SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivona Karmelić

DISIPATIVNA BURGERSOVA JEDNADŽBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, Srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Onima koji su tu u mojim usponima i padovima - majci, tajci i Maroju

Sadržaj

Uvod

U ovom radu ćemo promatrati nelinearnu disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{1}$$

uz određene početne uvjete. Konstanta $\varepsilon > 0$ se naziva koeficijent viskoznosti, pa se gornja jednadžba ponekad naziva viskozna Burgersova jednadžba. Uz viskoznu Burgersovu jednadžbu od interesa je i neviskozna Burgersova jednadžba

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2}$$

koja predstavlja skalarni zakon sačuvanja. Pokaže se ([4]) da za $\varepsilon \to 0$ rješenje od (1), uz neke dodatne uvjete, konvergira prema rješenju od (2).

Burgersova jednadžba ima široku primjenu u mehanici fluida, kod modeliranja vode u nezasićenom ulju, dinamike tla u vodi, turbulentne difuzije, kozmologije i seizmologije. Prvi ju je uveo engleski matematičar H. Bateman. Nizozemski matematičar J. M. Burgers ju je predložio kao matematički model za turbulenciju ([3]). Hopf i Cole su je proučavali u kontekstu dinamike plinova.

U Poglavlju 1 definirat ćemo važne pojmove iz funkcionalne analize i pokazati neke rezultate. Od posebnog interesa će nam biti Hilbertovi i Banachovi prostori, koje ćemo definirati i navesti važne primjere tih prostora i njihova svojstva.

U Poglavlju 2 definirat ćemo posebnu klasu linearnih operatora na Banachovim prostorima, takozvane sektorijalne operatore, i pokazati neka njihova korisna svojstva.

U Poglavlju 3 promatrat ćemo nelinearni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t,\, u),\ t > t_0 \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

pri čemu ćemo pretpostavljati da je A sektorijalan operator i f lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u. Navest ćemo i dokazati nužne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja gornjeg problema.

U Poglavlju 4 ćemo promatrati inicijalni problem za Burgersovu jednadžbu

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \varepsilon u_{xx}, \ (t, \ x) \in (0, \ \infty) \times \Omega, \ \varepsilon > 0, \\ u(0, \ x) &= u_0(x), \ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je operator $A = \varepsilon u_{xx}$ sektorijalan i funkcija $f = uu_x$ lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u, što će nam omogućiti da pokažemo da disipativna Burgersova jednadžba ima jedinstveno rješenje. Jednadžbu (1) ćemo linearizirati Hopf - Cole transformacijom kako bi dobili eksplicitnu formulu za rješenje.

Poglavlje 1

Prostori funkcija

1.1 Banachovi i Hilbertovi prostori

U ovom poglavlju ćemo definirati neke pojmove iz funkcionalne analize i iskazat ćemo Banachov teorem o fiksnoj točki. Osnovne reference su [1], [2], [7], [8], [10] i [11]. Od posebnog interesa će nam biti potpuni unitarni prostori, takozvani Hilbertovi prostori, čiju definiciju i važne primjere navodimo u nastavku.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da niz vektora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u normiranom prostoru X konvergira prema vektoru $x \in X$ ako*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev ako

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq m,\ n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definicija 1.1.2. *Kažemo da je normiran prostor X potpun ili Banachov prostor ako svaki Cauchyjev niz u X kovergira u X. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira prema vektoru $x \in X$ ako je $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, pri čemu je (s_n) niz parcijalnih suma; $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.*
Kažemo da red konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Propozicija 1.1.4. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz u normiranom prostoru X. Tada vrijedi*

1. *Skup $\{x_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen.*

2. *Za svaki niz pozitivnih brojeva* (ε_n) *postoji podniz* $(x_{p(n)})$ *niza* (x_n) *sa svojstvom*

$$\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \varepsilon_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. 1. Za $\varepsilon = 1$ postoji n_0 takav da

$$n_0 \leq m, \ n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Posebno, za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| < 1 + \|x_{n_0}\|.$$

2. Neka je zadan niz (ε_n). Nađimo n_1 takav da

$$n_1 \leq m, \ n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon_1.$$

Stavimo $p(1) = n_1$. Nadalje, postoji $n_2 > n_1$ takav da

$$n_2 \leq m, \ n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon_2.$$

Stavimo $p(2) = n_2$. Sada matematičkom indukcijom dolazimo do niza $(x_{p(n)})$ za koji vrijedi tvrdnja.

□

Propozicija 1.1.5. *Neka Cauchyjev niz* (x_n) *u normiranom prostoru* X *ima podniz* $(x_{p(n)})$ *koji konvergira prema* $x \in X$. *Tada je* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Dokaz. Za zadani ε možemo naći $n_1$takav da

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i možemo naći n_2 takav da

$$n, \ m \geq n_2 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, \ n_2\}$. Za $n \geq n_0$ je $p(n) \geq n \geq n_0$. Sada za $n \geq n_0$ imamo

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{p(n)}\| + \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorem 1.1.6. *Normiran prostor* X *je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *iz* X *kovergira u* X.

Dokaz. Neka je X potpun i $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Tada je niz parcijalnih suma tog reda Cauchyjev pa za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Također, za $m > n \geq n_0$ vrijedi

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Dakle, niz (s_n) je Cauchyjev. Kako je prostor X potpun, red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ kovergira u X.

Obratno, neka svaki apsolutno konvergentan red iz X konvergira u X. Neka je (x_n) proizvoljan Cauchyjev niz u X. Na temelju Propozicije 1.1.4 možemo naći podniz $(x_{p(n)})$ niza (x_n) takav da vrijedi

$$\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \frac{1}{n^2}.$$

Očito red $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{p(k+1)} - x_{p(k)}\|$ konvergira.

Po pretpostavci, konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} [x_{p(k+1)} - x_{p(k)}]$ pa, po definiciji, konvergira i njegov niz parcijalnih suma (t_n); $t_n = \sum_{k=1}^{n} [x_{p(k+1)} - x_{p(k)}] = x_{p(n+1)} - x_{p(1)}$.

Dakle, postoji $x \in X$ takav da $x = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} x_{p(n+1)} - x_{p(1)}$, to jest $\lim_{n\to\infty} x_{p(n)} = x + x_{p(1)}$. Iz Propozicije 1.1.5 slijedi $\lim_{n\to\infty} x_n = x + x_{p(1)}$ pa zaključujemo da je prostor X potpun. □

1.2 L^p prostori

Neka je $(\Omega,\ M,\ \mu)$ prostor mjere i f kompleksna funkcija na Ω, izmjeriva u odnosu na σ-algebru M (u $\mathbb{C}$ promatramo σ-algebru generiranu svim otvorenim skupovima).

Za $1 \leq p < \infty$ definiramo

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Poistovjećujući funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, definiramo

$$L^p(\Omega) = \{f :\ \Omega \to \mathbb{C} :\ f \text{ izmjeriva, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Promatramo prostor

$$L^2(\Omega) = \{f :\ \Omega \to \mathbb{C} :\ f \text{ izmjeriva, } \int_\Omega |f|^2 \, d\mu < \infty\}, \tag{1.1}$$

na kojem je definiran skalarni produkt

$$(f|g) = \int_\Omega f\bar{g} \, d\mu$$

i iz njega izvedena norma

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza koji se može pronaći u [1].

Teorem 1.2.1. $L^2(\Omega)$ *je Hilbertov prostor sa normom* $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Više o svojstvima L^p prostora i o prostorima mjere može se pronaći u [1] i [7].

1.3 Prostori Soboljeva

Prostori Soboljeva ([2], [10]) su bitna klasa beskonačnodimenzionalnih Banachovih prostora koji u svojoj definiciji sadrže slabu derivaciju (Definicija 1.3.3). U posebnom slučaju (Definicija 1.3.6) prostori Soboljeva su unitarni, dakle Hilbertovi prostori.

$W^{k,p}$ prostori

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup.

