Pappusov teorem o šesterovrhu

Lučić, Ana

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:865273

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Lučić

PAPPUSOV TEOREM O ŠESTEROVRHU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Pappusov teorem i projektivna geometrija **3**
1.1 Pappusov teorem o šesterovrhu 3
1.2 Proširena euklidska ravnina kao projektivna ravnina 6

2 Euklidske verzije Pappusovog teorema **8**
2.1 Euklidska verzija Pappusovog teorema 8
2.2 Dva dokaza euklidske verzije Pappusovog teorema 10
2.2.1 Prvi dokaz: omjeri duljina segmenata 10
2.2.2 Drugi dokaz: metoda površine 12
2.3 Još neke euklidske verzije Pappusovog teorema 16

3 Projektivni dokazi Pappusovog teorema **19**
3.1 Homogene koordinate 19
3.1.1 Treći dokaz: poništavanje determinante 22
3.1.2 Četvrti dokaz: primjena Grassmann-Plückerove relacije 24

4 Varijacije Pappusovog teorema **26**
4.1 Varijacija 1: Pascalov Teorem 28
4.1.1 Peti dokaz: Pascalov teorem 29
4.2 Varijacija 2: Cayley-Bacharach-Chaslesov teorem 31
4.2.1 Šesti dokaz: Algebarske krivulje 32

5 Kompleksni brojevi i kružnice **35**
5.1 Veza euklidske i projektivne geometrije 35
5.2 Varijacija 3: Miquelov teorem 38
5.2.1 Sedmi dokaz: skraćivanje dvoomjera 42
5.3 Dokaz Pappusovog teorema u njegovoj punoj općenitosti 43

5.3.1 Osmi dokaz: ”grubom silom” 43

Bibliografija **45**

Uvod

Geometrijski teorem kojeg ćemo u ovom radu proučavati poznat je pod nazivom *Pappusov teorem o šesterovrhu* koji se najčešće pripisuje Pappusu iz Aleksandrije (iako nije sigurno je li on prvi matematičar koji je bio upoznat s ovim teoremom).

Pappus je živio oko 290. – 350. godine poslije Krista i bio je jedan od posljednjih velikih grčkih matematičara Antike te se smatra posljednjim velikim matematičarom Aleksandrijske škole. Autor je nekoliko knjiga (nažalost, većinom izgubljenih) u kojima je sustavno izložio, protumačio i katkad originalnim doprinosima proširio veliki dio područja matematike poznatog u to vrijeme.

Prema [1], jedino još postojeće Pappusovo djelo je *Sinagoga* (*Zbirka*) koje je izvorno napisano u osam svezaka. *Zbirka* sadrži nekoliko važnih otkrića između kojih su i neka vlastita Pappusova. Između ostalih tema, njegov rad se bavio pitanjima mehanike, volumena i oplošja prostornih tijela (tzv. *Pappus-Guldinova pravila*), svojstvima konika i krivulja višeg reda, a razmatrao je i problem trisekcije kuta primjenom takvih krivulja.

Predmet ovog rada je teorem koji povezuje algebru i geometriju, a izražen je samo pomoću incidencije točaka i pravaca ravnine. Stoga je Pappusov teorem smatran prvim velikim teoremom onog područja geometrije iz kojeg se razvila projektivna geometrija. U njezinoj je osnovi samo relacija incidencije, a nema paralelnosti, metrike ni kuteva.

Nadalje, u projektivnoj geometriji nema pojmova pravokutnog, jednakostraničnog ili jednakokračnog trokuta, nego postoji samo pojam trovrha (tri nekolinearne točke i tri pravca koja ih spajajaju) i dualno trostrana. Isto tako, u projektivnoj geometriji nema pojmova pravokutnika, paralelograma, kvadrata, romba, trapeza, nego postoji samo pojam četverovrha (četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne) i dualno četverostrana. Drugim riječima, u projektivnoj se ravnini općenito govori o n-terovrhu. Važno je još napomenuti da se u projektivnoj geometriji ne razlikuju kružnica, elipsa, hiperbola i parabola, već se one promatraju zajednički kao konike. Razlikuju se nedegenerirane i degenerirane konike.

U ovom radu bit će izložene različite varijante, kao i dokazi Pappusovog teorema. Većina dokaza biti će algebarska te će se oslanjati na pretvorbu geometrijskih činjenica u algebarske identitete. Putem raznovrsnih pristupa i metoda biti će otkrivene veze proučavanog teorema s raznim granama geometrije. Posebno, bit će dotaknut teorem Cayleya, Bacharacha i Chaslesa preko kojeg se objašnjava mjesto Pappusovog teorema unutar algebarske geometrije te Miquelov teorem kroz njegovu povezanost s geometrijom kružnica.

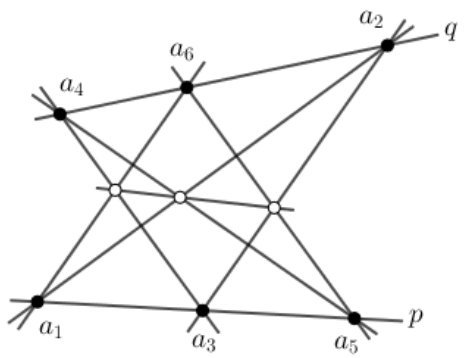
Napomenimo da se u projektivnoj geometriji često govori o Pappus-Pascalovom teoremu budući da se Pappusov teorem može smatrati posebnim slučajem Pascalovog, kad se u pretpostavkama dopusti i slučaj konike degenerirane u par različitih pravaca. Ključni teorem kojim se ovdje služimo, bez dokaza, jest Bezoutov teorem o skupu sjecišta dvije algebarske krivulje.

Poglavlje 1

Pappusov teorem i projektivna geometrija

1.1 Pappusov teorem o šesterovrhu

Pappusov teorem o šesterovrhu je, u određenom smislu, najmanji geometrijski teorem koji se može izraziti samo u terminima relacije incidencije točaka i pravaca. Naime, jedini elementi koji su uključeni u tvrdnju ovog teorema su točke i pravci, a jedina veza koja je potrebna za formulaciju teorema jest relacija incidencije. Točnije, teorem govori o figuri koju čine samo devet točaka i devet pravaca.



Slika 1.1: Pappusov teorem o šesterovrhu.

Teorem 1.1.1. *Neka su a_1, a_3, a_5 tri točke nekog pravca p, a a_2, a_4, a_6 tri točke nekog pravca q različitog od pravca p. Ako se pravci a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4 sijeku redom s pravcima a_4a_5, a_5a_6, a_6a_1, tada su ta tri sjecišta kolinearne točke.*

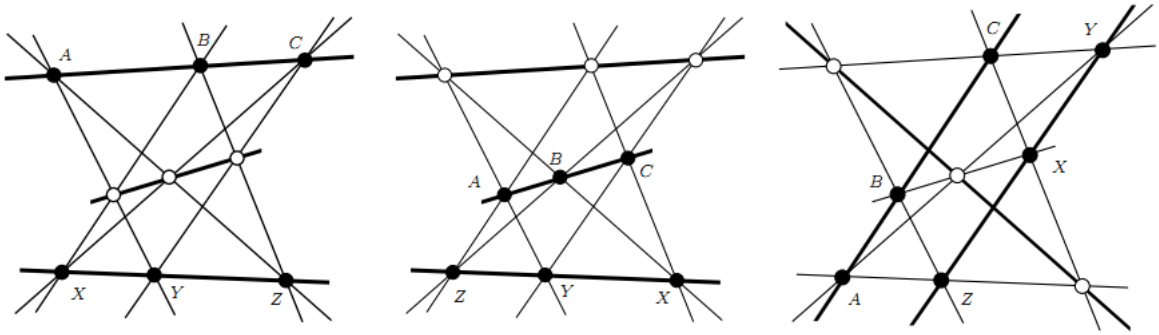
U ovom teoremu se podrazumijeva da dva pravca koja se sijeku imaju točno jednu zajedničku točku te se pretpostavlja da se nijedna od šest početnih točaka ne podudara sa sjecištem pravaca p i q. Devet točaka iz Pappusovog teorema predstavljaju dvije trojke točaka na početnim dvama pravcima p i q te tri točke sjecišta, koje su u konačnici kolinearne. Devet pravaca predstavljaju dva početna pravca p i q, šest spojnica danih točaka (one koje pripadaju početnim pravcima p i q) te pravac kojem pripadaju tri sjecišta (koja su u konačnici kolinearna).

Ovakav promatrani šesterovrh, kojemu su po tri točke naizmjenično kolinearne (šest početne točke nalaze se naizmjenično na dva pravca), nazivamo *Pappusovim šesterovrhom*. Parove stranica a_1a_2 i a_4a_5, a_2a_3 i a_5a_6 te a_3a_4 i a_6a_1 nazivamo *nasuprotnim stranicama Pappusovog šesterovrha*, a pravac na kojemu leže tri kolinearne točke (sjecišta parova nasuprotnih stranica) nazivamo *Pappusovim pravcem*.

Ovakvo označavanje točaka promatranog šesterovrha je zgodno jer naglašava samu konstrukciju Pappusovog šesterovrha. U nastavku rada, kao što vidimo već na sljedećoj slici 1.2, nećemo koristiti samo te oznake.

Slika 1.2 predočava tri inačice Pappusovog teorema (vidi [5]). Šest crnih točaka odgovara početnim točkama teorema, dok tri bijele točke predstavljaju sjecišta koja su u konačnici kolinerana. Uočimo također kako su, u istom primjeru, položaji devet točaka i devet pravaca (uzeti kao cijelina) identični. Međutim, ulogu početne dvije trojke točaka preuzimaju različite točke u svakom primjeru. Prva slika prikazuje položaj završnog pravca između dva početna pravca te je taj primjer najčešći u ilustracijama. Na drugim dvjema slikama možemo vidjeti da se uloge ta tri pravca mogu slobodno međusobno izmijeniti pa tako srednja slika prikazuje da položaj jednog od početna dva pravca može biti između završnog pravca i drugog početnog pravca, dok posljednja slika prikazuje da i jedan od unutarnjih pravaca može preuzeti ulogu završnog pravca (simetrijom strukture ovaj pravac može biti proizvoljni unutarnji pravac). Zapravo, grupa automorfizama koja leži u pozadini Pappusovog teorema dozvoljava da se bilo koji par pravaca koji nemaju zajedničku točku konfiguracije može uzeti za početne pravce teorema.

Već ovdje se nazire točna formulacija teorema u kojem su vidljive finije pojedinosti koje želimo spomenuti. Teorem 1.1.1, kako je objašnjen iznad, faktički zahtijeva da se parovi pravaca (AY, BX), (BZ, CY) i (CX, AZ) sijeku (vidi sliku 1.2), kako bi imalo smisla govoriti o kolinearnosti točaka sjecišta. Iskazan onako kao što je to napisano u Teoremu 1.1.1, Pappusov teorem vrijedi u euklidskoj ravnini. Međutim, njegova interpretacija u euklidskoj geometriji ne odražava njegovu punu općenitost, budući da se uvjet o postojanju sjecišta tri para pravaca može izostaviti tako da se dopusti i paralelnost odgovarajućih parova pravaca. To zapravo upućuje na promatranje ovog teorema u okviru projektivne geometrije, gdje je euklidska ravnina proširena "neizmjerno dalekim" točkama na prikladan način. Svakoj klasi paralelnih pravaca u euklidskoj ravnini pridružuje se jedna nova, "neizmjerno daleka" točka pa na taj način i pravci koji su paralelni u euklidskom smislu imaju sjecište (jednoznačno, ako su ti pravci različiti) u smislu projektivne ravnine. Tako možemo dobiti interpretaciju Pappusovog teorema koja obuhvaća i sve slučajeve paralelnosti.



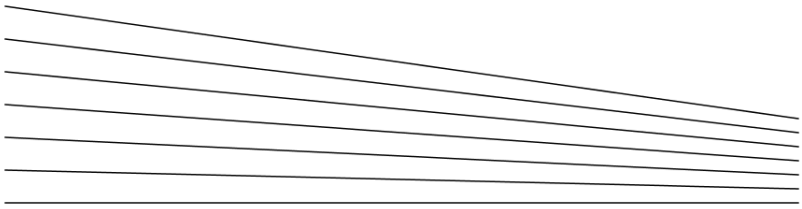
Slika 1.2: Tri inačice Pappusovog teorema. (vidi [5])

1.2 Proširena euklidska ravnina kao projektivna ravnina

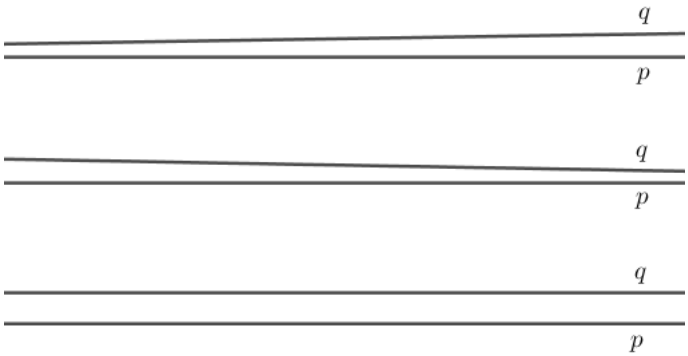
Pri aksiomatskom uvođenju projektivne geometrije ravnine, polazi se od dva skupa osnovnih elemenata (skup točaka i skup pravaca) te relacije incidencije među njima (točka je incidentna s pravcem znači, u uobičajenoj terminologiji, da točka "leži na pravcu" odnosno da pravac "prolazi točkom" itd.). I u euklidskoj i u projektivnoj ravnini uzima se aksiom da su svake dvije različite točke incidentne s jednoznačno određenim pravcem (njihovom spojnicom). Bitna razlika nastupa kod aksioma o položaju dva različita pravca. U euklidskoj ravnini uzima se da točkom izvan nekog pravca prolazi točno jedan pravac koji nema zajedničkih točaka s tim pravcem (tj. paralelan je s njim, a ono je zapravo aksiom afine ravnine, kao općenitije od euklidske). U projektivnoj ravnini aksiomatski se postavlja da svaka dva različita pravca imaju zajedničku točku (sjecište, a ono je jednoznačno zbog prvog aksioma o jedinstvenosti spojnice dviju točaka).

