x) \\
&= \frac{1}{\beta}f(x+x_0) + \left[\frac{\beta - f(x_0)}{\beta}\right]f(x) \\
&= \frac{1}{\beta}\Big[f(x+x_0) + (\beta - \alpha)f(x)\Big]
\end{aligned} \tag{1.48}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjenom (1.46) i (1.47) dobivamo

$$\begin{aligned} [E(x) - f(x)]^2 &= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x + x_0) - f(x)f(x_0)\Big]^2 \\ &= \frac{1}{\beta^2}\Big[[f(x)]^2 - 1\Big]\Big[[f(x_0)]^2 - 1\Big] \\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2}\Big[[f(x)]^2 - 1\Big] \\ &= [f(x)]^2 - 1, \end{aligned} \tag{1.49}$$

pa je

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + [f(x)]^2 = [f(x)]^2 - 1,$$

odnosno

$$[E(x)]^2 - 2E(x)f(x) + 1 = 0.$$

Ako postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $E(x) = 0$, dobit ćemo $1 = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{[E(x)]^2 + 1}{2E(x)} \\ &= \frac{1}{2}\left[E(x) + \frac{1}{E(x)}\right] \\ &= \frac{E(x) + E^*(x)}{2}. \end{aligned}$$

Preostaje dokazati da je E eksponencijalna funkcija, odnosno da zadovoljava jednakost

$$E(x + y) = E(x)E(y).$$

Da bismo to dokazali, trebat će nam sljedeće jednakosti dobivene višestrukom primjenom (DE):

$$\begin{aligned} & 2[f(x_0 + x)f(y) + f(x_0 + y)f(x)] \\ = \; & f(x_0 + x + y) + f(x_0 + x - y) + f(x_0 + y + x) + f(x_0 + y - x) \\ = \; & 2f(x_0 + x + y) + f[x_0 + (x - y)] + f[x_0 - (x - y)] \\ = \; & 2f(x_0 + x + y) + 2f(x_0)f(x - y) \\ = \; & 2f(x_0 + x + y) + f(x_0)[2f(x)f(y) - f(x + y)] \\ = \; & 2\{f(x_0 + x + y) + \alpha[2f(x)f(y) - f(x + y)]\}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}
& 2f(x_0+x)f(x_0+y) \\
= \;& f(x_0+x+x_0+y)+f(x_0+x-x_0-y) \\
= \;& f[x_0+(x_0+x+y)]+f(x-y) \\
= \;& [2f(x_0)f(x_0+x+y)-f(x_0+x+y-x_0)]+[2f(x)f(y)-f(x+y)] \\
= \;& [2f(x_0)f(x_0+x+y)-f(x+y)]+[2f(x)f(y)-f(x+y)] \\
= \;& 2[f(x)f(y)+\alpha f(x_0+x+y)-f(x+y)].
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Sada, polazeći od (1.48), imamo:

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x+x_0)+(\beta-\alpha)f(x)\Big]\Big[f(y+x_0)+(\beta-\alpha)f(y)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x+x_0)f(y+x_0)+(\beta-\alpha)[f(x)f(y+x_0)+f(y)f(x+x_0)] \\
&\quad +(\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\Big\}.
\end{aligned}$$

Odatle primjenom (1.51) i (1.50) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x)f(y)+\alpha f(x_0+x+y)-f(x+y) \\
&\quad +(\beta-\alpha)[f(x_0+x+y)+2\alpha f(x)f(y)-\alpha f(x+y)]+(\beta-\alpha)^2 f(x)f(y)\Big\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big\{f(x)f(y)[(\beta-\alpha)^2+2\alpha(\beta-\alpha)+1] \\
&\quad +\beta f(x_0+x+y)-f(x+y)[1+(\beta-\alpha)\alpha]\Big\} \\
&= \frac{1}{\beta^2}\Big[f(x)f(y)(\beta^2-\alpha^2+1)+\beta f(x_0+x+y) \\
&\quad +f(x+y)(\alpha^2-1-\alpha\beta)\Big].
\end{aligned}$$

Dalje, primjenom (1.47) i (1.48) dobivamo

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \frac{1}{\beta^2}\Big[\beta f(x_0+x+y)+\beta(\beta-\alpha)f(x+y)\Big] \\
&= \frac{1}{\beta}\Big[f(x_0+x+y)+(\beta-\alpha)f(x+y)\Big] \\
&= E(x+y).
\end{aligned}$$

Dakle, $E\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ je eksponencijalna funkcija.

Ovime smo dokazali samo jedan smjer teorema. Suprotan smjer ćemo dokazati direktnim uvrštavanjem rješenja oblika $f(x)=\frac{E(x)+E^*(x)}{2}$ u (DE), koristeći propozicije 1.2.5 i

1.2.4:

$$
\begin{aligned}
f(x+y)+f(x-y) &= \frac{E(x+y)+E^*(x+y)}{2}+\frac{E(x-y)+E^*(x-y)}{2} \\
&= \frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E(-y)+E^*(x)E^*(-y)}{2} \\
&= \frac{E(x)E(y)+E^*(x)E^*(y)+E(x)E^*(y)+E^*(x)E(y)}{2} \\
&= \frac{E(x)[E(y)+E^*(y)]+E^*(x)[E^*(y)+E(y)]}{2} \\
&= \frac{[E(x)+E^*(x)][E(y)+E^*(y)]}{2} \\
&= 2f(x)f(y).
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi i obrat teorema. Ovime smo završili dokaz. □

Korolar 1.2.8. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$
g(x+y)+g(x-y)=2f(x)f(y) \tag{1.52}
$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, su oblika

$$
f(x)=\frac{\alpha}{2}\Big[E(x)+E^*(x)\Big] \quad i \quad g(x)=\frac{\alpha^2}{2}\Big[E(x)+E^*(x)\Big]
$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Ako je f nul-funkcija, tada iz (1.52) slijedi

$$
g(x+y)=-g(x-y)
$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $y=0$ dobivamo $g(x)=-g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno i g je nul-funkcija. U nastavku pretpostavimo da f i g nisu nul-funkcije.

Uvrštavanjem $y=0$ u (1.52), dobivamo $2g(x)=2f(x)f(0)$, odnosno

$$
g(x)=\alpha f(x) \tag{1.53}
$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $\alpha = f(0)$. Uvrštavanjem $x=0$ u (1.52), dobivamo $g(y)+g(-y)=2f(0)f(y)$, odnosno

$$
g(x)+g(-x)=2\alpha f(x)
$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u (1.53), slijedi

$$
g(-x)=\alpha f(x)
$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uspoređujući s (1.53), slijedi da je g parna funkcija, pa iz (1.53) zaključujemo da je i f parna funkcija.