Definicija 1.3.1. *Nosač funkcije* $f \ \Omega \to \mathbb{R}$ *definiramo kao*

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega \ \ f(x) \neq 0\}}.$$

Definiramo prostor test funkcija kao

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \ \text{supp } f \subset \Omega\}.$$

Definicija 1.3.2. *Kažemo da je linearan funkcional* f *na* $C_c^\infty(\Omega)$ *distribucija ako za svaki kompaktni skup* $K \subset \Omega$ *postoji konstanta* $C < \infty$ *i* $k \in \mathbb{N}$ *tako da vrijedi*

$$|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{k,\infty}, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \text{supp } \varphi \subset K.$$

Za $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *distribuciju definiramo kao*

$$f_u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Skup svih distribucija označavamo s $D'(\Omega)$.

Definicija 1.3.3. *Neka je* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *i* α *multiindeks. Kažemo da* u *ima slabu derivaciju ako postoji* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tako da vrijedi*

$$(-1)^\alpha \int_\Omega uD^\alpha\varphi = \int_\Omega v\varphi, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Takav v *je jedinstven* ([10]) *i pišemo* $D^\alpha u = v$.

Sada smo u mogućnosti definirati takozvane prostore Soboljeva.

Definicija 1.3.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}_0$ *i* $p \in [1, \ +\infty]$. *Definiramo prostore*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \text{ postoji}, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha \text{ multiindex}, \ |\alpha| \leq k\}.$$

Na prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ *definiramo normu na sljedeći način*

- $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $p < \infty$;
- $\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Teorem 1.3.5. *Prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.*

H^k prostori

Definicija 1.3.6. *Za $p = 2$ i $k \in \mathbb{N}_0$ definiramo prostore*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \tag{1.3}$$

sa normom

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Za $u,\ v \in H^k(\Omega)$ definiramo unutarnji produkt sa

$$(u|v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega (D^\alpha u)(\overline{D^\alpha v}).$$

Teorem 1.3.7. *$H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$.*

Od interesa će nam biti i sljedeći prostori

$$H^k_0(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega) :\ u = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H^k(\Omega), \tag{1.5}$$

sa normom naslijeđenom iz $H^k(\Omega)$.

Više o svojstvima prostora Soboljeva, kao i dokaze gornjih teorema, može se pronaći u [10].

1.4 Banachov teorem o fiksnoj točki

Definicija 1.4.1. *Neka je X Banachov prostor i $f : X \to X$ funkcija. Kažemo da je $x \in X$ fiksna točka ako vrijedi $f(x) = x$.*

Definicija 1.4.2. *Neka je X Banachov prostor. Kažemo da je funkcija $f : X \to X$ Lipschitzova ako postoji $L > 0$ takav da*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, \ y \in X.$$

Kažemo da je funkcija f

- *neekspanzivna ako je $L = 1$,*
- *kontrakcija ako je $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|, \ \forall x, \ y \in X, \ x \neq y$,*
- *κ-kontrakcija ako je $L = \kappa < 1$.*

Teorem 1.4.3. (Banachov teorem o fiksnoj točki / Princip kontrakcije) *Neka je X Banachov prostor, $Y \subseteq X$ zatvoren podskup i $f : Y \to Y$ κ-kontrakcija. Tada f ima točno jednu fiksnu točku x.*

Gornji teorem navodimo bez dokaza koji se može pronaći u [2] i [11]. Bit će nam važan za dokaz jedinstvenosti rješenja nelinearnog problema (3.3). Koristit ćemo ga u dokazu Teorema 3.2.3.

Poglavlje 2

Sektorijalni operatori

Poglavlje započinjemo primjerom, a kasnije ćemo generalizirati i dati definiciju sektorijalnih operatora i navesti neka njihova svojstva.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Definiramo operator A na sljedeći način

$$Au(x) = -K\frac{d^2u}{dx^2},\ x \in \Omega \tag{2.1}$$

pri čemu je u glatka funkcija na Ω takva da $u(x) = 0$, za $x \in \partial\Omega$.

Za glatke funkcije u i v vrijedi

$$(Au,\ u) = -K\int_{\Omega} u''(x)u(x)\,dx = K\int_{\Omega}(u'(x))^2\,dx \geq 0,$$

i

$$(Au,\ v) = -K\int_{\Omega} u''(x)v(x)\,dx = (u,\ Av).$$

Koristeći Friedrichsov teorem ([6]), zaključujemo da je A proširenje hermitskog gusto definiranog linearnog operatora na $L^2(\Omega)$. Vrijedi

$$D(A) = \{u \in L^2(\Omega) :\ Au \in L^2(\Omega)\} = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{2.2}$$

Spektar operatora A je

$$\sigma(A) = \{\lambda_n = \frac{k\pi^2}{|\Omega|^2}n^2 :\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$$

s pripadnim svojstvenim funkcijama

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{|\Omega|}}\sin\left(\frac{n\pi x}{|\Omega|}\right)$$

pri čemu je

$$(u_n|u_m) = \delta_{nm},\ n,\ m = 1,\ 2, \ldots$$

i

$$Au_n = \lambda_n u_n,\ n = 1,\ 2, \ldots$$

Projekcija na n-tu svojstvenu funkciju je dana s

$$E_n(v)(x) = u_n(x)(u_n|v)$$

Nadalje, imamo

$$A^\alpha u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha E_n(u)$$

i

$$(\lambda I - A)^{-1} u = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} E_n(u),\ \lambda \neq \lambda_n,\ \forall n.$$

Iskoristimo li činjenicu

$$||u||^2 = \int_\Omega u^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n|u)^2$$

slijedi da za svaki $\alpha \geq 0$ vrijedi

$$D(A^\alpha) = \{v \in L^2(\Omega) :\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} (u_n,\ v)^2 < \infty\}.$$

Posebno ćemo promatrati operator A, definiran sa (2.1), na prostoru $L^2(\Omega)$ i pokazat ćemo da je taj operator sektorijalan (Poglavlje 4.2).

Prije toga navodimo definiciju i neka posebna svojstva sektorijalnih operatora.

2.1 Osnovni pojmovi i svojstva

Definicija 2.1.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ zatvoren ako*

$$x_n \to x \text{ u } X \text{ i } Ax_n \to y \text{ u } Y \Rightarrow Ax = y.$$

Definicija 2.1.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator. Rezolventni skup od A definiramo sa*

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A),$$

gdje je sa

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nije bijekcija}\}$$

definiran spektar linearnog operatora. Za $\lambda \in \rho(A)$ definiramo rezolventni operator $R_\lambda : X \to X$ sa

$$R_\lambda u = (\lambda I - A)^{-1} u.$$

Teorem 2.1.3. *Za $\lambda, \mu \in \rho(A)$ vrijedi*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu. \tag{2.3}$$

Definicija 2.1.4. *Neka je X Banachov prostor i A linearan operator na X. Kažemo da je A sektorijalan operator ako je zatvoren gusto definiran operator takav da je za neke $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M > 1$ i a realan, skup*

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \le |\arg(\lambda - a)| \le \pi, \ \lambda \ne a\} \subset \rho(A)$$

i

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda - a|}, \ \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

Definicija 2.1.5. *Analitička polugrupa na Banachovom prostoru X je familija $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ neprekidnih linearnih operatora na X koja zadovoljava*

- *$T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t+s)$ za $t, s \ge 0$*
- *$T(t)x \to x$ kada $t \to 0^+$, za svaki $x \in X$*
- *$t \to T(t)x$ je realna analitička za $t \in (0, \infty)$, za svaki $x \in X$.*

Infinitezimalni generator L gornje polugrupe je definiran sa

$$Lx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x \right),$$

čija je domena dana sa

$$D(L) = \{x \in X : Lx \text{ postoji}\}$$

i pišemo $T(t) = e^{Lt}$.

Teorem 2.1.6. *Ako je A sektorijalan operator, tada je $-A$ infinitezimalni generator analitičke polugrupe $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$, pri čemu je*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} \, d\lambda$$

gdje je Γ kontura u $\rho(-A)$, pri čemu $\arg \lambda \to \pm\theta$ *kada $|\lambda| \to \infty$, za neki $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.*

Nadalje, e^{-At} može biti analitički nastavljen u sektor $\{t \neq 0 : |arg\ t| < \varepsilon\}$ koji sadrži pozitivnu realnu os, i ako je $\operatorname{Re} \lambda > a$ *za $\lambda \in \sigma(A)$, tada za $t > 0$ vrijedi*

$$\left\| e^{-At} \right\| \leq C e^{-at}$$

i

$$\left\| A e^{-At} \right\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

za neku konstantu C. Konačno, $\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At}$ za $t > 0$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a = 0$ i $\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda + |\delta|}$ za $|\pi - \arg \lambda| \geq \phi$ za neke konstante $\delta,\ M > 0$ i $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Inače, zamijenimo A sa $A + aI$.