Osnovni model projektivne ravnine definira se proširivanjem euklidske ravnine dodatnim točkama (obično se nazivaju *"neizmjerno"* ili *"beskonačno dalekim" točkama*) i jednim dodatnim pravcem koji je incidentan sa svim neizmjerno dalekim točkama te se obično naziva *"neizmjerno dalekim" pravcem* ili *pravcem u beskonačnosti*. Ovo proširenje izvodi se jednostavno tako da se svakoj klasi (pramenu) paralelnih pravaca pridruži jedna "nova" točka te se relacije incidencije proširuju na proveden način od euklidske incidencije. Naime, svaki euklidski pravac p incidentan je (samo) s onom "novom" točkom koja odgovara cijelom pramenu pravaca paralelnih s p (jednostavno rečeno, smjerom tog pravca). "Novi" pravac, označimo ga s ℓ_∞, incidentan je sa svakom "novom" točkom i ni s jednom točkom euklidske ravnine. Lako se provjeri da za ovakvo proširenje euklidske ravnine vrijede oba prije navedena aksioma: svake dvije točke (dvije euklidske, dvije neizmjerno daleke ili jedna euklidska i jedna neizmjerno daleka točka) spojene su jednim pravcem, a svaka dva pravca (dva euklidska ili jedan euklidski i jedan novi pravac ℓ_∞) imaju jedinstvenu zajedničku točku.

Na taj način definiramo standardno proširenje euklidske ravnine do projektivne ravnine pri čemu se u projektivnoj formuliraju definicije i teoremi koji odjednom obuhvaćaju slučajeve (euklidskih) pravaca koji jesu ili nisu paralelni.



Slika 1.3: Pramen paralelnih pravaca koji se sijeku u beskonačno dalekoj točki na desno.



Slika 1.4: Slučaj ”gotovo paralelnih” pravaca p i q te slučaj kad je nagib pravca q u odnosu na pravac p jednak nuli.

Nadalje je posebno važno postojanje koordinatizacije proširene euklidske ravnine, što se rješava uvođenjem tzv. *homogenih koordinata*. Time ćemo se detaljnije baviti u poglavlju 3.

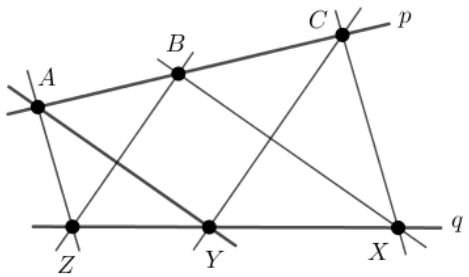
Poglavlje 2

Euklidske verzije Pappusovog teorema

2.1 Euklidska verzija Pappusovog teorema

Prelaskom u projektivni okvir, prije svega, proširujemo okvir u kojem je Teorem 1.1.1 (u točno istoj formulaciji) istinit. Drugim riječima, ako bi se bilo koja točka ili bilo koji pravac nalazili u beskonačno dalekom položaju, teorem ostaje istinit. Ovakvim prelaskom dolazimo do zanimljivih euklidskih specijalnih slučajeva Pappusovog teorema. Jedan od njih je dan sljedećim teoremom:

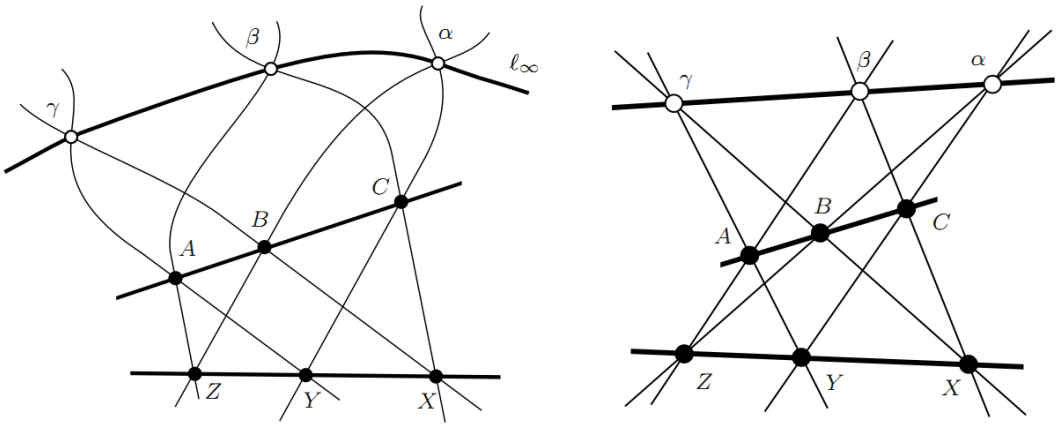
Teorem 2.1.1. *Neka su p i q dva pravca zadana u euklidskoj ravnini. Neka su A, B, C tri točke na pravcu p, a X, Y, Z tri točke na pravcu q. Ako vrijedi: $AY \parallel BX$, $BZ \parallel CY$, tada vrijedi i $AZ \parallel CX$.*



Slika 2.1: Euklidska verzija Pappusovog teorema.

Slikom 2.1 prikazan je Teorem 2.1.1, dok slika 2.2 prikazuje kako je paralelnost pravaca prenesena u projektivnu shemu (vidi [5]). Ako su pravci AY i BX paralelni, onda se ta dva pravca sijeku (projektivno) u neizmjerno dalekoj točki γ. Isto tako, ako su pravci BZ i CY paralelni, tada se ta dva pravca sijeku (projektivno) u neizmjerno dalekoj točki α. Pappusov teorem (u svojoj projektivnoj verziji) tvrdi da su γ i α te sjecište β pravaca AZ i CX kolinearni. Budući da je spojnica neizmjerno dalekih točaka γ i α neizmjerno daleki pravac, pravci AZ i CX moraju također biti paralelni.

Desni crtež slike 2.2 predočava "poravnatu" verziju slučaja u kojem je završni pravac teorema na određenom položaju, tj. konačan. Uočimo kako uvođenjem koncepta projektivne transformacije možemo, odgovarajućom transformacijom, dovesti bilo koju varijaciju Pappusovog teorema do takve (određene) situacije. Stoga, naša euklidska verzija Pappusovog teorema jest u osnovi ekvivalentna Pappusovom teoremu u cjelini, a ne samo nekim njegovim posebnim slučajevima.



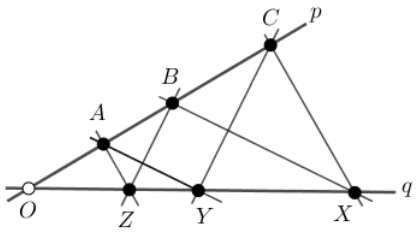
Slika 2.2: Projektivna shema euklidske verzije Pappusovog teorema (lijevo). Prava euklidska verzija Pappusovog teorema. (desno) (vidi [5])

2.2 Dva dokaza euklidske verzije Pappusovog teorema

Započnimo našu zbirku dokaza s dva dokaza Teorema 2.1.1 (prema [5]). No, navedimo najprije dvije opće pretpostavke nedegeneriranosti koje su potrebne za pojedine dokaze. Svih devet točaka konfiguracije trebaju biti određene te isto tako svih devet pravaca konfiguracije trebaju biti određeni. Ukoliko će za potrebe pojedinog dokaza biti nužne dodatne pretpostavke nedegeneriranosti, biti će izložene u kontekstu dokaza.

2.2.1 Prvi dokaz: omjeri duljina segmenata

Dokaz. Pretpostavimo da se početna dva pravca, p i q, sijeku u nekoj točki O koja ne smije biti umiješana među trojkama točaka zadanih na početna dva pravca. (vidi sliku 2.3)

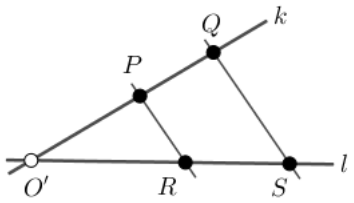


Slika 2.3: Euklidska verzija Pappusovog teorema.

Nadalje, prisjetimo se sljedeće činjenice koju znamo još iz elementarne geometrije:

Neka su k i l dva pravca koja se sijeku u točki O'. Neka su P i Q dvije točke na pravcu k koje su različite od točke O'. Slično, neka su R i S dvije točke na pravcu l različite od točke O' (pogledaj sliku 2.4).
Tada su pravci PR i QS paralelni ako i samo ako vrijedi:

$$\frac{|O'P|}{|O'Q|} = \frac{|O'R|}{|O'S|} \tag{2.1}$$



Slika 2.4: Relacija paralelnih pravaca PR i QS te omjera duljina segmenata $|OP| : |OQ| = |OR| : |OS|$.

Koristeću tu činjenicu i pretpostavku teorema, paralelnost pravaca AY i BX povlači:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OY|}{|OX|}$$

Analogno, paralelnost pravaca BZ i CY povlači:

$$\frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OZ|}{|OY|}$$

S obzirom na to da točka O ne smije biti "umiješana" među trojkama, nijedan nazivnik u gornjem izrazu nije jednak nuli. Množenjem prethodne dvije jednakosti na način da lijevu stranu jedne jednakosti pomnožimo s lijevom stranom druge jednakosti te isto tako desnu stranu jedne jednakosti pomnožimo s desnom stranom druge jednakosti, dobivamo:

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OZ|}{|OX|}$$

A to je pak ekvivalentno činjenici da su AZ i CX paralelni. □

Na prvi pogled, prethodni dokaz koji se temelji na omjerima duljina segmenata se čini vrlo jednostavan i elegantan: "pomnoži dvije jednakosti, pokrati izraze i dobijemo rezultat". Ipak, postoji nekoliko nedostataka. Ako pobliže promotrimo dokaz, vidimo da je dokaz problematičan, s obzirom da smo uveli pomoćnu točku O i učinili dokaz ovisnim o njezinom postojanju. Drugim riječima, cijeli dokaz ne postoji ukoliko su pravci p i q paralelni jer samim time točka O uopće ne postoji. Napomenimo da euklidska verzija Pappusovog teorema ne ovisi ni najmanje o ovim posebnim uvjetima o položaju.

2.2.2 Drugi dokaz: metoda površine

Dokaz koji slijedi koristi samo šest točaka Teorema 2.1.1. Ipak, bit će nam potrebne tri, nešto manje jednostavne, činjenice koje se tiču polinoma i orijentiranih površina trokuta i četverokuta.

1. činjenica: Orijentirana površina trokuta

Za točke A, B, C sa koordinatama (a_x, a_y), (b_x, b_y) i (c_x, c_y) možemo iskazati orijentiranu površinu trokuta ABC za polinom njezinih koordinata.
Da budemo specifični, željeni polinom je (vidi [3], str. 337.):

$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_xb_y + b_xc_y + c_xa_y - a_xc_y - b_xa_y - c_xb_y). \tag{2.2}$$

Zapravo, poseban oblik ovog polinoma nije važan za naš sljedeći dokaz. Ono što je važnije jest značenje orijentiranog: ako je redoslijed točaka (A, B, C) suprotan smjeru kazaljke na satu, tada se površina računa s pozitivnim predznakom, a ako je redoslijed točaka u smjeru kazaljke na satu, tada se površina računa s negativnim predznakom. Ako su tri točke kolinearne, tada trokut nestaje te je površina jednaka nuli. Označimo površinu trokuta ABC sa: $P_\triangle(A, B, C)$.

