Slučajne šetnje i Wiener-Hopfova faktorizacija

Alilović, Marijo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marijo Alilović

SLUČAJNE ŠETNJE I WIENER-HOPFOVA FAKTORIZACIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala Bogu na snazi,
profesorima na znanju
i obitelji na svemu.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu promatrat će se općenita slučajna šetnja u $\mathbb{R}$. Dva su glavna cilja ovog rada. Prvi cilj je definirati slučajni proces kojeg ćemo zvati slučajnom šetnjom te dokazati vrlo zanimljivo granično svojstvo tog procesa (teorem 3.2.3.). Drugi cilj je dokazati Weiner-Hopfovu faktorizaciju slučajne šetnje (teorem 4.1.7.).

Prvo poglavlje posvećeno je tehničkim rezultatima koji su sastavni dio važnih rezultata koje kasnije dokazujemo u ostalim poglavljima, a radi preglednosti teksta ono je izdvojeno. Budući da je koncept vremena zaustavljanja teoretski važan u razmatranju slučajnih procesa ta tematika je zavrijedila vlastito poglavlje. U ovom radu drugo poglavlje također možemo smatrati tehničkim jer se direktno ne bavi niti sa jednim od dva glavna cilja koja smo naveli. Također, drugo poglavlje možemo promatrati i odvojeno od ostatka ovog rada jer koncepti koje definiramo su vezani uz proizvoljni slučajni proces. Potpoglavlja 2.1, 2.2. i 2.3. usko su vezana i u njima su dokazani neki vrlo važni rezultati (teorem 2.2.3. i teorem 2.3.3.) čije su posljedice dalekosežne za čitavu teoriju slučajnih procesa. Radi cijelovitosti nekih dokaza u potpoglavlju 2.4. dokazujemo Waldovu jednakost. Zadnja cijelina drugog poglavlja bavi se dualnim vremenima zaustavljanja. Ispostavlja se da je to ključan koncept koji vodi do Wiener-Hopfove faktorizacije.

Preostala dva poglavlja rješavaju postavljene ciljeve. Treće poglavlje podijeljeno je u dvije cijeline. U prvom dijelu definiramo slučajnu šetnju te vremena zaustavljanja (vremena uzlazaka i silazaka) koja su uz nju usko vezana, dok u drugom dijelu proučavamo granično ponašanje slučajne šetnje. Ispostavlja se da slučajna šetnja uvijek gotovo sigurno divergira. Štoviše, vrijedi vrlo zanimljiva trihotomija (teorem 3.2.3.). U zadnjem poglavlju dokazujemo Wiener-Hopfovu faktorizaciju slučajne šetnje te dva krunska rezultata klasične teorije slučajnih šetnji koji su posljedica navedene faktorizacije: Baxterove jednakosti i Spitzerovu formulu.

Osnovna literatura ovog diplomskog rada je: Adventures in Stohastic Processes. Drugo, treće i četvrto poglavlje baziraju se na navedneoj knjizi (točnije na poglavlju 7. i potpoglavlju 1.8.).

Posebno bih se zahvalio doc. dr. sc. Anti Mimici na ukazanom povjerenju i ovoj vrlo interesantnoj temi koju mi je ponudio kao temu diplomskog rada. Hvala Vam profesore.

Poglavlje 1

Pomoćno poglavlje

U ovom poglavlju navodimo neke rezultate koji nisu direktno vezani uz ključna poglavlja kojima se ovaj radi bavi, ali su nužni u dokazu nekih bitnih tvrdnji te boljem razumijevanju.

1.1 Slučajni procesi

U ovom potpoglavlju dokazujemo samo jedan tehnički rezultat. Za njegovo razumijevanje potrebno je poznavati pojmove vezane uz konstrukciju vjerojatnosti na beskonačno dimenzionalnom prostoru.

Propozicija 1.1.1. *Za* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}^\infty)$*-izmjeriva preslikavanja* X *i* Y *vrijedi:*

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y \iff \forall k \geq 1 \quad (X_1, ..., X_k) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_1, ..., Y_k).$$

Dokaz. Definirajmo projekcije $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$:

$$\pi_k(x_1, x_2, ...) = (x_1, ..., x_k), \quad (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Projekcije su neprekidna preslikavanja, stoga su i izmjeriva. Ako vrijedi $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$ tada vrijedi i $\pi_k(X) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \pi_k(Y)$ za svaki $k \geq 1$. Obratno ako vrijedi $(X_1, ..., X_k) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_1, ..., Y_k)$ za svaki $k \geq 1$, tada se P_X i P_Y podudaraju na svim Borelovima pravokutnicima $\mathcal{P}^\infty$, a kako je to generirajuća familija za $\mathcal{B}^\infty$ vrijedi $P_X = P_Y$.

□

1.2 Permutacijska σ algebra

U ovom potpoglavlju definirat ćemo permutacijske skupove, kao i permutacijsku σ-algebru. Navest ćemo rezultat koji pokazuje da su u slučaju nezavisnog i jednako distribuiranog niza

$\{X_n : n \geq 1\}$ repna σ-algebra i permutacijska σ-algebra u uskoj vezi što za posljedicu ima zanimljivi zakon 0-1.

Zbog jednostavnosti promatrat ćemo nezavisan i jednako distribuiran slučajni niz $\{X_n : n \geq 1\}$ definiran na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$, takav da je:

$$X_n(x_1, x_2, ...) = x_n, \quad (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sa Σ_n označimo skup svih permutacija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvom $\sigma(k) = k$ za svaki $k > n$. Definirajmo skup svih konačnih permutacija $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$. Za skup $A \in \mathcal{B}^\infty$ kažemo da je invarijantan na n-konačne permutacije ako vrijedi:

$$\sigma^{-1}(A) = A \quad \forall \sigma \in \Sigma_n.$$

Sa $\mathcal{E}_n$ označimo skup svih izmjerivih n-invarijantinih skupova na $\mathbb{R}^\infty$.

Lema 1.2.1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{E}_n$ σ-algebra.*

Dokaz. (i) $\quad \sigma^{-1}(R^\infty) = R^\infty, \quad \forall \sigma \in \Sigma_n \implies R^\infty \in \mathcal{E}_n$
(ii) $\quad A \in \mathcal{E}_n \implies \sigma^{-1}(A) = A, \quad \forall \sigma \in \Sigma_n$

$$\begin{aligned} A \cup A^c = \mathbb{R}^\infty = \sigma^{-1}(R^\infty) &= \sigma^{-1}(A \cup A^c) \\ &= \sigma^{-1}(A) \cup \sigma^{-1}(A^c) = A \cup \sigma^{-1}(A^c), \quad \forall \sigma \in \Sigma_n. \end{aligned}$$

Iz jedinstvenosti komplementa slijedi $A^c = \sigma^{-1}(A^c)$ za svaki $\sigma \in \Sigma_n$ iz čega slijedi $A^c \in \mathcal{E}_n$.
(iii) $\quad$ Neka je $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ niz skupova u $\mathcal{E}_n$. Stavimo $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

$$\sigma^{-1}(A) = \sigma^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma^{-1}(A_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \quad \forall \sigma \in \Sigma_n.$$

Dakle, $A \in \mathcal{E}_n$.

□

Definicija 1.2.2. *σ-algebru $\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ nazivamo permutacijska σ-algebra.*

Označimo sa $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te repnu σ-algebru $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$.

Lema 1.2.3. *Vrijedi $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{E}_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je n proizvoljan fiksan prirodan broj. Stavimo $\mathcal{H} = \{X_{n+k} : k \geq 1\}$. Tada vrijedi $\mathcal{T}_n = \sigma(\mathcal{H})$. Dovoljno je pokazati da za proizvoljan $\sigma \in \Sigma_n$ vrijedi:

$$\sigma^{-1}\Big(\mathcal{H}^{-1}(\pi_{1,\dots,m}^{-1}(B_1 \times ... \times B_m))\Big) = \mathcal{H}^{-1}(\pi_{1,\dots,m}^{-1}(B_1 \times ... \times B_m)) \tag{1.1}$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $B_i \in \mathcal{B}\ i \leq m$. Ako vrijedi (1.1) tada bi praslike od $\mathcal{H}$ svih Borelovih pravokutnika na $\mathbb{R}^\infty$ bila sadržane u $\mathcal{E}_n$ pa bi vrijedilo:

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{P}^\infty) \subset \mathcal{E}_n \implies \sigma(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{P}^\infty)) \subset \mathcal{E}_n \implies \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{B}^\infty) \subset \mathcal{E}_n \implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{E}_n \implies \mathcal{T}_n \subset \mathcal{E}_n.$$

U nastavku pokazujemo da vrijedi 1.1. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan i $B_i \in \mathcal{B}\ i \leq m$ proizvoljni te $\sigma \in \Sigma_n$ proizvoljna permutacija. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{-1}(\pi^{-1}_{1,\dots,m}(B_1 \times \dots \times B_m)) &= \{\omega \in \mathbb{R}^\infty : \pi_{1,\dots,m}(\mathcal{H}(\omega)) \in B_1 \times \dots \times B_m\} \\
&= \{\omega \in \mathbb{R}^\infty : (X_{n+1}(\omega), \dots, X_{n+m}(\omega)) \in B_1 \times \dots \times B_m\} \\
&= \{\omega = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in B_1 \times \dots \times B_m\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}\Big(\mathcal{H}^{-1}(\pi^{-1}_{1,\dots,m}(B_1 \times \dots \times B_m))\Big) &= \{\omega \in \mathbb{R}^\infty : \pi_{1,\dots,m}\Big(\mathcal{H}(\sigma(\omega))\Big) \in B_1 \times \dots \times B_m\} \\
&= \{\omega \in \mathbb{R}^\infty : (X_{n+1}(\sigma(\omega)), \dots, X_{n+m}(\sigma(\omega))) \in B_1 \times \dots \times B_m\} \\
&= \{\omega = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in B_1 \times \dots \times B_m\}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi (1.1). □

Korolar 1.2.4. $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$.

Bez dokaza navodimo propoziciju koja zapravo kaže da ne postoji mjerljiva razlika između skupova repne i permutacijskie σ-algebre (mjereno u odnosu na vjerojatnost induciranu sa $\mathcal{H}$).

Propozicija 1.2.5. *Za svaki $A \in \mathcal{E}$ postoji $B \in \mathcal{T}$ takav da je $P(A\Delta B) = 0$.*

Definicija 1.2.6. *Za slučajnu varijablu defniranu na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ kažemo da je permutacijska ako je $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$-izmjeriva.*

Korolar 1.2.7. *Za svaki $A \in \mathcal{E}$ je $P(A) \in \{0, 1\}$. Svaka permutacijska slučajna varijabla je $(g.s.)$ konstanta u $\bar{\mathbb{R}}$.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{E}$ proizvoljan skup. Tada iz propozicije 1.2.6. slijedi da postoji $B \in \mathcal{T}$ takav da je $P(A\Delta B) = 0$. Vrijedi:

$$P(A\Delta B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \implies P(A \setminus B) = P(B \setminus A) = 0.$$

Slijedi:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \implies P(A) = P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B) \implies P(B) = P(A \cap B).$$

Dakle, vrijedi $P(A) = P(B)$. Budući da je B repni događaj iz Kolmogorovljevog zakona 0-1 slijedi $P(B) \in \{0, 1\}$.
Neka je f $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$-izmjeriva. Tada vrijedi:

$$f^{-1}(<-\infty, x]) \in \mathcal{E} \implies F_f(x) \in \{0, 1\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Iz svojstava funkcija distribucije, slijedi:

$$\begin{aligned} F_f(y) = 0 &\implies F_f(y_1) = 0, \quad \forall y_1 \leq y \\ F_f(y) = 1 &\implies F_f(y_2) = 1, \quad \forall y_2 \geq y. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Iz (1.2) slijedi:

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad F_f(y) = 1 \quad F_f(x) = 0 \quad \forall x < y \implies f = y \quad (g.s.).$$

□

Analogno za $(\mathcal{E}, \bar{\mathcal{B}})$-izmjerivu funkciju kažemo da je permutacijska te vrijedi ista tvrdnja kao u korloraru 1.2.7.

Lema 1.2.8. $\limsup, \liminf : \mathbb{R}^\infty \to \bar{\mathbb{R}}$ *su permutacijske slučajne varijable.*

Dokaz. Neka je $x \in \bar{R}$ te $\sigma \in \Sigma_k$ (k proizvoljan). Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\limsup{}^{-1}(<-\infty, x])) &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \limsup\left((x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}\right) \leq x\} \\ &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \limsup\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \leq x\} = \limsup{}^{-1}(<-\infty, x]). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Jednakost u (1.3) vrijedi zbog činjenice da dva niza koja se razlikuju u konačno mnogo elemenata imaju ista gomilišta pa tako i najveća gomilišta (dozvoljeno $-\infty$ i ∞). Analogno se tvrdnja pokaže za $\liminf$.

□

1.3 Konvolucija

Konvolucija i njena svojstva bit će nam bitna pri dobivanju Wiener-Hopfove faktorizacije, jer je u stvari Wiener-Hopfova faktorizacija kovolucijski produkt.

Definicija 1.3.1. *Neka su μ i ν σ-konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Tada definiramo konvoluciju mjera μ i ν na sljedeći način:*

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{x+y \in A} d(\mu \times \nu)(x, y), \quad A \in \mathcal{B}. \tag{1.4}$$

Pomoću Fubinijevog teroema, raspišimo definiciju konvolucije:

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)(A) &= \int_{x+y \in A} d(\mu \times \nu)(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{(x,y):x+y \in A\}} d(\mu \times \nu)(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(x,y):x+y \in A\}} d\mu(x) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A-y} d\mu(x) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y) d\nu(y).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

σ-konačnost mjera bila nam je potrebna kako bismo mogli koristiti Fubinijev teorem. Iz simetričnosti definicije 1.4 odmah slijedi:

$$\mu * \nu = \nu * \mu. \tag{1.6}$$

Iz 1.5 koristeći Beppo-Levijev teorem i σ-aditivnost mjere μ lako se dobije da je konvolucija $\mu * \nu$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Neka su μ, ν i λ σ-konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Neka je $A \in \mathcal{B}$ proizvoljan skup. Iz 1.5 i činjenice da je zbroj σ-konačnih mjera σ-konačna mjera slijedi:

$$\begin{aligned}
[(\mu + \nu) * \lambda](A) &= \int_{\mathbb{R}} (\mu + \nu)(A - y) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\mu(A - y) + \nu(A - y)] d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y) d\lambda(y) + \int_{\mathbb{R}} \nu(A - y) d\lambda(y) \\
&= (\mu * \lambda)(A) + (\nu * \lambda)(A) \\
&= (\mu * \lambda + \nu * \lambda)(A).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Iz 1.7 odmah slijedi:

$$(\mu + \nu) * \lambda = \mu * \lambda + \nu * \lambda. \tag{1.8}$$

Također, zbog 1.6 i 1.8 vrijedi:

$$\lambda * (\mu + \nu) = (\mu + \nu) * \lambda = \mu * \lambda + \nu * \lambda = \lambda * \mu + \lambda * \nu. \tag{1.9}$$

Propozicija 1.3.2. *Neka su μ i ν σ-konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Neka je f Borelova funkcija. Tada vrijedi:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x + y) d\mu(x) d\nu(y) \tag{1.10}$$

u smislu da ako jedan od integrala u 1.10 postoji, onda postoji i drugi i jednaki su.

Dokaz. Dokazujemo Lebesgueovom indukcijom. Neka je $A \in \mathcal{B}$. Iz 1.5 slijedi:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d(\mu * \nu) &= (\mu * \nu)(A) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A-y} d\mu(x) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-y}(x) d\mu(x) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y).
\end{aligned}$$

Tvrdnja se sada standardnim postupkom proširuje na Borelove funkcije. □

Za $A \in \mathcal{B}$ iz 1.5 i propozicije 1.3.2. slijedi:

$$\begin{aligned}
[(\mu * \nu) * \lambda] &= \int_{\mathbb{R}} (\mu * \nu)(A - y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y - x) d\nu(x) d\lambda(y), \\
[\mu * (\nu * \lambda)](A) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y) d(\nu * \lambda)(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y - x) d\nu(x) d\lambda(y).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Iz 1.11 slijedi:

$$(\mu * \nu) * \lambda = \mu * (\nu * \lambda). \tag{1.12}$$

Iz 1.5 lako se vidi da ako su μ i ν konačne mjere da je tada i $\mu * \nu$ konačna mjera. Za konačnu mjeru μ definiramo:

$$\hat{\mu}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d\mu(x), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Za konačne mjere μ i ν iz 1.10 i 1.13 slijedi:

$$\begin{aligned} (\widehat{\mu * \nu})(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\mu * \nu)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta(x+y)} d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta y} d\nu(y) \\ &= \hat{\mu}(\zeta)\hat{\nu}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi:

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu}\hat{\nu}. \tag{1.14}$$

Definicija 1.3.3. *Neka su $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Stavimo, $\alpha = \mu_1 - \nu_1$ i $\beta = \mu_2 - \nu_2$. Definirmo konvoluciju realnih mjera α i β na sljedeći način:*

$$\alpha * \beta = (\mu_1 - \nu_1) * (\mu_2 - \nu_2) := \mu_1 * \mu_2 - \mu_1 * \nu_2 - \nu_1 * \mu_2 + \nu_1 * \nu_2. \tag{1.15}$$

Konačnost mjera u definicji je bitna jer izraz $\infty - \infty$ nije definiran. Iz 1.8 i 1.15 lagano se dobije:

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha. \tag{1.16}$$

Također, ako označimo $\gamma = \mu_3 - \nu_3$, gdje su μ_3 i ν_3 konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ iz 1.9 i 1.16 dobivamo:

$$(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \beta * \gamma. \tag{1.17}$$

U 1.17 prešutno koristimo da je $\alpha + \beta$ razlika dviju konačnih mjera pa izraz na lijevoj strani ima smisla. Iz 1.16 i 1.17 dobivamo:

$$\gamma * (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \beta * \gamma = \gamma * \alpha + \gamma * \beta. \tag{1.18}$$

Za $\alpha = \mu - \nu$, gdje su μ i ν konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, definiramo:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \tag{1.19}$$

gdje je f Borelova funkcija integrabilna u odnosu na μ i ν. Iz 1.19 i 1.13 slijedi:

$$\hat{\alpha}(\zeta) = \hat{\mu}(\zeta) - \hat{\nu}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Iz asocijativnosti (1.12) i distributivnosti (1.9) konvolucije te definicije 1.3.3. (1.17), kao i činjenice da je konvolucija konačnih mjera konačna mjera, dobivamo:

$$\begin{aligned}
(\alpha * \beta) * \gamma &= (\mu_1 * \mu_2 - \mu_1 * \nu_2 - \nu_1 * \mu_2 + \nu_1 * \nu_2) * (\mu_3 - \nu_3) \\
&= (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 - (\mu_1 * \mu_2) * \nu_3 - (\mu_1 * \nu_2) * \mu_3 + (\mu_1 * \nu_2) * \nu_3 \\
&\quad - (\nu_1 * \mu_2) * \mu_3 + (\nu_1 * \mu_2) * \nu_3 + (\nu_1 * \nu_2) * \mu_3 - (\nu_1 * \nu_2) * \nu_3 \\
&= \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3) - \mu_1 * (\mu_2 * \nu_3) - \mu_1 * (\nu_2 * \mu_3) + \mu_1 * (\nu_2 * \nu_3) \\
&\quad - \nu_1 * (\mu_2 * \mu_3) + \nu_1 * (\mu_2 * \nu_3) + \nu_1 * (\nu_2 * \mu_3) - \nu_1 * (\nu_2 * \nu_3) \\
&= \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3 - \mu_2 * \nu_3 - \nu_2 * \mu_3 + \nu_2 * \nu_3) \\
&\quad - \nu_1 * (\mu_2 * \mu_3 - \mu_2 * \nu_3 - \nu_2 * \mu_3 + \nu_2 * \nu_3) \\
&= \mu_1 * (\beta * \gamma) - \nu_1 * (\beta * \gamma) \\
&= \alpha * (\beta * \gamma).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Lebesgueovom indukcijom lako se može pokazati da je integral u odnosu na zbroj mjera jednak zbroju integrala, tj.:

$$\int_{\mathbb{R}} f d(\mu + \nu) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \int_{\mathbb{R}} f d\nu \tag{1.22}$$

gdje je f Borelova funkcija integrabilna u odnosu na μ i ν. Ako su α i β razlike dviju konačnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tada iz 1.14, 1.15 i 1.22 slijedi:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha * \beta}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\mu_1 * \mu_2 + \nu_1 * \nu_2) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\mu_1 * \nu_2 + \nu_1 * \mu_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\mu_1 * \mu_2) + \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\nu_1 * \nu_2) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\mu_1 * \nu_2) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} d(\nu_1 * \mu_2) \\
&= \hat{\mu}_1(\zeta)\hat{\mu}_2(\zeta) + \hat{\nu}_1(\zeta)\hat{\nu}_2(\zeta) - \hat{\mu}_1(\zeta)\hat{\nu}_2(\zeta) - \hat{\nu}_1(\zeta)\hat{\mu}_2(\zeta) \\
&= \hat{\alpha}(\zeta)\hat{\beta}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dakle vrijedi:

$$\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha}\hat{\beta}. \tag{1.23}$$

Ako je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono rastuća te neprekidna zdesna tada postoji jedinstvena Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F takva da vrijedi:

$$\mu_F(< a, b]) = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b.$$

Integriranje na prostoru mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ integrabilne Borelove funkcije f često označujemo $\int_{\mathbb{R}} f dF$, a oznaku interpretiramo na sljedeći način:

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_F.$$

Neka je F funkcija distribucije i neka je $q > 0$ realan broj. Vrijedi:

$$q\mu_F(< -\infty, x]) = qF(x) = (qF)(x) = \mu_{qF}(< -\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Budući da se mjere $q\mu_F$ i μ_{qF} podudaraju na generirajućem π-sistemu za $\mathcal{B}$ i vrijedi $q\mu_F(\mathbb{R}) = \mu_{qF}(\mathbb{R})$ slijedi da su mjere $q\mu_F$ i μ_{qF} jednake. Lebesgueovom indukcijom lako se pokaže da za Borelovu funkciju f vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_{qF} = q \int_{\mathbb{R}} f d\mu_F \tag{1.24}$$

u smislu, da ako jedan integral u 1.24 postoji da tada postoji i drugi i da su jednaki. Neka je $\{\mu_n : n \geq 1\}$ niz mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Definiramo:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{B}. \tag{1.25}$$

Lema 1.3.4. *Funkcija defnirana u 1.25 je mjera na $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Neka je $\{A_k : k \geq 1\}$ niz skupova u $\mathcal{B}$. Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$f_n(k) = \mu_n(A_k), \quad k, n \geq 1.$$

Neka je ν brojeća mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Iz Beppo-Levijevog teorema slijedi:

$$\begin{aligned}
(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n)(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\nu \\
&= \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n)(A_k).
\end{aligned}$$

□

Sljedeća propozicija je generalizacija tvrdnje 1.22.