Odaberimo $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$ i definirajmo e^{-At} gornjim integralom. Uočimo da gornji integral konvergira apsolutno ako je $t > 0$. Po Cauchyjevom teoremu vrijedi da integral ostaje nepromijenjen ako konturu Γ pomaknemo u desno za malu udaljenost. Označimo pomaknutu konturu sa Γ'. Tada za $t,\ s > 0$ imamo

$$\begin{aligned} e^{-At} e^{-As} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} e^{\mu t} (\mu I + A)^{-1} \, d\mu \, d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} \left[(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1} \right] \, d\mu \, d\lambda \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili rezolventni identitet (2.3). No, za $\lambda \in \Gamma$, $\mu \in \Gamma'$ vrijedi

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} \, d\lambda = 0,$$

i

$$\int_{\Gamma'} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} \, d\mu = 2\pi i \, e^{\lambda s}$$

pa je

$$e^{-At} e^{-As} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)} (\lambda I + A)^{-1} \, d\lambda = e^{-A(t+s)}.$$

Dakle, $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ je polugrupa. Uočimo da za $\varepsilon \in (0,\ \theta - \frac{\pi}{2})$ integral konvergira uniformno u svakom kompaktnom skupu u $\{|\arg \lambda| < \varepsilon\}$ pa je tu polugrupa analitička.
Stavimo li $\mu = \lambda t$ uz $t > 0$ imamo

$$\left\|e^{-At}\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\mu}\left(\frac{\mu}{t}I + A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\| \leq \frac{M}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} |e^{\mu}|\,\frac{|d\mu|}{|\mu|},$$

i

$$\left\|Ae^{-At}\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\delta}\int\limits_{\Gamma} |e^{\mu}|\,\frac{|d\mu|}{|\mu|}\cdot\frac{1}{t} = \frac{C}{t}.$$

Pokažimo da vrijedi $e^{-At}x \to x$ kad $t \to 0^+$ za svaki $x \in X$.
Kako je $\left\|e^{-At}\right\| \leq C$ za svaki $t \geq 0$ i $D(A)$ je gust skup u X, dovoljno je pokazati tvrdnju za $x \in D(A)$.

Neka je $x \in D(A)$ i $t > 0$. Imamo sljedeće

$$e^{-At}x - x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\left[(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}\right]x\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{-1}e^{\lambda t}A(\lambda I + A)^{-1}x\,d\lambda,$$

pa je

$$\left\|e^{-At}x - x\right\| \leq C\,\|Ax\|\,t.$$

Dakle, $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ je jako neprekidna polugrupa koja se proširuje u analitičku polugrupu u $|\arg t| < \varepsilon$.

Nadalje, za $x \in D(A)$ i $t > 0$ vrijedi

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\,(\lambda I + A)\,(\lambda I + A)^{-1}\,x\,d\lambda = 0.$$

Za $x \in D(A)$ i $t \to 0^+$ slijedi

$$\frac{1}{t}\left(e^{-At}x - x\right) = -\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t} e^{-As}Ax\,ds \to -Ax.$$

Dakle, $-A$ je sadržan u generatoru G polugrupe.

Pokažimo da je $-A$ zaista generator. Za $\lambda \geq 0$ definiramo

$$R(\lambda)x = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}e^{-At}\,x\,dt.$$

Za svaki x je $e^{-At}x \in D(A)$ za $t > 0$ i za $\delta > 0$ vrijedi

$$A \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x \, dt = e^{-\lambda\delta} e^{-A\delta} x - \lambda \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x \, dt.$$

Kako je A zatvoren, $R(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$ za svaki $\lambda \geq 0$, $x \in X$. No, ako je $x \in D(G)$ onda je $e^{-At}x \in D(G)$ za svaki $t \geq 0$ i $Ge^{-At}x = \frac{d}{dt} e^{-At}x = e^{-At}Gx$. Sličan argument pokazuje da vrijedi

$$R(\lambda)(\lambda - G)x = x, \; x \in D(G).$$

Dakle, $D(G) \subset R(R(\lambda)) \subset D(A)$ pa je $-A = G$. □

Vrijedi i obrat gornjeg teorema, to jest ako $-A$ generira analitičku polugrupu, onda je A sektorijalan operator ([6]). Više o teoriji polugrupa može se pronaći u [4].

Definicija 2.1.7. *Neka je A sektorijalan operator takav da* $\mathrm{Re}\, \sigma(A) > 0$. *Tada za svaki $\alpha > 0$ definiramo*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \tag{2.4}$$

Nadalje, sa A^{α} definiramo inverz od $A^{-\alpha}$ i $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$. Za $\alpha = 0$ imamo identitetu na X.

U nastavku navodimo neka svojstva operatora A^{α} bez dokaza. Osnovne reference su [6], [9] i [10].

Teorem 2.1.8. *Ako je A sektorijalan operator na X sa svojstvom Re $\sigma(A) > 0$, tada je za svaki $\alpha > 0$ operator $A^{-\alpha}$ ograničen linearan operator koji je injektivan na X koji zadovoljava $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ za $\alpha, \beta > 0$. Nadalje, za $0 < \alpha < 1$ vrijedi*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{0}^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} \, d\lambda.$$

Teorem 2.1.9. *Neka je A sektorijalan operator i Re $\sigma(A) > \delta > 0$. Tada za $\alpha \geq 0$ postoji $C_{\alpha} < \infty$ takva da*

$$\left\| A^{\alpha} e^{-At} \right\| \leq C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \; za \; t > 0.$$

Ako je $0 < \alpha \leq 1$ i $x \in D(A^{\alpha})$, tada vrijedi

$$\left\| \left(e^{-At} - 1 \right) x \right\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^{\alpha} \left\| A^{\alpha} x \right\|.$$

Nadalje, C_{α} je ograničena za svaki α iz nekog kompaktnog intervala u $(0, \infty)$. Štoviše, C_{α} je ograničena i za $\alpha \to 0^{+}$.

Definicija 2.1.10. *Neka je A sektorijalan operator na Banachovom prostoru X. Za svaki $\alpha \geq 0$ definiramo*

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha)$$

sa normom

$$\|x\|_\alpha = \left\|A_1^\alpha x\right\|, \; x \in X^\alpha,$$

pri čemu je $A_1 = A + aI$ i a odabran tako da $Re\, \sigma(A_1) > 0$. Nadalje, različiti izbori broja a daju ekvivalentne norme na X^α.

Teorem 2.1.11. *Vrijedi sljedeće*

1. *Ako je A sektorijalan operator na Banachovom prostoru X, onda je X^α Banachov prostor s normom $\|\cdot\|_\alpha$ za $\alpha \geq 0$ i $X^0 = X$.*
2. *Za $\alpha \geq \beta \geq 0$ prostor X^α je gust potprostor od X^β s neprekidnim ulaganjem.*
3. *Ako A ima kompaktni rezolventni skup, ulaganje $X^\alpha \subset X^\beta$ je kompaktno za $\alpha > \beta \geq 0$.*

Sve tvrdnje navedene u ovom poglavlju, kao i njihovi dokazi, mogu se pronaći u [6].

Poglavlje 3

Egzistencija i jedinstvenost

U ovom poglavlju promatramo inicijalni problem najprije za linearnu, a zatim i za nelinearnu jednadžbu. Navest ćemo nužne uvjete za egzistenciju rješenja koje ćemo iskoristiti da bismo pokazali egzistenciju rješenja nelinearne disipativne Burgersove jednadžbe (Poglavlje 4.2). Osnovne reference su nam [6], [9] i [10].

3.1 Linearni problem

Promatramo homogeni linearni Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \ t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pri čemu je A sektorijalan operator na Banachovom prostoru X i u_0 zadan.