Uvrštavanjem (1.53) u (1.52), dobivamo

$$\alpha f(x+y) + \alpha f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Ako je $\alpha = 0$, tada je f nul-funkcija, suprotno pretpostavci. Slijedi $\alpha \neq 0$, pa je

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{2}{\alpha} f(x)f(y).$$

Neka je $h(x) = \frac{1}{\alpha} f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} h(x+y) + h(x-y) &= \frac{1}{\alpha} f(x+y) + \frac{1}{\alpha} f(x-y) = \frac{1}{\alpha}\big[f(x+y) + f(x-y)\big] \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2}{\alpha} f(x)f(y) = 2h(x)h(y). \end{aligned}$$

Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija. Dakle,

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}\big[E(x) + E^*(x)\big] \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{\alpha^2}{2}\big[E(x) + E^*(x)\big]$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. □

1.3 Prva i druga Cauchyjeva funkcijska jednadžba

U idućem poglavlju koristit ćemo rezultate sljedeća dva teorema koji daju neprekidna rješenja *prve (linearne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

i *druge (eksponencijalne) Cauchyjeve funkcijske jednadžbe*

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Teorem 1.3.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1.54}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Tada postoji konstanta $c \in \mathbb{C}$ takva da je

$$f(x) = cx \tag{1.55}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Uvrštavanjem $x = y = 0$ u (1.54) dobivamo $f(0) = 2f(0)$ iz čega slijedi da je

$$f(0) = 0. \tag{1.56}$$

Uvrštavanjem $x = -y$ u (1.54) te primjenjujući (1.56) dobivamo

$$f(0) = f(x) + f(-x),$$

odnosno

$$f(-x) = -f(x) \tag{1.57}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Matematičkom indukcijom dokažimo da je

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \tag{1.58}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da (1.58) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Za $n + 1$, primjenom (1.54) i (1.58), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}) &= f\Big((x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1}\Big) \\ &= f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dakle, (1.58) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno, za $x_i = x$ za svaki i, vrijedi

$$f(nx) = nf(x) \tag{1.59}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $x = \frac{m}{n}z$, gdje je $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $z \in \mathbb{C}$. Prema (1.59) tada imamo

$$f(mz) = nf\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Ponovnom primjenom (1.59) dobivamo najprije $mf(z) = nf\left(\frac{m}{n}z\right)$, a zatim

$$\frac{m}{n}f(z) = f\left(\frac{m}{n}z\right).$$

Iz (1.57) slijedi

$$f\left(-\frac{m}{n}z\right) = -f\left(\frac{m}{n}z\right) = -\frac{m}{n}f(z).$$

Zaključujemo da vrijedi

$$f(qz) = qf(z)$$

za svaki $z \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{Q}$. Posebno, za $c = f(1)$ slijedi

$$f(q) = cq \tag{1.60}$$

za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Neka je $r \in \mathbb{R}$. Postoji niz racionalnih brojeva (q_n) takav da je

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r.$$

Kako prema (1.60) vrijedi $f(q_n) = cq_n$, a f je neprekidna funkcija, imamo

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} cq_n = cr,$$

odnosno

$$f(x) = cx,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta, što nam daje rješenje (1.55). □

Teorem 1.3.2. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{1.61}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako f nije nul-funkcija, tada postoji konstanta $c \in \mathbb{C}$ takva da je

$$f(x) = e^{cx} \tag{1.62}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Ako je $f(x_0) = 0$, tada iz (1.61) slijedi

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno f je nul-funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Kako prema (1.61) vrijedi $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, slijedi da je

$$f(x) > 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Znamo da eksponencijalna funkcija $x \to e^x$ zadovoljava navedeno svojstvo i funkcijsku jednadžbu (1.61). Stoga definiramo funkciju $f(x) = e^{g(x)}$, gdje je

$$g(x) = \ln f(x). \tag{1.63}$$

Tada vrijedi

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y),$$

odnosno

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \tag{1.64}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 1.3.1, rješenje jednadžbe (1.64) je funkcija oblika $g(x) = cx$ gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta. Prema (1.63) slijedi da je

$$f(x) = e^{cx},$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $c \in \mathbb{C}$ proizvoljna konstanta. To nam daje rješenje (1.62). $\square$

Poglavlje 2

Trigonometrijske funkcijske jednadžbe

2.1 Kosinus-sinus funkcijska jednadžba

Propozicija 2.1.1. *Ako funkcije* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu*

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{KS}$$

tada je f *parna, a* g *neparna funkcija te vrijedi*

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Zamjenom x i y u (KS) dobivamo

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x)$$

odnosno

$$f(x-y) = f(y-x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Odatle slijedi, uvrštavanjem $y = 0$,

$$f(x) = f(-x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, f je parna funkcija. Zamjenom x sa $-x$ te y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$f(-x+y) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y). \tag{2.1}$$

Kako je f parna funkcija, iz (2.1) slijedi

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y).$$

Usporedbom s (KS) dobivamo

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y) \tag{2.2}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je g konstantna funkcija, odnosno da je $g(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (KS) slijedi

$$f(x - y) = f(x)f(y) + c^2.$$

Zamjenom y sa $-y$ i primjenom parnosti funkcije f dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(y) + c^2$$

pa slijedi $f(x + y) = f(x - y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neka su $u, v \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$f(u) = f\left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = f(v),$$

pa je f konstantna funkcija. Kako je to u kontradikciji s našom pretpostavkom, zaključujemo da g nije konstantna funkcija. Odaberimo $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(y_0) \neq 0$. Uvrštavanjem $y = y_0$ u (2.2), dobivamo

$$g(x) = cg(-x), \tag{2.3}$$

gdje je $c = \frac{g(-y_0)}{g(y_0)} \neq 0$. Tada je

$$g(x) = cg(-x) = c \cdot cg(-(-x)) = c^2 g(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa slijedi da je $c^2 = 1$, odnosno $c = 1$ ili $c = -1$. Pretpostavimo da je $c = 1$. Tada iz (2.3) slijedi

$$g(x) = g(-x),$$

odnosno g je parna funkcija. Zamjenom y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ &= f(x-y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je f konstantna funkcija što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, $c = -1$, odnosno $g(x) = -g(-x)$ pa je g neparna funkcija.
Kako je g neparna funkcija, vrijedi

$$g(0) = 0.$$

Uvrštavanjem $y = 0$ u (KS) dobivamo

$$f(x) = f(x)f(0) + g(x)g(0),$$

odnosno

$$f(x) = f(x)f(0).$$

Kako f nije konstantna funkcija, nije ni nul-funkcija, pa iz prethodnog izraza slijedi da je

$$f(0) = 1. \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem $y = x$ u (KS) te primjenom (2.4) dobivamo

$$f(0) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2,$$

odnosno

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. □

Teorem 2.1.2. *Ako su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcije koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (KS) i ako f nije konstantna funkcija, tada f zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{DE}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ te su f i g oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \quad g(x) = k\frac{E(x) - E^*(x)}{2} \tag{2.5}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $k^2 = -1$.

Dokaz. Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je g neparna funkcija, a f parna funkcija. Zamjenom y sa $-y$ u (KS) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(-y) + g(x)g(-y) \\ &= f(x)f(y) - g(x)g(y). \end{aligned}$$

Zbrajanjem s (KS) slijedi

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, to jest f zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu.

Prema teoremu 1.2.7 slijedi da je f oblika

$$f(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2} \tag{2.6}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija. Iz propozicije 2.1.1, primjenom propozicije 1.2.2, slijedi da je

$$\begin{aligned}
[g(x)]^2 &= 1 - [f(x)]^2 = 1 - \left[\frac{E(x) + E^*(x)}{2}\right]^2 \\
&= 1 - \frac{[E(x)]^2 + 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
&= \frac{4 - E(2x) - 2E(0) - E^*(2x)}{4} \\
&= \frac{2 - E(2x) - E^*(2x)}{4} \\
&= -\frac{E(2x) - 2E(0) + E^*(2x)}{4} \\
&= -\frac{[E(x)]^2 - 2E(x)E^*(x) + [E^*(x)]^2}{4} \\
&= -\left[\frac{E(x) - E^*(x)}{2}\right]^2,
\end{aligned}$$

pa je

$$g(x) = k\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je $k^2 = -1$, što nam s (2.6) daje rješenje (2.5). □

Teorem 2.1.3. *Neprekidne funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su rješenja funkcijske jednadžbe (KS) ako i samo ako su oblika*

$$f(x) = c, \qquad g(x) = \sqrt{c(1-c)} \tag{2.7}$$

$$f(x) = c, \qquad g(x) = -\sqrt{c(1-c)} \tag{2.8}$$

$$f(x) = \cos(\alpha x), \qquad g(x) = \pm\sin(\alpha x), \tag{2.9}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje su c i α proizvoljne konstante.