Propozicija 1.3.5. *Neka je f Borelova funkcija. Ako je f pozitivna ili integrabilna obzirom na mjeru definiranu u 1.25 tada vrijedi:*

$$\int_{\mathbb{R}} f d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f \mu_n. \tag{1.26}$$

Dokaz. Neka je A Borelov skup. Vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu_n. \tag{1.27}$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan, $a_1, ..., a_m$ pozitivni realni brojevi te $A_1, ..., A_m$ proizvoljni Borelovi skupovi. Označimo sa ν brojeću mjeru na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$f_k(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_k} d\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}, k \leq m.$$

Koristeći Beppo-Levijev teorem i 1.27 imamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{A_k} d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) &= \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_k} d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_k} d\mu_n \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{\mathbb{N}} f_k d\nu = \int_{\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{m} f_k d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{m} a_k f_k)(n) \qquad (1.28) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_k} d\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{A_k} d\mu_n.
\end{aligned}$$

Neka je f nenegativna Borelova funkcija. Tada postoji niz nenegativnih, jednostavnih, rastućih izmjerivih funkcija $\{f_k : k \geq 1\}$ takav da vrijedi:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$g_k(n) = \int_{\mathbb{R}} f_k d\mu_n, \quad n, k \geq 1.$$

Iz teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\lim_{k\to\infty} g_k(n) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zbog nenegativnosti i monotonog rasta funkcija f_k, vrijedi da su i funkcije g_k monotono rastuće. Neka je ν brojeća mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Koristeći teorem o monotonoj konvergenciji i 1.28 dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d\mu_n \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_k d\nu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} g_k d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} g_k(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Važno je uočiti sljedeću tvrdnju koja direktno slijedi iz 1.29. Ako je f nenegativna Borelova funkcija integrabilna obzirom na mjeru $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, tada je f integrabilna obzirom na mjere μ_n za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je f integrabilna Borelova funkcija obzirom na mjeru $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \int_R f^+ d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) < \infty &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f^+ d\mu_n < \infty, \int_R f^+ d\mu_n < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \\ \int_R f^- d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) < \infty &\implies \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f^+ d\mu_n < \infty, \int_R f^- d\mu_n < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Iz 1.30 odmah slijedi da je funkcija f integrabilna obzirom na mjere μ_n za svaki $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, koristeći linearnost apsolutno konvergentnih redova, iz 1.30 slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) &= \int_R f^+ d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) - \int_R f^- d(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f^+ d\mu_n - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f^- d\mu_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (f^+ - f^-) d\mu_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n. \end{aligned} \tag{1.31}$$

□

Neka su F i G funkcije distribucije. Tada definiramo $F * G$ na sljedeći način:

$$(F * G)(x) = (\mu_F * \mu_G)(< -\infty, x]) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)dG(y), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.32}$$

gdje je mjera μ_F inducirana sa F te mjera μ_G inducirana sa G. Definiramo mjeru na $\mathcal{B}$ na sljedeći način:

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \in A \\ 0 & , \quad 0 \notin A \end{cases} \quad A \in \mathcal{B}. \tag{1.33}$$

Nije teško provjeriti da je sa 1.33 definirana mjera, kao ni to da je ona inducirana sa funkcijom $F_\delta = \mathbb{1}_{[0,\infty>}$. Zbog kraćeg zapisa često se F_δ označava samo sa δ, a iz konteksta je jasno misli li se o mjeri ili o realnoj funkciji. Mjera δ je važna zbog sljedećeg svojstva. Neka je μ neka σ-konačna mjera na $\mathcal{B}$. Tada iz 1.5 za Borelov skup A vrijedi:

$$(\delta * \mu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta(A-y)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

Ako u obzir uzmemo 1.6 dobivamo:

$$\delta * \mu = \mu * \delta = \mu. \tag{1.34}$$

Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s distribucijama F i G. Iz Fubinijevog teorema i 1.32 slijedi:

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) = P\{X+Y \le t\} &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X+Y\le t\}} dP = \int_{x+y\le t} dP_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y\le t\}} dP_X(x)dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t-y} dP_X(x)dP_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)dG(y) = (F * G)(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Induktivno tvrdnja 1.35 može se generalizirati.

Korolar 1.3.6. *Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable s distribucijama $F_1, ..., F_n$, tada je:*

$$F_{X_1+...+X_n} = F_1 * ... * F_n.$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje indukcijom za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Neka je F funkcija distribucije . Definiramo potenciranje na sljedeći način:

$$F^{0*} = \delta, F^{n*} = F^{n-1} * F, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.36}$$

Korolar 1.3.7. *Ako su $X_1, ..., X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s distribucijom F, tada je:*

$$F_{X_1+...+X_n} = F^{n*}.$$

Korolar 1.3.7. kaže da je F^{n*} funkcija distribucije i opravdava 1.33.

Propozicija 1.3.8. *Neka je F funkcija distribucije te $q \in <0, 1>$. Tada vrijedi*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * (\delta - qF) = \delta. \tag{1.37}$$

Dokaz. Vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*} = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*}.$$

Za 1.37 dovoljno je dokazati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*} = (\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * qF. \tag{1.38}$$

Iz Beppo-Levijevog teorema, 1.24 te 1.32 slijedi:

$$\begin{aligned}
[(\sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}) * qF](x) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n F^{n*}(x-y) d(qF)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_{\mathbb{R}} F^{n*}(x-y) d(qF)(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} \int_{\mathbb{R}} F^{n*}(x-y) dF(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} F^{(n+1)*}(x) \\
&= (\sum_{n=1}^{\infty} q^n F^{n*})(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.3.9. *Neka su $X_1, ..., X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Tada vrijedi:*

$$\hat{F}(\zeta)^n = \widehat{F^{n*}}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{1.39}$$

Dokaz.

$$\hat{F}(\zeta)^n = (\int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} dF(x))^n = \mathbb{E}[e^{i\zeta X_1}]^n.$$

Iz korolara 1.3.7. te nezavisnosti i jednake distribuiranosti slijedi:

$$\widehat{F^{n*}}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x) = \mathbb{E}[e^{i\zeta(X_1+\ldots+X_n)}] = \mathbb{E}[e^{i\zeta X_1}]^n.$$

□

1.4 Geometrijska razdioba

Definirat ćemo geometrijsku razdiobu i dokazati za nas važno svojstvo koje ona posjeduje: memorijsku odsutnost.

Definicija 1.4.1. *Za slučajnu varijablu X kažemo da je geometrijska slučajna varijabla sa parametrom $p \in <0,1>$ ako joj je funkcija distribucije zadana sa:*

$$F(x) = \sum_{y \leq x} pq^y \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(y), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.40}$$

Lako se provjeri da je funkcija definirana u 1.40 uistinu funkcija distribucije. Iz 1.40 slijedi:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} pq^k, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.41}$$

Iz 1.41 slijedi:

$$P\{X = n\} = pq^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.42}$$

Iz 1.42 lako se pokaže da vrijedi:

$$P\{X \geq n\} = q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.43}$$

Neka su $n, k \in \mathbb{N}_0$. Iz 1.43 slijedi:

$$\begin{aligned} P\{X \geq n+k | X \geq n\} &= \frac{P\{X \geq n+k, X \geq n\}}{P\{X \geq n\}} = \frac{P\{X \geq n+k\}}{P\{X \geq n\}} \\ &= \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = P\{X \geq k\}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Jednakost 1.44 zovemo memorijska odsutnost i sljedeća tvrdnja je njena generalizacija:

$$P\{X \geq Y + Z | X \geq Y\} = P\{X \geq Z\}, \tag{1.45}$$

gdje su Y i Z nezavisne, nenegativne i cijelobojne slučajne varijable nezavisne od X. Koristeći sve navedene pretpostavke i 1.44 vrijedi:

$$\begin{aligned}
P\{X \geq Y + Z | X \geq Y\} &= \frac{P\{X \geq Y + Z, X \geq Y\}}{P\{X \geq Y\}} = \frac{P\{X \geq Y + Z\}}{P\{X \geq Y\}} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} P\{X \geq Y + Z, Y = k, Z = l\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} P\{X \geq k + l, Y = k, Z = l\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} P\{X \geq k + l\} P\{Y = k\} P\{Z = l\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{P\{X \geq k + l\}}{P\{X \geq k\}} P\{X \geq k\} P\{Y = k\} P\{Z = l\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} P\{X \geq l\} P\{X \geq k\} P\{Y = k\} P\{Z = l\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} \sum_{k,l=0}^{\infty} P\{X \geq l, Z = l\} P\{X \geq k, Y = k\} \\
&= \frac{1}{P\{X \geq Y\}} P\{X \geq Z\} P\{X \geq Y\} \\
&= P\{X \geq Z\}.
\end{aligned}$$

Posljedica 1.45 je sljedeća propozicija.

Propozicija 1.4.2. *Neka su $X_1, ..., X_n$ nezavisne, jednako distribuirane, nenegativne cijelobrojne slučajne varijable nezavisne s geometrijskom slučajnom varijablom X. Tada vrijedi:*

$$P\{X \geq X_1 + ... + X_n\} = P\{X \geq X_1\}^n. \tag{1.46}$$

Dokaz. Iz pretpostavki slijedi da je $S = X_1 + ... + X_{n-1}$ nenegativna, cijelobrojna slučajna varijabla. Također, slijedi da su X, S, X_n nezavisne. Iz 1.45 slijedi:

$$\begin{aligned}
P\{X \geq X_1 + ... + X_n\} &= P\{X \geq S + X_n | X \geq S\} P\{X \geq S\} \\
&= P\{X \geq X_n\} P\{X \geq S\} \\
&= P\{X \geq X_n\} P\{X \geq X_1 + ... + X_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Induktivno dobivamo:

$$P\{X \geq X_1 + ... + X_n\} = P\{X \geq X_n\} \cdots P\{X \geq X_1\}.$$

Zbog jednake distribuiranosti slijedi:

$$P\{X \geq X_1 + ... + X_n\} = P\{X \geq X_1\}^n.$$

□

Poglavlje 2

Vremena zaustavljanja

U ovom poglavlju matematički precizno defnirat ćemo pojam vremena zaustavljanja, inače poprilično jednostavnog intuitivnog koncepta. Definirat ćemo prikladne σ-algebre inducirane vremenom zaustavljanja i proučiti njihove međusobne odnose. Upravo međusobni odnos tih σ-algebri, kao i konstrukcija iteracija vremena zaustavljanja, bit će ključan u dokazu važnog teorema pomoću kojeg ćemo dobiti neka zanimljiva svojstva slučajnih šetnji, a kasnije i mnogo više. Ključan koncept za Wiener-Hopfovu faktorizaciju su dualna vremena zaustavljanja koja ćemo proučiti u zadnjem dijelu ovog poglavlja.
Ovo poglavlje je tehničke prirode, u njemu ne dajemo odgovore na ključna pitanja kojima se bavi ovaj rad, ali rezultati s kojima ćemo se susresti kao i sami kocepti koje ćemo definirati dovest će nas na prag svih odgovora. Važno je napomenuti da su vremena zaustavljanja pojam vezan uz slučajne procese te se stoga rezultati dokazani u ovom poglavlju mogu koristiti u raznim situacijama.

2.1 σ-algebre vezane za vremena zaustavljanja

Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ diskretni slučajni proces. Ako zamislimo da se slučajni proces odvija u vremenu, tada se svi mogući ishodi do trenutka n nalaze u sigma algebri $\sigma(X_1, ..., X_n)$. Drugim riječima, $\sigma(X_1, ..., X_n)$ se sastoji od događaja za koje bi znajući vrijednosti $X_1, ..., X_n$ mogli odrediti je li se dogodio ili nije.

Definicija 2.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjerivi prostor. Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ - podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ za svaki $n \geq 0$ zove se filtracija.*

σ-algebre $\mathcal{F}_n$ iz prethodne definicije zamišljamo kao skup mogućih događaja za neki slučajni proces do trenutka n, tj. ukupnu informaciju u trenutku n, a kako vrijeme prolazi na prošlost. Sljedeća definicija je iznimno važna, kako iz tehničkih tako i iz konceptualnih razloga.

Definicija 2.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjerivi prostor s filtracijom* $\mathbb{F}$. *Za slučajnu varijablu* $\alpha : \Omega \to \{0, 1, ..., \infty\}$ *kažemo da je vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *ako vrijedi:*

$$\{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n, \textit{ za sve } n \geq 0\,.$$

U slučaju $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, događaj $\{\alpha = n\}$ je u potpunosti određen slučajnim varijablama $X_1, ..., X_n$ tj. za svaki $n \geq 1$ postoji $B_n \in \mathcal{B}^n$ takav da je:

$$\{\alpha = n\} = \{(X_1, ..., X_n) \in B_n\}.$$

Prema tome, α poprima vrijednost n neovisno o slučajnim varijablama $X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ Jedna od posljedica te činjenice je i sljedeća lema. No prije iskaza leme važno je napomenuti da vrijeme zaustavljanja α može poprimiti vrijednost ∞, jer ako na α gledamo kao na vrijeme prvog pojavljivanja nekog fenomena unutar promatranog slučajnog procesa, tada se taj fenomen ne mora dogodit. U tom slučaju vrijeme pojavljivanja promatranog fenomena je ∞.

Lema 2.1.3. *Slučajna varijabla* $\alpha : \Omega \to \{0, 1, ..., \infty\}$ *je vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju* $\mathbb{F}$ *ako i samo ako vrijedi* $\{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, *za sve* $n \geq 0$

Dokaz. Ako je α vrijeme zaustavljanja tada vrijedi:

$$\{\alpha \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\alpha = k\}\,. \tag{2.1}$$

Budući da je $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n$ zaključujemo da vrijedi $\{\alpha = k\} \in \mathcal{F}_n$ za $k = 0, 1, ..., n$. Zbog 2.1 i činjenice da je $\mathcal{F}_n$ sigma algebra slijedi $\{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
Obratno, pretpostavimo da vrijedi: $\{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, za sve $n \geq 0$. Vrijedi:

$$\{\alpha = n\} = \{\alpha \leq n\} \setminus \{\alpha \leq n - 1\}\,. \tag{2.2}$$

Iz pretpostavke slijedi $\{\alpha \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ i $\{\alpha \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Iz činjenice da je $\mathcal{F}_n$ sigma algebra i $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$ direktno iz 2.2 slijedi da je $\{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$.

□

Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$.Definiramo:

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n).$$

Neka je α vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Definiramo:

$$\mathcal{F}_\alpha = \{\Lambda \in \mathcal{F}_\infty : \Lambda \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq \infty\}.$$

Lema 2.1.4. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*
(a) *$\mathcal{F}_\alpha$ je sigma algebra.*
(b) $\left\{ \bigcup_{0 \leq n \leq \infty} \{\alpha = n\} \cap \Lambda_n : \Lambda_n \in \mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq \infty \right\} \subset \mathcal{F}_\alpha$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju (a).
(i) $\Omega \cap \{\alpha = n\} = \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ za $n \geq 0$.
$\Omega \cap \{\alpha = \infty\} = \{\alpha < \infty\}^{\mathsf{c}} = \left\{ \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\alpha = n\} \right\}^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}_\infty$, dakle $\Omega \in \mathcal{F}_\alpha$.
(ii) Neka je $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$. Tada je $\Lambda \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq \infty$. Vrijedi:
$\Lambda^c \cap \{\alpha = n\} = \{\alpha = n\} \setminus (\Lambda \cap \{\alpha = n\}) \in \mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq \infty$, dakle $\Lambda^c \in \mathcal{F}_\alpha$.
(iii) Neka je $(\Lambda_k : k \geq 1)$ niz u $\mathcal{F}_\alpha$. Tada je $\Lambda_k \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ za svaki $k \geq 1$ i $0 \leq n \leq \infty$.
Stavimo $\Lambda = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Lambda_k$. Vrijedi:
$\Lambda \cap \{\alpha = n\} = (\bigcup_{k=0}^{\infty} \Lambda_k) \cap \{\alpha = n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\Lambda_k \cap \{\alpha = n\}) \in \mathcal{F}_n$ za sve $0 \leq n \leq \infty$, dakle $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$.
Dakle, $\mathcal{F}_\alpha$ je sigma algebra.

Dokažimo sada tvrdnju (b).
Neka je $\Lambda = \bigcup_{0 \leq k \leq \infty} \{\alpha = k\} \cap \Lambda_k$ gdje je $\Lambda_k \in \mathcal{F}_k, 0 \leq k \leq \infty$. Tada vrijedi:
$\Lambda \cap \{\alpha = n\} = (\bigcup_{0 \leq k \leq \infty} \{\alpha = k\} \cap \Lambda_k) \cap \{\alpha = n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq \infty} (\{\alpha = k\} \cap \Lambda_k \cap \{\alpha = n\}) = \{\alpha = n\} \cap \Lambda_n$.
Jer je $\Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ za sve $0 \leq n \leq \infty$ slijedi da je $\{\alpha = n\} \cap \Lambda_n \in \mathcal{F}_n$ za sve $0 \leq n \leq \infty$, dakle $\Lambda \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $0 \leq n \leq \infty$ iz čega odmah slijedi da je $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$.

□

Definicija 2.1.5. *σ-algebru $\mathcal{F}_\alpha$ nazivamo σ-algebra pridružena vremenu zaustavljanja α.*

Pretpostavimo da je $\{X_n : n \geq 0\}$ slučajan proces defniran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa skupom stanja $(S, \mathcal{S})$. Dakle, $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ je $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$-izmjerivo preslikavanje za $n \geq 0$. Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ takva da vrijedi:

$$\sigma(X_0, ..., X_n) \subset \mathcal{F}_n \text{ za } n \geq 0$$

te neka je α vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.

Definicija 2.1.6. *Na vjerojatnosnom prosoru $(\{\alpha < \infty\}, \mathcal{F} \cap \{\alpha < \infty\}, P\{\cdot | \{\alpha < \infty\})$ definiramo α* ***odgođeni proces*** *kao slučajni proces $\{X_{\alpha+n} : n \geq 1\}$.*

Općenito, $X_{\alpha+n} : (\{\alpha < \infty\}, \mathcal{F} \cap \{\alpha < \infty\}) \to (S, \mathcal{S})$, gdje je:

$$X_{\alpha+n}(\omega) = X_{\alpha(\omega)+n}(\omega) \text{ za } \omega \in \{\alpha < \infty\}.$$

Za svaki $B \in \mathcal{S}$ vrijedi:

$$\{X_{\alpha+n} \in B\} = \bigcup_{k=0}^{\infty}(\{X_{k+n} \in B\} \cap \{\alpha = k\}) \in \mathcal{F}_\infty \cap \{\alpha < \infty\}$$

iz čega slijedi da je gornja definicija dobra, tj. $X_{\alpha+n}$ je $(\mathcal{F} \cap \{\alpha < \infty\}, \mathcal{S})$-izmjerivo preslikavanje za svaki $n \geq 1$.

Ako je $\{\alpha < \infty\} = \Omega$, tada za svaki $B \in \mathcal{S}$ vrijedi:

$$\{X_\alpha \in B\} \cap \{\alpha = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ za svaki } n \geq 0.$$

Dakle, X_α je $(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{S})$-izmjerivo preslikavanje.

Definicija 2.1.7. *α zaustavljena σ-algebra je σ-algebra generirana α zaustavljenim slučajnim procesom:*

$$\mathcal{F}_\alpha' = \sigma(X_{\alpha+1}, X_{\alpha+2}, ...).$$

Iz gornje diskusije, jasno je da vrijedi $\mathcal{F}_\alpha' \subset \mathcal{F}_\infty \cap \{\alpha < \infty\}$. $\mathcal{F}_\alpha'$ zamišljamo kao informaciju dostupnu tek nakon α.

Međusobni odnosni σ-algebri $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha'$ te slučajnih procesa $\{X_n : n \geq 0\}$ i $\{X_{\alpha+n} : n \geq 1\}$ bit će u samom središtu važnih rezultata koje ćemo dokazati.

2.2 Zaustavljanje slučajnog procesa

Neka je $\{X_n : n \geq 0\}$ niz slučajnih varijabli, definiramo:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$$
$$\mathcal{F}_n' = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...).$$

Ako je $\{X_n : n \geq 0\}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, tada znamo da su σ-algebre $\mathcal{F}_n$ i $\mathcal{F}_n'$ nezavisne za svaki $n \geq 0$. Kako je pozitivna cjelobrojna konstanta vrijeme zaustavljanja, možemo označiti $\alpha = n$. Tada dobivamo da su $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha'$ nezavisne. Ako je α proizvoljno vrijeme zaustavljanja, jesu li $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha'$ nezavisne? Ispostavlja se da je uz dodatnu pretpostavku o jednakoj distribuiranosti odgovor potvrdan, no ipak treba voditi računa o slučaju $\alpha = \infty$.