Definicija 3.1.1. *Rješenje problema* (3.1) *na* $(0,\ T)$ *je neprekidna funkcija* $u:\ [0,\ T) \to X$ *za koju vrijedi*

- *u je neprekidno diferencijabilna na* $(0,\ T)$*,*
- *$u(t) \in D(A)$ za $t \in (0,\ T)$,*
- *u zadovoljava* (3.1) *na* $(0,\ T)$*, uz $u(t) \to u_0$ na X kad $t \to 0^+$*

Iz Teorema 2.1.6 slijedi da je $u(t) = e^{-At}u_0$ rješenje problema (3.1). Pokažimo da je to jedinstveno rješenje.

Neka je $0 \le s \le t < T$ i $v(t,\ s) = e^{-A(t-s)}u(s)$, pri čemu je $u(\cdot)$ proizvoljno rješenje od

(3.1) na $(0,\ T)$. Tada je preslikavanje $s \to v(t,\ s)$ neprekidno na $0 \leq s \leq t$ i neprekidno diferencijabilno na $0 < s < t$ i vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial s} v(t,\ s) = e^{-A(t-s)} \frac{d}{ds} u(s) + A e^{-A(t-s)} u(s) = 0,$$

za $0 < s < t$ pa je $v(t,\ 0) = v(t,\ t)$, to jest $e^{-At} u_0 = u(t)$.

Promotrimo nehomogeni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t),\ t \in (0,\ T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Lema 3.1.2. *Neka je $f : (0,\ T) \to X$ lokalno Hölder neprekidna i $\int_0^\rho \|f(s)\|\, ds < \infty$ za neki $\rho > 0$. Definirajmo*

$$F(t) = \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds,\ t \in [0,\ T).$$

Tada je $F(\cdot)$ neprekidna na $[0,\ T)$, neprekidno diferencijabilna na $(0,\ T)$, uz $F(t) \in D(A)$ za $t \in (0,\ T)$ i vrijedi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} F(t) + AF(t) = f(t),\ t \in (0,\ T), \\ &F(t) \to 0 \ u\ X,\ kad\ t \to 0^+. \end{aligned}$$

Dokaz. Za mali $\rho > 0$ definiramo

$$F_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds,\ \rho \leq t < T,$$

$$F_\rho(t) = 0,\ 0 \leq t \leq \rho.$$

Neka je $f(s) = 0$ za $s < 0$. Tada vrijedi

$$\left\|F(t) - F_\rho(t)\right\| \leq \int_{t-\rho}^{t} \left\|e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)\|\ ds,$$

što teži u 0 kad $\rho \to 0^+$, uniformno na $0 \le t \le t_0$, za svaki $t_0 < T$.

Kako za $0 \le t \le t + h \le t_0$ vrijedi

$$F_\rho(t+h) - F_\rho(t) = \left(e^{-Ah} - I\right) \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-A(t+h-s)} f(s)\, ds,$$

što teži k 0 kad $\rho \to 0^+$, zaključujemo da je F_ρ neprekidna.

Dakle, F je neprekidna s $[0,\ T)$ u X i

$$\|F(t)\| \le \int_0^t \left\|e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s)\|\ ds \to 0,\ t \to 0^+.$$

Za $0 \le s \le t$ vrijedi $e^{-A(t-s)} f(s) \in D(A)$ pa su Riemannove sume

$$\sum_{t-s_j \ge \rho} e^{-A(t-s_j)} f(s_j) \in D(A)$$

i

$$\lim_{\Delta s \to 0} A \sum_{s \le t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s)\, \Delta s = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s)\, ds.$$

Operator A je zatvoren pa je $F_\rho(t) \in D(A)$ i vrijedi

$$AF_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s)\, ds = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} \left(f(s) - f(t)\right)\ ds + \left(e^{-A\rho} - e^{-At}\right) f(t).$$

Sada je

$$\left\|A e^{-A(t-s)}\right\| = o\left(|t-s|^{-1}\right)$$

i

$$\|f(s) - f(t)\| = o\left(|t-s|^{\theta}\right),$$

za neki $\theta > 0$ i $s \to t^-$. Stoga vrijedi

$$AF_\rho(t) \to \int_0^t A e^{-A(t-s)} \left(f(s) - f(t)\right)\ ds + \left(I - e^{-At}\right) f(t),\ \rho \to 0^+.$$

Dakle, $F(t) \in D(A)$ za $0 < t < T$.

Neka je $[t_0,\ t_1] \subset (0,\ T)$. Kako je

$$\|f(t) - f(s)\| \le K|t-s|^{\theta},\ t,\ s \in [t_0,\ t_1],\ \theta > 0,$$

to vrijedi $AF_\rho(t) \to AF(t)$ za $t \in [t_0,\ t_1]$, pa je

$$\begin{aligned}\left\|AF_\rho(t) - AF(t)\right\| &= \left\|(e^{-At} - I)f(t) + \int\limits_{t-\rho}^{t} Ae^{-A(t-s)}(f(s) - f(t))\,ds\right\| \\ &\le \left\|(e^{-At} - I)f(t)\right\| + C\int\limits_{t-\rho}^{t} (t-s)^\theta\,ds \to 0,\end{aligned}$$

za $\rho \to 0^+$ uniformno po $t \in [t_0,\ t_1]$.

Konačno, $F_\rho(t)$ je diferencijabilna za $t > \rho$ i vrijedi

$$\frac{d}{dt}F_\rho(t) = -AF_\rho(t) + e^{-A\rho}f(t-\rho),\ \rho < t < T. \tag{3.2}$$

Desna strana u (3.2) konvergira uniformno prema $-AF(t) + f(t)$ na $t \in [t_0,\ t_1] \subset (0,\ T)$, za $\rho \to 0^+$, pa je F neprekidno diferencijabilna na $(0,\ T)$ i vrijedi

$$\frac{d}{dt}F + AF = f(t).$$

□

Teorem 3.1.3. *Neka je A sektorijalan operator na X, $x_0 \in X$, $f : (0,\ T) \to X$ lokalno Hölder neprekidna i $\int_0^\rho \|f(t)\|\,dt < \infty$ za neki $\rho > 0$. Tada postoji jedinstveno (jako) rješenje $u(\cdot)$ problema*

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + Au &= f(t),\ t \in (0,\ T), \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

i dano je sa

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds.$$

3.2 Nelinearni problem

Promatramo nelinearni problem

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,\ u),\ t > t_0,\ u(t_0) = u_0. \tag{3.3}$$

pri čemu pretpostavljamo da je A sektorijalan operator takav da su razlomačke potencije (Definicija 2.4) operatora $A_1 = A + aI$ dobro definirane i prostori $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ sa normom $\|u\|_\alpha = \left\|A_1^\alpha u\right\|$ su definirani za $\alpha \geq 0$.

Nadalje, neka je $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ otvoren i $f : U \to X$ lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u, to jest ako je $(t_1,\ u_1) \in U$, tada postoji okolina $V \subset U$ od $(t_1,\ u_1)$ takva da za $(t,\ u)$, $(s,\ v) \in V$ vrijedi

$$\|f(t,\ u) - f(s,\ v)\|_X \leq L\left(|t-s|^\theta + \|u-v\|_\alpha\right),$$

za neke konstante $L,\ \theta > 0$.

Definicija 3.2.1. *Rješenje Cauchyjevog problema* (3.3) *na* $(t_0,\ t_1)$ *je neprekidna funkcija* $u : [t_0,\ t_1) \to X$ *takva da vrijedi*

- $u(t_0) = u_0$ *na* $(t_0,\ t_1)$
- $(t,\ u(t)) \in U$, $u(t) \in D(A)$, *i* $u_t(t)$ *postoji*
- $t \mapsto f(t,\ u(t))$ *je lokalno Hölder neprekidna*
- $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s,\ u(s))\|\, ds < \infty$ *za neki* $\rho > 0$
- $\frac{du}{dt} + Au = f(t,\ u)$ *na* $(t_0,\ t_1)$.

