Rekonstrukcijski teoremi i spektri

Novak, Josip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Novak

REKONSTRUKCIJSKI TEOREMI I SPEKTRI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zoran Škoda

Suvoditelj rada:
prof.dr.sc. Dražen Adamović

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Teorija kategorija **4**
1.1 Kategorije 4
1.2 Funktori i prirodne transformacije 8
1.3 Yonedina lema 11
1.4 Limesi i kolimesi 13
1.5 Adjungirani funktori 16
1.6 Monoidalne kategorije 19

2 Stoneova rekonstrukcija **23**
2.1 Boolove algebre 23
2.2 Filteri i spektar Boolove algebre 25
2.3 Stoneovi prostori 27
2.4 Stoneova dualnost 29

3 Geljfand - Najmarkov teorem **31**
3.1 Banachove algebre i njihovi spektri 31
3.2 C^*-algebre i Geljfand-Najmarkov teorem 36

4 Rekonstrukcija algebarskih skupova **41**

5 Afini Serreov teorem **45**
5.1 Spektar komutativnog prstena 45
5.2 Snop prstenova na $Spec(R)$ 49
5.3 Afine sheme 54
5.4 Snopovi modula 58

6 Funktorijalna i nekomutativna algebarska geometrija **62**

6.1 Geometrijski i kvantni prostori 62
6.2 Kvantni monoidi 67
6.3 Hopfove algebre i kvantne grupe 70

7 Tannakina rekonstrukcija 74
7.1 Tannakina rekonstrukcija za grupe i direktna poopćenja 74
7.2 Reprezentacije kvantnih grupa 76
7.3 Tannaka - Kreinov teorem 86
7.4 Rekonstrukcija Hopfovih algebri 91

8 Zajedničke ideje i posljedice rekonstrukcijskih teorema 100
8.1 Spektri 100
8.2 Isbellova dualnost 102
8.3 Nekomutativna geometrija 104

Bibliografija 106

Uvod

Rekonstrukcijski teoremi su teoremi koji daju vezu između dva objekta na način da je jedan objekt moguće potpuno rekonstruirati iz drugoga. U ovom radu izloženi su neki važni rekonstrukcijski teoremi s ciljem pronalaska zajedničkih ideja u njima. Jedna od najosnovnijih ideja je rekonstrukcija iz evaluacijskih funkcionala. Sjetimo se, svaki konačnodimenzionalni vektorski prostor V nad poljem K prirodno je izomorfan svom drugom dualu V^{**} i taj izomorfizam je ostvaren preslikavanjem $v \mapsto ev_v$ koje vektoru v pridružuje evaluacijski funkcional $ev_v : V^* \to K$, $ev_v(f) = f(v)$.
Istu ideju nalazimo u mnogim teoremima dualnosti geometrije i algebre. Poznato je da mnogo informacija o geometrijskom prostoru možemo dobiti promatrajući funkcije na njemu, a budući da funkcije možemo zbrajati i množiti, prostor funkcija imat će strukturu prstena ili algebre. Točke originalnog prostora definiraju evaluacijske funkcionale, pa počevši od algebre, originalni prostor nastojimo rekonstruirati promatrajući funkcije na funkcijama. Uz dobar odabir geometrijskog prostora i algebarske strukture, funkcije na algebri funkcija koje poštuju algebarsku strukturu zaista će dati točke originalnog prostora.

Primjerice, u Geljfand-Najmarkovoj rekonstrukciji kompaktan topološki prostor rekonstruiramo iz algebre funkcija koja je komutativna C^*-algebra s jedinicom kao prostor karaktera, to jest, multiplikativnih linearnih funkcionala na C^*-algebri - dakle, funkcija na funkcijama. Taj skup karaktera naziva se spektar C^*-algebre. Slično, algebarski skup rekonstruiramo iz algebre regularnih funkcija koja je konačnogenerirana reducirana komutativna K-algebra A kao njezin spektar, skup homomorfizama K-algebri $A \to K$.
Stoneova dualnost je dualnost Boolovih algebri i Hausdorffovih, kompaktnih, potpuno nepovezanih topoloških prostora koji se još zovu Stoneovi prostori. U ovoj rekonstrukciji Stoneovom prostoru pridružujemo Boolovu algebru otvoreno-zatvorenih prostora, a obratno, Boolovoj algebri pridružujemo prostor ultrafiltera. Iako se na prvi pogled čini da ova dualnost ne slijedi ideju funkcija na funkcijama, i ultrafilteri i otvoreno-zatvoreni skupovi odgovaraju homomorfizmima iz algebre ili prostora u algebru, odnosno prostor $\{0, 1\}$. Ove rekonstrukcije sadržaj su 2., 3. i 4. poglavlja.