2. činjenica: Orijentirana površina četverokuta

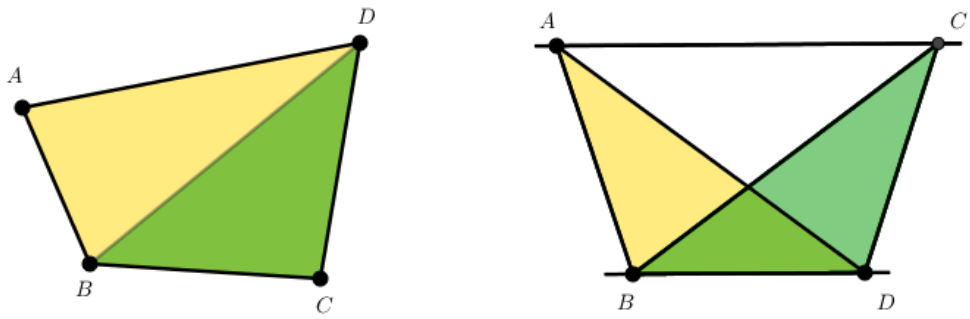
Za početak, označimo površinu četverokuta $ABCD$ sa: $P_\square(A, B, C, D)$. Orijentirana površina četverokuta $ABCD$ može biti definirana kao:

$$P_\square(A, B, C, D) = P_\triangle(A, B, D) + P_\triangle(B, C, D). \tag{2.3}$$

Ova funkcija je ponovno polinom u koordinatama točaka. Ako izlomljena crta koja čini granicu četverokuta (lanac dužina $\overline{AB} \bigcup \overline{BC} \bigcup \overline{CD} \bigcup \overline{DA}$) nema točke samopresijecanja, onda se ovom formulom 2.3 dobiva uobičajena površina četverokuta, s predznakom ovisnim o orijentaciji. Međutim, ako četverokut ima točku samopresijecanja, tada jedan od trokuta u zbroju doprinosi pozitivnu vrijednost, a drugi negativnu. Površina četverokuta $ABCD$ sa samopresijecanjem je jednaka nuli ako dva trokuta uključena u zbroj imaju jednake površine suprotnih predznaka. Budući da oba trokuta imaju zajedničku stranicu BD, slučaj kada je površina četverokuta $ABCD$ jednaka nuli povlači da su duljine visina iz

vrhova A i C na tu stranicu jednake. Drugim riječima, pravac određen točkama A i C je paralelan pravcu određen točkama B i D. Prema tome dobivamo:

$$\overline{AC} \parallel \overline{BD} \text{ ako i samo ako } P_{\square}(A, B, C, D) = 0.$$



Slika 2.5: Slučaj četverokuta bez točke samopresijecanja. (lijevo) Slučaj četverokuta sa samopresijecanjem, površine 0. (desno)

3. činjenica: Nul-polinom

Ako polinom u n varijabli poprima vrijednost 0 na nekom n-dimenzionalnom području domene, onda taj polinom mora biti nul-polinom. Na primjer, ako polinom u dvije varijable poprima vrijednost 0 u svakoj točki nekog kruga u ravnini, koliko god malenog polumjera, taj polinom nužno je nul-polinom, tj. poprima vrijednost 0 u svakoj točki.

Sada, kada smo sabrali potrebne činjenice za formuliranje dokaza Pappusovog teorema pomoću argumenata površine, slijedi dokaz koji je dan kao motivacijski primjer u članku D. Fearnly Sander (prema [5]).

Dokaz. Neka su u euklidskoj ravnini dane šest točke A, B, C, X, Y, Z koje su postavljene približno slično kao u situaciji na lijevoj strani slike 2.6. Taj lik možemo smatrati kao lik sastavljen od dva trokuta, $\triangle(A, C, B)$, $\triangle(X, Y, Z)$, i dva četverokuta, $\square(B, Y, X, A)$, $\square(C, Z, Y, B)$. Prema 2.3, zbroj orijentiranih površina (sa redoslijedom oznaka vrhova suprotno od kazaljke na satu) ovih dijelova jednaka je površini četverokuta $\square(C, Z, X, A)$. Time imamo:

$$+P_{\triangle}(A, C, B) + P_{\triangle}(X, Y, Z) + P_{\square}(B, Y, X, A) + P_{\square}(C, Z, Y, B) - P_{\square}(C, Z, X, A) = 0.$$

Izraz na lijevoj strani je očigledno polinom, i on ne ovisi o točno preciziranom položaju točaka (s obzirom da je za naš argument samo relevantna činjenica da su svi polinomi u pitanju označeni suprotno od smjera kazaljke na satu i činjenica da unutarnji dijelovi svojim površinama točno pokrivaju vanjski četverokut). Stoga, prema trećoj činjenici, ova formula mora vrijediti za proizvoljne položaje šest točaka, čak i u degeneriranim slučajevima.

A sada, neka šest točaka odgovara točkama Pappusovog teorema.
To znači da su točke (A, B, C) i (X, Y, Z) dvije kolinearne (uređene) trojke, odnosno izraženo pomoću površina prema prvoj činjenici imamo:

$$P_{\triangle}(A, C, B) = 0$$

$$P_{\triangle}(X, Y, Z) = 0$$

Nadalje, imamo $\overline{AY} \parallel \overline{XB}$ i $\overline{BZ} \parallel \overline{YC}$. Prema drugoj činjenici, izraženo pomoću površina, to znači da:

$$P_{\square}(A, X, Y, B) = 0$$

$$P_{\square}(B, Y, Z, C) = 0$$

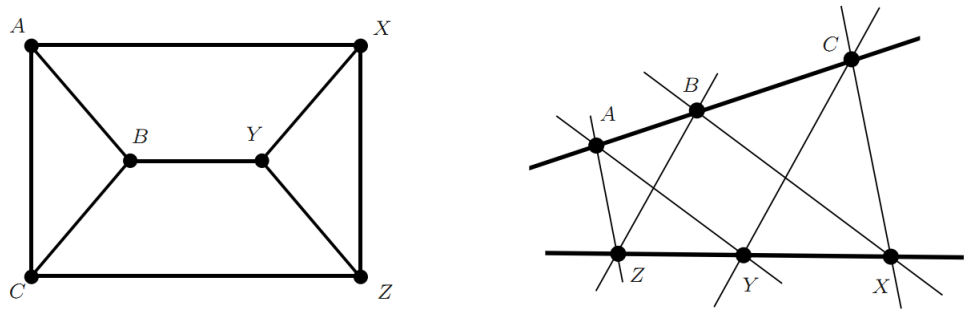
Dakle vrijedi:

$$P_{\triangle}(A, C, B) = P_{\triangle}(X, Y, Z) = P_{\square}(A, X, Y, B) = P_{\square}(B, Y, Z, C) = 0,$$

a to izravno povlači da je $P_{\square}(A, X, Z, C) = 0$, jer bi u suprotnom gornja formula o zbroju površina bila narušena.

Odatle, prema drugoj činjenici, imamo da vrijedi: $\overline{AZ} \parallel \overline{XC}$, čime je teorem dokazan.

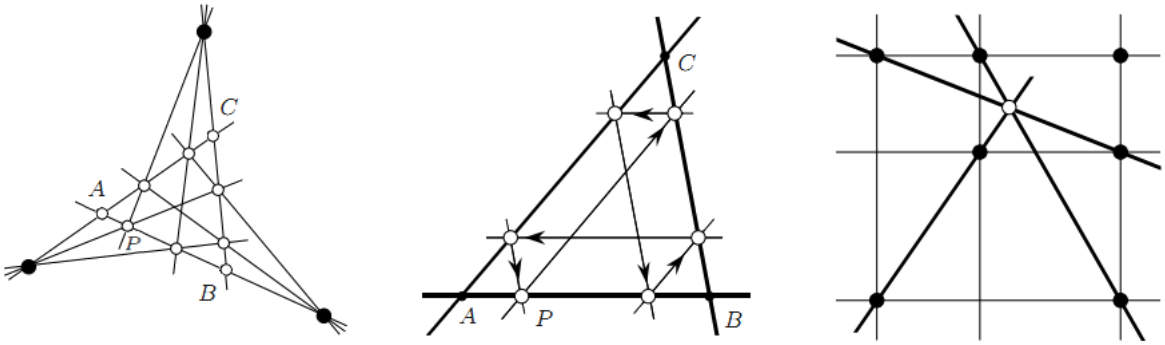
$\square$



Slika 2.6: Dokaz Pappusovog teorema metodom površine. (vidi [5])

U ovom obliku, teorem vrijedi bez ograničenja te pokriva čak i slučaj podudaranja točaka. Također, ovaj dokaz je koristan i za poopćavanje. Na slici 2.6 uočimo ravninski lik kojeg možemo promatrati kao centralnu projekciju trostrane prizme. Pet strana (oplošja) prizme (dva trokuta i tri četverokuta) odgovaraju vrijednostima pet površina uključenih u dokaz. Očito je površina četverokuta $CZXA$ jednaka zbroju površina trokuta ACB i XYZ i četverokuta $BYXA$ i $CZYB$. Slično se možemo poigrati sa svakim trodimenzionalnim poliedrom čiji se rub sastoji samo od trokuta i četverokuta unutar svojih stranica.

2.3 Još neke euklidske verzije Pappusovog teorema

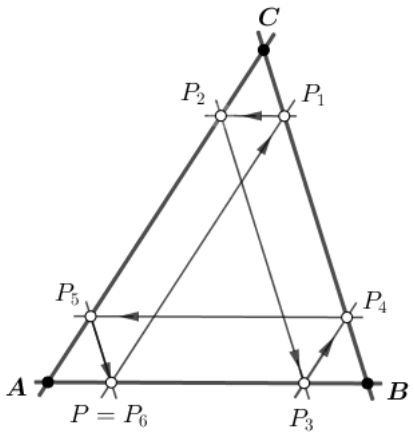


Slika 2.7: Tri inačice Pappusovog teorema. (vidi [5])

Navedimo još neke zanimljive slučajeve Pappusovog teorema, dobivene tako da se pravci u Pappusovoj konfiguraciji izaberu na poseban način, pri čemu mogu biti i paralelni. Na prvoj slici u 2.7 razabire se simetrija reda 3, to jest bijekcija φ takva da je $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi = id$. Na toj slici riječ bi bila o tri centralne projekcije, čiji su centri istaknute (crne) točke, a čijim se izborom kao neizmjerno dalekih točaka dobiva druga slika u 2.7. Ostale dvije slike prikazuju posebne slučajeve kad su određeni pravci izabrani kao pralaleni.

Interpretirajmo srednju sliku na sljedeći način. Neka je ABC trokut, a P bilo koja točka na pravcu AB. Točkom P povucimo pravac paralelan s pravcem AC i neka je P_1 sjecište te paralele s pravcem BC. Nadalje, neka je P_2 sjecište pravca AC s pravcem koji je paralelan s pravcem AB te koji prolazi točkom P_1. Zatim, neka je P_3 sjecište pravca AB s pravcem koji prolazi točkom P_2 i koji je paralelan s pravcem BC. Ponovimo isti postupak polazeći od točke P_3, čime dobivamo redom točke P_4,P_5 i P_6. Tada se točka P_6 podudara s polaznom točkom P, tj. u šestom koraku ovog postupka vratit ćemo se u polaznu točku P. Prema tome, euklidski slučaj prikazan drugom slikom može biti formuliran ovako:

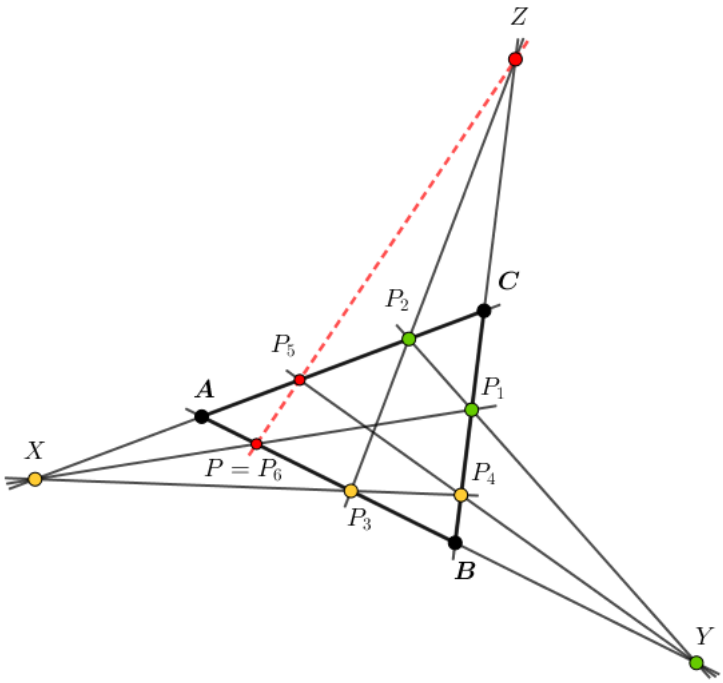
Teorem 2.3.1. *Neka je P bilo koja točka na stranici AB trokuta ABC. Točkom P povucimo pravac paralelan sa stranicom AC i presijecimo njime stranicu BC. Iz tog sjecišta povucimo paralelu sa stranicom AB i odredimo njezino sjecište sa stranicom AC. Nastavimo taj postupak kako je prikazano na slici. Nakon šest koraka vratit ćemo se u polaznu točku P.*



Slika 2.8: Euklidski specijalni slučaj Pappusovog teorema opisan Teoremom 2.3.1.