Dokaz. Neka je $f(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (KS) slijedi

$$c = c^2 + g(x)g(y) \tag{2.10}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je g nul-funkcija, tada je $c = 0$ ili $c = 1$.
Ako g nije nul-funkcija, tada iz (2.10) slijedi $c - c^2 = g(x)g(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je $c - c^2 = [g(x)]^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, odnosno $g(x) = \sqrt{c(1-c)}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $g(x) = -\sqrt{c(1-c)}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenja (2.7) i (2.8).

Kako f zadovoljava (DE), prema teoremu 1.1.1 slijedi da su preostala nekonstantna rješenja od (KS) oblika $f(x) = \cos(\alpha x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f = \cos(\alpha x)$, tada iz propozicije 2.1.1 slijedi

$$[g(x)]^2 = 1 - \cos^2(\alpha x),$$

odnosno

$$g(x) = \pm \sin(\alpha x)$$

što nam daje rješenje (2.9). Ako je $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$, tada je $|f(x)| = |\operatorname{ch}(\beta x)| \geqslant 1$. Prema propoziciji 2.1.1 je $|f(x)| \leqslant 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi $|f(x)| = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa neprekidnost funkcije f povlači da je f konstantna funkcija, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Zaključujemo da $f(x) = \operatorname{ch}(\beta x)$ nije rješenje od (KS).

Preostaje dokazati obrat teorema. Uvrštavanjem (2.7) ili (2.8) u (KS), dobivamo

$$c = c^2 + (\sqrt{c(1-c)})^2 = c^2 + c(1-c) = c^2 + c - c^2 = c,$$

dakle (2.7) i (2.8) su rješenja od (KS). Uvrštavanjem (2.9) u (KS), dobivamo

$$f(x-y) = \cos(\alpha(x-y)) = \cos(\alpha x)\cos(\alpha y) + \sin(\alpha x)\sin(\alpha y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

pa je (2.9) rješenje od (KS). Ovime smo završili dokaz teorema. □

2.2 Sinus-kosinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \tag{SK}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, nazivamo *sinus-kosinus funkcijska jednadžba*. Odredimo njena rješenja.

Teorem 2.2.1. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su rješenja funkcijske jednadžbe (SK) ako i samo ako su f i g oblika:*

$$f(x) = 0 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R} \quad i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija}, \tag{2.11}$$

$$f(x) = A(x)E(x) \quad i \quad g(x) = E(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \quad i \quad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E_1, E_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su eksponencijalne funkcije i $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Lako se provjeri da je sa (2.11) dano rješenje funkcijske jednadžbe (SK). U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija.

Prema (SK), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f(x+(y+z)) &= f(x)g(y+z)+f(y+z)g(x) \\ &= f(x)g(y+z)+[f(y)g(z)+f(z)g(y)]g(x) \\ &= f(x)g(y+z)+f(y)g(z)g(x)+f(z)g(y)g(x), \end{aligned} \tag{2.14}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f((x+y)+z) &= f(x+y)g(z)+f(z)g(x+y) \\ &= f(x)g(y)g(z)+f(y)g(x)g(z)+f(z)g(x+y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Izjednačavanjem (2.14) i (2.15) dobivamo

$$f(x)[g(y+z)-g(y)g(z)] = f(z)[g(x+y)-g(x)g(y)]. \tag{2.16}$$

Kako f nije nul-funkcija, postoji $z_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z_0) \neq 0$. Uvrštavanjem $z = z_0$ u (2.16) vidimo da je

$$g(x+y)-g(x)g(y) = f(x)l(y), \tag{2.17}$$

gdje je

$$l(y) = \frac{g(y+z_0)-g(y)g(z_0)}{f(z_0)}.$$

Zamjenom x i y u (2.17), dobivamo

$$g(x+y)-g(x)g(y) = f(y)l(x). \tag{2.18}$$

Sada iz (2.17) i (2.18) slijedi

$$f(x)l(y) = f(y)l(x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako f nije nul-funkcija, postoji $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(y_0) \neq 0$. Tada je $l(x) = \frac{l(y_0)}{f(y_0)} f(x)$, odnosno

$$l(x) = \alpha^2 f(x) \tag{2.19}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\alpha^2 = \frac{l(y_0)}{f(y_0)} \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem (2.19) u (2.17), dobivamo

$$g(x+y) = g(x)g(y) + \alpha^2 f(x)f(y) \tag{2.20}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Iz (2.20) i (SK) dobivamo

$$\begin{aligned} g(x+y)+\alpha f(x+y) &= g(x)g(y)+\alpha^2 f(x)f(y) \\ &\quad +\alpha f(x)g(y)+\alpha f(y)g(x) \\ &= g(y)[g(x)+\alpha f(x)]+\alpha f(y)[g(x)+\alpha f(x)] \\ &= [g(x)+\alpha f(x)][g(y)+\alpha f(y)], \end{aligned} \tag{2.21}$$

a također i

$$\begin{aligned} g(x+y)-\alpha f(x+y) &= g(x)g(y)+\alpha^2 f(x)f(y) \\ &\quad -\alpha f(x)g(y)-\alpha f(y)g(x) \\ &= g(y)[g(x)-\alpha f(x)]+\alpha f(y)[g(x)-\alpha f(x)] \\ &= [g(x)-\alpha f(x)][g(y)-\alpha f(y)]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Neka je

$$\begin{aligned} g(x)+\alpha f(x) &= E_1(x), \\ g(x)-\alpha f(x) &= E_2(x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tada iz (2.21) i (2.22) slijedi

$$\begin{aligned} E_1(x+y) &= E_1(x)E_1(y), \\ E_2(x+y) &= E_2(x)E_2(y), \end{aligned}$$

pa su $E_1, E_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalne funkcije. Ako je $\alpha = 0$, tada je $g =: E$ eksponencijalna funkcija. Kako f nije nul-funkcija, to ni E nije nul-funkcija. Propozicije 1.2.1 i 1.2.3 povlače $E(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz (SK) slijedi

$$\frac{f(x+y)}{E(x+y)} = \frac{f(x)E(y)+f(y)E(x)}{E(x)E(y)} = \frac{f(x)}{E(x)} + \frac{f(y)}{E(y)} \tag{2.24}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Stavimo li

$$A(x) = \frac{f(x)}{E(x)}, \tag{2.25}$$

tada (2.24) postaje

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa je $A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija. Iz (2.25) slijedi

$$f(x) = A(x)E(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.12).

Ako je $\alpha \neq 0$, tada oduzimanjem i zbrajanjem izraza iz (2.23) dobivamo

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_2(x)}{2\alpha} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{E_1(x) + E_2(x)}{2}$$

što nam daje rješenje (2.13) jednadžbe (SK). □

Napomena. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ neparna funkcija i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ parna funkcija, tada rješenje (2.11) otpada.

Ako f i g zadovoljavaju (2.12), tada je $E(-x) = E(x)$ to jest $[E(x)]^2 = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$E(x) = E\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \left[E\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa je

$$f(x) = A(x) \quad \text{i} \quad g(x) = 1$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Ako f i g zadovoljavaju (2.13), tada iz (2.23) slijedi

$$E_1^*(x) = E_1(-x) = g(-x) + \alpha f(-x) = g(x) - \alpha f(x) = E_2(x).$$

Tada rješenje (2.13) jednadžbe (SK) možemo pisati u obliku

$$f(x) = \frac{E_1(x) - E_1^*(x)}{2\alpha} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{E_1(x) + E_1^*(x)}{2}.$$

2.3 Sinus funkcijska jednadžba

Funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \tag{SE}$$

nazivamo *sinus funkcijska jednadžba*. Zamijenimo li x sa $\frac{x}{2}$ i y sa $\frac{y}{2}$, iz (SE) slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{y}{2}\right)\right]^2.$$

Zamjenom x sa $x + y$ i y sa $x - y$ u prethodnoj jednakosti, dobivamo

$$f\left(\frac{x+y+x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y-(x-y)}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2,$$

odnosno

$$f(x)f(y) = \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 \tag{2.26}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, što je ekvivalentni zapis jednadžbe (SE).