Lema 3.2.2. *Ako je u rješenje problema* (3.3) *na* $(t_0,\ t_1)$*, tada vrijedi*

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,\ u(s))\, ds. \tag{3.4}$$

Obratno, ako je $u : (t_0,\ t_1) \to X^\alpha$ *neprekidna funkcija i* $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s,\ u(s))\|\, ds < \infty$ *za neki* $\rho > 0$ *te vrijedi integralna jednadžba* (3.4) *za* $t_0 < t < t_1$*, tada je* $u(\cdot)$ *rješenje diferencijalne jednadžbe* (3.3) *na* $(t_0,\ t_1)$.

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz Definicije 3.2.1 i Teorema 3.1.3

Za dokaz obrata, pretpostavimo da je $u \in C((t_0, t_1); X^\alpha)$ rješenje integralne jednadžbe (3.4). Pokažimo da je u lokalno Hölder neprekidna. Ako je $t_0 < t < t + h < t_1$ onda vrijedi

$$u(t+h) - u(t) = \left(e^{-Ah} - I\right) e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(e^{-Ah} - I\right) e^{-A(t-s)} f(s,\ u(s))\, ds + \int_{t}^{t+h} e^{-A(t+h-s)} f(s,\ u(s))\, ds.$$

Ako je $0 < \delta < 1 - \alpha$, tada po teoremu 2.1.9 za svaki $z \in X$ vrijedi

$$\left\| \left(e^{-Ah} - I\right) e^{-A(t-s)} z \right\|_\alpha \leq C(t-s)^{-(\alpha+\delta)} h^\delta e^{a(t-s)} \|z\|$$

pa za $t \in [t_0^*,\ t_1^*] \subset (t_0, t_1)$ imamo

$$\|u(t+h) - u(t)\|_\alpha \leq C h^\delta.$$

Slijedi da je preslikavanje $t \to f(t,\ u(t))$ lokalno Hölder neprekidno na $(t_0,\ t_1)$ pa, po Teoremu 2.1.9, u rješava linearni problem

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av &= f(t,\ u(t)),\ t \in (t_0, t_1), \\ v(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dakle, u je rješenje problema (3.3) na (t_0, t_1). □

Ako nije drugačije naznačeno, od sada pa nadalje pretpostavljamo da vrijedi

- A je sektorijalan operator,
- $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ otvoren, $0 \leq \alpha < 1$,
- $f :\ U \to X$ lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u.

Teorem 3.2.3. *Za svaki* $(t_0,\ u_0) \in U$ *postoji* $T = T(t_0,\ u_0) > 0$ *tako da problem* (3.3) *ima jedinstveno rješenje na* $(t_0,\ t_0 + T)$.

Dokaz. Po Lemi 3.2.2, dovoljno je pokazati odgovarajući rezultat za integralnu formulu (3.4). Neka su $\delta,\ \tau > 0$ takvi da je skup

$$V = \{(t,\ u) :\ t \in (t_0,\ t_0 + \tau),\ \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\} \subset U$$

i neka za $(t,\ u_1),\ (t,\ u_2) \in V$ vrijedi

$$\|f(t,\ u_1) - f(t,\ u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|_\alpha.$$

Označimo

$$B = \max_{[t_0,\ t_0+\tau]} \|f(t,\ u_0)\|$$

i odaberimo $T \in (0,\ \tau]$ takav da vrijedi

$$\left\|\left(e^{-Ah} - I\right) u_0\right\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2},\ h \in [0,\ T]$$

i

$$M\,(B + L\delta) \int_0^T s^{-\alpha} e^{as}\, ds \leq \frac{\delta}{2},$$

pri čemu je

$$\left\|A_1^\alpha e^{-At}\right\| \leq M t^{-\alpha} e^{at},\ t > 0.$$

Definiramo sljedeći skup

$$S = \{v :\ [t_0,\ t_0 + T] \to X^\alpha :\ v \text{ neprekidna},\ \|v(t) - u_0\|_\alpha \leq \delta,\ t \in [t_0,\ t_0 + T]\}.$$

Tada je S potpun metrički prostor sa normom

$$\|v\|_S = \sup_{t \in [t_0,\ t_0+T]} \|v(t)\|.$$

Za $v \in S$ definiramo preslikavanje $G(v) :\ [t_0,\ t_0 + T] \to X$ formulom

$$G(v)(t) = e^{-A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,\ v(s))\, ds.$$

Pokažimo da G preslikava skup S u njega samoga i da je G stroga kontrakcija.

Najprije uočimo da za $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|G(v)(t) - u_0\|_\alpha &\leq \left\|\left(e^{-A(t-t_0)} - I\right) u_0\right\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \left\|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\right\| (B + L\delta)\ ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + M\,(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t - s)^{-\alpha} e^{a(t-s)}\, ds \leq \delta.\end{aligned}$$

Nadalje, $G(v)$ je neprekidna sa $[t_0,\ t_0+T]$ u X^α pa G preslikava S u samog sebe.

Neka su $v,\ w \in S$ i $t \in [t_0,\ t_0+T]$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\|G(v)(t) - G(w)(t)\|_\alpha &\le \int_{t_0}^{t} \left\|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s,\ v(s)) - f(s,\ w(s))\|\ ds \\ &\le ML\|v-w\|_S \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)}\ ds,\end{aligned}$$

pa je

$$\|G(v) - G(w)\|_S \le \frac{1}{2}\|v-w\|_S,\ \forall v,\ w \in S.$$

Po Banachovom teoremu o fiksnoj točki (Teorem 1.4.3), G ima jedinstvenu fiksnu točku u u S koja je jedinstveno neprekidno rješenje integralne formule (3.4) i $f(t,\ u(t))$ je ograničena za $t \to t_0^+$. Po Lemi 3.2.2 u je jedinstveno rješenje problema (3.3) na $(t_0,\ t_0+T)$. □

Teorem 3.2.4. (Maksimalni interval egzistencije) *Neka za svaki zatvoren i ograničen skup $B \subset U$ vrijedi da je slika $f(B)$ ograničen skup u X. Neka je u rješenje problema* (3.3) *na* $(t_0,\ t_1)$ *i t_1 je maksimalan, to jest rješenje ne postoji na* $(t_0,\ t_2)$ *ako $t_2 > t_1$. Tada je ili $t_1 = +\infty$ ili postoji niz (t_n), $t_n \to t_1$ kad $n \to +\infty$ takav da $(t_n,\ u(t_n)) \to \partial U$. (Ako je U neograničen, točka u beskonačnosti je u ∂U.)*

Dokaz. Pretpostavimo da je $t_1 < +\infty$ ali da $(t,\ u(t))$ nije u okolini ∂U za $t \in [t_2,\ t_1]$. Označimo tu okolinu sa N i uočimo da možemo uzeti $N = U \setminus B$ i $(t,\ u(t)) \in B$ za $t \in [t_2,\ t_1)$.

Pokažimo da postoji $u_1 \in B$ takav da $u(t) \to u_1$ u X^α kad $t \to t_1^-$. Tada po Teoremu 3.2.3, uz $u(t_1) = u_1$, možemo proširiti rješenje van vremena t_1, što je kontradikcija s maksimalnošću od t_1.

Neka je $C = \sup_{(t,\ u)\in B} \|f(t,\ u)\|$. Pokažimo da je $\|u(t)\|_\beta$ ograničena kad $t \to t_1^-$ i $\beta < 1$ proizvoljan. Uočimo da za $\alpha \le \beta < 1$ i $t_2 \le t < t_1$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\beta &\le \left\|A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)}\right\| \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \left\|A_1^\beta e^{-A(t-s)}\right\| \|f(s,\ u(s))\|\ ds \\ &\le \widetilde{C}\left((t-t_o)^{-(\beta-\alpha)} \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta}\ ds\right),\end{aligned}$$

što je ograničeno kad $t \to t_1^-$.

Neka je $t_2 \leq \tau < t < t_1$ pa imamo

$$u(t) - u(\tau) = \left(e^{-A(t-\tau)} - I\right) u(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-A(t-s)} f(s,\ u(s))\, ds.$$

Za $\alpha < \beta < 1$ imamo

$$\|u(t) - u(\tau)\|_\alpha \leq C_1 (t-\tau)^{\beta-\alpha} \|u(\tau)\|_\beta + C_2 \int_{\tau}^{t} (t-s)^{-\alpha}\, ds \leq C_3 (t-\tau)^{\beta-\alpha}.$$

Dakle, $\lim_{t\to t_1} u(t)$ postoji u X^α. □

Prije iskaza i dokaza sljedećeg korolara navodimo pomoćnu tvrdnju. Tvrdnja se može naći u [6] kao poseban oblik Teorema 7.1.1.