Teorem 2.2.1. *Neka je $\{X_n : n \geq 0\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je α vrijeme zaustavljana obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$, gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Označimo:*

$$(\Omega^{\#}, \mathcal{F}^{\#}, P^{\#}) = (\{\alpha < \infty\}, \mathcal{F} \cap \{\alpha < \infty\}, P\{\cdot | \{\alpha < \infty\}).$$

Tada su na vjerojatnosom prostoru $(\Omega^{\#}, \mathcal{F}^{\#}, P^{\#})$ σ-algebre $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha^{'}$ nezavisne te vrijedi:

$$\{X_n : n \geq 0\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_{\alpha+k} : k \geq 1\}$$

u smislu da za svaki $B \in \mathcal{B}^\infty$ vrijedi:

$$P^{\#}(\{X_{\alpha+k} : k \geq 1\} \in B) = P(\{X_n : n \geq 0\} \in B). \tag{2.3}$$

Dokaz. Neka su $\Lambda \in \mathcal{F}_\alpha$ i $B \in \mathbb{R}^\infty$ proizvoljni skupovi. Tada vrijedi:

$$P\{\Lambda \cap \{\alpha < \infty\} \cap (\{X_{\alpha+k} : k \geq 1\} \in B)\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\Lambda \cap \{\alpha = n\} \cap (\{X_{n+k} : k \geq 1\} \in B)\}. \tag{2.4}$$

Iz definicije $\mathcal{F}_\alpha$ odmah slijedi da je $\Lambda \cap \{\alpha = n\} \in \mathcal{F}_n$ za svaki $n \geq 0$. Iz nezavisnosti σ-algebri $\mathcal{F}_n$ i $\mathcal{F}_n^{'}$ i činjenice da je $(\{X_{n+k} : k \geq 1\} \in B) \in \mathcal{F}_n^{'}$ dobivamo da je izraz 2.4 jednak sljedećem izrazu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\Lambda \cap \{\alpha = n\}) P(\{X_{n+k} : k \geq 1\} \in B). \tag{2.5}$$

Iz jednake distribuiranosti slučajnih varijabli X_n i propizicije 1.1.1. slijedi:

$$\{X_{n+k} : n \geq 0\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_k : k \geq 0\}.$$

Dakle, izraz 2.5 jednak je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\Lambda \cap \{\alpha = n\}) P(\{X_k : k \geq 0\} \in B) =$$

$$= P(\Lambda \cap \{\alpha < \infty\}) P(\{X_k : k \geq 0\} \in B).$$

Ako izraz s lijeve strane u 2.4 podijelimo sa $P\{\alpha < \infty\}$ dobivamo:

$$P^{\#}(\Lambda \cap \{\alpha < \infty\} \cap (\{X_{\alpha+k} : k \geq 1\} \in B)) = P^{\#}(\Lambda)P(\{X_k : k \geq 0\} \in B). \tag{2.6}$$

Ako u 2.6 stavimo $\Lambda = \Omega$ dobivamo tvrdnju 2.3.
Znajući da vrijedi 2.3 izraz 2.6 možemo zapisati na sljedeći način:

$$P^{\#}(\Lambda \cap \{\alpha < \infty\} \cap (\{X_{\alpha+k} : k \geq 1\} \in B)) = P^{\#}(\Lambda)P^{\#}(\{X_{\alpha+k} : k \geq 1\} \in B). \tag{2.7}$$

Iz izraza 2.7 slijedi da su σ-algebre $\mathcal{F}_\alpha$ i $\mathcal{F}_\alpha^{'}$ nezavisne.

□

2.3 Iteracije vremena zaustavljanja

U ovom paragrafu konstruirat ćemo iteracije vremena zaustavljanja te pomoću teorema o zaustavljanju nezavisnog i jednakodistribuiranog slučajnog procesa dokazati najvažniji rezultat u ovom poglavlju. U čitavom paragrafu je $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran niz slučajnih varijabli.

Neka je:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n$$

skup svih konačnih uređenih n-torki realnih brojeva, gdje $\mathbb{R}^0$ interpretiramo kao prazan skup. Na skupu E definiramo familiju $\mathcal{E}$ na sljedeći način:

$$\mathcal{E} = \{G \in E : G \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}^n \text{ za } n \geq 1\}.$$

Lema 2.3.1. *Familja $\mathcal{E}$ je σ-algebra na prostoru E.*

Dokaz. (i) $E \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}^n$ za $n \geq 1$, Dakle $E \in \mathcal{E}$.
(ii) Neka je $G \in \mathcal{E}$ proizvoljan. Tada je $G \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}^n$ za $n \geq 1$.
$G^c \cap \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus (G \cap \mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}^n$, $n \geq 1$. Dakle $G^c \in \mathcal{E}$.
(iii) Neka je $(G_k : k \geq 1)$ proizvoljan niz u $\mathcal{E}$. Tada je $G_k \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{B}^n$ za $k, n \geq 1$. Označimo $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.Vrijedi:
$G \cap \mathbb{R}^n = (\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \cap \mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}^n$ za $n \geq 1$. Dakle $G \in \mathcal{E}$.

□

Skupovi iz σ-algebre $\mathcal{E}$ imaju lijepo svojstvo: ako uzmemo proizvoljan skup $A \in \mathcal{E}$ te fiksiramo $n \in \mathbb{N}$, tada vektori duljine n iz skupa A čine n-dimnezionalni Broelov skup. Zašto nam je potreban izmjerivi prostor $(E, \mathcal{E})$ vidijet ćemo uskoro.

Označimo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ i $\mathcal{F}_n^{'} = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$. Pretpostavimo da je α konačno vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$.
Za svaki $n \geq 1$ postoji $B_n \in \mathcal{B}_n$ takav da je

$$\{\alpha = n\} = \{(X_1, ..., X_n) \in B_n\}.$$

Stavimo: $\alpha(0) = 0, \beta(1) = \alpha$. Neka je $\alpha(2)$ neka slučajna varijabla sa svojstvom:

$$\{\alpha(2) = n\} = \{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+n}) \in B_n\}, \quad n \geq 1$$

Definiramo: $\beta(2) = \beta(1) + \alpha(2)$. Nastavljamo dalje analogno, neka je $\alpha(k + 1)$ slučajna varijabla sa svojstvom:

$$\{\alpha(k + 1) = n\} = \{(X_{\beta(k)+1}, ..., X_{\beta(k)+n}) \in B_n\}, \quad n, k \geq 1$$

Definiramo: $\beta(k + 1) = \beta(k) + \alpha(k + 1)$. Stavimo $\beta(0) = 0$, slijedi: $\beta(k) = \alpha(1) + ... + \alpha(k)$, $k \geq 1$. Jedna od dalekosežnih posljedica sljedećeg teorema bit će da je $\{\beta_k : k \geq 1\}$ proces obnavljanja. Prije iskaza i dokaza tog teorema potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.3.2. *$\beta(k)$ je vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ za svaki $k \geq 1$.*

Dokaz. Za dokaz ove leme koristit ćemo očiglednu činjenicu: $\beta(k - 1) \leq \beta(k)$ za svaki $k \geq 1$. $\beta(1)$ je vrijeme zaustavljanja. Pokažimo da je $\beta(2)$ vrijeme zaustavljanja:

$$\{\beta(2) = n\} = \{\alpha + \alpha(2) = n\} = \bigcup_{l=0}^{n} (\{\alpha = l\} \cap \{\alpha(2) = n - l\}) =$$

$$= \bigcup_{l=0}^{n} (\{\alpha = l\} \cap \{(X_{l+1}, ..., X_n) \in B_{n-l}\}).$$

Jer je $\{\alpha = l\} \in \mathcal{F}_l \subset \mathcal{F}_n$ te $\{(X_{l+1}, ..., X_n) \in B_{n-l}\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $l \leq n$ slijedi $\{\beta(2) = n\} \in \mathcal{F}_n$. Kako je n bio proizvoljan slijedi da je $\beta(2)$ vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$.
Pretpostavimo sada da je $\beta(k - 1)$ vrijeme zaustavljanja za neki prirodni broj $k - 1$. Neka je n proizvoljan prirodni broj. Vrijedi:

$$\{\beta(k) = n\} = \{\beta(k - 1) + \alpha(k) = n\} = \bigcup_{l=0}^{n} (\{\beta(k - 1) = l\} \cap \{\alpha(k) = n - l\}) =$$

$$= \bigcup_{l=0}^{n} (\{\beta(k-1) = l\} \cap \{(X_{l+1}, ..., X_n) \in B_{n-l}\}).$$

Po pretpostavci je $\{\beta(k-1) = l\} \in \mathcal{F}_l \subset \mathcal{F}_n$ za svaki $l \leq n$. Analognim zaključivanjem kao u slučaju $k = 2$ dobivamo da je $\beta(k)$ vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. □

Teorem 2.3.3. *Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ i $\mathcal{F}_n' = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$ te neka je α konačno vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. Tada su slučajni elementi:*

$$\{(\alpha(k), X_{\beta(k-1)+1}, ..., X_{\beta(k)}) : k \geq 1\}$$

nezavisni i jednako distribuirani.

Dokaz. Označimo: $V_k = (\alpha(k), X_{\beta(k-1)+1}, ..., X_{\beta(k)})$, $k \geq 1$.
$V_k : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E})$, $k \geq 1$. Sada je vidiljiva potreba σ-algebre $\mathcal{E}$ jer duljina $V_k(\omega)$ nije konstantna nego ovisi o $\alpha(k)(\omega)$. Nije odmah vidljivo da su V_k slučajni elementi, no to ćemo pokazati u nastavku dokaza. Važno je uočiti da je familija $\{\{k\} \times A : k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{E}\}$ generirajući π-sistem za $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$. Osim jednostavnijeg zapisa u nastavku ta činjenica imat će i praktičnu posljedicu.
Prvo ćemo pokazati da su V_1 i V_2 nezavinsi slučajni elementi. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljni prirodni broj te neka je $A \in \mathcal{E}$ proizvoljan skup. Imamo:

$$V_1^{-1}(\{k\} \times A) = \{\alpha(1) = k\} \cap \{(X_1, ..., X_{\alpha(1)}) \in A\} = \{\beta(1) = k\} \cap \{(X_1, ..., X_{\beta(1)}) \in A\} = \{\beta(1) = k\} \cap \{(X_1, ..., X_k) \in A \cap \mathbb{R}^k\} .$$

Budući da je $A \in \mathcal{E}$ vrijedi $A \cap R^k \in \mathcal{B}^k$ iz čega slijedi $\{(X_1, ..., X_k) \in A \cap \mathbb{R}^k\} \in \mathcal{F}_k$. Iz leme 1.1.4. *b*) slijedi $V_1^{-1}(\{k\} \times A) \in \mathcal{F}_{\beta(1)}$. Kako je $\{\{k\} \times A : k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{E}\}$ generirajuća familija slijedi da je V_1 $(\mathcal{F}_{\beta(1)}, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E})$-izmjerivo preslikavanje.

$$\begin{gathered} V_2^{-1}(\{k\} \times A) = \{\alpha(2) = k\} \cap \{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in A\} = \\ = \{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in B_k\} \cap \{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in A \cap \mathbb{R}^k\} = \\ = \{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in B_k \cap (A \cap \mathbb{R}^k)\}. \end{gathered}$$

Sličnim zaključivanjem, zaključujemo da je V_2 $(\mathcal{F}_{\beta(1)}', \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E})$-izmjerivo preslikavanje.
Iz teorema 2.2.1. slijedi da su V_1 i V_2 nezvisni slučajni elementi te da vrijedi:

$$\{X_{\beta(1)+k} : k \geq 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_k : k \geq 1\}. \tag{2.8}$$

Za jednakost (2.8) važno nam je da je α konačno vrijeme zaustavljanja. Iz propozicije 1.1.1. i (2.8) slijedi:

$$(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_1, ..., X_k), \quad k \geq 1. \tag{2.9}$$

Sada ćemo pokazati da su V_1 i V_2 jednako distribuirani slučajni elementi. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljni prirodni broj te neka je $A \in \mathcal{E}$ proizvoljan skup. Koristeći (2.9) i $B_k \cap (A \cap R^k) \in \mathcal{B}^k$ imamo niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
P\{V_1 \in \{k\} \times A\} &= P\{\beta(1) = n, (X_1, ..., X_n) \in A \cap \mathbb{R}^k\} \\
&= P\{(X_1, ..., X_k) \in B_k \cap (A \cap \mathbb{R}^k)\} \\
&= P\{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in B_k \cap (A \cap \mathbb{R}^k)\} \\
&= P\{(X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in B_k, (X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in \cap A \cap \mathbb{R}^k\} \\
&= P\{\alpha(2) = k, (X_{\beta(1)+1}, ..., X_{\beta(1)+k}) \in \cap A \cap \mathbb{R}^k\} \\
&= P\{V_2 \in \{k\} \times A\}.
\end{aligned}$$

Jer su P_{V_1} i P_{V_2} vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E})$ te se podudaraju na generirajućem π-sistemu, vrijedi $P_{V_1} = P_{V_2}$ iz čega slijedi da su V_1 i V_2 jednako distribuirani slučajni elementi.
Pretpostavimo da su $V_1, ..., V_{n-1}$ nezavisni i jednako distribuirani slučaji elementi za neki prirodni broj $n - 1$. Tada vrijedi:

$$P(V_1 \in C_1, ..., V_{n-1} \in C_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} P(V_i \in C_i)$$

za sve $C_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$, $i \leq n - 1$.
Neka su $k_1, ..., k_{n-1}$ proizvoljni nenegativni cijeli brojevi, te $A_1, ..., A_{n-1}$ proizvoljni skupovi u $\mathcal{E}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\{V_1 \in \{k_1\} \times A_1, ..., V_{n-1} \in \{k_{n-1}\} \times A_{n-1}\} = \\
&= \{\alpha(1) = k_1, ..., \alpha(n-1) = k_{n-1}, (X_1, ..., X_{k_1}) \in A_1, ... \\
&\qquad ..., (X_{k_1+...+k_{n-2}+1}, ..., X_{k_1+...+k_{n-2}+k_{n-1}}) \in A_{n-1}\}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Neka je k nenegativan cijeli broj. Budući da je $\beta(k - 1) = \alpha(1) + ... + \alpha(n - 1)$, vrijedi:

$$\{V_1 \in \{k_1\} \times A_1, ..., V_{n-1} \in \{k_{n-1}\} \times A_{n-1}\} \cap \{\beta(n - 1) = k\} = \begin{cases} \emptyset & \sum_{i=1}^{n-1} k_i \neq k \\ (2.10) & \sum_{i=1}^{n-1} k_i = k \end{cases} \tag{2.11}$$

Ako raspišemo izraz (2.10) dobivamo:

$$\begin{aligned}&\{(X_1,...,X_{k_1})\in B_{k_1},...,(X_{k_1+...+k_{n-2}+1},...,X_{k_1+...+k_{n-2}++k_{n-1}})\in B_{k_n},...\\&...,(X_1,...,X_{k_1})\in A_1\cap\mathbb{R}^{k_1},...,,(X_{k_1+...+k_{n-2}+1},...,X_{k_1+...+k_{n-2}+k_{n-1}})\in A_{n-1}\cap\mathbb{R}^{k_n}\}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Za izraz (2.12) vrijedi da je element $\mathcal{F}_{k_1+...+k_{n-1}}$. Dakle, iz (2.11) slijedi:

$$\{V_1\in\{k_1\}\times A_1,...,V_{n-1}\in\{k_{n-1}\}\times A_{n-1}\}\cap\{\beta(n-1)=k\}\in\mathcal{F}_k.\tag{2.13}$$

Jer je $\beta(k-1)$ vrijeme zaustavljanja (lema 1.3.2.), iz (2.13) dobivamo:

$$\{V_1\in\{k_1\}\times A_1,...,V_{n-1}\in\{k_{n-1}\}\times A_{n-1}\}\in\mathcal{F}_{\beta(n-1)}.\tag{2.14}$$

Neka je k proizvoljan nenegativan cijeli broj, te A proizvoljan skup u $\mathcal{E}$. Imamo:

$$\begin{aligned}\{V_n\in\{k\}\times A\}&=\{\alpha(n)=k,(X_{\beta(n-1)+1},...,X_{\beta(n)})\in A\}\\&=\{(X_{\beta(n-1)+1},...,X_{\beta(n-1)+k})\in B_k,(X_{\beta(n-1)+1},...,X_{\beta(n-1)+k})\in A\cap\mathbb{R}^k\}\\&=\{(X_{\beta(n-1)+1},...,X_{\beta(n-1)+k})\in B_k\cap(A\cap\mathbb{R}^k)\}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Jer $A\in\mathcal{E}$, vrijedi $B_k\cap(A\cap\mathbb{R}^k)\in\mathcal{B}^k$. Sada iz (2.15) slijedi:

$$\{V_n\in\{k\}\times A\}\in\mathcal{F}'_{\beta(n-1)}.\tag{2.16}$$

Iz teorema 2.2.1. te pretpostavke indukcije slijedi:

$$\begin{aligned}&P\{V_1\in\{k_1\}\times A_1,...,V_{n-1}\in\{k_{n-1}\}\times A_{n-1},V_n\in\{k_n\}\times A_n\}=\\&=P\{V_1\in\{k_1\}\times A_1,...,V_{n-1}\in\{k_{n-1}\}\times A_{n-1},V_n\in\{k_n\}\}P\{V_n\in\{k_n\}\times A_n\}\\&=\prod_{i=1}^{n}P\{V_i\in\{k_i\}\times A_i\}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Neka je $\mathcal{A}$ familija svih skupova $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\times\mathcal{E}$ za koje vrijedi:

$$P\{V_1\in A,...,V_{n-1}\in\{k_{n-1}\}\times A_{n-1},V_n\in\{k_n\}=P\{V_1\in A\}\prod_{i=2}^{n}P\{V_i\in\{k_i\}\times A_i\}$$

gdje su $k_2,...,k_n$ proizvoljni nenegativni cijeli brojevi, te $A_2,...,A_n$ proizvoljni skupovi u $\mathcal{E}$.
i) Iz pretpostavke indukcije lako slijedi $\mathbb{N}\times E\in\mathcal{A}$.
ii) Neka su $A,B\in\mathcal{A}$ takvi da vrijedi $A\subset B$. Tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&P\{V_1 \in B \setminus A, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\} = \\
&= P\{V_1 \in B, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\} - P\{V_1 \in A, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\} \\
&= P\{V_1 \in B\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\} - P\{V_1 \in A\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\} \\
&= P\{V_1 \in B \setminus A\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $B \setminus A \in \mathcal{A}$.
iii) Neka je $\{B_l : l \geq 1\}$ rastući niz skupova u $\mathcal{A}$. Vrijedi $B_l \subset B_{l+1}$ za svaki $l \geq 1$. Označimo $B = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$.

$$
\begin{aligned}
&P\{V_1 \in B, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\} = P(\bigcup_{l=1}^{\infty}\{V_1 \in B_l, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\}) = \\
&= \lim_{l\to\infty} P\{V_1 \in B_l, V_2 \in \{k_2\} \times A_2, ..., V_n \in \{k_n\} \times A_n\} = \lim_{l\to\infty} P\{V_1 \in B_l\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\} \\
&= P\{V_1 \in \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\} = P\{V_1 \in B\} \prod_{i=2}^{n} P\{V_i \in \{k_i\} \times A_i\}.
\end{aligned}
$$

Dakle, $B \in \mathcal{A}$. Slijedi da je $\mathcal{A}$ Dyinkinova klasa, a iz (2.17) slijedi da $\mathcal{A}$ sadrži generirajući π-sistem za $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$. Zaključujemo da vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$.

Neka je $\mathcal{A}$ familija svih skupova $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$ za koje vrijedi:

$$
P\{V_1 \in C, V_2 \in A, V_3 \in \{k_3\}\times A_3, ..., V_n \in \{k_n\}\times A_n\} = P\{V_1 \in C\}P\{V_2 \in A\} \prod_{i=3}^{n} P\{V_i \in \{k_i\}\times A_i\}
$$

gdje su $k_3, ..., k_n$ proizvoljni nenegativni cijeli brojevi, C proizvoljan skup u $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$, te $A_3, ..., A_n$ proizvoljni skupovi u $\mathcal{E}$.