Odredimo rješenja sinus funkcijske jednadžbe (SE) bez uvjeta na funkciju f.

Teorem 2.3.1. *Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljava sinus funkcijsku jednadžbu (SE) ako i samo ako je f oblika*

$$f(x) = A(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

$$f(x) = \beta[E(x) - E^*(x)] \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.28}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\beta \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Lako se vidi da je f nul-funkcija rješenje jednadžbe (SE) koje je sadržano u (2.28) za $\beta = 0$. U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija. Iz toga slijedi da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) \neq 0$.

Neka je

$$h(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Big[f(x+x_0) - f(x-x_0)\Big]\Big[f(y+x_0) - f(y-x_0)\Big] \\ &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Big[f(x+x_0)f(y+x_0) - f(x-x_0)f(y+x_0) \\ &\quad - f(x+x_0)f(y-x_0) + f(x-x_0)f(y-x_0)\Big] \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Raspišimo dobivene izraze na desnoj strani i grupirajmo tako da možemo primijeniti (SE):

$$\begin{aligned} 2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Bigg[f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 + \frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2} + x_0 - \frac{x-y}{2}\right) \\ &\quad - f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} - x_0\right)f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} + x_0\right) \\ &\quad - f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + x_0\right)f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} - x_0\right) \\ &\quad + f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 + \frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x+y}{2} - x_0 - \frac{x-y}{2}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Primjenom (SE) dalje imamo

$$\begin{aligned}
2h(x)h(y) &= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Bigg\{\left[f\left(\frac{x+y}{2}+x_0\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 \\
&\quad + \left[f\left(\frac{x-y}{2}-x_0\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-y}{2}+x_0\right)\right]^2 \\
&\quad + \left[f\left(\frac{x+y}{2}-x_0\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2\Bigg\} \\
&= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}\Bigg\{\left[f\left(\frac{x+y}{2}+x_0\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-y}{2}+x_0\right)\right]^2 \\
&\quad - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x+y}{2}-x_0\right)\right]^2 \\
&\quad - \left[f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-y}{2}-x_0\right)\right]^2\Bigg\} \\
&= \frac{1}{2[f(x_0)]^2}[f(x+y+x_0)f(x_0) + f(x-y+x_0)f(x_0) \\
&\quad - f(x+y-x_0)f(x_0) - f(x-y-x_0)f(x_0)] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)}[f(x+y+x_0) + f(x-y+x_0) \\
&\quad + f(x+y-x_0) - f(x-y-x_0)] \\
&= h(x+y) + h(x-y).
\end{aligned}$$

Dakle, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljava d'Alembertovu funkcijsku jednadžbu

$$h(x+y) + h(x-y) = 2h(x)h(y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 1.2.7,

$$h(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \tag{2.29}$$

gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eksponencijalna funkcija. Ako pretpostavimo da h nije nul-funkcija, tada iz propozicije 1.2.6 slijedi da je h parna funkcija.

Iz (2.26) slijedi da jednadžbu (SE) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$f(u)f(v) = \left[f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{u-v}{2}\right)\right]^2$$

za sve $u, v \in \mathbb{R}$. Ako je $f(y) \neq 0$, tada je

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+y) - f(x-y)}{2f(y)} &= \frac{f(x+y)f(x_0) - f(x-y)f(x_0)}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{\left[f\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+y-x_0}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-y-x_0}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{\left[f\left(\frac{x+x_0+y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x+x_0-y}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{x-x_0+y}{2}\right)\right]^2 + \left[f\left(\frac{x-x_0-y}{2}\right)\right]^2}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{f(x+x_0)f(y) - f(x-x_0)f(y)}{2f(y)f(x_0)} \\
&= \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)} = h(x).
\end{aligned}$$

Slijedi

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)h(x). \tag{2.30}$$

Kako E nije nul-funkcija, iz propozicije 1.2.2 slijedi $E(0) = 1$, pa (2.29) povlači

$$h(0) = 1. \tag{2.31}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.30) i primjenom (2.31), dobivamo

$$f(-y) = -f(y). \tag{2.32}$$

Tada iz (2.30) slijedi

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(y)h(x). \tag{2.33}$$

Zamjenom x i y u (2.33), dobivamo

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)h(y). \tag{2.34}$$

Zbrajanjem (2.33) i (2.34) te primjenom (2.32) dolazimo do

$$f(x+y) = f(x)h(y) + f(y)h(x) \tag{2.35}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Kako je f neparna, a h parna funkcija, prema napomeni iza teorema 2.2.1, postoje dvije mogućnosti za f: f je aditivna funkcija, što nam daje rješenje (2.27), ili

$$f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}, \tag{2.36}$$

gdje je $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Uvrštavanjem $\beta = \frac{1}{2\alpha}$ u (2.36) dobivamo rješenje (2.28) jednadžbe (SE). $\square$

Teorem 2.3.2. *Neprekidne funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (SE) su oblika*

$$f(x) = ax, \tag{2.37}$$
$$f(x) = \beta \sin(bx) \tag{2.38}$$
$$f(x) = \beta\, \mathrm{sh}(cx) \tag{2.39}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$*, gdje su* $a, b, c, \beta \in \mathbb{R}$ *proizvoljne konstante.*

Dokaz. Nul-funkcija je očito rješenje dane jednadžbe. U nastavku pretpostavimo da f nije nul-funkcija. Prema teoremu 2.3.1 tada slijedi da su rješenja dane jednadžbe jednog od sljedećih oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x), \\ f(x) &= \beta[E(x) - E^*(x)], \end{aligned} \tag{2.40}$$

gdje je $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivna funkcija, a $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eksponencijalna funkcija. Kako je f neprekidna, prema teoremu 1.3.1 slijedi da su neprekidne aditivne funkcije oblika

$$f(x) = ax,$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.37).

Prema teoremu 1.3.2, neprekidne eksponencijalne funkcije su oblika

$$f(x) = e^{cx} \tag{2.41}$$

gdje je $c \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem (2.41) u (2.40) dobivamo

$$f(x) = \beta(e^{cx} - e^{-cx}). \tag{2.42}$$

Ako su $c, \beta \in \mathbb{R}$, zamjenom β sa $\frac{\beta}{2}$ u (2.42) dobivamo

$$f(x) = \beta \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} = \beta\, \mathrm{sh}(cx)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ što nam daje rješenje (2.39).

Ako $c, \beta \notin \mathbb{R}$, onda je $c = a + bi$ i $\beta = u + iv$, pri čemu je $b \neq 0$ i $v \neq 0$. Iz (2.42) tada slijedi

$$f(x) = (u + iv)(e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)}x). \tag{2.43}$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)x} - e^{-(a+bi)x} &= e^{ax}e^{ibx} - e^{-ax}e^{-ibx} \\ &= e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) - e^{-ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) \\ &= \cos(bx)(e^{ax} - e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax} + e^{-ax}), \end{aligned}$$

iz (2.43) dalje imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= u[\cos(bx)(e^{ax}-e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax}+e^{-ax})] \\ &\quad +iv[\cos(bx)(e^{ax}-e^{-ax}) + i\sin(bx)(e^{ax}+e^{-ax})] \\ &= u\cos(bx)(e^{ax}-e^{-ax}) - v\sin(bx)(e^{ax}+e^{-ax}) \\ &\quad +i[u\sin(bx)(e^{ax}+e^{-ax}) + v\cos(bx)(e^{ax}-e^{-ax})]. \end{aligned}$$

Kako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, slijedi da je imaginarni dio dobivenog broja jednak nuli, odnosno

$$u\sin(bx)(e^{ax}+e^{-ax}) + v\cos(bx)(e^{ax}-e^{-ax}) = 0. \tag{2.44}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.44), dobivamo

$$v(e^{ax}-e^{-ax}) = 0 \Leftrightarrow e^{ax} = e^{-ax} \Leftrightarrow ax = -ax \Leftrightarrow a = 0.$$

Uvrštavanjem $x = \frac{\pi}{2}$ u (2.44) te primjenjujući $a = 0$, dobivamo $u = 0$. Dakle, $c = bi$ i $\beta = vi$. Slijedi

$$f(x) = \beta\sin(bx),$$

gdje je $\beta = -2v \in \mathbb{R}$, što nam daje rješenje (2.38). $\square$

Dokažimo da *sinus funkcijska nejednadžba*

$$f(x+y)f(x-y) \leqslant [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

ima ista rješenja kao i sinus funkcijska jednadžba (SE).