Ovaj postupak zapravo predstavlja kompoziciju šest paralelnih projekcija i to, redom, u smjeru pravaca AC, BA, CB, AC, BA, CB, kojom se skup točaka pravca AB preslikava sam u sebe. Naime, najprije se točke pravca AB paralelno projiciraju na pravac BC u smjeru AC, zatim točke pravca BC na pravac AC u smjeru BA, i tako dalje. Povratak u polaznu točku P znači da je kompozicija ovih šest paralelnih projekcija identiteta.

Na kraju, pokažimo još kako se prve dvije slike uklapaju u pretpostavke Pappusovog teorema. Označimo s X, Y, Z neizmjerno daleke točke zadane smjerovima pravaca CA, AB i BC redom (odnosno, X, Y i Z su istaknute točke na prvoj slici 2.7). Tada su P_1, P_2, Y i P_3, P_4, X dvije trojke kolinearnih točaka koje odgovaraju pretpostavkama Pappusovog teorema. Sjecište P_1P_4 i P_2P_3 je točka Z, sjecište P_1X i P_3Y je točka P, a sjecište P_2X i P_4Y je točka P_5. Navedena sjecišta Z, P_5 i P su takve da odgovaraju tvrdnji Pappusovog teorema da su točke Z, P_5 i P kolinearne. Upravo to u postupku konstrukcije točke P_6 pokazuje da je $P_6 = P$, jer se pravac P_3Y podudara s pravcem AB.



Slika 2.9: Prikaz uklapanja prve dvije slike iz 2.7 u pretpostavke Pappusovog teorema.

Poglavlje 3

Projektivni dokazi Pappusovog teorema

3.1 Homogene koordinate

Kao što smo najavili prilikom uvođenja projektivne ravnine kao proširene euklidske ravnine, potrebno je uvesti prikladnu koordinatizaciju te projektivne ravnine jer će se u nekoliko dokaza Pappusovog teorema primijeniti ta koordinatizacija.

Poznato nam je da je euklidska ravnina koordinatizirana pomoću skupa $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$, tako da su pravci zadani jednadžbom oblika $y = kx + l$, odnosno $x = konstanta$. Očito, uređeni parovi iz $\mathbb{R}^2$ nisu dovoljni za koordinatizaciju proširene euklidske ravnine. Zato ćemo se poslužiti uređenim trojkama realnih brojeva, točnije vektorskim prostorom $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$, pri čemu izostavljamo nulvektor $(0, 0, 0)$. Zapravo, jednoj točki projektivne ravnine bit će pridružen cijeli 1-dimenzionalni potprostor $\{\lambda(x_0, y_0, z_0)|\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$, pri čemu je $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. To će biti tzv. homogene koordinate, kod kojih istu točku projektivne ravnine predstavljaju svi vektori iz $\mathbb{R}^3$ koji se razlikuju samo za skalarni faktor $\lambda \neq 0$.

Točkama euklidske ravnine odgovarat će potprostori oblika $\lambda(x_0, y_0, z_0)$ takvi da je $z_0 \neq 0$, tako da su euklidske koordinate pojedine točke dane s $(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0})$, što očito ne ovisi o izboru predstavnika jer za $\lambda \neq 0$ i $\lambda(x_0, y_0, z_0)$ imamo $(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}) = (\frac{\lambda x_0}{\lambda z_0}, \frac{\lambda y_0}{\lambda z_0})$. Neizmjerno dalekim točkama u proširenju euklidske ravnine pripadat će homogene koordinate oblika $\lambda(x_0, y_0, 0)$.

Ovo pridruživanje homogenih koordinata možemo lako predočiti i geometrijski. Zamislimo da je H euklidska ravnina, smještena u prostor $\mathbb{R}^3$ tako da ne prolazi ishodištem, tj. da ne sadrži nulvektor. Uobičajeni izbor, usklađen s prethodnim izborom koordinata, takav je da se za H uzme ravnina s jednadžbom $z = 1$ u pravokutnim kartezijevim koordinatama

za $\mathbb{R}^3$. Svaka točka $(x_0, y_0, 1)$ u H spojena je s ishodištem pravcem $(x, y, z) = \lambda(x_0, y_0, 1)$, dakle svakoj točki a u H odgovara 1-dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^3$ čiji vektor smjera nije oblika $(x_0, y_0, 0)$. Obrnuto, svaki pravac kroz ishodište, koji nije paralelan s H, probada ravninu H u jednoj točki a. Pravci kroz ishodište, paralelni s H, odgovaraju svim smjerovima pravaca u ravnini H jer su zadani vektorom oblika $(x_0, y_0, 0)$. Svakom takvom pravcu odgovara pramen paralelnih pravaca u ravnini H, stoga takav pravac odgovara jednoj neizmjerno dalekoj točki ravnine H. Nadalje, svakom pravcu p u ravnini H odgovara ravnina u $\mathbb{R}^3$ (2-dimenzionalni afini potprostor) koja sadrži ishodište i pravac p.

Sad je očito da su ispunjeni osnovni aksiomi projektivne ravnine, jer:

(1) dva 1-dimenzionalna potprostora od $\mathbb{R}^3$ sadržana su u točno jednom 2-dimenzionalnom potprostoru, što odgovara činjenici da su svake dvije točke u proširenoj ravnini H spojene pravcem;

(2) svaka dva 2-dimenzionalna potprostora od $\mathbb{R}^3$ sijeku se u 1-dimenzionalnom potprostoru, što odgovara činjenici da se svaka dva pravca u proširenoj ravnini H sijeku u jednoj točki.

Preostaje vidjeti kako se kolinearnost (triju) točaka izražava u homogenim koordinatama. Riječ je zapravo o linearnoj zavisnosti. Naime, u ovom modelu, tri točke su kolinearne ako i samo ako su njihovi odgovarajući 1-dimenzionalni potprostori sadržani u jednom 2-dimenzionalnom potprostoru. Stoga, ako su točke a i b zadane homogenim koordinatama $\lambda(x_1, y_{1,1})$ i $\lambda(x_2, y_2, z_2)$, s njima će biti kolinarne upravo one točke čije homogene koordinate imaju oblik $\lambda(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Na temelju toga, točke a, b i c s homogenim koordinatama $\lambda(x_1, y_1, z_1)$, $\lambda(x_2, y_2, z_2)$ i $\lambda(x_3, y_3, z_3)$ su kolinearne ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Naglasimo da ovaj uvjet vrijedi i za točke euklidske ravnine i za neizmjerno daleke točke. Zato ćemo ovaj uvjet kolinearnosti uvijek moći primjenjivati ne razlikujući pojedine slučajeve za te točke.

Također možemo u hoomogenim koordinatama prikazati jednadžbu pravca određenog točkama a i b u obliku:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Uočimo da se kolinearnost može izraziti i pomoću vektorskog, odnosno mješovitog produkta jer vektori $a = \lambda(x_1, y_1, z_1)$, $b = \lambda(x_2, y_2, z_2)$, $c = \lambda(x_3, y_3, z_3)$ linearno su zavisni ako i samo ako je $(a \times b) \cdot c = 0$.

Navedimo još kako ćemo na što jednostavniji način izračunati spojnice točaka i sjecišta pravaca pomoću homogenih koordinata. Za spojnicu točaka već imamo jednadžbu oblika $ux + vy + wz = 0$, pri čemu su

$$u = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, v = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, w = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Tu jednadžbu možemo shvatiti i kao uvjet ortogonalnosti vektora (u, v, w) i (x, y, z) u $\mathbb{R}^3$, to jest da je skalarni produkt (u, v, w) i (x, y, z) jednak nuli. (Naravno, ravnina kroz ishodište jednoznačno je zadana svojim vektorom normale ili ortogonalnim komplementom). Zato uvjet incidencije točke i pravca u projektivnoj ravnini možemo jednostavno izraziti kao ortogonalnost pridruženih vektora: (x, y, z) kao koordinate točke i (u, v, w) kao koordinate pravca.

Kao što smo već spomenuli, spojnice točaka a i b možemo, pojednostavljujući, izračunati kao $a \times b$. No, također sjecište dvaju pravaca p i q zadanih odgovarajućim vektorima u gore navedenom smislu, možemo izraziti kao $p \times q$.

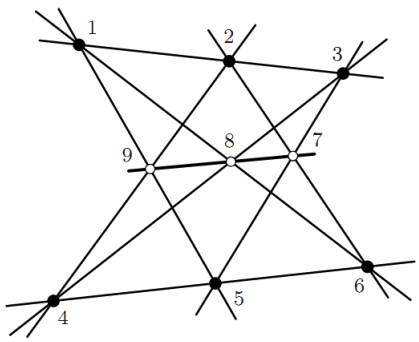
Primjerice, sjecište pravaca $2x - 3y + z = 0$ i $3x + 5y - 4z = 0$ je točka s koordinatama:

$$(2, -3, 1) \times (3, 5, -4) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) = (7, 11, 19).$$

Dakako, sve ovo odnosi se na homogene koordinate u proširenoj euklidskoj ravnini.

3.1.1 Treći dokaz: poništavanje determinante

Zbog preglednosti, izmijenili smo oznake točaka na prikazu Pappusovog teorema jednostavno znamenkama od 1 do 9 (pogledaj sliku 3.1) (prema [5]). Za dokaz nam je potreban dodatan uvjet nedegeneriranosti da trojka točaka $(1, 4, 7)$ nije kolinearna. Početne uvjete nedegeneriranosti (gdje nema identičnih točaka i identičnih pravaca) ovdje podrazumijevamo.



Slika 3.1: Pappusova konfiguracija. (vidi [5])

Dokaz. Pretpostavimo da točke $(1, 4, 7)$ nisu kolinearne. Primjenom prikladne afine transformacije možemo pretpostaviti, bez gubitka općenitosti, da su točke $(1, 4, 7)$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Ravninu u kojoj se nalazi naša konfiguracija smjestimo u trodimenzionalni prostor tako da točkama 1, 4 i 7 pripadaju redom jedinični vektori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$.

S obzirom na to da je konfiguracija sada smještena u $\mathbb{R}^3$, svaka točka je predstavljena trodimenzionalnim (homogenim) koordinatama. Tri točke 7, 8 i 9 na slici 3.1, su kolinearne ako i samo ako je determinanta matrice 3×3 koja je formirana njihovim koordinataama, jednaka nuli. Determinantu skraćeno prikazujemo kao [789]. Koordinate konfiguracije sa slike 3.1 predstavlja sljedeća matrica (prema [5]) :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 1 & 0 \\ g & h & i \\ j & k & l \\ 0 & 0 & 1 \\ m & n & o \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Slova u matrici predstavljaju koordinate preostalih točaka. Zbog pretpostavki o nedegeneriranosti, niti jedno od slova ne predstavlja nulu. Uistinu, uočimo sljedeću determinantu:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = c \neq 0$$

Primjer determinante formirane točkama 1, 2 i 4 je jednaka c. Dakle, trojka točaka $(1, 2, 4)$ ne može biti kolinearna, s obzirom da bi se, u suprotnom, dva pravca konfiguracije preklapali. Sličan argument vrijedi i za svaku drugu varijablu.

S našim posebnim izborom koordinata, koji je naveden i u [5], svaka od osam pretpostavljenih kolinearnosti može se izraziti tako da određena poddeterminanta reda 2 poprima vrijednost 0.Tako redom dobivamo:

$$\begin{gathered} [123] = 0 \Longrightarrow bf = ce \\ [159] = 0 \Longrightarrow hr = iq \\ [168] = 0 \Longrightarrow ln = ko \\ [249] = 0 \Longrightarrow cp = ar \\ [267] = 0 \Longrightarrow ak = bj \\ [348] = 0 \Longrightarrow do = fm \\ [357] = 0 \Longrightarrow eg = dh \\ [456] = 0 \Longrightarrow ij = gl \end{gathered}$$

Nakon što pomnožimo sve lijeve strane i sve desne strane zapisanih jednadžbi dobivamo jednakost $mq = np$, odakle slijedi:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m & n & o \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

odnosno $[789] = 0$, a to povlači traženu kolinearnost točaka $(7, 8, 9)$.

□

Podsjetimo se da je provedeno skraćivanje moguće jer su sve naše varijable različite od 0. Pritom, izražavanje svih kolinearnosti pomoću determinanti reda 2 bitno ovisi o izboru baze, budući da se to pojednostavljenje ostvaruje time što vektori baze imaju po dvije koordinate jednake 0. Ovaj problem ovisnosti o izboru baze može se zaobići apstraktnijim postupkom, služeći se samo općenitim svojstvima determinanti.

Napomenimo još da smo osam jednakosti napisali upravo na taj način, kao i u [5], kako bi omogućili skraćivanje jer se niti jedna varijabla ne pojavljuje dva puta u istom umnošku.