Potpuno analogno se pokaže da je $\mathcal{A}$ Dynkinova klasa. Induktivno ponavljamo postupak. Nakon n koraka dobivamo da su $V_1, ..., V_n$ nezavisni slučajni elementi.
Budući da je α konačno vrijeme zaustavljanja, tada je i $\beta(k)$ konačno vrijeme zaustavljanja za svaki $k \geq 0$ pa iz teorema 1.2.1. zaključujemo da vrijedi:

$$
\{X_{\beta(n-1)+k} : k \geq 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_k : k \geq 1\}. \tag{2.18}
$$

Zbog (2.18) i propozicije 1.1.1. vrijedi:

$$(X_{\beta(n-1)+1}, ..., X_{\beta(n-1)+k}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X_1, ..., X_k), \quad k \geq 1. \tag{2.19}$$

Neka je k proizvoljan nenegativan cijeli broj, te A proizvoljan skup u $\mathcal{E}$. Zbog (2.19) i $B_k \cap (A \cap R^k) \in \mathcal{B}^k$ imamo:

$$\begin{aligned} P\{V_n \in \{k\} \times A\} &= P\{\alpha(n) = k, (X_{\beta(n-1)+1}, ..., X_{\beta(n-1)+k}) \in A \cap \mathbb{R}^k\} \\ &= P\{(X_{\beta(n-1)+1}, ..., X_{\beta(n-1)+k}) \in B_k \cap (A \cap \mathbb{R}^k)\} \\ &= P\{(X_1, ..., X_k) \in B_k \cap (A \cap \mathbb{R}^k)\} \\ &= P\{(X_1, ..., X_k) \in B_k, (X_1, ..., X_k) \in A \cap \mathbb{R}^k\} \\ &= P\{\alpha(1) \in B_k, (X_1, ..., X_k) \in A \cap \mathbb{R}^k\} \\ &= P\{V_1 \in \{k\} \times A\}. \end{aligned}$$

Jer su P_{V_1} i P_{V_n} vjerojatnosne mjere na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E})$ te se podudaraju na generirajućem π-sistemu vrijedi $P_{V_1} = P_{V_n}$ iz čega slijedi da su V_1 i V_n jednako distribuirani slučajni elementi.
Dakle $V_1, ..., V_n$ su nezavisni i jednako distribuirani slučajni elemeniti. Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja teorema. □

U slučaju $P\{\alpha = \infty\} > 0$ iz teorema 1.2.1. i teorema 1.3.3. dobivamo da su:

$$\{(\alpha(k), X_{\beta(k-1)+1}, ..., X_{\beta(k)}) : k \leq n\}$$

nezavisni i jednako distribuirani slučajni elementi na vjerojatnosnom prostoru:

$$\Omega \cap (\textstyle\bigcap_{k=1}^n \{\alpha(k) < \infty\}), \mathcal{F} \cap (\bigcap_{k=1}^n \{\alpha(k) < \infty\}), P^{\#} = P\{\cdot | \cap_{k=1}^n \{\alpha(k) < \infty\}\}$$

Sada ćemo dokazati nekoliko posljedica.

Korolar 2.3.4. *Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Broelova funkcija. Tada je:*

$$\{Y_k = \sum_{\beta(k-1)+1}^{\beta(k)} \varphi(X_n) : k \geq 1\}$$

niz nezavisnih i jednako distriburianih slučajnih varijabli.

Dokaz. Označimo $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{n\} \times \mathbb{R}^n)$. Vrijedi $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$.
Definiramo $F : \mathbb{N} \times E \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$F(l, x_1, ..., x_k) = (\sum_{n=1}^{l} \varphi(x_n))\mathbb{1}_M(l, x_1, ..., x_k), \quad (l, x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N} \times E.$$

Uvedimo i pomoćne funkcije $\varphi_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, definirane sa:

$$\varphi_k(x_1, ..., x_k) = \varphi(x_1) + ... + \varphi(x_k) =$$

$$= \varphi \circ \pi_1(x_1, ..., x_k) + ... + \varphi \circ \pi_k(x_1, ..., x_k), \quad (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^n$$

gdje je: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projekcija na i-tu koordinatu, $i \leq k$. Budući da su φ i π_i izmjerive funkcije, tada je i φ_k izmjeriva za svaki $k \geq 1$(projekcije su uniformno neprekidne funkcije).

Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljna točka. Ako je $x \geq 0$ Vrijedi:

$$F^{-1}(< -\infty, x]) = \Big((\mathbb{N} \times E) \setminus M\Big) \cup \{(k, x_1, ..., x_k) : \varphi(x_1) + ...\varphi(x_n) \leq x\} = \Big((\mathbb{N} \times E) \setminus M\Big) \cup$$
$$\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\} \times \{(k, x_1, ..., x_k) : \varphi_k \leq x\}\Big) = \Big((\mathbb{N} \times E) \setminus M\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\} \times \varphi_k^{-1}(< -\infty, x])\Big).$$

Budući da je φ_k $(\mathcal{B}^k, \mathcal{B})$-izmjeriva slijedi: $\varphi_k^{-1}(< -\infty, x]) \in \mathcal{B}^k$. Kako je $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{E}$ za svaki $k \geq 1$, slijedi $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\} \times \varphi_k^{-1}(< -\infty, x]) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$. Dakle $F^{-1}(< -\infty, x]) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$ za sve $x \geq 0$. Ako je $x < 0$ računamo analogno (nećemo imati $(\mathbb{N} \times E) \setminus M$ u gornjem izrazu). Dakle, $F^{-1}(< -\infty, x]) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Kako je familija $\{< -\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ generirajuća za $\mathcal{B}$ slijedi da je F $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}, \mathcal{B})$-izmjeriva.
Vrijedi $Y_k = F(\alpha(k), X_{\beta(k-1)+1}, ..., X_{\beta(k)})$, $k \geq 1$. Iz teorema 2.3.3 slijedi da je $\{Y_k : k \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

□

Korolar 2.3.5. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*
(a) $\{\alpha_k : k \geq 1\}$ *je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli*
(b) $\{S_{\beta(k)} - S_{\beta(k-1)} = X_{\beta(k-1)+1} + ... + X_{\beta(k)} : k \geq 1\}$ *je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli* $(S_0 = 0)$
(c) $\{\beta_k : k \geq 1\}$ *je proces obnavljanja*

Dokaz. Tvrdnja (a) i (b) direktno slijede iz korolara 1.3.4 za $\varphi(x) = 1$, odnosno $\varphi(x) = x$, a tvrdnja (c) direktno slijedi iz nenegativnosti iteracija vremena zaustavljanja i tvrdnje (a). □

Koroloar 2.3.5 bit će ključan u trećem poglavlju kada ćemo promatrati općenita svojstva slučajnih šetnji. Sljedeći korolar bit će nam potreban tek u četvrtom poglavlju.

Korolar 2.3.6. *Slučajni* 2*-dimenzionalni vektori* $\{(\beta(k) - \beta(k-1), S_{\beta(k)} - S_{\beta(k-1)}) : k \geq 1\}$ *su nezavisni i jednako distribuirani.*

Dokaz. Definiramo $g : (\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ na sljedeći način:

$$g(n, x_1, ...x_k) = \Big(n, (x_1 + ... + x_k)\mathbb{1}_M\Big), \quad (n, x_1, ...x_k) \in \mathbb{N} \times E$$

gdje je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{n\} \times \mathbb{R}^n)$.
Označimo $f_1, f_2 : (\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$f_1(n, x_1, ...x_k) = n, \quad (n, x_1, ...x_k) \in \mathbb{N} \times E$$

$$f_2(n, x_1, ...x_k) = (x_1 + ... + x_k)\mathbb{1}_M, \quad (n, x_1, ...x_k) \in \mathbb{N} \times E.$$

Neka je $A \in \mathcal{B}$:

$$f_1^{-1}(A) = f_1^{-1}(A \cap \mathbb{N}) = \bigcup_{n \in A \cap \mathbb{N}} (\{n\} \times E) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}.$$

Važno je primijetiti da je gornja unija prebrojiva. Dakle, f_1 je $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}, \mathcal{B})$-izmjeriva. f_2 je također $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}, \mathcal{B})$-izmjeriva, to se pokaže potpuno analogno kao u korolaru 2.3.4. Slijedi da je funkcija g $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{E}, \mathcal{B}^2)$-izmjeriva. Iz teorema 2.3.3 slijedi da su $\{g(\alpha(k), X_{\beta(k-1)+1}, ..., X_{\beta(k)}) : k \geq 1\}$ nezavisni i jednako distribuirani slučajni vektori, a to je upravo tvrdnja korolara.

□

2.4 Waldova jednakost

U ovom potpoglavlju dokazujemo Waldovu jednakost, korisni rezultat pri radu sa zaustavljenim sumama.

Lema 2.4.1. *Neka je X nenegativna cijelobrojna slučajna varijabla. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X > k\}.$$

Dokaz. Stavimo: $p_n = P\{X = n\}$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Definirajamo niz funkicja na $\mathbb{N}_0$:

$$f_k(j) = \begin{cases} 0 & j \leq k \\ p_j & j > k \end{cases}$$

Neka je μ brojeća mjera na $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(N_0))$. Tada iz Beppo-Levijevog teorema slijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P\{X > k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}_0} f_k d\mu = \int_{\mathbb{N}_0} (\sum_{k=0}^{\infty} f_k) d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} f_k)(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mathbb{E}[X] \end{aligned}$$

□

Propozicija 2.4.2. *Neka je niz slučajnih varijabli $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran, te neka vrijedi $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Pretpostavimo da je α integrabilno vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, $n \geq 1$. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\alpha} X_i] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[\alpha].$$

Dokaz. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $\{X_n : n \geq 1\}$ i činjenice da je $\{i \leq \alpha\} = \{i > \alpha\}^c = \{\alpha \leq i-1\}^c \in \mathcal{F}_{i-1}$ slijedi nezavisnost slučajnih varijabli X_i i $\mathbb{1}_{\{i \leq \alpha\}}$, $i \in \mathbb{N}$. Iz integrabilnosti i nezavisnosti slučajnih varijabli X_i i $\mathbb{1}_{\{i \leq \alpha\}}$, jednake distribuiranosti i Beppo-Levijevog teorema imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}}| \leq \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty} |X_i| \mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}}] \\
&= \mathbb{E}|X_1| \sum_{i=0}^{\infty} P\{\alpha > i\} = \mathbb{E}|X_1|\mathbb{E}[\alpha] < \infty
\end{aligned}$$

Koristeći teorem o divergiranoj konvergenciji, jednaku distribuiranosti i integrabilnost i inezavisnost slučajnih varijabli X_i i $\mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}}$ dobivamo:

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\alpha} X_i] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i \mathbb{1}_{\{i\leq\alpha\}}] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{i=0}^{\infty} P\{\alpha > i\} \tag{2.20}$$

Iz 2.20 i leme 2.4.1. slijedi tvrdnja propozicije. □

Poteškoća korištenja Waldove jednakosti leži u činjenici da uvjet integrabilnosti, kako slučajnog niza, tako i vremena zaustavljanja nije uvijek lako ispitati.

2.5 Dualna vremena zaustavljanja

U ovom potpoglavlju definiramo dualna vremena zaustavljanja. Ispostavlja se da je to ključani koncept koji vodi do Weiner-Hopfove karakterizacije.
Neka je $\mathcal{H} = \{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P)$ gdje je:

$$\begin{aligned}
&P(A) = P\{\mathcal{H} \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}^\infty \\
&X_n(x_1, x_2, ...) = x_n, \quad (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Neka je α vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Definirajmo:

$$M_\alpha(\omega) = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\omega) : n \geq 1\} = \{\beta_n(\omega) : n \geq 1\}, \quad \omega \in \mathbb{R}^\infty.$$

M_α zovemo slučajni skup iteracija vremena zaustavljanja α, a $M_\alpha(\omega)$ nije ništa drugo nego skup vrijednosti iteracija vremena zaustavljanja $\{\beta_n : n \geq 1\}$ izračunatih u ω. Definirajmo $r_n : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ za $n \in \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$r_n(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_{n+1}, ...), \quad (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Odmah je vidljivo da je $r_n^{-1} = r_n$ za $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.5.1. *$P = P \circ r_n^{-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Važno je uočiti sljedeće:

$$\mathcal{H} \stackrel{\mathcal{D}}{=} r_n \circ \mathcal{H} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

2.21 slijedi iz propozicije 1.1.1., nezavisnosti i jednake distribuiranosti. Slijedi:

$$P(A) = P\{\mathcal{H} \in A\} = P\{r_n \circ \mathcal{H} \in A\} = P\{\mathcal{H} \in r_n^{-1}(A)\} = P(r_n^{-1}(A)) = P \circ r_n^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{B}^\infty.$$

□

Definicija 2.5.2. *Neka su τ i η vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. Za vrijeme zaustavljanja τ kažemo da je dualno za η ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\{\omega : n \in M_\tau(\omega)\} = \{\omega : n < \eta \circ r_n(\omega)\}. \tag{2.22}$$

Neka je ω fiksna točka. Tada je n vrijednost neke iteracije vremena zaustavljanja τ izračunate u točki ω ako i samo ako gledajući prvih n trenutaka promatranog procesa unatrag (obzirom na točku ω) ne opažamo fenomen kojeg prati vrijeme zaustavljanja η.
Za daljnja razmatranja potrebno je imati nešto jednostavniju karakterizaciju dualnosti. U tu svrhu definiramo:

$$L(\tau, n)(\omega) = \max\{i \leq n : i \in M_\tau(\omega)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$L(\tau, n)$ je vrijeme početka zadnjeg obnavljanja do trenutka n koje nije završilo.

Lema 2.5.3. *$L(\tau, n)$ je $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B})$-izmjerivo preslikavanje.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati $\{L(\tau, n) = k\} \in \mathcal{F}_k$ za svaki $k \leq n$. Iz definicije $L(\tau, n)$ i leme 2.3.2. slijedi:

$$\begin{aligned}
\{L(\tau, n) = k\} &= \{\omega : L(\tau, n)(\omega) = k\} \\
&= \{\omega : \max\{i \leq n : i \in M_\tau(\omega)\} = k\} \\
&= \{\omega : \exists l(\omega)\ \tau_{l(\omega)}(\omega) = k\} \\
&= \bigcup_{l=0}^{\infty} \{\omega : \tau_l(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.5.4. *Neka su τ i η vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$. Tada je τ dualno za η ako isamo ako vrijedi:*

$$n - L(\tau, n) = L(\eta, n) \circ r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Dokaz. Neka vrijedi 2.23. Lako se pokaže da vrijedi:

$$n \in M_\tau(\omega) \iff n - L(\tau, n)(\omega) = 0.$$

Iz gornje ekvivalencije i pretpostavke slijedi:

$$n \in M_\tau(\omega) \iff n - L(\tau, n)(\omega) = 0 \iff L(\eta, n)(r_n\omega) = 0 \iff \eta(r_n\omega) > n.$$

Dakle, vrijedi 2.22. Za obratnu implikaciju potrebno je na drugačiji (ekvivalentan) način definirati iteracije vremena zaustavljanja, za dokaz pogledati navedenu literaturu.

□

Korolar 2.5.5. *Definicija dualnosti je simetrična, tj. ako je τ dualno za η tada je i η dualno za τ.*

Dokaz. Iz teorema dualnosti i $r_n = r_n^{-1}$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\tau \text{ je dualno za } \eta &\iff n - L(\tau, n) = L(\eta, n) \circ r_n \quad n \in \mathbb{N} \\
&\iff n - L(\tau, n) \circ r_n = L(\eta, n) \quad n \in \mathbb{N} \\
&\iff n - L(\eta, n) = L(\tau, n) \circ r_n \quad n \in \mathbb{N} \\
&\iff \eta \text{ je dualno za } \tau.
\end{aligned}$$

□

Korolar 2.5.6. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$L(\eta, n) \stackrel{\mathcal{D}}{=} n - L(\tau, n)$$

Dokaz. Iz propozicije o dualnosti i leme 2.5.1. imamo:

$$n - L(\tau, n) = L(\eta, n) \circ r_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} L(\eta, n)$$

□

Korolar 2.5.7. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=L(\eta,n)}^{n} X_i.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ fiksan. Iz leme 2.5.1. slijedi:

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i) \circ r_n = \sum_{i=1}^{L(\tau,n)\circ r_n} X_i \circ r_n.$$

Iz propozicije o dualnosti dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)\circ r_n} X_i \circ r_n = \sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_i \circ r_n.$$

Zbog:

$$(X_1(r_n), X_2(r_n), ..., X_n(r_n), X_{n+1}(r_n), ...) = (X_n, X_{n-1}, ..., X_1, X_{n+1}, ...)$$

znamo da za $i = 1, ..., n$ vrijedi $X_i \circ r_n = X_{n-i+1}$. Dakle, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_i \circ r_n = \sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_{n-i+1}.$$

Ako stavimo $j = n - i + 1$ dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{n-L(\eta,n)} X_{n-i+1} = \sum_{i=n}^{L(\eta,n)+1} X_j = \sum_{i=L(\eta,n)+1}^{n} X_j.$$

Ako pogledamo početak i kraj imamo:

$$\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=L(\eta,n)}^{n} X_i.$$

a to je upravo tvrdnja teorema. □

Propozicija 2.5.8. *Neka su τ i η dualna vremena zaustavljanja. Tada za $u \in (0,1)$ vrijedi:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^\eta]^n, \tag{2.24}$$

odnosno:

$$\frac{1-\mathbb{E}[u^\tau]}{1-u} = \frac{1}{1-\mathbb{E}[u^\eta]}. \tag{2.25}$$

Dokaz. Iz leme 2.5.1. slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{r_n^{-1}(\tau^{-1}(< n, \infty >))\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} \tag{2.26}$$

Iz defincije dulanosti 2.22 te simetričnosti realacije dualnosti (Korolar 2.5.5.) slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{n \in M_\eta\}. \tag{2.27}$$

Uočimo da zbog $u \in (0,1)$ vrijedi:

$$\mathbb{E}[u^\eta] = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\eta = n\} + u^\infty P\{\eta = \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\eta = n\}.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za τ. Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}_0$ na sljedeći način:

$$f_n(k) = u^n P\{\eta_k = n\}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0,$$

gdje su $\{\eta_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ iteracije vremena zaustavljanja η. Neka je ν brojeća mjera na $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Koristeći Beppo-Levijev teorem te korolar 2.3.5. tvrdnju (a), raspišimo 2.27:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau \circ r_n > n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{n \in M_\eta\} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{\eta_k = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta_k = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}_0} f_n d\nu \\
&= \int_{\mathbb{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^{\eta_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^\eta]^k.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Iz 2.26 i 2.28 slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^\eta]^n.$$

Budući da je $u \in (0, 1)$ slijedi $1 - u^\eta > 0$. Dakle, vrijedi $\mathbb{E}[u^\eta] \in (0, 1)$. Iz toga slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[u^\eta]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[u^\eta]}. \tag{2.29}$$

Stavimo: $p_k = P\{\tau = k\}$, $k \in N_0$. Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}_0$ na sljedeći način:

$$f_n(k) = \begin{cases} u^n p_k & ,k \leq n \\ 0 & ,k > n \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Tada iz Beppo-Levijevog teorema slijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} u^n P\{\tau > n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u^n p_k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}_0} f_n d\nu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \int_{\mathbb{N}_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\nu = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)(k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} u^n p_k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\
&= \frac{1}{1-u} - (\sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k) \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-u} (1 - \mathbb{E}[u^\tau]).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Iz 2.24, 2.29 i 2.30 slijedi 2.25.

□

Poglavlje 3

Slučajne šetnje i opća svojstva

U ovom poglavlju definirati ćemo pojam slučajne šetnje. Slučajna šetnja je naoko jednostavan i razumljiv matematički model, no krije mnoga zanimljiva i ne tako jednostavno dokaziva svojstva. U praksi, slučajna šetnja je prirodni matematički model za mnoge pojave, od ekonomije, aktuarstva, fizike itd. Jačina tvrdnji koje ćemo dokazi u ovom poglavlju dolaze iz činjenice da krećemo od definicije i ne pretpostavljamo nikakve dodatne uvjete, stoga se propozicije i teoremi ovog poglavlja mogu primijeniti za svaku slučajnu šetnju.

3.1 Vremena uzlazaka i silazaka

U poglavlju 2. proučavali smo vremena zaustavljanja. U ovom odijeljku defnirat ćemo slučajnu šetnju i vremena zaustavljanja koja su usko uz nju vezana i koja su nam od značajnog interesa proučavanja.

Definicija 3.1.1. *Neka je* $\{X_n : n \geq 1\}$ *nezavisan i jednako distribuiran niz slučajnih varijabli. Stavimo:*

$$\begin{aligned} S_n &= X_1 + ... + X_n, \quad n \geq 1 \\ S_0 &= 0. \end{aligned}$$

Slučajni proces $\{S_n : n \geq 0\}$ *nazivamo slučajna šetnja. Slučajne varijable niza* $\{X_n : n \geq 1\}$ *nazivamo koracima slučajne šetnje. Funkciju distribucije slučajne varijable* X_1 *zovemo distribucijom koraka.*

Od velikog interesa bit će proučavanje vremena zaustavljanja defniranih sa:

$$\begin{aligned} N &= inf\{n \geq 1 : S_n > 0\} \\ \bar{N} &= inf\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}. \end{aligned}$$

Definicija 3.1.2. *N zovemo prvo striktno uzlazno vrijeme, a $\bar{N}$ prvo silazno vrijeme slučajne šetnje.*

Važno je uočiti da je $N, \bar{N} \geq 1$.

Lema 3.1.3. *N i $\bar{N}$ su vremena zaustavljanja obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ gdje je $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$, $n \geq 1$.*

Dokaz. Budući da su $S_1, ..., S_n$ $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B})$-izmjerive slučajne varijable vrijedi:

$$\{N = n\} = \{S_1 \leq 0, ..., S_{n-1} \leq 0, S_n > 0\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \geq 1$$
$$\{\bar{N} = n\} = \{S_1 > 0, ..., S_{n-1} > 0, S_n \leq 0\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \geq 1.$$

□

Neka je $\{N_k : k \geq 1\}$ niz iteracija vremena zaustavljanja N.