Teorem 2.3.3. *Ako $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku nejednadžbu*

$$f(x+y)f(x-y) \leqslant [f(x)]^2 - [f(y)]^2 \tag{2.45}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, tada je f rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).

Dokaz. Uvrstimo li $x = y = 0$ u (2.45), slijedi da je $[f(0)]^2 \leqslant 0$, odnosno

$$f(0) = 0. \tag{2.46}$$

Uvrstimo li $x = -y$ u (2.45), dobivamo

$$0 \leqslant [f(-y)]^2 - [f(y)]^2,$$

odnosno

$$[f(y)]^2 \leqslant [f(-y)]^2. \tag{2.47}$$

Zamjenom y i $-y$, dobivamo $[f(-y)]^2 \leqslant [f(y)]^2$. Ovo zajedno sa (2.47) daje

$$[f(-y)]^2 \leqslant [f(y)]^2 \leqslant [f(-y)]^2$$

pa je

$$[f(y)]^2 = [f(-y)]^2$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je

$$f(-y) = -f(y) \quad \text{ili} \quad f(-y) = f(y).$$

Neka je $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(y_0) = f(-y_0). \tag{2.48}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ i $y = y_0$ u (2.45) te primjenom (2.46) dobivamo

$$f(y_0)f(-y_0) \leqslant -[f(y_0)]^2. \tag{2.49}$$

Uvrštavanjem (2.48) u (2.49), dobivamo

$$[f(y_0)]^2 \leqslant -[f(y_0)]^2,$$

odnosno

$$2[f(y_0)]^2 \leqslant 0$$

pa slijedi da je

$$f(y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f(-y_0) = 0.$$

Ako je $f(-y) = -f(y)$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, tada iz (2.45) slijedi

$$[f(y)]^2 \leqslant [f(x)]^2 + f(x+y)f(y-x).$$

Zamjenom x i y dobivamo

$$[f(x)]^2 - [f(y)]^2 \leqslant f(x+y)f(x-y).$$

Ovo zajedno sa (2.45) povlači

$$f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2.$$

Dakle, f je rješenje sinus funkcijske jednadžbe (SE). $\square$

2.4 Poopćenje sinus funkcijske jednadžbe

U sljedećem teoremu dajemo opće rješenje funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x)-f(y)g(y) \tag{PS}$$

koja je poopćenje sinus funkcijske jednadžbe (SE).

Teorem 2.4.1. *Funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS) ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:*

$$f \text{ je nul-funkcija} \quad i \quad g \text{ je proizvoljna funkcija}, \tag{2.50}$$
$$f \text{ je proizvoljna funkcija} \quad i \quad g \text{ je nul-funkcija}, \tag{2.51}$$
$$f(x) = k \quad i \quad g(x) = A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.52}$$
$$f(x) = A(x) + \delta \quad i \quad g(x) = \beta A(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.53}$$
$$f(x) = \gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \quad i \quad g(x) = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2} \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{2.54}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $\beta, \delta, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{C}$ su proizvoljne konstante.

Dokaz. Lako se provjeri da funkcije f i g iz (2.50) do (2.54) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (PS). U nastavku ćemo dokazati da su one jedina rješenja funkcijske jednadžbe (PS).

Pretpostavimo da je f konstantna funkcija, $f(x) = k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (PS) slijedi

$$k[g(x-y) - g(x) + g(y)] = 0 \tag{2.55}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je $k = 0$, onda je g proizvoljna funkcija, što nam daje rješenje (2.50).

Ako je $k \neq 0$, tada iz (2.55) slijedi

$$g(x-y) = g(x) - g(y) \tag{2.56}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $y = x$ u (2.56), vidimo da vrijedi $g(0) = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.56), dobivamo

$$g(-y) = -g(y) \tag{2.57}$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Zamjenom y i $-y$ u (2.56), imamo

$$g(x+y) = g(x) - g(-y),$$

odnosno, primjenom (2.57),

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Dakle, g(x)=A(x) za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija. To nam daje rješenje (2.52).

Pretpostavimo da je g konstantna funkcija, $g(x) = k$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (PS) slijedi

$$k[f(x+y) - f(x) + f(y)] = 0 \tag{2.58}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je $k = 0$, onda je f proizvoljna funkcija pa dobivamo rješenje (2.51).

Ako je $k \neq 0$, tada iz (2.58) slijedi

$$f(x+y) = f(x) - f(y) \tag{2.59}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li $x = 0$ i $y = 0$ u (2.59), vidimo da vrijedi $f(0) = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (2.59), dobivamo $f(y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$, što znači da je ovo rješenje sadržano u (2.50).

U nastavku pretpostavimo da f i g nisu konstantne funkcije. Zamjenom x i y u (PS), dobivamo

$$f(x+y)g(y-x) = f(y)g(y) - f(x)g(x) \tag{2.60}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zbrajanjem (PS) i (2.60) slijedi

$$f(x+y)g(x-y) = -f(x+y)g(y-x)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Kako f nije konstantna funkcija pa ni nul-funkcija, to postoji $u_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(u_0) \neq 0$. Neka je $v \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Za $x = \frac{1}{2}(u_0 + v)$ i $y = \frac{1}{2}(u_0 - v)$ imamo

$$f(u_0)g(v) = -f(u_0)g(-v)$$

odakle slijedi

$$g(-v) = -g(v).$$

Dakle, g je neparna funkcija.

Neka su funkcije $s, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirane sa

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \\ h(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Tada je s parna, a h neparna funkcija te vrijedi

$$f(x) = s(x) + h(x) \tag{2.61}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem (2.61) u (PS), dobivamo

$$\begin{aligned} [s(x+y) + h(x+y)]g(x-y) &= [s(x) + h(x)]g(x) - [s(y) + h(y)]g(y), \\ s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= s(x)g(x) - s(y)g(y) \\ &\quad + h(x)g(x) - h(y)g(y) \end{aligned} \tag{2.62}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamjenom x sa $-x$ i y sa $-y$ te primjenom svojstva parnosti funkcije s i neparnosti funkcija g i h, slijedi

$$\begin{aligned} -s(x+y)g(x-y) + h(x+y)g(x-y) &= -s(x)g(x) + s(y)g(y) \\ &\quad + h(x)g(x) - h(y)g(y). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Zbrajanjem (2.62) i (2.63), dobivamo

$$h(x+y)g(x-y) = h(x)g(x) - h(y)g(y) \tag{2.64}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Iz (2.62) i (2.64) slijedi

$$s(x+y)g(x-y) = s(x)g(x) - s(y)g(y) \tag{2.65}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Zamjenom y sa $-y$ u (2.64), dobivamo

$$h(x-y)g(x+y) = h(x)g(x) - h(y)g(y)$$

što usporedbom sa (2.64) daje

$$h(x+y)g(x-y) = h(x-y)g(x+y).$$

Neka su $u, v \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Za $x = \frac{1}{2}(u+v)$ i $y = \frac{1}{2}(u-v)$ gornja jednakost prelazi u

$$h(u)g(v) = h(v)g(u).$$

Kako g nije konstantna funkcija, to postoji $v_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g(v_0) \neq 0$. Za $\alpha = \frac{h(v_0)}{g(v_0)} \in \mathbb{R}$ imamo

$$h(x) = \alpha g(x) \tag{2.66}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, razlikujemo dva slučaja s obzirom na vrijednost α.