Poslužit ćemo se Grassmann-Plückerovom relacijom (vidi [5]), koja vrijedi za determinante homogenih koordinata bilo kojih pet točaka A, B, C, D, E u projektivnoj ravnini:

$$[ABC]\,[ADE] - [ABD]\,[ACE] + [ABE]\,[ACD] = 0. \tag{3.1}$$

Ovu relaciju, inače važnu u geometriji, koristimo ovdje samo kao algebarski identitet, a dokazati se može izravnim računom. Primjena te relacije bit će ključna za sljedeći dokaz Pappusovog teorema.

3.1.2 Četvrti dokaz: primjena Grassmann-Plückerove relacije

Dokaz. Ponovno pretpostavimo da trojka $(1, 4, 7)$ nije kolinearna te uzmimo u obzir činjenicu da je trojka $(1, 2, 3)$ kolinearna u našem teoremu. Uzimajući sljedeću Grassmann-Plückerovu relaciju:

$$[147]\,[123] - [142]\,[173] + [143]\,[172] = 0.$$

zajedno sa činjenicom $[123] = 0$, dobivamo:

$$[142]\,[173] = [143]\,[172]\,.$$

Za svaku od osam kolinearnosti pretpostavke teorema, možemo dobiti jednu od sljedećih jednakosti (prema [5]):

$$
\begin{aligned}
[147]\,[123] - [142]\,[173] + [143]\,[172] = 0 &\Longrightarrow [142]\,[173] = [143]\,[172]\\
[147]\,[159] - [145]\,[179] + [149]\,[175] = 0 &\Longrightarrow [145]\,[179] = [149]\,[175]\\
[147]\,[186] - [148]\,[176] + [146]\,[178] = 0 &\Longrightarrow [148]\,[176] = [146]\,[178]\\
[471]\,[456] - [475]\,[416] + [476]\,[415] = 0 &\Longrightarrow [475]\,[416] = [476]\,[415]\\
[471]\,[483] - [478]\,[413] + [473]\,[418] = 0 &\Longrightarrow [478]\,[413] = [473]\,[418]\\
[471]\,[429] - [472]\,[419] + [479]\,[412] = 0 &\Longrightarrow [472]\,[419] = [479]\,[412]\\
[714]\,[726] - [712]\,[746] + [716]\,[742] = 0 &\Longrightarrow [712]\,[746] = [716]\,[742]\\
[714]\,[753] - [715]\,[743] + [713]\,[745] = 0 &\Longrightarrow [715]\,[743] = [713]\,[745]
\end{aligned}
$$

Ponovnim množenjem lijeve i desne strane jednakosti (i vodeći računa o predznaku determinante) i skraćivanjem faktora koji se pojavljuju na obje strane, na kraju dobivamo:

$$[718]\,[749] = [719]\,[748]\,.$$

(Kraćenje je izvedivo s obzirom da su sve uključene determinante različite od nule zbog uvjeta nedegeneriranosti).

Prema Grassmann-Plückerovoj relaciji:

$$[714]\,[789] - [718]\,[749] + [719]\,[748] = 0$$

slijedi:

$$[714]\,[789] = 0.$$

Kako je pretpostavljeno da je $[147] \neq 0$, iz toga slijedi $[789] = 0$, što je pak ekvivalentno kolinearnosti trojke $(7, 8, 9)$. □

Ovaj dokaz je veoma sličan prethodnom dokazu. Međutim, budući da radimo izravno na razini determinanti, poseban izbor baze više nije nužan.

Poglavlje 4

Varijacije Pappusovog teorema

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s različitim varijacijama, kao i generalizacijom Pappusovog teorema. Konkretno, proučavat ćemo što se događa ako promatramo parove pravaca kao degenerirane slučajeve krivulja drugog reda (elipsa, hiperbola, parabola) u ravnini. Krivulje drugog reda često nazivamo *konikama* i one odgovaraju skupovima rješenja kvadratnih jednadžbi u homogenim koordinatama. Točnije, konika u ravnini je okarakterizirana sa šest homogenih parametara a, b, c, d, e, f i sastoji se od skupa točaka homogenih koordinata (x, y, z) koje zadovoljavaju sljedeću jednadžbu:

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot xy + d \cdot xz + e \cdot yz + f \cdot z^2 = 0. \tag{4.1}$$

Neka je (x, y, z) rješenje prethodne jednadžbe. Budući da je ukupni stupanj svakog pribrojnika jednak 2 (što znači da je polinom u x, y, z homogen stupnja 2), množenjem svakog rješenja (x, y, z) s $\lambda \in \mathbb{R}$ dobiva se također rješenje ove jednadžbe. Stoga, svako rješenje, osim trivijalnog $(0, 0, 0)$, možemo smatrati točkom realne projektivne ravnine, a sve takve točke zajedno tvore koniku. Geometrijski oblik konike ovisi o vrijednostima parametara. Projektivno, kako smo i u samom uvodu spomenuli, nema razlike između elipse, hiperbole i parabole. Ta tri slučaja samo odražavaju različite načine kako neizmjerno daleki pravac presijeca koniku. Točnije, ako nema sjecišta, konika je elipsa; ako ima dva sjecišta, konika je hiperbola (ima dvije neizmjerno daleke točke koje pripadaju dvjema asimptotama kao tangentama); ako je samo jedna zajednička točka, konika je parabola (što je zapravo granični slučaj između preostale dvije mogućnosti).

Još je jedan zanimljiv slučaj koji je također važan iz projektivne perspektive: konika može degenerirati u dva pravca (koji bi se čak mogli i podudarati) ako se polinom $ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2$ može faktorizirati u dvije linearne komponente, odnosno:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) \cdot (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z).$$

Drugim riječima, konika iz ovog slučaja se sastoji od dva pravca, svaki opisan linearnom jednadžbom jednog od faktora.

Uočimo da pet točaka u projektivnoj ravnini, uz uvjet nedegeneriranosti da nikoje tri od njih nisu kolinearne, određuju točno jednu koniku koja prolazi svakom od njih. Neka šesta točka može ili ne mora pripadati toj konici. Naime, ako u opću jednadžbu konike s koeficijentima a, b, c, d, e i f, koji nisu svi jednaki 0, uvrstimo redom koordinate nekih pet zadanih točaka te još (x, y, z) kao koordinate neke općenite šeste točke, dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi koji ima netrivijalno rješenje (a, b, c, d, e, f) ako i samo ako je determinanta reda 6 pridružena sustavu jednaka 0. Ujedno na taj način (razvojem determinante) dobivamo jednadžbu konike kroz pet zadanih točaka.

U drukčijem obliku, uvjet da šest točaka pripada jednoj konici može se izraziti relacijom koju nećemo dokazivati, a u kojoj bitnu ulogu ponovno imaju determinante reda 3 sastavljene od koordinata po tri točke (prema [5]):

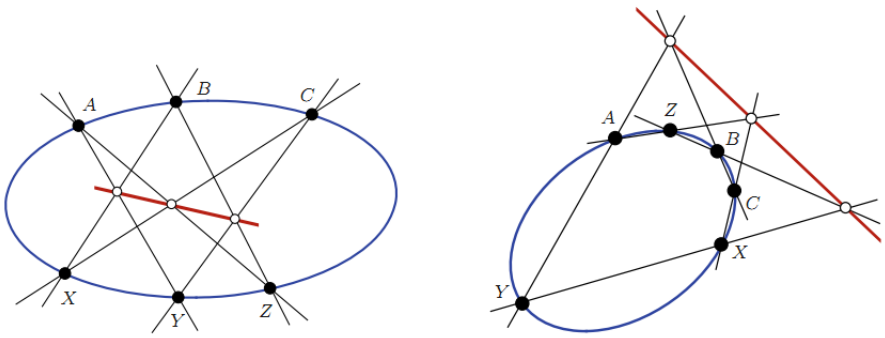
Teorem 4.0.1. *Šest točaka A, B, C, X, Y, Z pripada zajedničkoj konici ako i samo ako vrijedi sljedeći uvjet među determinantama homogenih koordinata:*

$$[ABC][AYZ][XBZ][XYC] = [XYZ][XBC][AYC][ABZ].$$

Ovu karakterizaciju ćemo koristiti pri dokazivanju sljedeće vrlo dobro poznate varijacije (ili bolje rečeno generalizacije) Pappusovog teorema.

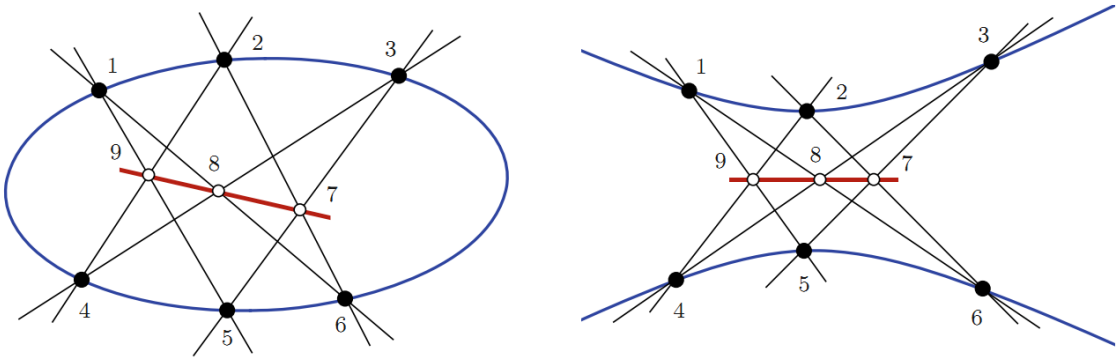
4.1 Varijacija 1: Pascalov Teorem

Teorem 4.1.1. *Neka su A, B, C, X, Y, Z šest točaka na konici. Ako se pravci AY, BZ, CX međusobno sijeku s pravcima BX, CY, AZ, tada su tri točke sjecišta kolinearne.*



Slika 4.1: Dva slučaja Pascalovog teorema. (vidi [5])

Pascalov teorem, čija dva slučaja prikazuje slika 4.1, je nazvan prema slavnom francuskom filozofu, matematičaru i fizičaru Blaise Pascalu koji ga je otkrio 1640. godine, u svojoj 16. godini, što je nešto oko 1300 godina nakon otkrića Pappusovog teorema. Uz to, ono je očito generalizacija Pappusovog teorema. Ako je prema Pascalovom teoremu konika degenerirana u dva pravca, tada izravno imamo Pappusov teorem. Dokazat ćemo Teorem 4.1.1 argumentom poništavanja determinante, sličnim onom koji smo koristili u četvrtom dokazu. Slika 4.2 prikazuje dvije inačice Pascalovog teorema, jedan prikaz s elipsom, a drugi s hiperbolom.



Slika 4.2: Dvije inačice Pascalovog teorema. (vidi [5])

4.1.1 Peti dokaz: Pascalov teorem

Dokaz. Pretpostavimo ponovno, po uvjetu nedegeneriranosti, da se nikoje dvije točke kao i nikoja dva pravca iz pretpostavki teorema ne podudaraju. Za oznake u dokazu uzmimo oznake kao na slici 4.2. Promotrimo sljedeće jednakosti izražene pomoću determinanti (prema [5]).

Pripadnost svih šest točaka (1,2,3,4,5,6) konici, prema Teoremu 4.0.1, povlači:

$$[125]\,[136]\,[246]\,[345] = +\,[126]\,[135]\,[245]\,[346]$$

Iz Grassmann-Plückerovih relacija (vidi 3.1), zbog pretpostavljenih kolinearnosti, imamo:

$$\begin{aligned}
[159] = 0 &\Longrightarrow [157]\,[259] = -\,[125]\,[597]\\
[168] = 0 &\Longrightarrow [126]\,[368] = +\,[136]\,[268]\\
[249] = 0 &\Longrightarrow [245]\,[297] = -\,[247]\,[259]\\
[267] = 0 &\Longrightarrow [247]\,[268] = -\,[246]\,[287]\\
[348] = 0 &\Longrightarrow [346]\,[358] = +\,[345]\,[368]\\
[357] = 0 &\Longrightarrow [135]\,[587] = -\,[157]\,[358]
\end{aligned}$$

Ako pomnožimo sve (prethodno navedene) izraze na lijevoj strani i sve izraze na desnoj strani, te zatim pokratimo determinante koje se pojavljuju na obje strane, dobit ćemo izraz:

$$[287]\,[597] = -\,[297]\,[587]\,,$$

odakle slijedi $[987] = 0$, a to povlači traženu kolinearnost $(7, 8, 9)$. □

Kao i kod Pappusovog teorema, i ovdje imamo bogatstvo izbora specijalnih slučajeva i reformulacija. Jedna od njih je tvrdnja: *ako je šesterokut upisan u koniku u projektivnoj ravnini, tada se nasuprotne stranice šesterokuta sijeku u tri kolinearne točke.* U euklidskoj varijanti u kojoj je krajnji pravac "poslan" u beskonačnost, imamo sljedeću tvrdnju: *ako je šesterokut upisan u koniku te su dva para nasuprotnih stranica paralelna, tada je paralelan i treći par.*

Posebno je važno promatrati situaciju kad se, na fiksiranoj konici, jedna točka neprekidno približava drugoj. Granični slučaj njihove spojnice je tangenta u toj točki. Na taj način iz Pascalovog teorema dobivaju se i različite tvrdnje kojima su obuhvaćene tangente i njihova dirališta.