Lema 3.1.4. *$N_k = \inf\{n > N_{k-1} : S_n > S_{N_{k-1}}\}$ za svaki $k \geq 1$.*

Dokaz. Analogno kao u konstrukciji iteracija vremena zaustavljanja u 2.3. imamo:

$$\{N = n\} = \{(X_1, ..., X_n) \in B_n\}, \tag{3.1}$$

Iz definicije N slijedi:

$$\begin{aligned} \{N = n\} &= \{S_1 \leq 0, ..., S_{n-1} \leq 0, S_n > 0\} \\ &= \{X_1 \leq 0, X_1 + X_2 \leq 0, ..., X_1 + ... + X_{n-1} \leq 0, X_1 + ... + X_n > 0\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Iz 3.1 i 3.2 slijedi:

$$\{(X_1, ..., X_n) \in B_n\} = \{X_1 \leq 0, X_1 + X_2 \leq 0, ..., X_1 + ... + X_{n-1} \leq 0, X_1 + ... + X_n > 0\}. \tag{3.3}$$

Neka je $\omega \in \Omega$ proizvoljna točka. Stavimo $N_k(\omega) = n$. Iz činjenice $N_k = N_{k-1} + \alpha_k$ i 3.3 dobivamo:

$$\begin{aligned} \omega \in \{N_{k-1} + \alpha_k = n\} &= \bigcup_{l=0}^{n} \{N_{k-1} = n - l, \alpha_k = l\} \\ &= \bigcup_{l=0}^{n} \{N_{k-1} = n - l, (X_{N_{k-1}+1}, ..., X_{N_{k-1}+l}) \in B_l\} \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{l=0}^{n} \{N_{k-1} = n - l, (X_{n-l+1}, ..., X_n) \in B_l\}$$
$$= \bigcup_{l=0}^{n} \{N_{k-1} = n - l\} \cap \{X_{n-l+1} \leq 0, ..., X_{n-l+1} + ... + X_{n-1} \leq 0, X_{n-l+1} + ... + X_n > 0\}.$$

Dakle, postoji $l \leq n$ takav da vrijede sljedeće tvrdnje:

$$\begin{aligned} &N_{k-1}(\omega) = n - l, \\ &X_{n-l+1}(\omega) \leq 0, ..., X_{n-l+1}(\omega) + ... + X_{n-1}(\omega) \leq 0, X_{n-l+1}(\omega) + ... + X_n(\omega) > 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Iz 3.4 vidljivo je da vrijedi $N_k(\omega) = \inf\{n > N_{k-1}(\omega) : S_n(\omega) > S_{N_{k-1}}(\omega)\}$ iz čega slijedi tvrdnja leme.

□

Slična tvrdnja može se dokazati i za $\bar{N}$. Zbog leme 3.1.3. niz iteracija $\{N_k : k \geq 1\}$ zovemo vremenima uzlaska, a $\{\bar{N}_k : k \geq 1\}$ vremenima silaska. Također iz leme 3.1.3. odmah slijedi:

$$S_{N(k)} - S_{N(k-1)} > 0. \tag{3.5}$$

Iz 3.5 i korolara 2.3.5. tvrdnje (*b*) dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.1.5. *Slučajni proces* $\{S_{N(k)} - S_{N(k-1)} : k \geq 1\}$ *je proces obnavljanja.*

U poglavlju 2.5 proučavali smo dualna vremena zaustavljanja, a najvažniji primjer tog koncepta su upravo N i $\bar{N}$.

Propozicija 3.1.6. *N je dualno vrijeme zaustavljanja za $\bar{N}$.*

Dokaz. Prisjetimo se:

$$r_n(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_{n+1}, ...), \quad (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty.$$

Dokazujemo po definiciji. Neka je n fiksan prirodni broj te $\omega_0 \in \{\omega : n \in M_N(\omega)\}$. Tada zbog leme 3.1.4. vrijedi:

$$\begin{aligned} n \in M_N(\omega_0) &\iff n = N_k(\omega_0) \quad \text{za neki k} \in \mathbb{N} \\ &\iff S_n(\omega_0) > S_j(\omega_0) \quad j = 0, 1, ..., n-1 \\ &\iff \sum_{i=j+1}^{n} X_i(\omega_0) > 0 \quad j = 0, 1, ..., n-1 \\ &\iff S_{n-j}(r_n\omega_0) > 0 \quad j = 0, 1, ..., n-1 \end{aligned}$$

$$\iff S_k(r_n\omega_0) > 0 \quad k = 1, 2, ..., n \iff n \leq \bar{N} \circ r_n\omega_0$$
$$\iff \omega_0 \in \{\omega : n < \bar{N} \circ r_n\omega\}$$

□

3.2 Opća svojstva

U ovom podpoglavlju istražit ćemo međusobne odnose između slučajnih varijabli N, $\limsup_{n\to\infty} S_n$ i $M_\infty = \sup_{n\geq 0} S_n$, te proučiti granična ponašanja slučajnih šetnji.

Za dokaz prve važne propozicije potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 3.2.1. *Neka je $\{X_n : n \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli, takvih da je $X_n \geq 0$ (g.s) za svaki $n \geq 1$, te $\mathbb{E}[X_1] = \infty$. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to \infty \quad (g.s).$$

Dokaz. Zbog nenegativnosti za svaki $c > 0$ imamo:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|<c\}} \quad (g.s). \tag{3.6}$$

Jer je funkcija $g(x) = x\mathbb{1}_{\{|x|<c\}}$ Borelova, iz nezavisnosti i jednake distribuiranosti niza $\{X_n : n \geq 1\}$ slijedi da je niz slučajnih varijabli $\{X_n\mathbb{1}_{\{|X_n|<c\}} : n \geq 1\}$ nezavisan i jednako distribuiran, a kako je $\mathbb{E}[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|<c\}}] \leq c < \infty$ iz Kolmogorovljevog jakog zakona velikih brojeva imamo:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{\{|X_j|<c\}} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|<c\}}] \quad (g.s). \tag{3.7}$$

Iz 3.6 i 3.7 slijedi da za svaki $c > 0$ vrijedi:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \geq \mathbb{E}[X_1\mathbb{1}_{\{|X_1|<c\}}] \quad (g.s). \tag{3.8}$$

Neka je $\{c_k : k \geq 1\}$ rastući niz pozitivnih realnih brojeva takav da:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \infty.$$

Budući da je $\{c_k : k \geq 1\}$ rastući niz koji konvergira u ∞ imamo:

$$0 \leq X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|<c_1\}} \leq X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|<c_2\}} \leq ... \nearrow X_1. \tag{3.9}$$

Iz 3.9 i teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo:

$$\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|<c_k\}}] \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}[X_1] = \infty. \tag{3.10}$$

Iz 3.8 i 3.10 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \to \infty \quad (g.s).$$

□

Sljedeća propozicija navodi neke od ekvivalentnih tvrdnji konačnosti vremena zaustavljanja N.

Propozicija 3.2.2. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

$$(a) \quad P\{N < \infty\} = 1 \quad (b) \quad P\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\} = 1 \quad (c) \quad P\{M_\infty = \infty\} = 1.$$

Također ekivivalentne su i sljedeće tvrdnje:

$$(a') \quad P\{N = \infty\} > 0 \quad (b') \quad P\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\} = 0 \quad (c') \quad P\{M_\infty = \infty\} = 0.$$

Dokaz. $(a) \implies (b)$: Ako je $N < \infty$ $(g.s)$ tada je slučajna varijabla S_N dobro definirana i iz definicije N slijedi $S_N > 0$ $(g.s)$. Stoga, kada bi vrijedilo $\mathbb{E}[S_N] = 0$ slijedio bi $S_N = 0$ $(g.s)$ što je kontradikcija sa zaključkom od maloprije. Dakle vrijedi $\mathbb{E}[S_N] > 0$. Iz korolara 1.3.5. tvrdnje (b) dobivamo da je $\{S_{N(k)} - S_{N(k-1)} : k \geq 1\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Važno je uočiti sljedeće:

$$\frac{S_{N(n)}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(S_{N(k)} - S_{N(k-1)})}{n}$$

Ako je $\mathbb{E}[S_N] < \infty$ koristimo Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva, inače u slučaju $\mathbb{E}[S_N] = \infty$ koristimo lemu 3.2.1. te dobivamo sljedeći zaključak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{N(n)}}{n} \to \mathbb{E}[S_N] > 0 \quad (g.s). \tag{3.11}$$

Iz 3.11 slijedi $\lim_{n\to\infty} S_{N(n)} \to \infty$ $(g.s)$ iz čega odmah dobivamo $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(g.s)$.

$(b) \implies (c)$: Zbog $\limsup_{n\to\infty} S_n \leq M_\infty$ odmah slijedi da ako je $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(g.s)$ da je tada nužno i $M_\infty = \infty$ $(g.s)$.

$(c) \implies (a)$: Neka je $\omega \in \{M_\infty = \infty\}$. Iz $M_\infty = \sup_{j\geq 0} S_j$ i činjenice da je $M_\infty(\omega) = \infty$ slijedi:

$$\exists j(\omega) \in \mathbb{N} \quad S_1(\omega) + ... + S_{j(\omega)}(\omega) \geq 1 \implies N(\omega) \leq j(\omega) < \infty.$$

Dakle, vrijedi $\{M_\infty = \infty\} \subset \{N < \infty\}$. Budući da je $M_\infty = \infty$ $(g.s)$ nužno slijedi $N < \infty$ $(g.s)$.

$(a') \implies (b')$: Ako vrijedi (a') tada ne vrijedi (a) pa ne vrijedi ni (b). Dakle:

$$P\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\} < 1.$$

Jer je $\limsup_{n\to\infty} S_n$ permutacijska slučajna varijabla slijedi:

$$P\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\} = 0.$$

$(b') \implies (c')$: Neka je $\omega \in \{\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty\}$. Vrijedi $S_n(\omega) \leq \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) + 1 < \infty$ za gotovo sve indekse n iz čega odmah slijedi $\omega \in \{M_\infty < \infty\}$. Imamo:

$$\{\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty\} \subset \{M_\infty < \infty\} \implies \{M_\infty < \infty\}^c \subset \{\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty\}^c.$$

Odnosno:

$$\{M_\infty = \infty\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\}.$$

Iz čega slijedi tvrdnja.
$(c') \implies (a')$: Ako vrijedi (c') onda ne vrijedi (c) pa ne vrijedi niti (a). Tada nužno vrijedi (a') jer je (a') negacija tvrdnje pod (a).

□

Propozicija 3.2.2. klasificira slučajnu šetnju u odnosu na vrijeme zaustavljanja N. Imajući informaciju o $(g.s)$ konačnosti ili nekonačnosti od N možemo odrediti do na skup mjere nula slučajne varijable $\limsup_{n\to\infty} S_n$ i $M_\infty = \sup_{n\geq 0} S_n$. Sličan rezultat može se dobiti i za slučajne varijable $\bar{N}$, $\liminf_{n\to\infty} S_n$ i $m_\infty = \inf_{n\geq 0} S_n$.
Kako je $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisan niz slučajnih varijabli znamo da slučajna šetnja $(g.s)$ konvergira ili $(g.s)$ divregira. Sljedeći rezultat govori o tome kako pretpostavka o jednakoj distribuiranosti utječe na konvergenciju, odnosno divergenciju nedegenerirane slučajne šetnje ($P\{X_1 = 0\} < 1$).

Teorem 3.2.3. *Neka je $P\{X_1 = 0\} < 1$. Tada vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

$$(a) \quad S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad (g.s)$$

$$(b) \quad S_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad (g.s)$$

$$(c) \quad -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s).$$

Dokaz. Stavimo $S_\infty = \limsup_{n\to\infty} S_n$. Jer je S_∞ permutacijska slučajna varijabla slijedi da je $(g.s)$ konstanta $c \in [-\infty, \infty]$. Vrijedi:

$$S_\infty = X_1 + \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} X_i. \tag{3.12}$$

Zbog nezavisnosti, jednake distribuiranosti i propozicije 1.1.1. slijedi:

$$\{X_1 + ... + X_n : n \geq 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{X_2 + ... + X_{n+1} : n \geq 1\}. \tag{3.13}$$

Jer je *limsup* $(\mathcal{B}^\infty, \mathcal{B})$ -izmjerivo preslikvanje iz 3.13 slijedi:

$$\limsup((X_1 + ... + X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \limsup((X_2 + ... + X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}). \tag{3.14}$$

Iz 3.12 i 3.14 slijedi:

$$c = X_1 + c \quad (g.s) \implies c \in \{-\infty, \infty\}. \tag{3.15}$$

Zaključak u 3.15 je valjan jer vrijedi $P\{X_1 = 0\} < 1$ (u protivnom, kada bi vrijedlo $c \in \mathbb{R}$ imali bi $X_1 = 0$ $(g.s)$).
Iz 3.15 slijedi:

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \in \{-\infty, \infty\}. \tag{3.16}$$

Potpuno analogno zaključili bi:

$$\liminf_{n\to\infty} S_n \in \{-\infty, \infty\}. \tag{3.17}$$

Iz 3.16 i 3.17 kombinirajući sve moguće kombinacije dobivamo tvrdnju teorema.

□

Dakle, teorem 3.2.3. kaže da će nedegenerirana slučajna šetnja $(g.s)$ neograničeno skakati isključivo na jednu stranu (pozitivnu ili negativnu) ili će $(g.s)$ neograničeno skakati na obje strane. Znajući tu zanimljivu informaciju, zanima nas postoji li neka karakteristika slučajnog niza $\{X_n : n \geq 1\}$ koja će deterministički moći odrediti granično ponašanje slučajne šetnje u smislu teorema 3.2.3. Pokazat ćemo da je tražena karakteristika $\mathbb{E}[X_1]$, ali samo u slučaju da očekivanje postoji. Prije nego iskažemo taj teorem, dokazat ćemo potrebnu lemu.

Lema 3.2.4. *Za nezavisan i jednako distribuirani niz slučajnih varijabli* $\{X_n : n \geq 1\}$ *vrijedi:*
a) $P\{X_n > 0, X_n{+}X_{n-1} > 0, ..., X_n{+}...{+}X_1 > 0\} = P\{X_1 > 0, X_1{+}X_2 > 0, ..., X_1{+}...{+}X_n > 0\}$
b) $P\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\} = P\{S_j \leq 0, j \geq 0\}$

Dokaz. Nezavisnost i jednaka distribuiranost ključna je za obje tvrdnje. Tvrdnja *a*) slijedi iz osnovnog teorema o zamjeni integrala i Fubinijevog teorema:

$$\begin{aligned}
P\{X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, ..., X_n + ... + X_1 > 0\} &= \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n>0\}}\mathbb{1}_{\{X_n+X_{n-1}>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{X_n+...+X_1>0\}}] \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X_n>0\}}\mathbb{1}_{\{X_n+X_{n-1}>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{X_n+...+X_1>0\}}dP \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x_n>0\}}\mathbb{1}_{\{x_n+x_{n-1}>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{x_n+...+x_1>0\}}dP_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) \\
&= \int_R\cdots\int_R \mathbb{1}_{\{x_n>0\}}\mathbb{1}_{\{x_n+x_{n-1}>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{x_n+...+x_1>0\}}dP_{X_1}(x_1)\cdots dP_{X_n}(x_n) \\
&= (dP_{X_i} = dP_{X_j}) = \\
&= \int_R\cdots\int_R \mathbb{1}_{\{x_n>0\}}\mathbb{1}_{\{x_n+x_{n-1}>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{x_n+...+x_1>0\}}dP_{X_1}(x_n)\cdots dP_{X_n}(x_1).
\end{aligned}$$

Zamjenom oznaka varijabli nastavljamo gornji niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
&= \int_R\cdots\int_R \mathbb{1}_{\{x_1>0\}}\mathbb{1}_{\{x_1+x_2>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{x_1+...+x_n>0\}}dP_{X_1}(x_1)\cdots dP_{X_n}(x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x_1>0\}}\mathbb{1}_{\{x_1+x_2>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{x_1+...+x_n>0\}}dP_{(X_1,...,X_n)}(x_1,...,x_n) \\
&= \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X_1>0\}}\mathbb{1}_{\{X_1+X_2>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{X_1+...+X_n>0\}}dP \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_1>0\}}\mathbb{1}_{\{X_1+X_2>0\}}\cdots\mathbb{1}_{\{X_1+...+X_n>0\}}] \\
&= P\{X_1 > 0, X_1 + X_2 > 0, ..., X_1 + ... + X_n > 0\}.
\end{aligned}$$

Dokažimo sada tvrdnju *b*). Označimo:

$$A_m = \{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, n < k \leq m\} \quad B_m = \{S_j \leq 0, j \leq m\}.$$

Budući da su $\{A_m : m > n\}$ i $\{B_m : m \geq 1\}$ padajući nizovi događaja i jer je $\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\} = \bigcap_{m=n+1}^{\infty} A_m$, $\{S_j \leq 0, j \geq 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
P\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\} &= \lim_{m\to\infty} P(A_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} P\{X_{n+1} \leq 0, X_{n+1} + X_{n+2} \leq 0, ...X_{n+1} + ... + X_m \leq 0\} \\
&= \text{(analogno kao pod a))} = \\
&= \lim_{m\to\infty} P\{X_1 \leq 0, X_1 + X_2 \leq 0, ...X_1 + ... + X_{m-n} \leq 0\} \\
&= \lim_{m\to\infty} P(B_{m-n}) = P\{S_j \leq 0, j \geq 0\}.
\end{aligned}
$$

□

Teorem 3.2.5. *Neka je* $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ *i* $P\{X_1 = 0\} < 1$. *Tada vrijedi:*
(a) $\mathbb{E}[X_1] > 0 \implies \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s.)$
(b) $\mathbb{E}[X_1] < 0 \implies \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad (g.s.)$
(c) $\mathbb{E}[X_1] = 0 \implies -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s)$.

Dokaz. Tvrdnje (a) i (b) slijede iz Kolmogorovljevog jakog zakona velikih brojeva (važna je pretpostvaka $\mathbb{E}|X_1| < \infty$). Dokažimo tvrdnju (c).
Pretpostavimo da vrijedi:

$$P\{N = \infty\} = q > 0. \tag{3.18}$$

Iz teorema 3.2.2. tvrdnje (c') imamo $M_\infty = \sup_{n\geq 0} S_n < \infty$ $(g.s.)$. Definirajmo:

$$\nu = \inf\{j \geq 0 : S_j = M_\infty\}, \quad \inf\emptyset = \infty.$$

Iz definicije M_∞ i ν slijedi:

$$
\begin{aligned}
1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} P\{\nu = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_j < S_n, 0 \leq j < n, S_k \leq S_n, k > n\} \qquad (3.19) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{[\sum_{i=j+1}^{n} X_i > 0, 0 \leq j < n] \cap [\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n]\}.
\end{aligned}
$$

Budući da je $\{\sum_{i=j+1}^{n} X_i > 0, 0 \leq j < n\} \in \mathcal{F}_n$ i $\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\} \in \mathcal{F}_n'$, zbog nezavisnosti i 3.19 vrijedi:

$$\begin{aligned}1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} P\{[\sum_{i=j+1}^{n} X_i > 0, 0 \leq j < n]P\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, ..., \sum_{i=1}^{n} X_i > 0\}P\{\sum_{i=n+1}^{k} X_i \leq 0, k > n\}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Iz leme 3.2.4., 3.18, 3.20 i propozicije 2.4.1. dobivamo:

$$\begin{aligned}1 &\geq \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_1 > 0, X_1 + X_2 > 0, ..., S_n > 0\}P\{S_j \leq 0, j \geq 0\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bar{N} > n\}P\{N = \infty\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bar{N} > n\}q \\ &= \mathbb{E}[\bar{N}]q.\end{aligned}$$

Dakle, imamo $1 \geq \mathbb{E}[\bar{N}]q$. Budući da je $q > 0$ i $\bar{N}$ pozitivna slučajna varijabla, zaključujemo $\mathbb{E}[\bar{N}] < \infty$. Sada iz Waldove jednakosti (propozicijia 2.4.2.) slijedi:

$$\mathbb{E}[S_{\bar{N}}] = \mathbb{E}[\bar{N}]\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[\bar{N}]0 = 0. \tag{3.21}$$

Budući da je $S_{\bar{N}} \leq 0$ $(g.s)$ iz 3.21 slijedi:

$$S_{\bar{N}} = 0 \quad (g.s.). \tag{3.22}$$

Imamo:

$$P\{S_{\bar{N}} < 0\} \geq P\{X_1 < 0\} > 0 \tag{3.23}$$

3.23 slijedi iz činjenice $\{X_1 < 0\} \subset \{S_{\bar{N}} < 0\}$ i sljedećeg:

$$P\{X_1 = 0\} < 1 \implies P\{X_1 < 0\} + P\{X_1 > 0\} > 0 \tag{3.24}$$

Kada bi jedan od sumanada u 3.24 bio jednak nula onda bi $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$ što je kontradikcija. Vidimo da su tvrdnje 3.22 i 3.23 međusobno u kontradikciji. Dakle, zaključujemo da je $q = 0$, tj. ne vrijedi 3.18. Iz propozicije 3.2.2. tvrdnje (a) dobivamo da je $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(g.s.)$. Slično bi zaključili da je $P\{\bar{N} = \infty\} = 0$ iz čega slijedi $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ $(g.s.)$ (komentar poslije propozicije 3.2.2.). □

Poglavlje 4

Wiener-Hopfova fakotorizacija i posljedice

Cilj ovog poglavlja je pokušati odrediti distribuciju slučajnog vektora (S_N, N) kao i $(S_{\bar{N}}, \bar{N})$. U tu svrhu prvo dokazujemo Wiener-Hopfovu faktorizaciju. Također, cilj je nešto reći i o distribuciji procesa maksimuma $\{\max_{0\leq k\leq n} S_k : n \geq 0\}$ odnosno procesa minimuma $\{\min_{0\leq k\leq n} S_k : n \geq 0\}$.

4.1 Wiener-Hopfova faktorizacija

Nizom lema koje se nastavljaju na one iz potpoglavlja 2.5. cilj nam je dokazati Wiener-Hopfovu fakotrizaciju. Ideja je sljedeća: faktorizirati distribuciju koraka slučajne šetnje F u konvolucijski produkt. Jedino svojstvo slučajnog vektora $(N, \bar{N})$ koje se pritom koristi je dualnost (propozicija 3.1.6.) pa u nastavku potpoglavlja koristimo proizvoljna dualna vremena zaustavljanja τ i η.