Prvi slučaj. Neka je $\alpha \neq 0$. Množenjem (2.64) sa α, dobivamo

$$h(x+y)h(x-y) = h(x)^2 - h(y)^2. \tag{2.67}$$

Kako g nije konstantna funkcija, vrijedi da ni h nije konstantna funkcija. Tada je prema teoremu 2.3.1 rješenje jednadžbe (2.67) oblika

$$h(x) = A(x) \tag{2.68}$$

ili

$$h(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b}, \tag{2.69}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksponencijalna funkcija i $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sada iz (2.66) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x), \tag{2.70}$$

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}. \tag{2.71}$$

Uvrštavanjem $y = -x$ u (2.65) te primjenom neparnosti funkcije g i parnosti funkcije s, dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(x)g(x) \tag{2.72}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Stavimo $\delta = s(0)$. Ako vrijedi (2.70), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{\alpha}A(2x) = 2s(x) \cdot \frac{1}{\alpha}A(x),$$

odakle zbog aditivnosti funkcije A slijedi $s(x) = \delta$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada iz (2.61), (2.68) i (2.70) slijedi

$$f(x) = A(x) + \delta \text{ i } g(x) = \beta A(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Tako smo dobili rješenje (2.53).

Ako vrijedi (2.71), tada (2.72) povlači

$$\frac{\delta}{2b\alpha}\Big(E(2x) - E^*(2x)\Big) = 2s(x) \cdot \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}.$$

Kako je $E(2x) - E^*(2x) = [E(x)]^2 - [E^*(x)]^2 = [E(x) - E^*(x)][E(x) + E^*(x)]$, odatle slijedi

$$s(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Iz (2.61) i (2.69) tada slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ &= \gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}, \end{aligned}$$

gdje je $\gamma = \frac{1}{b}$, a iz (2.71) slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\delta b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

gdje je $\beta = \frac{1}{b\delta}$, što nam daje rješenja (2.54).

Drugi slučaj. Neka je $\alpha = 0$. Tada iz (2.66) slijedi da je $h(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa iz (2.61) slijedi

$$f(x) = s(x) \tag{2.73}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zamjenom y sa $-x$ u (2.65) i primjenom parnosti funkcije s i neparnosti funkcije g, dobivamo

$$s(0)g(2x) = 2s(s)g(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Kako mora vrijediti $s(0) \neq 0$, slijedi

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}s(x)g(x), \tag{2.74}$$

gdje je $\delta = s(0)$, odnosno

$$g(x) = \frac{2}{\delta}s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Tada vrijedi, primjenom (2.65) te parnosti funkcije s i neparnosti funkcije g,

$$\begin{aligned}
g(x+y)g(x-y) &= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x+y}{2}\Big)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)s\Big(\frac{x-y}{2}\Big)g\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x+y}{2}\Big)g\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big]\Big[s\Big(\frac{x-y}{2}\Big)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big) - s\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big) + s\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big] \\
&= \frac{4}{\delta^2}\Bigg[\Big[s\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]^2\Big[g\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]^2 - \Big[s\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]^2\Big[g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]^2\Bigg] \\
&= [g(x)]^2 - [g(y)]^2
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 2.3.1, g je oblika

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x) \tag{2.75}$$

ili

$$g(x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2}, \tag{2.76}$$

gdje je $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aditivna funkcija, $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eksponencijalna funkcija, a $\alpha, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Iz (2.75) slijedi da je $g(2x) = \frac{1}{\alpha}A(2x) = \frac{2}{\alpha}A(x)$ te izjednačavanjem s (2.74) slijedi

$$\frac{2}{\delta}s(x)\frac{1}{\alpha}A(x) = \frac{2}{\alpha}A(x),$$

odnosno
$$s(x) = \delta.$$
Sada iz (2.73) slijedi $f(x) = \delta$ što je u kontradikciji s našom pretpostavkom.

Iz (2.76) slijedi da je $g(2x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{E(2x)-E^*(2x)}{2}$. Kako je E eksponencijalna funkcija, to vrijedi $E(x+y) = E(x)E(y)$, odakle slijedi $g(2x) = \frac{1}{\alpha b}\frac{[E(x)]^2-[E^*(x)]^2}{2}$. Izjednačavanjem s (2.74) dobivamo
$$\frac{2}{\delta}s(x)\frac{1}{\alpha b}\frac{E(x)-E^*(x)}{2} = \frac{1}{\alpha b}\frac{[E(x)-E^*(x)][E(x)+E^*(x)]}{2},$$
odnosno
$$\frac{2}{\delta}s(x) = E(x) + E^*(x),$$
pa je
$$s(x) = \delta\frac{E(x)+E^*(x)}{2}.$$
Sada iz (2.73) slijedi da je
$$f(x) = \delta\frac{E(x)+E^*(x)}{2},$$
što nam s (2.76) za $\beta = \frac{1}{\alpha b}$ daje rješenje sadržano u (2.54) za $\gamma = 0$. □

Teorem 2.4.2. *Neka je $d \in \langle 1, \infty\rangle \subset \mathbb{R}$. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava funkcijsku jednadžbu*
$$f(x+y) = f(x)f(y) - d\sin x\sin y \tag{2.77}$$
za sve $x, y \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je f oblika
$$f(x) = a\sin x + \cos x \tag{2.78}$$
ili
$$f(x) = -a\sin x + \cos x, \tag{2.79}$$
gdje je $a = \sqrt{d-1}$.

Dokaz. Lako se provjeri da (2.78) i (2.79) zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (2.77). Preostaje dokazati da su to jedina rješenja funkcijske jednadžbe (2.77).

Prema (2.77), s jedne strane imamo
$$\begin{aligned} f((x+y)+z) &= f(x+y)f(z) - d\sin(x+y)\sin z \\ &= [f(x)f(y)f(z) - d\sin x\sin y f(z)] \\ &\quad -d\sin x\cos y\sin z - d\cos x\sin y\sin z, \end{aligned} \tag{2.80}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x+(y+z)) &= f(x)f(y+z) - d\sin x \sin(y+z) \\ &= [f(x)f(y)f(z) - df(x)\sin y \sin z] \\ &\quad -d\sin x \sin y \cos z - d \sin x \cos y \sin z. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Izjednačavanjem (2.80) i (2.81) te dijeljenjem sa $d \neq 0$, dobivamo

$$\sin x \sin y f(z) + \cos x \sin y \sin z = f(x) \sin y \sin z + \sin x \sin y \cos z.$$

Uvrštavanjem $y = z = \frac{\pi}{2}$, slijedi

$$f(x) = \alpha \sin x + \cos x \tag{2.82}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $\alpha = f(\frac{\pi}{2})$. Iz (2.82) slijedi

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \alpha \sin(x+y) + \cos(x+y) \\ &= \alpha \sin x \cos y + \alpha \cos x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned} \tag{2.83}$$

a također i

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - d\sin x \sin y &= (\alpha \sin x + \cos x)(\alpha \sin y + \cos y) - d \sin x \sin y \\ &= \alpha^2 \sin x \sin y + \alpha \cos x \sin y + \alpha \sin x \cos y \\ &\quad + \cos x \cos y - d \sin x \sin y. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Prema (2.77), izjednačavanjem (2.83) i (2.84) vrijedi

$$(-1+d)\sin x \sin y = \alpha^2 \sin x \sin y,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$, odakle slijedi

$$\alpha^2 = d - 1.$$

Uvrštavanjem $\alpha = a$ i $\alpha = -a$ u (2.82), dobivamo (2.78) i (2.79). □

Teorem 2.4.3. *Neka je (S,+) komutativna polugrupa, a $\mathbb{F}$ polje sa svojstvima:*

(i) $2x = 0$ $(x \in \mathbb{F})$ *povlači* $x = 0$,

(ii) za svaki $x \in \mathbb{F}$ postoji $y \in \mathbb{F}$ takav da je $y^2 = x$.