Lema 3.2.5. (Gronwall) *Neka su $a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ nenegativne konstante takve da $\alpha,\ \beta > 0$ i $T \in (0,\ \infty)$. Neka je $u :\ [0,\ T] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija takva da vrijedi*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_{0}^{t} (t-s)^{-\beta} u(s)\, ds,\ \ s.s.\ t \in [0,\ T].$$

Tada postoji konstanta $M = M(b,\ \alpha,\ \beta,\ T) < \infty$ takva da vrijedi

$$0 \leq u(t) \leq aMt^{-\alpha},\ \ s.s.\ t \in (0,\ T].$$

Korolar 3.2.6. *Neka je $U = (t,\ \infty) \times X^\alpha$ i $\|f(t,\ u)\| < K(t)(1 + \|u\|_\alpha),\ \forall (t,\ u) \in U$ pri čemu je $K(\cdot)$ neprekidna na $(t,\ \infty)$. Ako je $t > \tau,\ u_0 \in X^\alpha$, tada postoji jedinstveno rješenje problema* (3.3) *u $(t_0,\ u_0)$ za sve $t > t_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $t_n \to t_1 < \infty$ takav da $\|u(t_n)\|_\alpha \to +\infty$. Tada vrijedi

$$\|u(t)\|_\alpha \leq \left\|e^{-A(t-t_0)}\right\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \left\|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\right\| \cdot K(s)\,(1 + \|u(s)\|_\alpha)\ ds.$$

Iz Gronwallove nejednakosti (Lema 3.2.5) slijedi da $\|u(t)\|_\alpha$ ostaje ograničena kad $t \to t_1$. □

Teorem 3.2.7. *Neka operator A ima kompaktan rezolventni skup, neka je B zatvoren i ograničen skup takav da $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ te neka f preslikava sve ograničene skupove U u ograničene skupove u X. Ako je $u(t;\ t_0,\ u_0)$ rješenje problema* (3.3) *na $(t_0,\ \infty)$ i $\|u(t;\ t_0,\ u_0)\|_\alpha < \infty$ kad $t \to +\infty$, onda je $\{u(t;\ t_0,\ u_0)\}_{t>t_0}$ u kompaktnom skupu u X^α.*

Dokaz. Ako je $\alpha < \beta < 1$, onda je, po Teoremu 2.1.11, $X^\beta \subset X^\alpha$ kompaktno ulaganje i dovoljno je pokazati da je $\|u(t;\ t_0,\ u_0)\|_\beta < \infty$ za $t \geq t_0 + 1$.

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \delta > 0$ i $\|f(t,\ u(t;\ t_0,\ u_0))\| \leq C$ za svaki $t \geq t_0$. Imamo sljedeće

$$\|u(t;\ t_0,\ u_0)\|_\beta \leq M(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)}e^{-\delta(t-t_0)}\|u_0\|_\alpha + MC\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\beta}e^{-\delta(t-s)}\,ds,$$

što je ograničeno za $t \geq t_0 + 1$. $\square$

Poglavlje 4

Disipativna Burgersova jednadžba

U ovom poglavlju promatramo jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{4.1}$$

gdje je $\varepsilon > 0$ koeficijent viskoznosti. Jednadžba je nelinearna parabolička i nazivamo je disipativna ili viskozna Burgersova jednadžba.

Na temelju Poglavlja 3.2 pokazat ćemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja jednadžbe (4.1). Opisat ćemo Hopf - Cole transformaciju, to jest metodu koja će nam dati eksplicitnu formulu za rješenje (Poglavlje 4.3).

4.1 Fizikalna interpretacija

Burgersova jednadžba ima široku primjenu u mehanici fluida, kod modeliranja vode u nezasićenom ulju, dinamike tla u vodi, turbulentne difuzije, kozmologije i seizmologije. Prvi ju je uveo engleski matematičar H. Bateman. Nizozemski matematičar J. M. Burgers ju je predložio kao matematički model za turbulenciju ([3]). Hopf i Cole su je proučavali u kontekstu dinamike plinova.

Tok prometa

Promatramo tok automobila na cesti. Neka je $\rho(t, x)$ gustoća automobila i $f(t, x)$ tok prometa. Sa $\overline{\rho}$ označimo restrikciju od ρ tako da $0 \leq \overline{\rho} \leq \rho_{\max}$, pri čemu je $\rho_{\max}$ vrijednost kada je razmak između automobila najmanji mogući. Jednadžba kontinuiteta daje

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \overline{t}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} = 0. \tag{4.2}$$

Očekujemo da je $f = v\overline{\rho}$, pri čemu je v brzina, no vozači usporavaju kada se dovoljno približe drugom autu, što smanjuje gustoću pa tok ovisi o gradijentu gustoće

$$f(\overline{\rho}) = \overline{\rho}\, v(\overline{\rho}) - D\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}},\ D = const. \tag{4.3}$$

Možemo pretpostaviti da vozači voze nekom konstantnom ograničenom brzinom $v_{\max}$, no povećanjem gustoće prometa vozači usporavaju pa imamo

$$v(\overline{\rho}) = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\left(\rho_{\max} - \overline{\rho}\right). \tag{4.4}$$

Ubacivanjem (4.3) i (4.4) u (4.2) slijedi

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}} + \frac{d}{d\overline{x}}\left[\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\left(\rho_{\max} - \overline{\rho}\right)\overline{\rho}\right] = D\frac{\partial^2\overline{\rho}}{\partial\overline{x}^2}.$$

Označimo li $v_{\max} = \frac{x_0}{t_0}$, $\rho = \rho_{\max}\overline{\rho}$, $x = x_0\overline{x}$ i $t = t_0\overline{t}$, slijedi

$$\rho_t + \left[(1-\rho)\rho\right]_x = \varepsilon\rho_{xx},\ \varepsilon = \frac{D}{v_{\max}x_0},\ 0 \leq \rho \leq 1.$$

Konačno, transformacija $u = 2\rho - 1$ daje

$$u_t + uu_x = u_{xx},\ -1 \leq u \leq 1,$$

što je upravo jednadžba (4.1).

4.2 Lokalna egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovom poglavlju promatramo inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t(t,\ x) + uu_x(t,\ x) = \varepsilon u_{xx}(t,\ x),\ (t,\ x) \in (t_0,\ \infty) \times \Omega, \tag{4.5}$$
$$u(t_0,\ x) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{4.6}$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti $t_0 = 0$. Pokazat ćemo da za gornji problem vrijede uvjeti iz Poglavlja 3.2. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ i $U \subset \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ otvoren skup. Tvrdimo

- $A = \varepsilon u_{xx}$ je sektorijalan operator na $L^2(\Omega)$,
- $F : U \to L^2(\Omega)$, $F = uu_x$ je lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u.

Promatrat ćemo dva slučaja, $\Omega = \mathbb{R}$ i $\Omega = (0,\ 1)$, i pokazat ćemo da u oba slučaja vrijede gornje tvrdnje za operator A i funkciju F.

$\Omega = \mathbb{R}$

U Poglavlju 2 naveli neka korisna svojstva operatora $Au = u_{xx}$, a sada ćemo pokazati da je taj operator sektorijalan. Promatramo operator A na $L^p(\mathbb{R})$ za $1 \leq p < \infty$, odnosno na $C_b(\mathbb{R})$

$$D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}),\ p < \infty,$$
$$D(A_\infty) = C_b^2(\mathbb{R}),$$

sa normama

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_x\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})},\ p < \infty,$$
$$\|u\|_{C_b^2(\mathbb{R})} = \|u\|_\infty + \|u_x\|_\infty + \|u_{xx}\|_\infty.$$

U slučaju $p < \infty$ derivaciju shvaćamo u slabom smislu.