Potreban nam je vjerojatnosni prostor na kojemu su $\{X_n : n \geq 1\}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable nezavisne od geometrijske slučajne varijable T. Konstruirajmo povoljan vjerojatnosni prostor. Neka je $(\Omega^{'}, \mathcal{F}^{'}) = (\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$. Neka je $P^{'}$ vjerojatnosna mjera na $(\Omega^{'}, \mathcal{F}^{'})$ takva da su koordinatne slučajne varijable $\{X_n^{'} : n \geq 1\}$ definirane sa:

$$X_n(\omega^{'}) = X_n(x_1, x_2, ...) = x_n, \quad \omega = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty, n \in \mathbb{N}$$

nezavisne i jednako distribuirane. Neka je $(\Omega^{''}, \mathcal{F}^{''}, P^{''})$ vjerojatnosni prostor induciran geometrijskom slučajnom varijablom $T^{''}$ s parametrom $p \in [0, 1]$ $(P\{T \geq n\} = q^n,\ q = 1 - p)$. Definiramo:

$$
\begin{aligned}
&(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega^{'} \times \Omega'', \mathcal{F}^{'} \times \mathcal{F}^{''}, P^{'} \times P^{''}),\\
&X_n(\omega) = X_n(\omega^{'}, \omega^{''}) = X_n^{'}(\omega^{'}), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N},\\
&T(\omega) = T(\omega^{'}, \omega^{''}) = T^{''}(\omega^{''}), \quad \omega \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Također, na sličan način definiramo i funkcije $r_n : \Omega \to \Omega,$, $\theta_n : \Omega \to \Omega$.

$$
\begin{aligned}
r_n(\omega) &= r_n(\omega^{'}, \omega^{''}) = r_n((x_1, x_2, ...), \omega^{''}) = ((x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_{n+1}, ...), \omega^{''}), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N},\\
\theta_n(\omega) &= \theta_n(\omega^{'}, \omega^{''}) = \theta_n((x_1, x_2, ...), \omega^{''}) = ((x_{n+1}, x_{n+2}, ...), \omega^{''}), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Lema 4.1.1. *Vrijedi:*

$$
\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i. \tag{4.1}
$$

Dokaz. Iz korolara 2.5.7. slijedi:

$$
\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=L(\tau,n)+1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2}
$$

Iz leme 2.5.3. slijedi da su slučajne varijable $L(\tau, n)$ i $L(\eta, n)$ $\mathcal{F}_n$ izmjerive. Budući da je $\sigma(T)$ nezavisna sa $\sigma(X_1, X_2, ...) = \mathcal{F}_\infty$ i vrijedi 4.2 slijedi:

$$
\begin{aligned}
P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i \leq x\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P\{\sum_{i=k+1}^{n} X_i \leq x, L(\tau, n) = k, T = n\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} P\{\sum_{i=k+1}^{n} X_i \leq x, L(\tau, n) = k\} P\{T = n\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=L(\tau,n)+1}^{n} X_i \leq x\} P\{T = n\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \leq x\} P\{T = n\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,n)} X_i \leq x, T = n\} = P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

□

Radi boljeg razumijevanja i preglednosti sljedeće leme koja nam je potreba pri dokazu Wiener-Hopfove faktorizacije, izdvajamo sljedeći rezultat.

Lema 4.1.2. *Sljedeće σ-algebre su nezavisne:*

$$\mathcal{F}_{\tau(k-1)}, \mathcal{F}'_{\tau(k-1)}, \sigma(T), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Za $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k-1$, vrijedi:

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) \leq T\} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}} q^{\tau(k-1)}], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

gdje su $\{\tau(j) : j \geq 0\}$ iteracije vremena zaustavljanja τ.

Dokaz. Dokažimo najprije 4.3. Prisjetimo se:

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_1, X_2, ...).$$

Budući da je $\tau(k-1)$ vrijeme zaustavljanja (lema 2.3.2.), iz defincije σ-algebre vezene za proizvoljno vrijeme zaustavljanja slijedi $\mathcal{F}_{\tau(k-1)} \subset \mathcal{F}_\infty$. Također, prisjetimo se:

$$\mathcal{F}'_{\tau(k-1)} = \sigma(X_{\tau(k-1)+1}, X_{\tau(k-1)+2}, ...).$$

Vrijedi:

$$\{X_{\tau(k-1)+j} \in A\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{X_{n+j} \in A, \tau(k-1) = n\} \in \mathcal{F}_\infty, \quad j \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{B}.$$

Neka su $A \in \mathcal{F}_{\tau(k-1)}$, $B \in \mathcal{F}'_{\tau(k-1)}$, $C \in \sigma(T)$ proizvoljni skupovi. Budući da je $\sigma(T)$ nezavisna sa $\sigma(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisna je i sa $\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n)) = \mathcal{F}_\infty$. Iz teorema 2.2.1. slijedi da su $\mathcal{F}_{\tau(k-1)}$ i $\mathcal{F}'_{\tau(k-1)}$ nezavisne. Imamo:

$$P\{A \cap B \cap C\} = P\{A \cap B\}P\{C\} = P\{A\}P\{B\}P\{C\}.$$

Pri dokazu jednakosti 4.4 koristimo svojstva uvjetnog očekivanja koja nećemo eksplicitno navoditi. Vrijedi:

$$\begin{aligned} P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) \leq T\} &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}} \mathbb{1}_{\{\tau(k-1)\leq T\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}} \mathbb{1}_{\{\tau(k-1)\leq T\}} | \mathcal{F}_{\tau(k-1)}]] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Budući da je $\tau(i) \leq \tau(k-1)$ za $i = 1, ..., k-1$ lako se pokaže da su slučajne varijable $(S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)})$ $\mathcal{F}_{\tau(k-1)}$-izmjerive za $i = 1, ..., k-1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)\leq T\}}|\mathcal{F}_{\tau(k-1)}] &= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)\leq T\}}|\mathcal{F}_{\tau(k-1)}] \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\mathbb{E}[\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{l\leq T\}}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)=l\}}|\mathcal{F}_{\tau(k-1)}] \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{l\leq T\}}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)=l\}}|\mathcal{F}_{\tau(k-1)}] \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)=l\}}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{l\leq T\}}|\mathcal{F}_{\tau(k-1)}] \qquad (4.6) \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)=l\}}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{l\leq T\}}] \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\tau(k-1)=l\}}q^l \\
&= \mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}q^{\tau(k-1)}.
\end{aligned}$$

Iz 4.5 i 4.6 slijedi 4.4. □

Analogno kao 4.4 pokaže se:

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) + n \leq T\} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)}-S_{\tau(i-1)}\leq x_i\}\}}q^{\tau(k-1)}]q^n \qquad (4.7)$$

Lema 4.1.3. *Neka su $\{\tau(i) : i \geq 0\}$ iteracije vremena zaustavljanja τ. Stavimo:*

$$H_{\tau,q}(x) = P\{S_\tau \leq x, \tau \leq T\}. \qquad (4.8)$$

(a) *Za $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ...k$ $(k \in \mathbb{N})$, vrijedi:*

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k) \leq T\} = \prod_{i=1}^{k} H_{t,q}(x_i).$$

(b) *Za $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:*

$$P\{S_{\tau(k)} \leq x, \tau(k) \leq T\} = H^{k*}_{\tau,q}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (a):

$$\begin{aligned}
&P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\}, \tau(k) \le T\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\}, \tau(k) - \tau(k-1) = n, \tau(k-1) + n \le T\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{[\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\}, \tau(k-1) + n \le T] \cap \\
&\qquad\qquad [\tau(k) - \tau(k-1) = n, S_{\tau(k)} - S_{\tau(k-1)} \le x_k]\}.
\end{aligned}$$

Budući da je $\tau(i) \le \tau(k-1)$ za $i = 1, ..., k-1$ lako se pokaže da su slučajne varijable $(S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)})$ $\mathcal{F}_{\tau(k-1)}$-izmjerive za $i = 1, ..., k-1$. Vrijedi:

$$\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\} \cap \{\tau(k-1) + n \le T\} \in \sigma(\mathcal{F}_{\tau(k-1)} \cup \sigma(T)). \tag{4.9}$$

Također, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\{\tau(k) - \tau(k-1) = n\} = \{(X_{\tau(k-1)+1}, ..., X_{\tau(k-1)+n}) \in B_n\} \in \mathcal{F}'_{\tau(k-1)}, \\
&\{S_{\tau(k)} - S_{\tau(k-1)} \le x_k\} = \{X_{\tau(k-1)+1} + ... + X_{\tau(k)} \le x_k\} = \\
&= \bigcup_{l=0}^{\infty}(\{X_{\tau(k-1)+1} + ... + X_{\tau(k-1)+l} \le x_k\} \cap \{\tau(k) - \tau(k-1) = l\}) \in \mathcal{F}'_{\tau(k-1)}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Iz 4.3 slijedi da su σ-algebre $\sigma(\mathcal{F}_{\tau(k-1)} \cup \sigma(T))$ i $\mathcal{F}'_{\tau(k-1)}$ nezavisne. Zbog toga iz 4.9 i 4.10 slijedi:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} P\{[\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\}, \tau(k-1) + n \le T] \cap [\tau(k) - \tau(k-1) = n, S_{\tau(k)} - S_{\tau(k-1)} \le x_k]\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x_i\}, \tau(k-1) + n \le T\} P\{\tau(k) - \tau(k-1) = n, S_{\tau(k)} - S_{\tau(k-1)} \le x_k]\}.
\end{aligned}$$

Iz korolara 2.3.6. slijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) + n \leq T\}P\{\tau(k) - \tau(k-1) = n, S_{\tau(k)} - S_{\tau(k-1)} \leq x_k]\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) + n \leq T\}P\{\tau = n, S_{\tau} \leq x_k\}.$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k) \leq T\} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) + n \leq T\}P\{\tau = n, S_{\tau} \leq x_k\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Budući da je T nezavisna sa X_n, $n \in \mathbb{N}$, slijedi i nezavisnost T sa τ. Iz 4.7 i 4.11 slijedi:

$$\begin{aligned} &P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k) \leq T\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n, S_{\tau} \leq x_k\} q^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}\}} q^{\tau(k-1)}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n, S_{\tau} \leq x_k, n \leq T\} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}\}} q^{\tau(k-1)}] \\ &= P\{S_{\tau} \leq x_k.\tau \leq T\} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}\}} q^{\tau(k-1)}] \\ &= H_{\tau,q}(x_k) \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}\}} q^{\tau(k-1)}]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Iz 4.4 i 4.12 dobivamo:

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k) \leq T\} = H_{\tau,q}(x_k) P\{\bigcap_{i=1}^{k-1}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}, \tau(k-1) \leq T\}.$$

Nastavljamo induktivno do tražene tvrdnje. Dokažimo sada tvrdnju (b). Iz tvrdnje (a) slijedi:

$$\begin{aligned}P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}|\tau(k) \leq T\} &= \frac{\prod_{i=1}^{k} H_{\tau,q}(x_i)}{P\{\tau(k) \leq T\}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k} H_{\tau,q}(x_i)}{P\{\sum_{i=1}^{k}(\tau(i) - \tau(i-1)) \leq T\}}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Iz propozicije 1.4.2., korloara 2.3.5. tvrdnje (a) i (c) te 4.13 slijedi:

$$P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \leq x_i\}|\tau(k) \leq T\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{H_{\tau,q}(x_i)}{P\{\tau \leq T\}}. \tag{4.14}$$

Uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}&\Delta(i) = S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)}, \quad i = 1, ...k, \\ &Q(x_1, ..., x_k) = P\{\bigcap_{i=1}^{k}\{\Delta(i) \leq x_i\}|\tau(k) \leq T\}, \quad x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}, \\ &G(x) = \frac{H_{\tau,q}(x)}{P\{\tau \leq T\}}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti vjerojatnosti na rastući niz događaja i činjenice da je $G(\infty) = 1$ iz 4.14 slijedi:

$$P\{\Delta(i) \leq x|\tau(k) \leq T\} = G(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Iz 4.15 slijedi da su slučajne varijable $\Delta(i)$ $(i = 1, ..., k)$ jednako distribuirane na vjerojatnosnom prostoru $(\{\tau(k) \leq T\}, \mathcal{F} \cap \{\tau(k) \leq T\}, P\{\cdot|\tau(k) \leq T\})$. Također, ako označimo $\Delta = (\Delta(1), ..., \Delta(k))$, iz 4.14 dobivamo:

$$Q(x_1, ..., x_k) = G(x_1) \cdots G(x_k),$$

drugačije zapisano:

$$F_{\Delta}(x_1, ..., x_k) = F_{\Delta(1)}(x_1) \cdots F_{\Delta(k)}(x_k), \quad x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Iz 4.16 slijedi da su slučajne varijable $\Delta(i)$ $(i = 1, ..., k)$ nezavisne na vjerojatnosnom prostoru $(\{\tau(k) \leq T\}, \mathcal{F} \cap \{\tau(k) \leq T\}, P\{\cdot|\tau(k) \leq T\})$. Nezavisnost i jednaku distribuiranost mogli smo dokazati i pomoću korolara 2.3.4. i komentara prije navedenog korolara, ono što nam je bitno je distribucija 4.15. Iz korolara 1.3.7. i 1.24 slijedi:

$$\begin{aligned} P\{S_{\tau(k)} \le x | \tau(k) \le T\} &= P\{\sum_{i=1}^{k} (S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)} \le x | \tau(k) \le T\} \\ &= G^{k*}(x) = (\frac{H_{\tau,q}}{P\{\tau \le T\}})^{k*}(x) = \frac{H^{k*}_{\tau,q}(x)}{P\{\tau \le T\}^k}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Iz propozicije 1.4.2., korloara 2.3.5. tvrdnje (a) i (c) te 4.17 dobivamo:

$$P\{S_{\tau(k)} \le x | \tau(k) \le T\} = \frac{H^{k*}_{\tau,q}(x)}{P\{\tau \le T\}^k} = \frac{H^{k*}_{\tau,q}(x)}{P\{\tau(k) \le T\}}. \tag{4.18}$$

Iz 4.18 direktno slijedi tvrdnja (b).

□

Lema 4.1.4. *Distribucija slučajne varijalbe* $\sum_{i=1}^{L(\tau,n)} X_i$ *je:*

$$P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \le x\} = \sum_{k=0}^{\infty} H^{k*}_{\tau,q}(x)(1 - P\{\tau \le T\}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Dokaz. Iz definicije $L(\tau, n)$ te leme 4.1.3. tvrdnje (b) slijedi:

$$\begin{aligned} P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \le x\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \le x, \tau(k) \le T < \tau(k+1)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \le x, \tau(k) \le T\} - P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \le x, \tau(k+1) \le T\}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (H^{k*}_{\tau,q}(x) - P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \le x, \tau(k+1) \le T\}). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Potpuno analogno kao u prošloj lemi, pokaže se da su slučajne varijable $S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)}$ ($i = 1, ..., k+1$) nezavisne i jednako distribuirane na vjerojatnosnom prostoru $(\{\tau(k+1) \le T\}, \mathcal{F} \cap \{\tau(k+1) \le T\}, P\{\cdot|\tau(k+1) \le T\})$ sa distribucijom $G(x) = H_{\tau,q}(x)/P\{\tau \le T\}$, $x \in \mathbb{R}$. Budući da je T konačna slučajna varijabla vrijedi: $\{S_{\tau(k+1)} - S_{\tau(k)} < \infty\} \subset \{\tau(k+1) \le T\}$. Također, iz nezavisnosti $S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)}$ ($i = 1, ..., k+1$) slijedi nezavisnost slučajnih varijabli $S_{\tau(k)} = \sum_{i=1}^{k}(S_{\tau(i)} - S_{\tau(i-1)})$ i $S_{\tau(k+1)} - S_{\tau(k)}$.

Iz gornje diskusije slijedi:

$$\begin{aligned}
&P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \leq x, \tau(k+1) \leq T\} = P\{S_{\tau(k)} \leq x, S_{\tau(k+1)} - S_{\tau(k)} < \infty, \tau(k+1) \leq T\} \\
&= P\{S_{\tau(k)} \leq x, S_{\tau(k+1)} - S_{\tau(k)} < \infty | \tau(k+1) \leq T\} P\{\tau(k+1) \leq T\} \\
&= P\{S_{\tau(k)} \leq x | \tau(k+1) \leq T\} P\{S_{\tau(k+1)} - S_{\tau(k)} < \infty | \tau(k+1) \leq T\} P\{\tau(k+1) \leq T\} \\
&= \frac{H_{\tau,q}^{k*}(x)}{P\{\tau \leq T\}^k} \frac{H_{\tau,q}(\infty)}{P\{\tau \leq T\}} P\{\tau \leq T\}^{k+1} = H_{\tau,q}^{k*}(x) H_{\tau,q}(\infty).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

U predzadnjoj jednakosti koristili smo korolar 1.3.7., jednakost 1.24 vezano za konvoluciju te propoziciju 1.4.2., korolar 2.3.5. tvrdnje (a) i (c) vezano za geometrijsku distribuciju i iteracije vremena zaustavljanja.
Iz 4.20 i 4.21 slijedi:

$$\begin{aligned}
P\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} X_i \leq x\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (H_{\tau,q}^{k*}(x) - H_{\tau,q}^{k*}(x) H_{\tau,q}(\infty)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{k*}(x)(1 - H_{\tau,q}(\infty)).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Budući da je na skupu $\{\tau \leq T\}$ slučajna varijabla S_τ konačna tj, vrijedi $\{S_\tau < \infty\} \subset \{\tau \leq T\}$ iz 4.22 i definicije $H_{\tau,q}$ (4.8) slijedi:

$$P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{k*}(x)(1 - P\{\tau \leq T\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Sljedeća lema je potrebna pri dokazu posljednje leme koja vodi do Winer-Hopfove faktorizacije.

Lema 4.1.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor te neka je* $(E, \mathcal{E})$ *izmjeriv prostor. Neka je* $\{X_n : n \geq 1\}$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih i* $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$*-izmjerivih slučajnih elemenata. Neka je* $V \in \mathcal{E}$ *fiksan skup takav da je:*

$$P\{X_1 \in V^c\} = \theta \in <0, 1> .$$

Definirajmo vrijeme prvog posjeta skupu V*:*

$$L = \inf\{n \geq 1 : X_n \in V^c\}.$$

Pretpostavimo da su $G, Z, Y_1, Y_2, ...$ *nezavisni i definirani na* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Ako vrijedi:*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad P\{G = n\} = \theta(1-\theta)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},\\
&(b) \quad P\{Z \in \Lambda\} = P\{X_1 \in \Lambda | X_1 \in V^c\}, \quad \Lambda \in \mathcal{E},\\
&(c) \quad P\{Y_i \in \Lambda\} = P\{X_1 \in \Lambda | X_1 \in V\}, \quad \Lambda \in \mathcal{E}, i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Tada je:

$$(X_1, ..., X_{L-1}, X_L, L) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_1, ..., Y_{G-1}, Z, G).$$

Dokaz. Neka je $n \geq 1$ fiksan i $A_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, ..., n$. Zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti niza $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ te ostalih pretpostavki leme dobivamo:

$$\begin{aligned}
P\{(X_1, ..., X_L) &\in A_1 \times \cdots \times A_L, L = n\}\\
&= P\{X_i \in A_i \cap V, (i = 1, ..., n-1), X_n \in A_n \cap V^c\}\\
&= P\{X_n \in A_n \cap V^c\} \prod_{i=1}^{n-1} P\{X_i \in A_i \cap V\}\\
&= P\{X_1 \in A_n | X_1 \in V^c\} P\{X_1 \in V^c\} \prod_{i=1}^{n-1} P\{X_1 \in A_i | X_1 \in V\} P\{X_1 \in V\}\\
&= (1-\theta)^{n-1}\theta \prod_{i=1}^{n-1} P\{Y_i \in A_i\} P\{Z \in A_n\}\\
&= P\{G = n, Y_i \in A_i, (i = 1, ..., n-1), Z \in A_n\}\\
&= P\{(Y_1, ..., Y_{G-1}, Z) \in A_1 \times \cdots \times A_G, G = n\}.
\end{aligned}$$

Slijedi:

$$P\{(X_1, ..., X_L) \in \cdot, L = n\} = P\{(Y_1, ..., Y_{G-1}, Z) \in \cdot, G = n\} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Uvjetovanjem na L i 4.24 slijedi tvrdnja leme.