Neka je σ endomorfizam od S takav da vrijedi $\sigma(\sigma x) = x$ za svaki $x \in S$. Funkcije $f, g \colon S \to \mathbb{F}$, koje nisu konstantne, zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x+\sigma y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2.85}$$

za sve $x, y \in S$, ako i samo ako su jednog od oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \\ g(x) &= k\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= aE(x) \\ g(x) &= bE(x), \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= s(x) - s(x)A(x) \\ g(x) &= ks(x)A(x), \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - a)s(x) + as(x)h(x) \\ g(x) &= bs(x) - bs(x)h(x), \end{aligned} \tag{2.89}$$

za svaki $x \in S$, gdje su $k, a, b \in \mathbb{F}$ takvi da je $k^2 = -1$, $a^2 + b^2 = a$, $A \colon S \to \mathbb{F}$ aditivna funkcija, $t, s, h, E \colon S \to \mathbb{F}$ rješenja funkcijske jednadžbe $F(x + y) = F(x)F(y)$ za sve $x, y \in S$, te vrijedi $A(\sigma x) = A(x)$, $s(\sigma x) = s(x)$, $s \neq 0$, $h(\sigma x) = h(x)$ i $E(\sigma x) = E(x)$ za svaki $x \in S$.

Dokaz. Zamjenom x i y u (2.85), dobivamo

$$f(y + \sigma x) = f(y)f(x) + g(y)g(x).$$

Izjednačavanjem sa (2.85) slijedi

$$f(x + \sigma y) = f(y + \sigma x)$$

za sve $x, y \in S$. Dakle, $f(x + \sigma y) = f(\sigma(x + \sigma y))$ za sve $x, y \in S$, pa je

$$f(\sigma x) = f(x) \tag{2.90}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom x sa σx te y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(\sigma x + y) = f(\sigma x)f(\sigma y) + g(\sigma x)g(\sigma y).$$

Primjenom (2.90) dobivamo

$$f(x + \sigma y) = f(x)f(y) + g(\sigma x)g(\sigma y)$$

te usporedbom s (2.85) slijedi

$$g(x)g(y) = g(\sigma x)g(\sigma y) \tag{2.91}$$

za sve $x, y \in S$. Kako g nije konstantna funkcija, postoji $y_0 \in S$ takav da $g(y_0) \neq 0$ pa uvrštavanjem $y = y_0$ u (2.91), dobivamo

$$g(x) = \alpha g(\sigma x), \tag{2.92}$$

gdje je $\alpha = \frac{g(\sigma y_0)}{g(y_0)}$. Iz (2.92) tada slijedi

$$g(\sigma x) = \alpha g(\sigma(\sigma x)) = \alpha g(x) = \alpha \cdot \alpha g(\sigma x),$$

odnosno

$$g(\sigma x) = \alpha^2 g(\sigma x)$$

za svaki $x \in S$, pa slijedi da je $\alpha^2 = 1$. Razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Neka je $\alpha = -1$. Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = -g(x) \tag{2.93}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

odakle primjenom (2.90) i (2.93) slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

Zbrajanjem sa (2.85) dobivamo

$$f(x + y) + f(x + \sigma y) = 2f(x)f(y) \tag{2.94}$$

za sve $x, y \in S$. Prema teoremu 1.1.4 slijedi da je rješenje funkcijske jednadžbe (2.94) dano sa

$$f(x) = \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2}, \tag{2.95}$$

gdje je $t\colon S \to \mathbb{F}$ rješenje funkcijske jednadžbe $t(x + y) = t(x)t(y)$ za sve $x, y \in S$.

Uvrštavanjem (2.95) u (2.85) dobivamo

$$\begin{aligned}
g(x)g(y) &= f(x + \sigma y) - f(x)f(y) \\
&= \frac{t(x + \sigma y) + t\big(\sigma(x + \sigma y)\big)}{2} - \frac{t(x) + t(\sigma x)}{2} \cdot \frac{t(y) + t(\sigma y)}{2} \\
&= \frac{2t(x)t(\sigma y) + 2t(\sigma x)t(y)}{4} - \frac{t(x)t(y) + t(\sigma x)t(y) + t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\
&= \frac{t(x)t(\sigma y) + t(\sigma x)t(y) - t(x)t(y) - t(\sigma x)t(\sigma y)}{4} \\
&= -\left[\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}\right]\left[\frac{t(y) - t(\sigma y)}{2}\right]
\end{aligned}$$

za sve $x, y \in S$. Uvrštavanjem $y = x$ slijedi

$$[g(x)]^2 = -\left[\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2}\right]^2$$

pa je

$$g(x) = k\frac{t(x) - t(\sigma x)}{2},$$

gdje je $k^2 = -1$ što nam daje rješenje (2.86).

Drugi slučaj. Neka je $\alpha = 1$. Tada iz (2.92) slijedi

$$g(\sigma x) = g(x) \tag{2.96}$$

za svaki $x \in S$. Zamjenom y sa σy u (2.85), dobivamo

$$f(x + y) = f(x)f(\sigma y) + g(x)g(\sigma y),$$

te primjenom (2.90) i (2.96), slijedi

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{2.97}$$

za sve $x, y \in S$.

Prema (2.97), s jedne strane imamo

$$\begin{aligned} f((x + y) + z) &= f(x + y)f(z) + g(x + y)g(z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + g(x)g(y)f(z) + g(x + y)g(z), \end{aligned}$$

a s druge

$$\begin{aligned} f(x + (y + z)) &= f(x)f(y + z) + g(x)g(y + z) \\ &= f(x)f(y)f(z) + f(x)g(y)g(z) + g(x)g(y + z). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem desnih strana, dobivamo

$$g(x + y)g(z) - f(x)g(y)g(z) = g(x)g(y + z) - g(x)g(y)f(z). \tag{2.98}$$

Oduzimanjem $g(x)f(y)g(z)$ s obje strane jednakosti, dobivamo

$$[g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)]g(z) = [g(y + z) - f(y)g(z) - f(z)g(y)]g(x)$$

za sve $x, y \in S$. Za $z = z_0$, obzirom da je $g(z_0) \neq 0$, imamo

$$g(x + y) - f(x)g(y) - f(y)g(x) = g(x)k(y), \tag{2.99}$$

gdje je $k(y) = [g(z_0)]^{-1}[g(y + z_0) - f(y)g(z_0) - f(z_0)g(y)]$.

Primjenom (2.99) u (2.98), dobivamo

$$g(z)[f(y)g(x) + g(x)k(y)] = g(x)[f(y)g(z) + g(y)k(z)],$$

odnosno

$$g(x)k(y)g(z) = g(y)k(z)g(x).$$

Kako g nije nul-funkcija, slijedi da je

$$k(y) = 2\alpha g(y), \tag{2.100}$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{F}$.