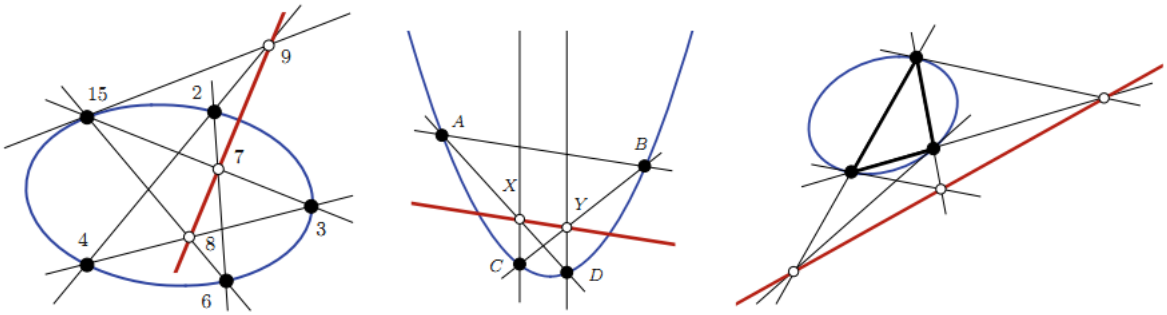
Lijevi crtež slike 4.3 prikazuje "najmanje" degeneriran slučaj pri čemu oznaka 15 simbolizira da se točke 1 i 5 podudaraju (oznake su u skladu s onima upotrijebljenima u slikovnom prikazu 4.2). Spojnica točaka 1 i 5 postaje tangenta u točki označenoj s 15. Obrnuto, ako su dani konika C i točka 15 na njoj, tada se može konstruirati tangenta u točki 15 izborom četiri proizvoljne točke 2, 3, 4, 6 na konici C, te konstruiranjem spojnica i nastalih sjecišta, kako je i prikazano slikom, da bi konačno došli do točke 9 koja je također točka tangente. Ova činjenica je također bila poznata Pascalu i čini jednu od glavnih primjena ovog teorema.

Srednji crtež, u suštini, prikazuje isti slučaj kao i prvi crtež. Međutim, ovdje je točka 15 u beskonačnosti te je odgovarajuća tangenta neizmjerno daleki pravac. Time konika postaje parabola, a ostala dva pravca koja prolaze točkom 15 postaju paralelni pravci s osi simetrije parabole. U ovom slučaju teorem glasi:

Teorem 4.1.2. *Neka su A, B, C, D četiri točke na paraboli. Ako pravce koji prolaze točkama C i D i koji su paralelni s osi simetrije parabole međusobno presiječemo dužinama $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, tada je spojnica tih dvaju sjecišta paralelna sa spojnicom točaka A i B.*

Desni crtež prikazuje "najviše" degeneriran slučaj teorema, u kojem se šest točaka konike svelo na tri točke i tangente u njima.

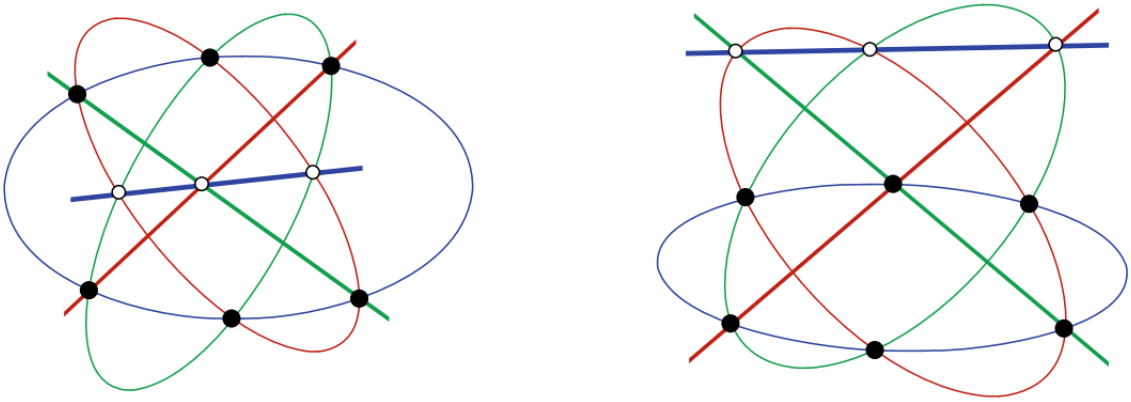
Teorem 4.1.3. *Neka je u koniku upisan trokut. Ako povučemo tangente vrhovima trokuta te ih presiječemo s nasuprotnim stranicama trokuta, tada su sva tri sjecišta kolinearna.*



Slika 4.3: Tri degenerirane inačice Pascalovog teorema (vidi [5]).

4.2 Varijacija 2: Cayley-Bacharach-Chaslesov teorem

Pascalov teorem tvrdi da je Pappusov teorem valjan čak i kad konika nije degenerirana te ga možemo promatrati kao da je izveden iz Pappusovog teorema s obzirom na dva pravca koja nemaju zajedničku točku konfiguracije te čine (degeneriranu) koniku. Isti postupak se može primijeniti još dva puta kako bismo dobili teorem s tri konike i tri pravca.



Slika 4.4: Generalizacija Pascalovog teorema (vidi [5]).

Uočimo da postoje dvije različite kombinacije spajanja tri para pravaca Pappusovog teorema u tri konike (vidi [5]). Prvi način možemo uočiti na lijevoj strani slike 4.4. Plava konika nastaje spajanjem početnih šest točaka iz pretpostavke Pappusovog teorema, dok crvena i zelena konika nastaje spajanjem početne četiri točke i dvjema završnim točkama

Pappusovog teorema. Čini se začuđujuće da i za novu konfiguraciju vrijedi teorem. Ako sve točke leže tako kako je prikazano na slici, osim onih na plavom pravcu (za te tri bijele točke se tek treba dokazati), onda će i tri bijele točke biti nužno kolinearne.

Drugi način je prikazan na desnoj strani slike 4.4. Također, i u ovom slučaju imamo teorem. Kako bismo vidjeli da su oni kombinatorno različiti, primijetimo da se na lijevoj slici tri pravca sijeku u jednoj točki, dok se na desnoj tri pravca ne sijeku. Oba teorema su primjeri još općenitije činjenice koja je posljedica Bezoutova teorema iz algebarske geometrije gdje je skup nultočaka algebarske krivulje stupnja d skup svih nultočaka homogenog polinoma stupnja d. (Naravno, konike su algebarske krivulje drugog reda.) Bezoutov teorem se može iskazati na sljedeći način (prema [5]):

Teorem 4.2.1. *Neka su dane dvije algebarske krivulje, jedna stupnja n,a druga stupnja m. Ako se algebarska krivulja stupnja n i algebarska krivulja stupnja m sijeku, tada je ili broj sjecišta konačan i nije veći od $n \cdot m$, ili se krivulje sijeku u beskonačno mnogo točaka i imaju zajedničku komponentu.*

Sada možemo dokazati sljedeću važnu posljedicu Bezoutova teorema, poznatu kao *Cayley-Bacharach-Chasles teorem* (navedeno u [5]):

Teorem 4.2.2. *Neka su A i B dvije krivulje trećeg reda (kubike) koje se sijeku u točno devet različitih točaka. Ako je šest od tih devet točaka na konici, tada su preostale tri točke kolinearne.*

4.2.1 Šesti dokaz: Algebarske krivulje

Dokaz. Neka su A i B krivulje i neka su $p_A(x, y, z)$ i $p_B(x, y, z)$ odgovarajući homogeni polinomi trećeg stupnja. Bezoutov teorem 4.2.1 povlači da ako se dvije krivulje A i B sijeku i imaju konačan broj sjecišta, tada mogu imati najviše devet točaka sjecišta. Nazovimo ih 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Uz to, pretpostavimo da su točke 1, 2, 3, 4, 5, 6 na konici C koja je određena polinomom p_C. Želimo dokazati da su 7, 8, 9 kolinearne.

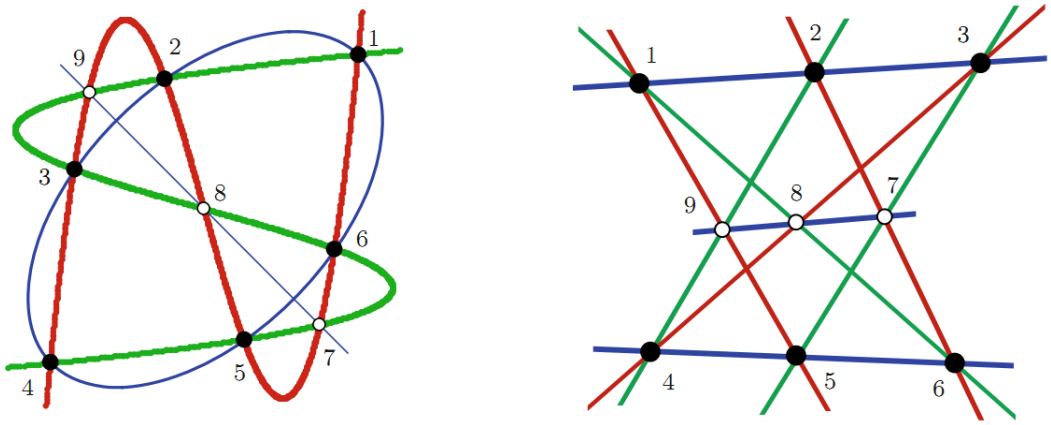
Uzmimo linearnu kombinaciju $p_\mu = p_A + \mu \cdot p_B$ dvaju polinoma s realnim parametrom μ. Polinom p_μ ima sljedeća svojstva:

- prvo, to je polinom trećeg stupnja,
- drugo, prolazi kroz svih devet točaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (svaka od ovih točaka je nultočka oba polinoma p_A i p_B pa je stoga nultočka i svake njihove linearne kombinacije).

Sada uzmimo dodatnu točku q na konici C različitu od 1, 2, 3, 4, 5, 6, pri čemu je parametar μ takav da polinom p_μ prolazi točkom q (kako bismo pronašli μ potrebno je riješiti linearnu jednadžbu $p_A(q) + \mu p_B(q) = 0$). Uzmimo polinom p_μ za tako odabranu vrijednost μ. Na taj način krivulja p_μ ima zajedničkih sedam točaka s konikom C. Stoga po Bezoutovom teoremu 4.2.1, budući da broj zajedničkih točaka premašuje umnožak stupnjeva koji je jednak 6, kubika zadana polinomom p_μ mora imati C kao jednu komponentu. Tada je:

$$p_\mu = p_C \cdot L,$$

pri čemu je L polinom stupnja 1, dakle predstavlja pravac $L = 0$. Sve tri točke 7, 8 i 9 moraju ležati na tom pravcu, jer kao nultočke polinoma p_μ to su nultočke i umnoška $p_C \cdot L$, ali nijedna od njih ne može biti nultočka od p_C, dakle 7, 8 i 9 kolinearne su na pravcu zadanom s L. Naime, ako bi npr. točka 7 bila na konici C, onda bi također bila u presjeku A i C, kao i B i C, što bi opet po Bezoutovom teoremu značilo da kubike A i B imaju zajedničku cijelu koniku C kao komponentu, suprotno pretpostavci da se sijeku u točno 9 različitih točaka. □



Slika 4.5: Ako se dvije krivulje trećeg reda sijeku u točno devet različitih točaka, od kojih su šest na konici, tada su preostale tri točke kolinearne. (vidi [5])

Slučaj Teorema 4.2.2 prikazan je na slici 4.5 koji je otkriven neovisno od strane nekoliko matematičara. Najvjerojatnije ga je prvi otkrio Chasles, u nešto općenitijoj verziji, 1885. godine (prema [5]). Kako to često biva u matematici, teorem se često pripisuje i drugima; u ovom slučaju Cayleyu i Bacharachu, koji su objavili slične rezultate u vremenu nakon Chaslesa te je to jedan od razloga zašto je teorem poznat kao *Cayley-Bacharach-Chasles teorem*.

Slučajevi Pascalovog teorema prikazani slikom 4.4 predstavljaju neposrednu specijalizaciju Cayley-Bacharach-Chasles teorema. Imamo dvije krivulje trećeg reda koje se raščlanjuju na produkt krivulje drugog reda (konike) i linearne krivulje (pravca). Pa tako, dvije crvene komponente na slici 4.5 tvore jednu krivulju trećeg reda, a dvije zelene komponente tvore drugu krivulju trećeg reda. Ostalo je doslovna primjena gore spomenutog teorema.

Može se otići i korak dalje i promotriti Pappusov teorem u izvornom obliku kao izravnu posljedicu Teorema 4.2.2. Za to jednostavno moramo uzeti tri od devet pravaca kao jednu kubiku, a još neka tri od preostalih šest pravaca kao drugu kubiku. Označavanje bojama kao na slici 4.5 čini takav rastav preglednim.