Propozicija 4.2.1. *Vrijedi sljedeće*

1. $\sigma(A_p) = (-\infty,\ 0]$ *za svaki* $1 \leq p \leq \infty$,
2. *Ako je* $|\lambda| = e^{i\varphi}$ *za* $|\varphi| < \pi$, *tada je*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})}.$$

Gornju propoziciju ostavljamo bez dokaza i u nastavku navodimo neke tvrdnje koje se pokažu u dokazu. Dokaz se može pronaći u [9].

Pokaže se da je rješenje oblika

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[\int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y)\, dy + \int_{x}^{+\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y)\, dy \right],$$

te da vrijedi

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})} \|f\|_{\infty}.$$

Očito je A_∞ sektorijalan operator uz $a = 0$ i $\varphi \in (\frac{\pi}{2},\ \pi)$.

U slučaju $p < \infty$ je bitna činjenica da je $W^{2,p}(\mathbb{R})$ gust u prostoru glatkih funkcija $C^\infty(\mathbb{R})$. Koristeći Youngovu nejednakost ([7]) dobije se da vrijedi $u \in D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R})$. (Detalji dokaza mogu se pronaći u [9].)

Već smo spomenuli da nam je od posebnog interesa operator $A = \varepsilon u_{xx}$ na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ sa domenom $D(A) = H^2(\mathbb{R})$. Prema gore dokazanom, taj operator je sektorijalan uz $a = 0$ i $\varphi \in (0,\ \frac{\pi}{2})$.

Neka je je $F : [0,\ \infty) \times H_0^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definirana sa

$$F(t,\ x,\ u) = u(t,\ x) u_x(t,\ x).$$

Uočimo da F ne ovisi eksplicitno o $(t,\ x)$ pa za $(t,\ x) \in [0,\ \infty) \times \mathbb{R}$ postoji okolina $V \subset [0,\ \infty) \times H_0^1(\mathbb{R})$ takva da za $(t,\ x,\ u),\ (s,\ x,\ u) \in V$ vrijedi

$$\|F(t,\ x,\ u) - F(s,\ x,\ u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |t - s|^\theta$$

za neki $\theta > 0$. Dakle, F je lokalno Hölder neprekidna po t.

Nadalje, fiksirajmo $(t,\ x) \in [0,\ \infty) \times \mathbb{R}$. Tvrdimo da postoji $L > 0$ takav da za $u,\ v \in H_0^1(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\|F(t,\ x,\ u) - F(t,\ x,\ v)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq L \|u - v\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

to jest

$$\left(\int_{\mathbb{R}} [u(t,\ x) u_x(t,\ x) - v(t,\ x) v_x(t,\ x)]^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq L \left(\int_{\mathbb{R}} [u(t,\ x) - v(t,\ x)]^2 + [u_x(t,\ x) - v_x(t,\ x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tvrdnju je dovoljno pokazati na prostoru $X = H_0^1(\mathbb{R}) \cap \{\|u\|_\infty, \ \|u_x\|_\infty \le A\}$.
Zbog principa maximuma vrijedi da ako je $u_0 \in X$, te rješenje postoji na $[0, \ t)$, tada je $u(t) \in X$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} [uu_x - vv_x]^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} [uu_x - vu_x + vu_x - vv_x]^2 \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} [(u-v)u_x + v(u_x - v_x)]^2 \, dx \\
&\le 2 \int_{\mathbb{R}} [(u-v)^2 u_x^2 + v^2 (u_x - v_x)^2] \, dx \\
&\le 2A^2 \int_{\mathbb{R}} [(u-v)^2 + (u_x - v_x)^2] \, dx \\
&= 2A^2 \|u - v\|_{H^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Dakle, F je Lipschitzova po u.

Ograničeni interval uz Dirichletov rubni uvjet

Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti interval $\Omega = (0, \ 1)$. Promotrimo operator $Au = u_{xx}$ uz homogene Dirichletove rubne uvjete. Imamo dva slučaja

$$\begin{aligned}
D(A_p) &= \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(0) = u(1) = 0\} \subset L^p(\Omega), \ p < \infty, \\
D(A_\infty) &= \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u(0) = u(1) = 0\}, \ p = \infty,
\end{aligned}$$

s normama kao i u prethodnoj sekciji.

Propozicija 4.2.2. *Operatori* $A_p : \ D(A_p) \to L^p(\Omega)$, $p < \infty$ *i* $A_\infty : \ D(A_\infty) \to C(\overline{\Omega})$ *su sektorijalni operatori uz* $a = 0$ *i* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \ \pi)$ *proizvoljan.*

Dokaz. Neka je $\mu = \sqrt{\lambda}$ za $\lambda \notin (-\infty, 0]$ takav da $\operatorname{Re} \mu > 0$. Označimo s X prostor $L^p(\Omega)$, odnosno prostor $C(\overline{\Omega})$. Svaku funkciju $f \in X$ proširimo do funkcije $\widetilde{f}$ na $L^p(\mathbb{R})$, odnosno $C_b(\mathbb{R})$ tako da $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$. Definiramo

$$\widetilde{u}(x) = \frac{1}{2\mu} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\mu(x-y)} \widetilde{f}(y) \, dy + \int_{x}^{+\infty} e^{\mu(x-y)} \widetilde{f}(y) \, dy \right)$$

Iz prethodne sekcije znamo da $\widetilde{u}|_{[0,1]}$ zadovoljava jednadžbu $\lambda u - u'' = f$ i vrijedi $\|u\|_{L^p} \le \frac{\|f\|_{L^p}}{|\lambda| \cos(\frac{\theta}{2})}$. No, $\widetilde{u}|_{[0,1]}$ nužno ne mora zadovoljavati rubne uvjete.

Definiramo

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\mu}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\mu|s|}\widetilde{f}(s)\,ds$$

i

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\mu}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\mu|1-s|}\widetilde{f}(s)\,ds.$$

Tada su sva rješenja jednadžbe $\lambda u - u'' = f$ koja pripadaju $W^{2,p}(\Omega)$ ili $C^2(\overline{\Omega})$ dana sa

$$u(x) = \widetilde{u}(x) + c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

pri čemu su $e^{-\mu x}$ i $e^{\mu x}$ rješenja homogene jednadžbe $\lambda u - u'' = 0$. Konstante c_1 i c_2 možemo na jedinstven način odrediti iz rubnih uvjeta $u(0) = u(1) = 0$.

Kako je $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ vrijedi $e^{\mu} - e^{-\mu} \neq 0$ i računom dobivamo

$$c_1 = \frac{1}{e^{\mu} - e^{-\mu}}[\gamma_1 - e^{\mu}\gamma_0],$$

$$c_2 = \frac{1}{e^{\mu} - e^{-\mu}}[-\gamma_1 - e^{-\mu}\gamma_0].$$

Za $1 \leq p \leq \infty$ dobivamo

$$\|e^{-\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{1}{(p\mathrm{Re}\,\mu)^{\frac{1}{p}}}, \quad \|e^{-\mu x}\|_{\infty} = e^{\mathrm{Re}\,\mu}$$

i

$$\|e^{\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{e^{\mathrm{Re}\,\mu}}{(p\mathrm{Re}\,\mu)^{\frac{1}{p}}}, \quad \|e^{\mu x}\|_{\infty} = 1.$$

Za $1 < p < \infty$ Hölderova nejednakost daje

$$|\gamma_0| \leq \frac{1}{2|\mu|(p'\mathrm{Re}\,\mu)^{\frac{1}{p'}}}\|f\|_{L^p},$$

$$|\gamma_1| \leq \frac{1}{2|\mu|(p'\mathrm{Re}\,\mu)^{\frac{1}{p'}}}\|f\|_{L^p}.$$

Također

$$|\gamma_0|,\ |\gamma_1| \leq \frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^1},\ f \in L^1(\Omega),$$

te

$$|\gamma_0|,\ |\gamma_1| \leq \frac{1}{|\mu|\mathrm{Re}\,\mu}\|f\|_{\infty},\ f \in C(\overline{\Omega}).$$

Štoviše, vrijedi $|e^{\mu} - e^{-\mu}| \approx e^{\mathrm{Re}\,\mu}$ za $|\mu| \to \infty$.
Ako je $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$ za $|\varphi| \leq |\varphi_0| < \pi$, tada je $\mathrm{Re}\,\mu \geq |\mu| \cos(\frac{\varphi_0}{2})$ pa dobivamo

$$\|c_1 e^{-\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p}$$

i

$$\|c_2 e^{\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p},$$

za $C > 0$ i $|\lambda|$ dovoljno velik. Konačno,

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p},$$

za $|\lambda|$ velik, recimo $|\lambda| \geq R$, i $|\arg \lambda| \leq \varphi_0$.