Uvrštavanjem (2.100) u (2.99), dobivamo

$$g(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) + 2\alpha g(x)g(y)$$

za sve $x, y \in S$. Množenjem prethodnog izraza sa λ i zbrajanjem sa (2.97), dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) + \lambda f(x)g(y) \\ &\quad + \lambda g(x)f(y) + 2\alpha\lambda g(x)g(y). \end{aligned}$$

Proširimo li dobiveni izraz tako da možemo faktorizirati, dobivamo

$$\begin{aligned} f(x + y) + \lambda g(x + y) &= f(x)f(y) + \lambda g(x)f(y) + \lambda f(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) \\ &\quad - \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y) + 2\alpha\lambda g(x)g(y) \\ &= [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] + g(x)g(y)[\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1]. \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je

$$f(x + y) + \lambda g(x + y) = [f(x) + \lambda g(x)][f(y) + \lambda g(y)] \tag{2.101}$$

ako i samo ako λ zadovoljava jednakost

$$\lambda^2 - 2\lambda\alpha - 1 = 0,$$

Neka je

$$s(x) = f(x) + \lambda g(x),$$

odnosno

$$f(x) = s(x) - \lambda g(x). \tag{2.102}$$

Tada iz (2.101) slijedi da je $s(x + y) = s(x)s(y)$ za sve $x, y \in S$. Uvrštavanjem (2.102) u (2.97), dobivamo

$$s(x + y) - \lambda g(x + y) = [s(x) - \lambda g(x)][s(y) - \lambda g(y)] + g(x)g(y),$$

odnosno

$$s(x)s(y) - \lambda g(x+y) = s(x)s(y) - \lambda g(x)s(y) - \lambda s(x)g(y) + \lambda^2 g(x)g(y) + g(x)g(y)$$

pa je

$$\lambda g(x+y) = \lambda g(x)s(y) + \lambda s(x)g(y) - (\lambda^2+1)g(x)g(y). \tag{2.103}$$

Ako je s nul-funkcija, tada iz (2.103) slijedi

$$g(x+y) = -\frac{(\lambda^2+1)g(x)g(y)}{\lambda} \tag{2.104}$$

za sve $x, y \in S$. Neka je

$$E(x) = -\frac{(\lambda^2+1)g(x)}{\lambda}. \tag{2.105}$$

Tada iz (2.104) slijedi

$$\begin{aligned} E(x+y) &= -\frac{(\lambda^2+1)g(x+y)}{\lambda} \\ &= -\frac{(\lambda^2+1)}{\lambda} \cdot (-1)\frac{(\lambda^2+1)g(x)g(y)}{\lambda} \\ &= E(x)E(y). \end{aligned}$$

Iz (2.105) slijedi

$$g(x) = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}E(x)$$

za svaki $x \in S$, odnosno $g(x) = bE(x)$, gdje je $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$. Kako je s nul-funkcija, iz (2.102) slijedi da je $f(x) = -\lambda g(x)$ za svaki $x \in S$, pa je

$$f(x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}E(x),$$

odnosno $f(x) = aE(x)$, gdje je $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$. Tada vrijedi

$$a^2 + b^2 = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+1)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+1)^2} = \frac{\lambda^2(\lambda^2+1)}{(\lambda^2+1)^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1} = a.$$

To nam daje rješenje (2.87).

Ako s nije nul-funkcija, tada postoji $x_0 \in S$ takav da je $s(x_0) \neq 0$. Kako je $s(x+y) = s(x)s(y)$ za sve $x, y \in S$, to za svaki $x \in S$ vrijedi

$$s(x_0) = s((x_0 - x) + x) = s(x_0 - x)s(x).$$

Ako postoji $x \in S$ takav da je $s(x) = 0$, tada je $s(x_0) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $s(x) \neq 0$ za svaki $x \in S$. Dijeljenjem jednadžbe (2.103) sa $s(x+y)$, dobivamo

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} - \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right)\left(\frac{\lambda g(y)}{s(y)}\right). \tag{2.106}$$

Ako je $\lambda^2 + 1 = 0$, tada je

$$\frac{\lambda g(x+y)}{s(x+y)} = \frac{\lambda g(x)}{s(x)} + \frac{\lambda g(y)}{s(y)} \tag{2.107}$$

za sve $x, y \in S$. Neka je

$$A(x) = \frac{\lambda g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$g(x) = \frac{s(x)A(x)}{\lambda}. \tag{2.108}$$

Iz (2.107) slijedi da je $A\colon S \to \mathbb{F}$ aditivna funkcija. Uvrštavanjem (2.108) u (2.102), dobivamo

$$f(x) = s(x) - s(x)A(x),$$

što nam sa (2.108) daje rješenje (2.88) za $k = \frac{1}{\lambda}$. Kako je $\lambda^2 + 1 = 0$, slijedi da je $k^2 = -1$.

Neka je $\lambda^2 + 1 \neq 0$. Definirajmo

$$h(x) = 1 - \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right). \tag{2.109}$$

Iz (2.106) tada slijedi

$$h(x+y) = h(x)h(y)$$

za sve $x, y \in S$. Iz (2.109) slijedi

$$h(x) - 1 = -\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \cdot \frac{g(x)}{s(x)},$$

odnosno

$$h(x) - 1 = \frac{g(x)}{bs(x)},$$

gdje je $b = -\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, pa je

$$g(x) = bs(x)h(x) - bs(x).$$

Ako je $a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$, tada je $-\lambda b = a$ te iz (2.102) slijedi da je

$$f(x) = s(x) - \lambda bs(x)h(x) + \lambda bs(x),$$

odnosno

$$f(x) = (1 + a)s(x) + as(x)h(x).$$

Kako također vrijedi $a^2 + b^2 = a$, imamo rješenje (2.89).

Preostaje dokazati da vrijedi $s(\sigma x) = s(x)$, $h(\sigma x) = h(x)$ i $E(\sigma x) = E(x)$ za svaki $x \in S$.

Primjenom (2.102), (2.90) i (2.96), imamo

$$s(\sigma x) = f(\sigma x) + \lambda g(\sigma x) = f(x) + \lambda g(x) = s(x)$$

za svaki $x \in S$.

Kako vrijedi $s(\sigma x) = s(x)$ za svaki $x \in S$, primjenom (2.109) i (2.96), imamo

$$h(\sigma x) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(\sigma x)}{s(\sigma x)}\right) = 1 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda g(x)}{s(x)}\right) = h(x)$$

za svaki $x \in S$.

Primjenom (2.105) i (2.96), imamo

$$E(\sigma x) = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(\sigma x)}{\lambda} = -\frac{(\lambda^2 + 1)g(x)}{\lambda} = E(x)$$

za svaki $x \in S$. Ovime smo završili dokaz teorema. □

Bibliografija

[1] C. Efthimiou, Introduction to functional equations, MSRI Mathematical Circles Library 6, Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[2] P. Kannappan, Functional equations and inequalities with applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[3] P.K. Sahoo, P. Kannappan, Introduction to functional equations, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[4] C.G. Small, Functional equations and how to solve them, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007.

Sažetak

Trigonometrijski identiteti vode do takozvanih trigonometrijskih funkcijskih jednadžbi čija rješenja uključuju i neke druge funkcije osim trigonometrijskih. U ovom radu su dana opća i neprekidna rješenja d'Alembertove funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

kosinus-sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y),$$

sinus-kosinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)f(x-y)=[f(x)]^2-[f(y)]^2$$

i poopćene sinus funkcijske jednadžbe

$$f(x+y)g(x-y)=f(x)g(x)-f(y)g(y).$$

Summary

Trigonometric identities lead to the so-called trigonometric functional equations whose solutions include some other functions besides trigonometric. In this thesis are given general and continuous solutions of the d'Alembert functional equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y),$$

the cosine-sine functional equation

$$f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y),$$

the sine-cosine functional equation

$$f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

the sine functional equation

$$f(x + y)f(x - y) = [f(x)]^2 - [f(y)]^2$$

and a generalization of the sine functional equation

$$f(x + y)g(x - y) = f(x)g(x) - f(y)g(y).$$

Životopis

Rođena sam 17.2.1993. u Varaždinu gdje sam pohađala Prvu osnovnu školu. Nastavila sam školovanje 2007. godine na Drugoj gimnaziji Varaždin, opći smjer. U srednjoj školi sam stekla veći interes za matematiku, te sam odlučila upisati nastavnički smjer Matematičkog odsjeka na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2011. godine. Oduvijek sam imala interes za poučavanjem i prenošenjem vlastitog znanja na druge, zbog čega sam 2014. godine upisala i diplomski studij istoga smjera.