□

Lema 4.1.6. *Slučajne varijable* $\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i$ *i* $\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i$ *su nezavisne.*

Dokaz. Neka je $\{\delta_j : j \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih Bernulijevih slučajnih varijabli sa parametrom uspjeha p $(q = 1 - p)$. Također, neka je nezavisan sa nizom $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiramo:

$$T = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0\}.$$

Lako se provjeri sljedeće:

$$P\{T \geq n\} = q^n \quad n \in N_0.$$

Definiramo:

$$W_i = (\alpha_{i-1}, X_{\tau(i-1)+1}, ..., X_{\tau(i)}, \delta_{\tau(i-1)+1}, ..., \delta_{\tau(i)}) \quad i \geq 1.$$

Za definiciju α_i pogledati iteracije $\{\tau(i) : i \geq 0\}$ vremena zaustavljanja τ. Slično kao u teoremu 2.3.3. pokaže se da je niz $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ nezavisan i jednako distribuiran. Stavimo:

$$L = \inf\{i \geq 1 : \sum_{j=\tau(i-1)+1}^{\tau(i)} \delta_j \neq 0\}.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i &= \sum_{k=0}^{\infty} S_{\tau(k)} \mathbb{1}_{\{\tau(k) \leq T < \tau(k+1)\}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} S_{\tau(k)} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{\tau(k)} \delta_i = 0, \sum_{\tau(k)+1}^{\tau(k+1)} \delta_i \neq 0\}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} S_{\tau(k)} \mathbb{1}_{\{L=k+1\}} = S_{\tau(L-1)}.
\end{aligned}$$

Analogno:

$$\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i = S_T - S_{\tau(L-1)}.$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$S_{\tau(L-1)} = F_1(W_1, ..., W_{L-1}), \quad S_T - S_{\tau(L-1)} = F_2(W_L),$$

gdje su F_1 i F_2 prikladna izmjeriva preslikavanja (literatura [7]). Stavimo $F(x, y) = (F_1(x), F_2(y))$. Neka su $A, B \in \mathcal{B}$ proizvoljni Borelovi skupovi. Iz leme 4.1.5. i 4.23 slijedi:

$$
\begin{aligned}
&P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \in A, \sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \in B\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \in A, \sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \in B, L = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_{\tau(L-1)} \in A, S_T - S_{\tau(L-1)} \in B, L = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F_1(W_1, ..., W_{L-1}) \in A, F_2(W_L) \in B, L = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F(W_1, ..., W_{L-1}, W_L) \in A \times B, L = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F(Y_1, ..., Y_{T-1}, Z) \in A \times B, T = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F_1(Y_1, ..., Y_{T-1}) \in A, F_2(Z) \in B, T = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F_1(Y_1, ..., Y_{T-1}) \in A\} P\{F_2(Z) \in B\} P\{T = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F_1(Y_1, ..., Y_{T-1}) \in A, F_2(Z) \in \mathbb{R}, T \in N_0\} P\{F_1(Y_1, ..., Y_{T-1}) \in \mathbb{R}, \\
&\quad F_2(Z) \in B, T \in N_0\} P\{F_1(Y_1, ..., Y_{T-1}) \in \mathbb{R}, F_2(Z) \in \mathbb{R}, T = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{F_1(W_1, ..., W_{L-1}) \in A\} P\{F_2(W_L) \in B\} P\{L = n\} \\
&= P\{F_1(W_1, ..., W_{L-1}) \in A\} P\{F_2(W_L) \in B\} \\
&= P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \in A\} P\{\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \in B\}.
\end{aligned}
$$

□

Prisjetimo se:

$$
\begin{aligned}
&F(x) = P\{X_1 \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&P\{T \geq n\} = q^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\
&H_{\tau,q}(x) = P\{S_\tau \leq x, \tau \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
&H_{\eta,q}(x) = P\{S_\eta \leq x, \eta \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Teorem 4.1.7 (Wiener-Hopf)**.** *Funkciju distribucije F možemo faktorizirati na sljedeći način:*

$$\delta - qF = (\delta - H_{\tau,q}) * (\delta - H_{\eta,q}).$$

Dokaz. Vrijedi:

$$S_T = \sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i + \sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i.$$

Iz leme 4.1.6. slijedi da je S_T suma dviju nezavisnih slučajnih varijabli. Iz korolara 1.3.6. slijedi da je funkcija distribucije S_T konvolucijski produkt funkcija distribucije $\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i$ i $\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i$. Dakle vrijedi:

$$P\{S_T \leq x\} = (P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \leq \cdot\} * P\{\sum_{i=L(\tau,T)+1}^{T} X_i \leq \cdot\})(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Iz leme 4.1.1. i 4.24 slijedi:

$$P\{S_T \leq x\} = (P\{\sum_{i=1}^{L(\tau,T)} X_i \leq \cdot\} * P\{\sum_{i=1}^{L(\eta,T)} X_i \leq \cdot\})(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.25}$$

Primjenjujući lemu 4.1.4. na oba konvolucijska faktora u 4.25 dobivamo:

$$P\{S_T \leq x\} = (\sum_{n=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{n*}(\cdot)(1 - P\{\tau \leq T\})) * (\sum_{n=0}^{\infty} H_{\eta,q}^{n*}(\cdot)(1 - P\{\eta \leq T\})) \tag{4.26}$$

Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} C_\tau(x) &= P\{S_\tau \leq x | \tau \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad q_\tau = P\{\tau \leq T\} = 1 - p_\tau, \\ C_\eta(x) &= P\{S_\eta \leq x | \eta \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad q_\eta = P\{\eta \leq T\} = 1 - p_\eta. \end{aligned}$$

Iz činjenice da vrijedi:

$$q_\tau C_\tau = H_{\tau,q}, \quad q_\eta C_\eta = H_{\eta,q},$$

te 1.24 slijedi:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{n*}(x)(1 - P\{\tau \leq T\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*}(x),\\ \sum_{n=0}^{\infty} H_{\eta,q}^{n*}(x)(1 - P\{\eta \leq T\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}(x).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Iz 4.26 i 4.27 dobivamo:

$$P\{S_T \leq x\} = ((\sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*}(\cdot)) * (\sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}(\cdot)))(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.28}$$

S druge strane, koristeći nezavisnost slučajne varijable T od niza slučajnih varijabli $\{X_n : n \geq 1\}$ te korolar 1.3.7. dobivamo:

$$\begin{aligned}P\{S_T \leq x\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq x, T = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq x\}P\{T = n\}\\ &= \sum_{n=0} pq^n F^{n*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Iz 4.28 i 4.29 dobivamo:

$$\sum_{n=0} pq^n F^{n*} = \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*} * \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*}. \tag{4.30}$$

Izraz 4.30 redom ćemo konvoluirati sa $\delta - qF$, $\delta - q_\tau C_\tau$ i $\delta - q_\eta C_\eta$. Pritom koristimo asocijativnost(1.21) i komutativnost (1.6) konvolucije, propoziciju 1.3.8., 1.24 i 1.34(C_τ i C_η su funkcije distribucije). Dobivamo:

$$\begin{aligned}p\delta &= \sum_{n=0}^{\infty} p_\tau q_\tau^n C_\tau^{n*} * \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*} * (\delta - qF),\\ p(\delta - q_\tau) &= p_\tau \sum_{n=0}^{\infty} p_\eta q_\eta^n C_\eta^{n*} * (\delta - qF),\\ p(\delta - q_\tau C_\tau) * (\delta - q_\eta C_\eta) &= p_\tau p_\eta (\delta - qF).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Budući da je τ nezavisan sa T, (jer je vrijeme zaustavljanja obzirom na filtraciju čiji elementi su nezavisni sa $\sigma(T)$) imamo:

$$
\begin{aligned}
P\{\tau \leq T\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n, n \leq T\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\}P\{n \leq T\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\}q^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n\}q^n + q^{\infty}P\{\tau = \infty\} \\
&= \mathbb{E}[q^{\tau}].
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Ista tvrdnja vrijedi i za η. Iz 4.32 i propozicije 2.5.8. (tvrdnja 2.25) slijedi:

$$
p_{\tau}p_{\eta} = (1 - P\{\tau \leq T\})(1 - P\{\eta \leq T\}) = (1 - \mathbb{E}[q^{\tau}])(1 - \mathbb{E}[q^{\eta}]) = 1 - q = p. \tag{4.33}
$$

Iz 4.31 i 4.33 slijedi tvrdnja teorema.

□

4.2 Baxterove jednakosti

Jedna od značajnih posljedica Wiener-Hopfove faktorizacije je Baxterov teorem kojeg dokazujemo u ovom potpoglavlju, kao i njegove posljedice. Baxterove jednakosti određuju distribuciju slučajnih vektora (N, S_N) i $(\bar{N}, S_{\bar{N}})$.

Prije iskaza Baxterovog teorema potrebne su nam neke pomoćne tvrdnje. Označimo:

$$
\begin{aligned}
H_q(x) &= P\{S_N \leq x, N \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\bar{H}_q(x) &= P\{S_{\bar{N}} \leq x, \bar{N} \leq T\}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Zbog nezavisnosti slučajne varijable T, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
H_q(x) = P\{S_N \leq x, N \leq T\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq x, n \leq T, N = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq x, N = n\}q^n, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Iz 4.34, propozicije 1.3.5. (1.26) i 1.24 vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dH_q(x) &= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} q^n P\{S_n \leq \cdot, N = n\}(x)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,\infty)} q^n e^{i\zeta x} dP\{S_n \leq \cdot, N = n\}(x).\end{aligned} \tag{4.35}$$

Lebesgueovom indukcijom lako se pokaže sljedeće:

$$\int_{(0,\infty)} f(x) dP\{S_n \leq \cdot, N = n\}(x) = \int_{\{n\}\times(0,\infty)} f(x) dF_{(N,S_N)}(y, x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.36}$$

u smislu da ako jedan od integral u 4.36 postoji da tada postoji i drugi i da su jednaki. Koristeći 4.36 i teorem o divergiranoj konvergenciji kao i činjenicu da je na skupu $\{N = n\}$ $S_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] &= \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{i\zeta S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \mathbb{E}[q^n e^{i\zeta S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{\Omega} e^{i\zeta S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}} dP = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{\{n\}\times(0,\infty)} e^{i\zeta x} dF_{(N,S_N)}(y, x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dP\{S_n \leq \cdot, N = n\}(x).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Iz 4.35 i 4.37 slijedi:

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dH_q(x) &= \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}], \\ \int_{(-\infty,0]} e^{i\zeta x} d\bar{H}_q(x) &= \mathbb{E}[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}].\end{aligned} \tag{4.38}$$

Druga jednakost u 4.38 pokazuje se analogno kao prva.

Lema 4.2.1. *Neka su ν_1 i ν_2 dvije mjere na $\mathcal{B}$ takve da vrijedi:*

$$\int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge 1) d\nu_i(x) < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{4.39}$$

Ako vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d\nu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d\nu_2(x), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad \nu_1(\{0\}) = \nu_1(\{0\}), \tag{4.40}$$

tada je $\nu_1 = \nu_2$.

Dokaz. Definirajmo:

$$\psi_i(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d\nu_i, \quad \zeta \in \mathbb{R}, i = 1, 2. \tag{4.41}$$

Vrijedi:

$$|e^{i\zeta x} - 1| \leq 2. \tag{4.42}$$

Iz Lagrangeovog teorema srijednje vrijednosti slijedi:

$$\begin{aligned} cos(\zeta x) &= -\zeta sin(\zeta\theta_1 x)x + 1, \quad \theta_1 \in (0,1), \zeta \in \mathbb{R}, \\ sin(\zeta x) &= \zeta cos(\zeta\theta_2 x)x, \quad \theta_2 \in (0,1), \zeta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Iz 4.43 dobivamo:

$$|e^{i\zeta x} - 1| = |-\zeta sin(\zeta\theta_1 x)x + \zeta cos(\zeta\theta_2 x)x| \leq 2|\zeta||x| \tag{4.44}$$

Za $\zeta \in \mathbb{R}$ stavimo $C(\zeta) = 2 + 2|\zeta|$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Vrijedi:

$$|e^{i\zeta x} - 1| \leq C(\zeta)(|x| \wedge 1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.45}$$

Naime, iz 4.42 i 4.44 slijedi:

$$\begin{aligned} x > 1 &: C(\zeta)(|x| \wedge 1) = C(\zeta) \geq 2 \geq |e^{i\zeta x} - 1|, \\ x \leq 1 &: C(\zeta)(|x| \wedge 1) = C(\zeta)|x| \geq 2|\zeta||x| \geq |e^{i\zeta x} - 1|. \end{aligned}$$

Iz 4.39 i 4.45 slijedi da je funkcija ψ_i dobro definirana. Nadalje, vrijedi:

$$|\psi_i(\zeta + h) - \psi_i(\zeta)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}(e^{i\zeta h} - 1) d\nu_i| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{i\zeta h} - 1| d\nu_i. \tag{4.46}$$

Iz 4.46 koristeći teorem o dominiranoj konvergenciji (za $h \to 0$) slijedi neprekidnost funkcije ψ_i. Iz neprekidnosti slijedi i Riemann integrabilnost. Koristeći Fubinijev teorem dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\psi_i(\zeta)-&\int_0^1 \frac{1}{2}(\psi_i(\zeta+h)+\psi_i(\zeta-h))dh \\
&= \psi_i(\zeta) - [\int_0^1 \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\{(e^{i(\zeta+h)x}-1)+(e^{i(\zeta-h)x}-1)\}d\nu_i(x)dh] \\
&= \psi_i(\zeta) - [\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}\{\frac{e^{ihx}+e^{-ihx}}{2}-1\}d\nu_i(x)dh] \\
&= \psi_i(\zeta) - [\int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}\int_0^1(\cos(hx)-1)dhd\nu_i(x) \\
&= \psi_i(\zeta) - \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}(\frac{\sin(x)}{x}-1)d\nu_i(x).
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Iz 4.40 i 4.47 slijedi:

$$
\int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}(1-\frac{\sin(x)}{x})d\nu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x}(1-\frac{\sin(x)}{x})d\nu_2(x), \quad \zeta\in\mathbb{R}. \tag{4.48}
$$

Definirajmo:

$$
\begin{aligned}
Q_1(A) &= \int_A (1-\frac{\sin(x)}{x})d\nu_1, \quad A\in\mathcal{B}, \\
Q_2(A) &= \int_A (1-\frac{\sin(x)}{x})d\nu_2, \quad A\in\mathcal{B}.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Budući da je $1 - x/\sin(x) \geq 0$ (u 0 proširimo po neprekidnosti) sa 4.49 definirane su mjere na $\mathcal{B}$. Nadalje, iz 4.48 i teorema jedinstvenosti karakterističnih funkcija slijedi:

$$
Q_1 = Q_2. \tag{4.50}
$$

Naime, ako je $g \geq 0$ Borelova funkcija i α mjera na $\mathcal{B}$. Stavimo $\beta(A) = \int_A g d\alpha$, $A \in \mathcal{B}$. Lebesgueovom indukcijom se lako pokaže da za Borelovu funkciju h vrijedi: $\int_{\mathbb{R}} hd\beta = \int_{\mathbb{R}} hgd\alpha$, u smilsu da ako jedan integral postoji, da tada postoji i drugi i da su jednaki. Također, mjere Q_1 i Q_2 su konačne. To je posljedica Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti i 4.39. Stavimo $f(x) = 1 - x/\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$

(i) : Neka su ν_1 i ν_2 apsolutno neprekidne mjere (uočimo da uvjet $\nu_1(\{0\}) = \nu_1(\{0\})$ nije potreban). Iz 4.50 i 4.49 slijedi:

$$\begin{aligned}\nu_1(A) &= \int_A d\nu_1 = \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} f d\nu_1 + \int_{\{0\}} d\nu_1 = \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} f d\nu_1 \\ &= \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} dQ_1 = \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} dQ_2 = \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} f d\nu_2 \\ &= \int_{A\setminus\{0\}} \frac{1}{f} f d\nu_2 + \int_{\{0\}} d\nu_2 = \int_A d\nu_2 = \nu_1(A), \quad A \in \mathcal{B}.\end{aligned}$$

Dakle, $\nu_1 = \nu_2$.
(ii) : Neka su ν_1 i ν_2 diskretne mjere. Slično kao za neprekidne mjere pokaže se da vrijedi: $\nu_1(\{x\}) = \nu_2(\{x\})$, $x \neq 0$. Uz pretpostavku da je $\nu_1(\{0\}) = \nu_1(\{0\})$ slijedi $\nu_1 = \nu_2$.
(iii) : Neka su ν_1 i ν_2 konačne diskretne mjere, takve da je $\nu_1(\mathbb{R}) = \nu_2(\mathbb{R})$ (uočimo da za takve mjere 4.39 nije potrebno). Tada iz pretpostavki lako slijedi $\nu_1 = \nu_2$. Naime, slično kao za neprekidne mjere pokaže se da vrijedi: $\nu_1(\{x\}) = \nu_2(\{x\})$, $x \neq 0$, a tada zbog pretpostavki slijedi $\nu_1(\{0\}) = \nu_2(\{0\})$. □

Neka je G proizvoljna funkcija distribucije. Ako je G diskretna distribucija, tada iz korolara 1.3.7. i činjenice da je prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv skup slijedi:

$$G \text{ diskretna} \implies G^{n*} \text{ diskretna} \implies \sum_{n=1}^{\infty} G^{n*} \text{ diskretna.}$$

Analogna tvrdnja se pokaže i ako je G apsolutno neprekidna distribucija (analogni argumenti).

Teorem 4.2.2 (Baxter)**.** *Za* $0 < q < 1$, $\zeta \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] &= \exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x)\}, \\ 1 - \mathbb{E}[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}] &= \exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(-\infty,0]} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x)\}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Dokaz. Dokažimo da za proizvoljnu distribuciju G i $0 < q < 1$, $p = 1 - q$ vrijedi:

$$\log p/(1 - q\hat{G}(\zeta)) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} G^{n*})(x), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \tag{4.52}$$

gdje je $\hat{G}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} dG(x)$, $\zeta \in \mathbb{R}$.

Budući da je $|\hat{G}(\zeta)| \leq 1$, $\zeta \in \mathbb{R}$, te $|q| < 1$ slijedi $|\hat{G}(\zeta)q| < 1$. Razvojom u Taylorov red dobivamo:

$$\begin{aligned}\log p/(1 - q\hat{G}(\zeta)) &= \log(1 - q) - \log(1 - q\hat{G}(\zeta)) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\hat{G}^n(\zeta).\end{aligned} \tag{4.53}$$

Koristeći propoziciju 1.3.9. (1.39) i propoziciju 1.3.5. (1.26) dobivamo:

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\hat{G}^n(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{\mathbb{R}} (-1) dG^{n*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta x} dG^{n*}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} G^{n*})(x).\end{aligned} \tag{4.54}$$

Iz 4.53 i 4.54 slijedi 4.52. Stavimo $H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}$. Vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge 1) dH(x) < \infty. \tag{4.55}$$

Naime, iz propozicije 1.3.5. i 1.24 slijedi:

$$\int_{|x| \leq 1} |x| dH(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}(\infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n \leq p.$$

Važno je uočiti da je po korolaru 1.3.7. F^{n*} funkcija distribucije. Analogno se pokaže $\int_{|x|>1} dH(x) < \infty$. Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned}&H_q(x) = P\{S_N \leq x, N \leq T\}, q_+ = P\{N \leq T\}, p_+ = 1 - q_+, \\ &\bar{H}_q(x) = P\{S_{\bar{N}} \leq x, \bar{N} \leq T\}, q_- = P\{\bar{N} \leq T\}, p_- = 1 - q_-, \\ &C_+(x) = P\{S_N \leq x | N \leq T\} = H_q(x)/q_+, \\ &C_-(x) = P\{S_{\bar{N}} \leq x | \bar{N} \leq T\} = \bar{H}_q(x)/q_-.\end{aligned}$$

Važno je uočiti da je $C_+(x) = 0$ za sve $x \leq 0$, a $C_-(x) = 1$ za sve $x \geq 0$. Drugim riječima, mjera inducirana sa C_+ je koncentrirana na $(0, \infty)$,a mjera inducirana sa C_- je koncentrirana na $(-\infty, 0]$. Iz 4.33 slijedi:

$$p = p_+ p_-. \tag{4.56}$$

Iz Wiener-Hopfove faktorizacije (teorem 4.1.7.) slijedi:

$$\delta - qF = (\delta - H_q) * (\delta - \bar{H}_q).$$

Iz 1.20 i 1.23 dobivamo:

$$1 - q\hat{F}(\zeta) = (1 - \hat{H}_q(\zeta))(1 - \hat{\bar{H}}_q(\zeta)). \tag{4.57}$$

Iz 4.57 i 4.56 koristeći 1.24 dobivamo:

$$\frac{p}{1 - q\hat{F}(\zeta)} = \Big(\frac{p_+}{1 - q_+\hat{C}_+(\zeta)}\Big)\Big(\frac{p_-}{1 - q_-\hat{C}_-(\zeta)}\Big) \tag{4.58}$$

Budući da su F, C_+, C_- funkcije distribucije i $0 < q, q_+, q_- < 1$ opravdano je uzeti recipročne vrijednosti u 4.57. Ako logaritmiramo 4.58 i primijenimo 4.52 dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) = \\
&= \int_{(0,\infty)} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*})(x) + \int_{(-\infty,0]} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*})(x) \\
&\Big(\int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*})(x)\Big).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Važno je uočiti da je mjera generirana sa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*}$ koncentrirana na $(0, \infty)$, jer je mjera generirana sa C_+ koncentrirana na $(0, \infty)$ (to se lako pokaže koristeći korolar 1.3.7.). Slična tvrdnja vrijedi i za mjeru generiranu sa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*}$.
Iz 4.59 i leme 4.2.1. slijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*}. \tag{4.60}$$

Korištenje leme 4.2.1. je opravdano. Naime, lako se vidi da su mjere konačne i da zbog 4.56 vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}(\mathbb{R}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} = -\log(1-q) = -\log(p) = -\log(p_+p_-) \\
&= -\log(p_+) - \log(p_-) = -\log(1-q_+) - \log(1-q_-) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*}(\mathbb{R}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_-^n}{n} C_-^{n*}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Iz 4.50 slijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}(0,\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*}(0,\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} = -\log(1-q_+) = -\log p_+. \tag{4.61}$$

Konačno, iz 4.52, 4.60 i 4.61 slijedi:

$$\begin{aligned}
\log(p_+/(1-q_+\hat{C}_+(\zeta)) &= \int_{(0,\infty)} (e^{i\zeta x}-1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*})(x) \\
&= \int_{(0,\infty)} (e^{i\zeta x}-1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}(0,\infty) \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) + \log p_+.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Iz 4.62 slijedi:

$$-\log(1-q_+\hat{C}_+(\zeta)) = \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})(x) \tag{4.63}$$

Iz 1.24 i 4.38 dobivamo: $q_+\hat{C}_+(\zeta) = \hat{H}_q(\zeta) = \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}]$. Primjenom eksponencijalne funkcije na 4.63 dobivamo:

$$1 - \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}] = \exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} dF^{n*}(x)\}.$$

Druga jednakost se pokazuje analogno (potrebno je krenuti od 4.60).