Za $|\lambda|$ mali se pokaže da je $0 \in \rho(A_p)$. Nadalje, kako je $\lambda \mapsto (A_p - \lambda I)^{-1}$ holomorfna na rezolventnom skupu, onda je i neprekidna pa i ograničena na kompaktnom skupu $\{|\lambda| \leq R, \ |\arg \lambda| \leq \varphi_0\}$.

Dakle, A_p je sektorijalan operator. □

Analogno, kao u slučaju $\Omega = \mathbb{R}$, pokaže se da je $F(t, x, u) = u(t, x) u_x(t, x)$ lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u, to jest za $(t, x, u) \in [0, \infty) \times H_0^1(\Omega)$ postoji okolina $V \subset [0, \infty) \times H_0^1(\Omega)$ takva da za $(t, x, u), (s, x, v) \in V$ vrijedi

$$\|F(t, x, u) - F(s, x, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L\left(|t - s|^{\theta} + \|u - v\|_{H^1(\Omega)}\right),$$

za neke konstante $L, \ \theta > 0$.

Time smo pokazali da su zadovoljene pretpostavke iz Poglavlja 3.2.

Po Teoremu 3.2.3 za svaki $(t_0, u_0) \in U$ postoji $T = T(t_0, u_0)$ takav da problem (4.5) - (4.6) ima jedinstveno rješenje na $(t_0, t_0 + T)$.

Teorem 3.2.4 nam je dao maksimalni interval egzistencije rješenja. Po Definiciji 3.2.1 rješenje u je neprekidna funkcija.

4.3 Cole - Hopf transformacija

Cole - Hopf transformacija je metoda za rješavanje viskozne Burgersove jednadžbe. Metodom se jednadžba linearizira i svodi na jednadžbu provođenja, te se dobiva formula za egzaktno rješenje. Postoje i druge metode za rješavanje viskozne Burgersove jednadžbe. Na primjer, u [5] je, kao efikasnija metoda za rješavanje, predložena takozvana Adomianova dekompozicija. U nastavku navodimo Cole - Hopf transformaciju opisanu u [4].

Promatramo inicijalni problem za kvazilinearnu paraboličku jednadžbu

$$\begin{aligned} u_t - a\Delta u + b|Du|^2 &= 0, \ (0, \ \infty) \times \mathbb{R}^n, \ a > 0, \\ u &= g, \ \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pretpostavimo da je u glatko rješenje gornje jednadžbe i označimo $w = \Phi(u)$, gdje je $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija. Cilj je odabrati Φ takav da w rješava linarnu jednadžbu. Ubacimo li w u jednadžbu (4.7), slijedi

$$\begin{aligned} w_t &= \Phi'(u)u_t = \Phi'(u)(a\Delta u - b|Du|^2) \\ &= a\Delta w - (a\Phi''(u) + b\Phi'(u))|Du|^2. \end{aligned}$$

Uz odabir $a\Phi''(u) + b\Phi'(u) = 0$ (ovu jednadžbu znamo riješiti i njeno rješenje je dano sa $\Phi(z) = e^{-\frac{b}{a}z}$) slijedi

$$w_t = a\Delta w.$$

Sada slijedi da ako u rješava jednadžbu (4.7), onda $w = e^{-\frac{b}{a}u}$ rješava inicijalni problem

$$\begin{aligned} w_t - a\Delta w &= 0, \ (0, \ \infty) \times \mathbb{R}^n, \ a > 0, \\ w &= e^{-\frac{b}{a}g}, \ \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Formula $w = e^{-\frac{b}{a}u}$ naziva se Cole - Hopf transformacija. Gornji problem je inicijalni problem za jednadžbu provođenja, čije je rješenje dano formulom ([4]):

$$w(t, \ x) = \frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} \, dy, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Iz $u = -\frac{a}{b} \ln w$ dobivamo eksplicitnu formulu za rješenje problema (4.7)

$$u(t, \ x) = -\frac{a}{b} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} \, dy \right), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

Promotrimo sada problem (4.7) za $n = 1$ i $b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0,\ (0,\ \infty) \times \mathbb{R}, \\ u = g,\ \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

To je upravo disipativna Burgersova jednadžba. Uvedimo sljedeće oznake

$$w(t,\ x) = \int_{-\infty}^{x} u(t,\ y)\, dy, \tag{4.9}$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)\, dy$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} w_t - aw_{xx} + ww_x = 0,\ (0,\ \infty) \times \mathbb{R}, \\ w = h,\ \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iz (4.8) dobivamo eksplicitnu formulu za rješenje

$$w(t,\ x) = -2a \ln \left(\frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)}\, dy \right),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Iz (4.9) slijedi $u(t,\ x) = w_x(t,\ x)$ pa iz gornje formule za w dobivamo

$$u(t,\ x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{t} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)}}{\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)}\, dy},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori. Bilješke s predavanja*, 2016.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[3] J. M. Burgers, *A Mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Advanced Applied Mechanics, 1948.

[4] L. C. Evans, *Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19.*, American Mathematical Society, 2010.

[5] A. Gorguis, *A comparison between Cole–Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers' equations*, 2006, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300305003140.

[6] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1981.

[7] I. Krijan, *Mjera i integral. Bilješke s predavanja (Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić)*, 2012.

[8] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska Knjiga, 1981.

[9] A. Lunardi, *Linear and nonlinear diffusion problems. S.M.I. Summer Course on Evolution Equations and Applications*, 2004, http://people.dmi.unipr.it/alessandra.lunardi/LectureNotes/Cortona2004.pdf.

[10] M. Miklavčić, *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations*, World Scientific, 1998.

[11] P. Mlinarić, *Nelinearna analiza i primjene. Bilješke s predavanja prof. dr. sc. Zvonimira Tuteka u akademskoj godini 2012./2013.*, 2013.

Sažetak

U ovom radu smo promatrali nelinearnu disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}.$$

U Poglavlju 1 promatrali smo prostore funkcija. Definirali smo Banachove i Hilbertove prostore i naveli važne primjere tih prostora.

U Poglavlju 2 definirali smo posebnu klasu linearnih operatora na Banachovim prostorima, takozvane sektorijalne operatore, i pokazali neka njihova korisna svojstva.

U Poglavlju 3 promatrali smo nelinearni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t, u),\ t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

pri čemu je A bio sektorijalan operator i f lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitz neprekidna po u. Naveli smo i dokazali nužne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja gornjeg problema.

U Poglavlju 4 smo promatrali inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu. Pokazali smo da za operator $A = \varepsilon u_{xx}$ i funkciju $f = uu_x$ vrijede pretpostavke iz Poglavlja 3 i time dokazali da inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu ima jedinstveno rješenje. Jednadžbu smo linearizirali Hopf - Cole transformacijom kako bi dobili eksplicitnu formulu za rješenje.

Summary

In this diploma thesis we analysed nonlinear dissipative Burgers' equation

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}.$$

In Chapter 1 we discussed function spaces. We defined Banach and Hilbert spaces and gave examples of those spaces. In Chapter 2 we defined a special class of linear operators on Banach spaces, so-called sectorial operators, and showed some of their properties.

In Chapter 3 we considered a nonlinear problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t, u),\ t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

where A was a sectorial operator and f locally Hölder continuous in t and locally Lipschitz in u. We showed necessary conditions for existence and uniqueness of the solution.

In Chapter 4 we considered the initial problem for dissipative Burgers' equation. We showed that operator $A = u_{xx}$ and function $f = uu_x$ satisfy presumptions from chapter 3 and proved that initial problem for dissipative Burgers' equation has a unique solution. We linearized the equation using the Hopf - Cole transform to get an explicit formula for the solution.

Životopis

Ivona Karmelić rođena je u Splitu gdje je završila osnovnu i srednju školu. Školovanje je nastavila u Zagrebu na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu, na preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika, a zatim na diplomskom sveučilišnom studiju Primijenjena matematika.