Poglavlje 5

Kompleksni brojevi i kružnice

5.1 Veza euklidske i projektivne geometrije

U ovom poglavlju produbit ćemo spoznaje iz prošlog poglavlja povezujući ih s geometrijom kružnica u ravnini, pri čemu je kružnica pojam iz euklidske geometrije. To povezivanje s euklidskom geometrijom ponovno zahtijeva određeni izbor neizmjerno dalekog pravca, ℓ_∞. Kako je već spomenuto u poglavlju 3, homogene koordinate se mogu promatrati kao smještavanje euklidske ravnine na neku afinu hiperravninu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Za takvo smještenje izabrat ćemo afinu hiperravninu $\{(x, y, z)|z = 1\}$. Prema tome, točka s euklidskim koordinatama (x, y) prikazana je homogenim koordinatama $(x, y, 1)$, odnosno $\lambda(x, y, 1)$, uz $\lambda \neq 0$. Neizmjerno daleke točke imaju koordinate oblika $\lambda(x, y, 0)$.

Nadalje, proučimo kružnice, koje su zapravo posebna vrsta konike, u okviru ovakvog smještanja. Želimo dokučiti koje kvadratne jednadžbe odgovaraju kružnicama. Kružnica je obično zadana svojim središtem (c_x, c_y) i radijusom r, pa stoga u euklidskoj geometriji jednadžbu za kružnicu možemo zapisati kao:

$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - r^2 = 0. \tag{5.1}$$

Prelaskom na homogene koordinate, uz $z = 1$, dobivamo:

$$\begin{aligned} &(x - c_x \cdot z)^2 + (y - c_y \cdot z)^2 - r^2 \cdot z^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 - 2c_x xz + c_x^2 z^2 + y^2 - 2c_y yz + c_y^2 z^2 - r^2 z^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - 2c_x xz - 2c_y yz + (c_x^2 + c_y^2 - r^2)z^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Posljednji red daje intepretaciju kružnice u parametrima opće konike. Kružnica je posebna vrsta konike za koju su koeficijenti uz x^2 i y^2 jednaki i gdje je koeficijent uz xy jednak 0.

Postoji iznenađujuća i vrlo duboka veza između kružnica i kompleksnih brojeva. Ispitajmo što se događa kada kružnicu siječe neizmjerno daleki pravac. Drugim riječima, tražimo rješenja za gornju jednadžbu gdje je $z = 0$. Jasno je da je rješenje kompleksno, s obzirom da niti jedna kružnica nema realnog sjecišta s pravcem u beskonačnosti. Za $z = 0$, gornja jednadžba kružnice (vidi 5.1) glasi:

$$x^2 + y^2 = 0$$

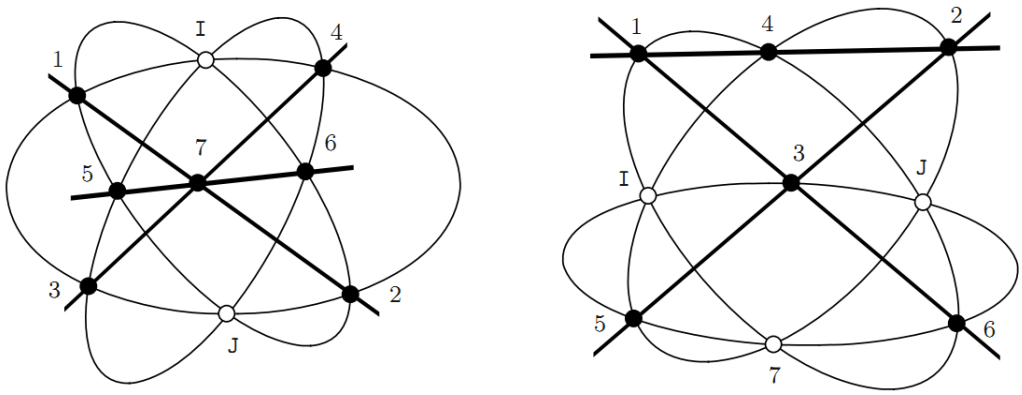
$$\Leftrightarrow y^2 = -x^2$$

iz koje slijedi:

$$y = \pm ix.$$

Izborom $x = 1$ dobivamo da je $y = \pm i$, to jest dobivamo dva rješenja: $(1, i, 0)$ i $(1, -i, 0)$. Dobivena rješenja, označimo ih s $I = (1, i, 0)$ i $J = (1, -i, 0)$, su kompleksne točke na neizmjerno dalekom pravcu koje ne ovise o specifičnom izboru konkretne kružnice. Stoga možemo reći da sve kružnice prolaze točkama I i J te svaka konika koja prolazi tim točkama jest kružnica.

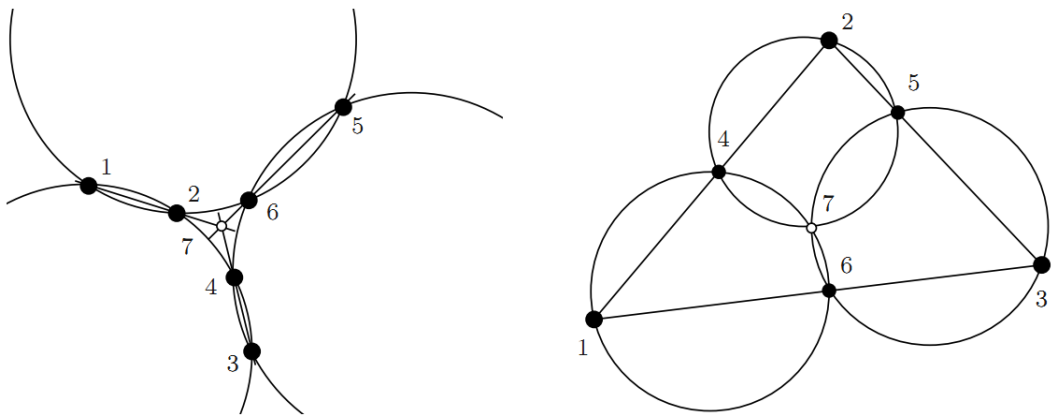
Ova činjenica je vjerojatno najvažnija veza euklidske i projektivne geometrije. Dopušta nam da različite tvrdnje o kružnicama izrazimo u terminima incidencije konika koje sadrže točke I i J. Štoviše, može se reći da je svaki euklidski teorem o incidencijama moguće iskazati kao projektivni teorem u kojem dvije točke imaju ulogu specijalnih točaka I i J. Jednu primjenu tog pristupa prikazat ćemo u kontekstu Pappusovog teorema.



Slika 5.1: Dvije generalizacije Pascalovog teorema. (vidi [5])

Ponovno promotrimo dvije generalizacije Pascalovog teorema prikazane na slici 5.1 na kojima su točke u kojima se sijeku tri konike označene bijelim točkama. Na isti način na koji

smo pretpostavili u poglavlju 4, da je određeni pravac izabran za neizmjerno daleki pravac, sada ćemo pretpostaviti da su na svakom od crteža dvije od tih bijelih točaka smještene u točkama I i J. Sve ostale točke ostaju na svojim realnim položajima. Konika koja prolazi točkama I i J jest kružnica. Prema tome, konike u našem teoremu postaju kružnice (to je po smislu slično kao kad dva pravca postaju paralelna ako je njihova točka sjecišta smještena u neizmjerno daleku točku). Stoga, dva teorema se mogu interpretirati kao euklidski teoremi o sedam točaka, tri pravca i tri kružnice što prikazuje slika 5.2.



Slika 5.2: Euklidski teoremi o sedam točaka, tri pravca i tri kružnice. (vidi [5])

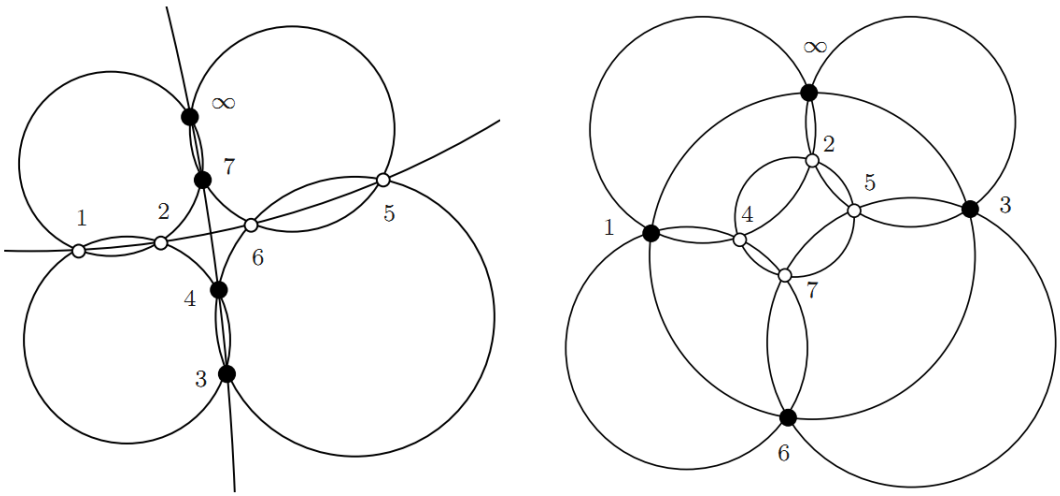
Na primjer, prvi od ova dva teorema može glasiti (prema [5]):

Teorem 5.1.1. *Neka su zadane tri kružnice koje se dvije po dvije sijeku u tri para točaka. Tri pravca određena tim parovima sjecišta kružnica sijeku se u jednoj točki.*

Točka sjecišta iz teorema 5.1.1 odgovara točki 7 u originalnoj verziji teorema.

Ako odemo korak dalje, pravce možemo interpretirati kao kružnice beskonačnog radijusa. Postoji poseban način proširenja euklidske geometrije koja reflektira ovakav način razmatranja. U tu svrhu, uvodi se *samo jedna* neizmjerno daleka točka ∞ i pretpostavlja se da su pravci kružnice koje prolaze tom točkom. Ovakvo proširenje povezano je s projektivnim kompleksnim pravcem i poznato je pod nazivom *kompaktifikacija euklidske ravnine jednom točkom* što u ovom radu nećemo istraživati.

Uz ovakve postavke više nije potrebno razlikovanje između pravaca i kružnica. U toj intepretaciji, da su pravci kružnice s beskonačnim radijusom, naša dva teorema se mogu smatrati kao teoremi o šest kružnica i osam točaka (beskonačnu točku ∞ interpetiramo kao običnu točku) što je prikazano na slici 5.3.

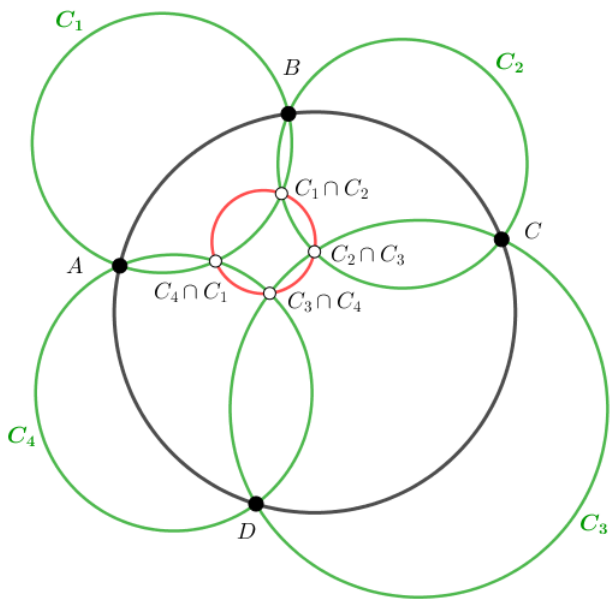


Slika 5.3: Prikaz teorema kad je točka ∞ smještena u točki euklidske ravnine. (vidi [5])

Napisat ćemo formulaciju teorema koji se odnosi na ilustraciju na desnoj strani slike 5.3, jer je to vrlo poznati teorem iz geometrije kružnica.

5.2 Varijacija 3: Miquelov teorem

Teorem 5.2.1. *Neka su A, B, C, D četiri točke na kružnici. Nadalje, neka su C_1, C_2, C_3, C_4 još četiri kružnice koje redom prolaze parovima točaka (A, B), (B, C), (C, D), (D, A). Sada uzmimo ostala sjecišta kružnica C_i i C_{i+1} za $i = 1, 2, 3, 4$ (indeksi mod 4).*
Ova četiri sjecišta su ponovno koncikličke.



Slika 5.4: Miquelov teorem.

Ovaj teorem možemo elementarno dokazati izračunavanjem zbroja vrijednosti kutova, pri čemu su osnovne činjenice koje su nam potrebne za ovaj dokaz ilustrirane na slikama 5.5 i 5.6.