□

Distribucija slučajnog vektora (N, S_N) određena je transformacijom $\mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}]$. U principu, navedena transformacija se može invertirati kako bi dobili funkciju distribucije slučajnog vektora (N, S_N). Analogno za slučajni vektor $(\bar{N}, S_{\bar{N}})$. Invertiranje je zahtjevno i ovisi o $F^{n*}, n \in \mathbb{N}$.
Iz 4.38, $q_+\hat{C}_+(\zeta) = \hat{H}_q(\zeta) = \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}]$ te 4.57, Wiener-hopfovu faktorizaciju možemo zapisati na sljedeći način:

$$1 - q\hat{F}(\zeta) = (1 - \mathbb{E}[q^N e^{i\zeta S_N}])(1 - \mathbb{E}[q^{\bar{N}} e^{i\zeta S_{\bar{N}}}]), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{4.64}$$

Ako u 4.57 stavimo $\zeta = 0$ dobivamo:

$$1 - q = (1 - \mathbb{E}[q^N])(1 - \mathbb{E}[q^{\bar{N}}]).$$

Iz čega slijedi:

$$\frac{1 - \mathbb{E}[q^N]}{1 - q} = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[q^{\bar{N}}]}. \tag{4.65}$$

Zaključak u 4.65 mogli smo dobiti i primjenom 2.25. Neka je $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ rastući niz realnih brojeva takva da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} q_k = 1, \quad 0 < q_k < 1.$$

Iz 2.30 slijedi:

$$\frac{1 - \mathbb{E}[q_k^N]}{1 - q_k} = \sum_{n=0}^{\infty} q_k^n P\{N > n\}. \tag{4.66}$$

Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}_0$:

$$f_k(n) = q_k^n P\{N > n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}.$$

Zbog rasta $0 < q_k \leq q_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, vrijedi:

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \nearrow f,$$

gdje je:

$$f(n) = \lim_{k\to\infty} f_k(n) = P\{N > n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Neka je μ brojeća mjera na $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Iz teorema o monotonoj konvergenciji iz 4.66 dobivamo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - \mathbb{E}[q_k^N]}{1 - q_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_k^n P\{N > n\} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{N}_0} f_k d\mu = \int_{\mathbb{N}_0} f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N > n\}. \tag{4.67}$$

Iz leme 2.4.1. dobivamo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P\{N > n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N \mathbb{1}_{\{N<\infty\}} > n\} + \infty P\{N = \infty\} \\ &= \mathbb{E}[N \mathbb{1}_{\{N<\infty\}} + \infty \mathbb{1}_{\{N=\infty\}}] = \mathbb{E}[N]. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Iz 4.67 i 4.68 slijedi:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - \mathbb{E}[q_k^N]}{1 - q_k} = \mathbb{E}[N]. \tag{4.69}$$

Slično kao u 4.67 iz teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo:

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{E}[q_k^{\bar{N}}] &= 1 - (\sum_{n=0}^{\infty} q_k^n P\{\bar{N} = n\} + q_k^{\infty} P\{\bar{N} = \infty\}) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} q_k^n P\{\bar{N} = n\} \xrightarrow{k\to\infty} 1 - \sum_{n=0}^{\infty} P\{\bar{N} = n\} = 1 - P\{\bar{N} < \infty\} \\
&= P\{\bar{N} = \infty\}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Iz 4.66, 4.69 i 4.70 dobivamo:

$$\mathbb{E}[N] = (P\{\bar{N} = \infty\})^{-1}, \quad \mathbb{E}[\bar{N}] = (P\{N = \infty\})^{-1}. \tag{4.71}$$

Druga jednakost u 4.71 slijedi zbog simetričnosti dualnosti (korolar 2.5.5.). Ako je $P\{N = \infty\} > 0$ kažemo da je N defektno vrijeme zaustavljanja, inače kažemo da je regularno. Analogno za $\bar{N}$.

Korolar 4.2.3. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*
(a) : *Ako je* $\mathbb{E}[N] < \infty \implies \bar{N}$ *je defektno.*
(b) : *Ako je* $\mathbb{E}[\bar{N}] < \infty \implies N$ *je defektno.*
(c) : *Ako su* N *i* $\bar{N}$ *regularni* $\implies \mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\bar{N}] = \infty$.

Dokaz. Direktno iz 4.71. □

Ako u prvu Baxterovu jednadžbu (4.51) stavimo $\zeta = 0$ iz korolara 1.3.7. dobivamo:

$$E[q^N] = 1 - \exp\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} P\{S_n > 0\} \right\}. \tag{4.72}$$

(Važno je uočiti da je $q \in (0, 1)$).

Propozicija 4.2.4. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*
(a) $P\{N < \infty\} = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\} = \infty$.
(b) $P\{N < \infty\} = 1 \implies \mathbb{E}[N] = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n \le 0\} \right\}$.

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju (a). Neka je $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ rastući niz realnih brojeva takva da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} q_k = 1, \quad 0 < q_k < 1.$$

Analogno kao u 4.70 dobivamo:

$$\mathbb{E}[q_k^N] \xrightarrow{k\to\infty} P\{N < \infty\}. \tag{4.73}$$

Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}$:

$$f_k(n) = \frac{q_k^n}{n} P\{S_n > 0\}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Budući da $0 \leq f_k \nearrow f$, gdje je $f(n) = \frac{1}{n} P\{S_n > 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, iz teorema o monotonoj konvergenciji i neprekidnosti funkcije exp (slično kao u 4.67) imamo:

$$1 - \exp\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n} P\{S_n > 0\}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} 1 - \exp\left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\}\right\}. \tag{4.74}$$

Iz 4.72, 4.73, 4.74 slijedi tvrdnja (a). Dokažimo tvrdnju (b). Budući da je $\mathbb{E}[q_k^N] \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, koristeći Taylorov razvoj dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mathbb{E}[q_k^N]}{1 - q_k} = \frac{\exp\left(\log(1 - \mathbb{E}[q_k^N])\right)}{\exp\left(\log(1 - q_k)\right)} &= \frac{\exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_k^n P\{S_n > 0\}\}}{\exp\{-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} q_k^n\}} \\ = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n} (1 - P\{S_n > 0\})\right\} &= \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n} P\{S_n \leq 0\}\right\}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Vrlo slično kao u 4.74 pokaže se:

$$\exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n} P\{S_n \leq 0\}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n \leq 0\}\right\}. \tag{4.76}$$

Iz 4.69, 4.75 i 4.76 slijedi tvrdnja (b).

□

Uočimo da tvrdnja (b) propozicije 4.2.4. vrijedi i za $P\{N = \infty\} > 0$. Naime, tada su izrazi s desne i lijeve strane jednaki ∞ (pretpostavku $P\{N = \infty\} = 0$ zapravo nismo ni koristili). Tvrdnja (a) propozicije 4.2.4. kaže da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\}$ dobra mjera snage kojom slučajna šetnja ide ka ∞ (pogledati propoziciju 3.2.3.). U slučaju postojanja $\mathbb{E}[X_1]$ imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.2.5. *Neka postoji* $\mathbb{E}[X_1]$. *Vrijede sljedeće tvrdnje.*
(a) *Ako je* $\mathbb{E}[X_1] = 0$, *tada su* N *i* $\bar{N}$ *regularne i vrijedi* $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\bar{N}] = \infty$.
(b) *Ako je* $\infty \geq \mathbb{E}[X_1] > 0$, *tada je* N *regularna,* $\mathbb{E}[N] < \infty$ *i* $\bar{N}$ *je defektna.*
(c) *Ako je* $-\infty \leq \mathbb{E}[X_1] < 0$, *tada je* $\bar{N}$ *regularna,* $\mathbb{E}[\bar{N}] < \infty$ *i* N *je defektna.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (a). Pretpostavimo da je $\bar{N}$ defektna:

$$P\{\bar{N} = \infty\} > 0. \tag{4.77}$$

Iz 4.71 i 4.77 slijedi $\mathbb{E}[N] < \infty$. Iz Kolmogorovljevog jakog zakona velih brojeva slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad (g.s.).$$

Iz korolara 2.3.5. tvrdnje (b) i 3.11 slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{N(n)}}{n} = \mathbb{E}[S_N] \quad (g.s.),$$

gdje je $\{N(n) : n \in \mathbb{N}\}$ niz iteracija vremena zaustavljanja N. Iz korolara 2.3.5. tvrdnje (c) i činjenice da je $\mathbb{E}[N] < \infty$, koristeći Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \mathbb{E}[N] \quad (g.s.).$$

Slijedi:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{N(n)}}{N(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{N(n)}/n}{N(n)/n} = \frac{\mathbb{E}[S_N]}{\mathbb{E}[N]} \quad (g.s.). \tag{4.78}$$

Iz 4.78 slijedi $\mathbb{E}[S_N] = 0$. Budući da je $S_N > 0$ $(g.s.)$ slijedi da je $S_N = 0$ $(g.s.)$ što je očita kontradikcija. Dakle, ne vrijedi 4.77. Slijedi da je $\bar{N}$ regularna. Budući da je $\mathbb{E}[N] < \infty$ nužno je da vrijedi $P\{N = \infty\} = 0$. Dakle, N je regularna. Iz 4.71 slijedi $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\bar{N}] = \infty$. Dokažimo tvrdnju ($b$). Budući da je $\mathbb{E}[X_1] > 0$ iz Kolmogorovljevog zakona velikih brojeva (u slučaju da je $\mathbb{E}[X_1] < \infty$) te generalizacije leme 3.2.1. (u slučaju da je $\mathbb{E}[X_1] = \infty$) slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s.).$$

Slijedi da je $M_{\bar{N}}$ $(g.s.)$ konačan. Naime slučajna šetnja na skupu vjerojatnosti 1 pogađa skup $(-\infty, 0]$ samo konačno mnogo puta. Drugim riječima, na skupu vjerojatnosti 1 postoji zadnje silazno vrijeme pa je stoga $\bar{N}$ defektna. Iz 4.71 slijedi da je $\mathbb{E}[N] < \infty$ iz čega nužno slijedi $N < \infty$ $(g.s.)$. Tvrdnja (c) se dokazuje slično kao tvrdnja (b). □

Generalizacije leme 3.2.1. glasi: Ako su $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}[X_1^+] = \infty$ i $\mathbb{E}[X_1^-] < \infty$, tada $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(g.s.)$. Dokaz je sličan onome u navedenoj lemi.

4.3 Spitzerova formula

U ovom potpoglavlju dokazujemo Spitzerovu formulu. Uz Baxterove jednakosti, Spitzerova formula je krunski rezultat klasične teorije slučajnih šetnji. Spitzerova formula vezana je uz distribuciju procesa maksimuma $\{\max_{0\le k\le n} S_n : n \in N_0\}$.

Teorem 4.3.1 (Spitzer)**.** *Za* $\zeta \in \mathbb{R}$ *i* $q \in (0,1)$ *vrijedi:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathbb{E}exp\{i\zeta \bigvee_{j=0}^{n} S_j\} = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+}\}. \tag{4.79}$$

Dokaz. Vrijedi:

$$\bigvee_{j=0}^{T} S_j = S_{L(N,T)}.$$

Distribuciju slučajne varijable $S_{L(N,T)}$ odredili smo u lemi 4.1.4., uz oznake: $q_+ = P\{N \le T\}$, $H_q = q_+ C_+$ iz 4.27 slijedi:

$$P\{\bigvee_{j=0}^{T} S_j \le x\} = P\{S_{L(N,T)} \le x\} = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\tau,q}^{k*}(x)(1 - P\{\tau \le T\}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_+ q_+^n C_+^{n*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi:

$$\mathbb{E}exp\{i\zeta \bigvee_{j=0}^{T} S_j\} = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n \mathbb{E}exp\{i\zeta \bigvee_{j=0}^{n} S_j\}. \tag{4.80}$$

S druge strane, zbog toga što je C_+ koncentrirana na $(0,\infty)$ (argument isti kao u dokazu Baxterovog teorema) te iz 4.52 i konvolucijskih i integracijskih svojstava (svih već ranije korištenih i objašnjenih u prijašnjim dokazima ovog poglavlja) kao i Taylorovog razvoja (koji je opravdan) slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}exp\{i\zeta \bigvee_{j=0}^{T} S_j\} &= \int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=0}^{\infty} p_+ q_+^n C_+^{n*})(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_+ q_+^n \hat{C}_+^n(\zeta) = p_+/(1 - q_+\hat{C}_+(\zeta)) \\
&= \exp\{\log(p_+/(1 - q_+\hat{C}_+(\zeta))\} \\
&= \exp\Big\{\int_{(0,\infty)} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_+^n}{n} C_+^{n*})\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Iz 4.60 i 4.81 (uz korištenje integracijskih svojstava i korolara 1.3.7.) slijedi:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}exp\{i\zeta \bigvee_{j=0}^{T} S_j\} &= \exp\Big\{\int_{(0,\infty)} (e^{i\zeta x} - 1) d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*})\Big\} \\
&= \exp\Big\{\int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} P\{S_n > 0\}\Big\} \\
&= \exp\Big\{\int_{(0,\infty)} e^{i\zeta x} d(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} F^{n*}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} P\{S_n \le 0\}\Big\} \\
&= \exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{S_n > 0} e^{i\zeta S_n} dP - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} P\{S_n \le 0\}\Big\} \qquad (4.82) \\
&= \exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (\int_{S_n > 0} e^{i\zeta S_n} dP + \int_{S_n < 0} e^{i\zeta 0} dP) + \log(1-q)\Big\} \\
&= \exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \int_{\Omega} e^{i\zeta S_n^+} dP + \log(1-q)\Big\} \\
&= p \exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \mathbb{E} e^{i\zeta S_n^+}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Iz 4.80 i 4.82 slijedi tvrdnja teorema. □

Prisjetimo se: $M_\infty = \bigvee_{j=0}^{\infty} S_j$, $M_n = \bigvee_{j=0}^{n} S_j$, $n \in \mathbb{N}$. Očito vrijedi $0 \le M_n \nearrow M_\infty$ kad $n \to \infty$.

Teorem 4.3.2. *Vrijedi:*

$$
M_\infty < \infty \quad (g.s.) \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\} < \infty. \qquad (4.83)
$$

U tom slučaju vrijedi:

$$
\mathbb{E} e^{i\zeta M_\infty} = \exp\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\mathbb{E} e^{i\zeta S_n^+} - 1)\Big\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \qquad (4.84)
$$

Dokaz. Iz propozicije 3.2.2. ($(c') \iff (a')$) slijedi da je $M_\infty < \infty$ $(g.s.s)$ ako i samo ako je N defektno vrijeme zaustavljanja ($P\{N = \infty\} > 0$). Budući da je N defektno

vrijeme zaustavljanja, propozicija 4.2.4. tvrdnja (a) kaže da je to ekvivalento tvrdnji da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\} < \infty$, iz čega odmah slijedi 4.83.
Dokažimo jednakost 4.84. Pretpostavljamo da je $M_\infty < \infty$ ($g.s.$). Neka je $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ rastući niz realnih brojeva takav da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} q_k = 1, \quad 0 < q_k < 1.$$

Sa $T(q_k)$ označimo geometrijsku razdiobu za koju je $P\{T(q_k) \geq n\} = q_k^n$, $n, k \in \mathbb{N}$. Moguće je konstruirati vjerojatnosti prostor takav da je $T(q_k)$ nezavisna sa nizom slučajnih varijabli $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} P\{T(q_k) \geq M\} = 1, \quad \forall M \geq 0. \tag{4.85}$$

Naime, za proizvoljan $M \geq 0$ vrijedi:

$$1 \geq P\{T(q_k) \geq M\} = q_k^{\lceil M \rceil} \geq q_k^M \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

Iz teorema o sendviču slijedi 4.85. Posljedica 4.85 je $\lim_{k\to\infty} P\{T(q_k) < M\} = 0, \forall M \geq 0$. Zbog $0 \leq M_n \nearrow M_\infty$, za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon\} &= P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon, T(q_k) \geq n\} \\ &\quad + P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon, T(q_k) < n\} \\ &\leq P\{|M_n - M_\infty| > \epsilon\} + P\{T(q_k) < n\}, \end{aligned} \tag{4.86}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Iz 4.85 i 4.86 slijedi:

$$\limsup_{k\to\infty} P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon\} \leq P\{|M_n - M_\infty| > \epsilon\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.87}$$

Zbog $0 \leq M_n \nearrow M_\infty$ slijedi $M_n \xrightarrow{P} M_\infty$. Puštanjem n u beskonačno iz 4.87 i teorema o sendviču dobivamo:

$$\limsup_{k\to\infty} P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon\} = 0,$$

iz čega odmah slijedi:

$$\lim_{k\to\infty} P\{|M_{T(q_k)} - M_\infty| > \epsilon\} = 0. \tag{4.88}$$

Iz 4.88 slijedi $M_{T(q_k)} \xrightarrow{P} M_\infty$. Budući da konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji iz teorema neprekidnosti slijedi:

$$\mathbb{E}e^{i\zeta M_{T(q_k)}} \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}e^{i\zeta M_\infty}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{4.89}$$

Budući da je $M_{T(q_k)} = S_{L(N,T(q_k))}$ (direktno iz definicije $L(N,n)$ i M_n) iz Spitzerovog teorema (teorem 4.3.1.), točnije iz 4.82 (samo se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ izluči unutar exp) dobivamo:

$$\mathbb{E}e^{i\zeta M_{T(q_k)}} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1)\right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \tag{4.90}$$

Zbog jedinstvenosti limesa realnih brojeva iz 4.89 slijedi da je za 4.84 dovoljno dokazati:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1), \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{4.91}$$

Za 4.91 dovoljno je dokazati:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1)| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{4.92}$$

Vrijedi:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - q_k^n)|\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1|.$$

Budući da je:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1| &= |\int_{S_n>0} e^{i\zeta S_n} dP + P\{S_n \le 0\} - 1| \\ &\le \int_{S_n>0} dP + (1 - P\{S_n \le 0\}) = 2P\{S_n > 0\}, \end{aligned}$$

slijedi:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^n}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{E}e^{i\zeta S_n^+} - 1)| \le 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - q_k^n)P\{S_n > 0\}. \tag{4.93}$$

Definirajmo funkcije na $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_k(n) &= \frac{2}{n}(1 - q_k^n)P\{S_n > 0\}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \\ g(n) &= \frac{1}{n}P\{S_n > 0\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Neka je μ brojeća mjera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Budući da je $M_\infty < \infty$ $(g.s.)$ iz 4.83 slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\} < \infty$ pa je g integrabilna u odnosu na μ. Također, iz $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$ i $f_k \leq g$, $k \in \mathbb{N}$, koristeći teorem o dominiranoj konvergenciji u 4.93 dobivamo 4.92 čime je dokaz završen.

$\square$

Bibliografija

[1] *Exchangeability-predavanje*, http://math.ucsd.edu/~pfitz/downloads/courses/spring08/math280c/exchange.pdf, posjećena 9.9.2016.

[2] *Filtrations and Stopping Times*, http://www.math.uah.edu/stat/prob/Stop.html, posjećena 9.9.2016.

[3] *Independent sums*, https://www.math.nyu.edu/faculty/varadhan/course/PROB.ch3.pdf, posjećena 9.9.2016.

[4] Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory*, Academic Press, 2001.

[5] Sideny I. Resnick, *Adventures in Stohastic Processes*, Birkhäuser, Boston/Basel/Berlin, 1992.

[6] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[7] Sebastian Sydor, *The Wiener-Hopf factorization*, http://ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/prace-studentow/TheWiener-HopfFactorization.pdf, posjećena 9.9.2016.

[8] Zoran Vondraček, *Slučajni procesi-predavanja*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html, posjećena 9.9.2016.

Sažetak

Neka je $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Slučajna šetnja definirana je sa: $S_0 = 0$ i $S_n = X_1 + ... + X_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Neka je $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > 0\}$ prvo vrijeme posjeta skupu $(0, \infty)$ te $\bar{N} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq 0\}$ prvo vrijeme posjeta skupu $(-\infty, 0]$.

U teoremu 3.2.3. dokazana je sljedeća tvrdnja. Ako je $P\{X_1 = 0\} < 1$ tada vrijedi:

$$\begin{aligned} S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad (g.s.) \quad \text{ili} \quad S_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad (g.s.) \\ \text{ili} \quad -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s.). \end{aligned}$$

Pomoću Wiener-Hopfove faktorizacije (teorem 4.1.7.) dokazane su Baxterove jednakosti (teorem 4.2.2.) i Spitzerova formula (teorem 4.3.1.). Baxterove jednakosti određuju distribuciju slučajnih vektora (N, S_N) i $(\bar{N}, S_{\bar{N}})$. Spitzerova formula određuje distribuciju procesa maksimuma $\{\max_{0\leq k\leq n} S_k : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Summary

Let $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables. Random walk is defined by $S_0 = 0$ and $S_n = X_1 + ... + X_n$ for each $n \in \mathbb{N}$. Let $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n > 0\}$ be first visit to the set $(0, \infty)$, and let $\bar{N} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq 0\}$ be first visit to the set $(-\infty, 0]$. Theorem 3.2.3 proves next statement. If $P\{X_1 = 0\} < 1$ then

$$\begin{gathered} S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad (g.s.) \quad \text{or} \quad S_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \quad (g.s.) \\ \text{or} \quad -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad (g.s.). \end{gathered}$$

Wiener-Hopf factorization (Theorem 4.1.7.) proved Baxter's equations (theorem 4.2.2) and Spitzer's formula (Theorem 4.3.1.). Baxter's equations determines distribution of random vectors (N, S_N) and $(\bar{N}, S_{\bar{N}})$. Spitzer's formula determines distribution of the maximum process $\{\max_{0\leq k\leq n} S_k : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Životopis

Rođen sam 31.10.1992. u Zagrebu. Po završetku osnovne škole upisujem XV. gimnaziju u Zagrebu, poznatiju kao MIOC. Završetkom srednjoškolskog obrazovanja upisujem preddiplomski inženjerski smjer matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od 2014. godine nastavljam školovanje na diplomskom studiju matematičke statistike. Dobitnik sam nagrade za izniman uspjeh kako na preddiplomskom tako i diplomskom studiju.