Primijetimo da se kutovi na slici 5.5 promatraju kao orijentirani kutovi. Ako promotrimo tetivu AB iz pozicije drugih dviju različitih točaka C i D kružnice (koje su na istoj strani kao i AB), možemo vidjeti tetivu pod istim kutem (lijeva strana slike 5.5). To jest, prema teoremu o obodnom kutu iz kojeg slijedi da su svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom sukladni (vidi [4], str. 269.), vrijedi:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB.$$

Ako su točke C i D na suprotnim stranama tetive (desna strana slike 5.5), prema teoremu o tetivnom četverokutu koji kaže da je zbroj vrijednosti dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak π (vidi [4], str. 273.), imamo:

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BDA = \pi$$

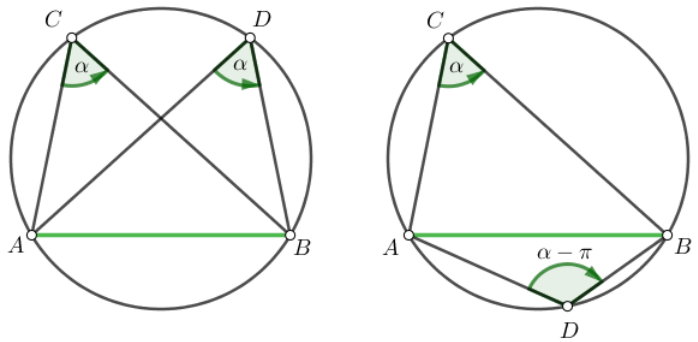
$$\sphericalangle BDA = \pi - \sphericalangle ACB$$

No, budući da se kutovi na slici 5.5 promatraju kao orijentirani kutovi, vrijednost kuta $\sphericalangle BDA$ moramo računati s negativnim predznakom, odakle imamo:

$$\sphericalangle ADB = -(\pi - \sphericalangle ACB)$$

$$\Leftrightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB - \pi$$

Uzimajući u obzir orijentaciju kutova, možemo uočiti da će razlika vrijednosti dvaju kutova $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADB$ u oba slučaja biti višekratnik od π. Dakle, vidimo da četiri točke A, B, C i D leže na jednoj kružnici ako i samo ako je razlika vrijednosti kutova (pod kojima se vidi tetiva AB) iz točaka C i D višekratnik od π. Time dobivamo karakterizaciju četiriju točaka na kružnici u smislu kuteva.



Slika 5.5: Teorem o obodnom kutu. (lijevo) Teorem o tetivnom četverokutu. (desno).

Miquelov teorem se sada može dokazati razmatranjem kuteva određenih nekim tetivama kružnica o kojima govori teorem. Međutim, ovdje ističemo algebarski pristup kojim se relacije među kutovima izražavaju pomoću kompleksnih brojeva. U tu svrhu zamislimo sliku Miquelova teorema smještenu u kompleksnoj ravnini. Promatramo točke A, B, C, D sa slike 5.6 kao kompleksne brojeve. Tada, na primjer kako je navedeno i u [5], $A - C$ čini kompleksan broj koji ukazuje na smjer od C prema A. Formiranjem kvocijenta $\dfrac{A-C}{B-C}$, dobivamo kompleksan broj čiji je argument (kut u odnosu na realnu os) upravo kut uz točku C, tj. $\sphericalangle BCA$. Slično tome, $\dfrac{A-D}{B-D}$ daje kompleksan broj koji opisuje kut uz točku D. Možemo usporediti ova dva kuta ponovnim formiranjem količnika ovih dvaju brojeva:

$$\frac{\dfrac{A-C}{B-C}}{\dfrac{A-D}{B-D}}. \tag{5.3}$$

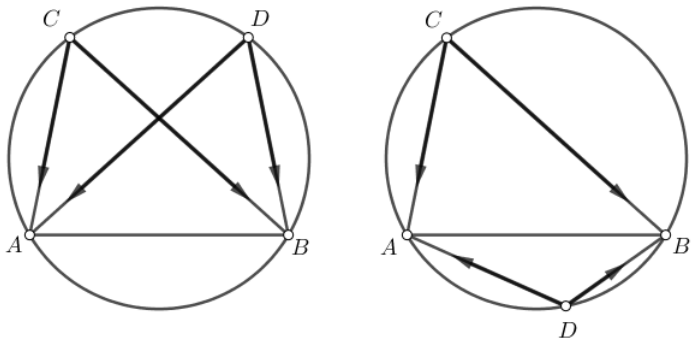
Ovaj broj će biti realan ako i samo ako se dva kuta razlikuju za višekratnik od π.

Uzimajući sve u obzir, dobivamo sljedeću karakterizaciju koncikličnosti četiriju točaka (uz mogućnost beskonačnih radijusa): četiri točke A, B, C, D u kompleksnoj ravnini su koncikličke ako i samo ako je

$$\frac{(A-C)(B-D)}{(B-C)(A-D)} \tag{5.4}$$

realan broj.

Gore navedeni izraz se naziva *dvoomjer* koji igra temeljnu ulogu u projektivnoj geometriji. Poomoću dvoomjera možemo jednostavno izvesti dokaz Miquelovog teorema.



Slika 5.6: Ilustracija slike pomoću koje promatramo točke A, B, C, D kao kompleksne brojeve.

5.2.1 Sedmi dokaz: skraćivanje dvoomjera

Dokaz. Pretpostavimo da su četvorke točaka (A, B, C, D), (A, B, E, F), (B, C, F, G), (C, D, G, H), (D, A, H, E) koncikličke. Prema karakterizaciji koncikličnosti četiriju točaka vrijedi da su svi dvoomjeri:

$$\frac{(A-B)(C-D)}{(C-B)(A-D)}$$
$$\frac{(F-B)(A-E)}{(A-B)(F-E)}$$
$$\frac{(C-B)(F-G)}{(F-B)(C-G)}$$
$$\frac{(H-D)(C-G)}{(C-D)(H-G)}$$
$$\frac{(A-D)(H-E)}{(H-D)(A-E)}$$

realni brojevi. (prema [5])

Množenjem svih ovih brojeva i skraćivanjem faktora koji se pojavljuju i u brojniku i u nazivniku, ostaje nam izraz:

$$\frac{(F-G)(H-E)}{(H-G)(F-E)}.$$

Kao rezultat operacija s realnim brojevima, očito je i to realan broj, a po prethodnim zaključcima o karakterizaciji koncikličnosti četiriju točaka upravo je to uvjet koncikličnosti točaka E, F, G i H. Time je tvrdnja Miquelovog teorema dokazana.

□

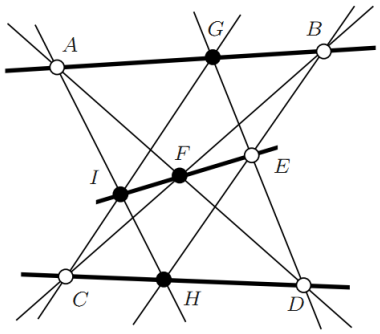
5.3 Dokaz Pappusovog teorema u njegovoj punoj općenitosti

Završimo našu zbirku dokaza prividno trivijalnim dokazom Pappusovog teorema u njegovoj punoj općenitosti izračunavanjem određenog algebarskog izraza.

5.3.1 Osmi dokaz: ”grubom silom”

Dokaz. Konstruirat ćemo Pappusovu konfiguraciju polazeći od pet točaka A, B, C, D, E izabranih bez ikakvih dodatnih uvjeta osim da su različite (vidi sliku 5.7). Daljnje točke F, G, H, I određene su na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F &= (A \times D) \times (B \times C), \\ G &= (A \times B) \times (D \times E), \\ H &= (C \times D) \times (B \times E), \\ I &= (A \times H) \times (C \times G). \end{aligned}$$



Slika 5.7: Primjer konstrukcije Pappusove konfiguracije. (vidi [5])

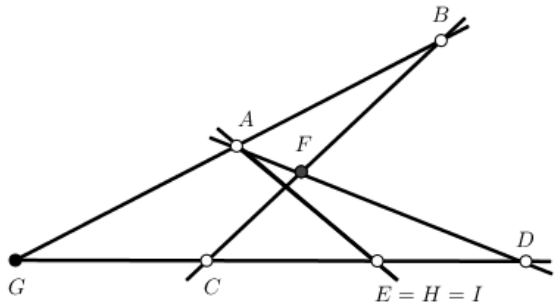
Prisjetimo se, da smo u odjeljku 3.1 pokazali kako se spojnice točaka i sjecišta pravaca u homogenim koordinatama jednostavno računaju pomoću vektorskog produkta. Jasno je da ovim putem nećemo uvijek dobiti devet različitih točaka jer nismo postavili dodatne uvjete na početnih pet točaka.

Na primjer, ako je točka E kolinearna s C i D, lako vidimo da će se točke E, H i I podudarati te će kolinearnost E, F, I vrijediti trivijalno jer se radi o jednoj degeneriranoj situaciji (vidi sliku 5.8).

Ako su točke zadane svojim homogenim koordinatama, završna provjera kolinearnosti E, F, I, koja dokazuje tvrdnju Pappusovog teorema, svodi se na ispitivanje je li $\det(E, F, I) = 0$.

Provjera se može provesti npr. prikladnim računalnim programom (Mathematica i slično) i ishod će doista biti 0, tj. da su točke E, F, I uvijek kolinearne.

No, što nam takav način provjere doista dokazuje? Jedna je mogućnost da smo točkom konstrukcije dobili degeneriranu situaciju, kao u prethodno navedenom primjeru, gdje se pojavi nulvektor već u nekom međukoraku. U protivnom, ako su izbjegnuta podudaranja koja dovode do degeneriranih konfiguracija (a to je općeniti slučaj), krajnje točke E, F, I bit će različite i doista kolinearne. □



Slika 5.8: Degenerirani primjer konstrukcije Pappusove konfiguracije.

Napomenimo da ovakav dokaz, koji obuhvaća sve moguće situacije i čini se sasvim izravnim, doista zahtijeva primjenu računala jer završna determinanta, za koju treba provjeriti da je jednaka nuli, ima vrlo složeni oblik budući da se u njoj pojavljuje 15 parametara (po 3 koordinate za svaku od 5 početnih točaka).

Bibliografija

[1] E. Marchisotto, *The Theorem of Pappus: A Bridge between Algebra and Geometry*, The American Mathematical Monthly **109** (2002.), br. 6, 497–516.

[2] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[3] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[4] ———, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[5] J. Richter-Gebert, *Pappus's Theorem: nine proofs and three variations, Perspectives on Projective Geometry, Springer, 2011.*, `https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/WS0809/GeometrieKalkueleWS0809/ch1.pdf`.

Sažetak

Pappusov teorem o šesterovrhu jedan je od najvažnijih teorema projektivne geometrije. On opisuje konfiguraciju od devet točaka i devet pravaca koja nastaje tako što se parovi nasuprotnih stranica šesterovrha, čiji vrhovi leže naizmjence na dva različita pravca, sijeku u trima kolinearnim točkama.

U radu je izloženo osam različitih dokaza Papposovog teorema, s ciljem da se upoznaju i usporede različite metode pristupa. Posebno se razmatraju prednosti projektivno-geometrijskog pristupa u odnosu na osnovnu formulaciju teorema u okviru euklidske ravnine. Istaknuta je veza s Pascalovim teoremom i, preko Cayley-Bachrach-Chaslesovog teorema, dublja povezanost s algebaskom geometrijom. S druge strane, projektivnom interpretacijom euklidskog pojma kružnice pomoću para imaginarnih točaka na neizmjerno dalekom pravcu, dobiva se Miquelov teorem iz geometrije kružnica.

Završno, naznačena je mogućnost formalnog algebarskog dokaza, preko homogenih koordinata, kojim se Pappusov teorem obuhvaća u svojoj punoj općenitosti.

Summary

The hexagon theorem of Pappus is one of the most important theorems in projective geometry. It describes the configuration of nine lines and nine points which is generated by pairs of opposite sides of the hexagon, whose vertices lie alternatively on two different lines, intersect in three collinear points.

In this paper we present eight proofs of Pappus's theorem, with the aim of learning about different methods of approach to the problem and making a comparison between them. In particular, we expose the advantage of the projective geometry setting over the initial Euclidean formulation. We emphasize the connection to the Pascal's theorem and, through the Cayley-Bachrach-Chasles theorem, the profound connection with Algebraic geometry. On the other hand, applying the projective interpretation of a circle, which is basically a Euclidean concept, by using a pair of imaginary points on the line at infinity, we derive Miquel's theorem from the geometry of circles.

Finally, we indicate the possibility of a formal algebraic proof using homogeneous coordinates, which encompasses Pappus's theorem in its full generality.

Životopis

Zovem se Ana Lučić. Rođena sam 15.12.1992. godine u Splitu. Osnovnu školu Vladimir Nazor upisala sam 1999. godine u Dramlju. Međutim, zbog selidbe sam završila Osnovnu školu Ivan Brnjik Slovak u Jelisavcu. Godine 2007., nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja, upisala sam Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Isidor Kršnjavi u Našicama. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, 2010. godine sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Na istom fakultetu sam se, završetkom preddiplomskog studija i stjecanjem prvostupničke diplome, 2014. godine upisala na Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.