Ekvivalentno, elemente spektra C^*-algebre ili K-algebre možemo opisati kao maksimalne ideale te algebre koji se dobivaju kao jezgre evaluacijskih funkcionala. U Stoneovoj dualnosti, ultrafilteri su maksimalni filteri koji pak korespondiraju idealima. Ovaj opis objašnjava daljnji razvoj pojma spektra. Naime, razvojem geometrije i pojam prostora postaje složeniji. Primjerice, u algebarsku geometriju se uvodi pojam sheme koji označava prostor zajedno s dodatnom strukturom snopa prstenova. Zato je prirodno da i spektar postaje složeniji pa tako Grothendieck definira spektar komutativnog prstena kao skup svih prostih ideala tog prstena. Njega možemo opskrbiti topologijom i na njemu definirati snop prstenova tako da postane lokalno prstenovan prostor. To je sadržaj prvog dijela 5. poglavlja. U nekomutativnoj algebarskoj geometriji skup prostih ideala postaje premalen, pa opet tražimo proširenje skupa ideala. Budući da su ideali u prstenu R zapravo R-podmoduli od R, sada se promatra čitava kategorija R-modula. O razvoju pojma spektra detaljnije govorimo u 8. poglavlju.

U teoriji kategorija, analogon funkcije je funktor. Za svaku lokalno malu kategoriju $\mathcal{C}$, objektu $C \in \mathcal{C}$ možemo pridružiti predsnop $h_C = Hom(-, C)$ na $\mathcal{C}$. Yonedina lema kaže da se na ovaj način kategorija $\mathcal{C}$ ulaže u kategoriju predsnopova $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ kao puna potkategorija reprezentabilnih predsnopova. To znači da originalnu kategoriju možemo rekonstruirati iz kategorije predsnopova gledajući u njoj reprezentabilne predsnopove.
Yonedina lema igra važnu ulogu u mnogim rekonstrukcijskim teoremima. Primjerice, u Tannakinoj rekonstrukciji grupu G dobivamo kao grupu endomorfizama zaboravnog funktora na kategoriji reprezentacija koji je reprezentabilan, a reprezentirajući objekt mu je također reprezentabilni funktor na grupoidu ΣG određenom s G. Zato ovu rekonstrukciju dobivamo jednostavno dvostrukom primjenom Yonedine leme. Tannakina rekonstrukcija nekih složenijih objekata zahtjeva dodatnu strukturu na kategoriji reprezentacija, pa je primjerice u slučaju Hopfovih algebri kategorija reprezentacija monoidalna kategorija. Tannakinu rekonstrukciju na ova dva primjera detaljno obrađujemo u 7. poglavlju.

Osim čitavih prostora, možemo rekonstruirati i neke geometrijske objekte na prostorima. Primjer takve rekonstrukcije je afini Serreov teorem prema kojem je za komutativni prsten R kategorija R-modula ekvivalentna kategoriji $\mathcal{O}_{Spec(R)}$-modula na afinoj shemi $(Spec(R), \tilde{R})$. Ovom rekonstrukcijom bavimo se u drugom dijelu 5. poglavlja.

Teoremi rekonstrukcije temelj su nekomutativne geometrije. Naime, oni nam omogućuju da o geometrijskim prostorima razmišljamo kao o algebrama. Tako Ross Street u knjizi *Quantum Groups: A Path to Current Algebra* (vidi [26]) kaže da su "komutativne algebre zapravo prostori viđeni drugom stranom mozga". Uz ovo novo shvaćanje prostora i poznavanje recimo Geljfand-Najmarkovog teorema, možemo definirati nekomutativni kompaktni topološki prostor jednostavno kao ne nužno komutativnu C^*-algebru s jedinicom. U 6. poglavlju ovoga rada donosimo novu formulaciju algebarske geometrije, takozvanu funktorijalnu geometriju, u kojoj su prostori opisani kao reprezentabilni funktori. Ovaj pristup omogućuje nam jednostavan prijelaz na nekomutativni slučaj promatranjem kategorije svih, ne nužno komutativnih, K-algebri. Na taj način definiramo kvantne prostore i njihove grupe automorfizama, odnosno, kvantne grupe. Detaljnije o ulozi rekonstrukcijskih teorema u nekomutativnoj geometriji govorimo u zadnjem poglavlju. O tome se također detaljnije može pročitati u [12].

Ovom prilikom želim se zahvaliti svom mentoru doc. dr. sc. Zoranu Škodi na svoj pruženoj pomoći i razgovorima tijekom pisanja ovog rada. Želim se zahvaliti i svojim roditeljima, sestri i prijateljima na neprekidnoj podršci.

Poglavlje 1

Teorija kategorija

Teorija kategorija proučava različite klase matematičkih objekata te transformacije tih objekata. Primjerice, gledamo kategoriju skupova s funkcijama između skupova, kategoriju grupa s homomorfizmima grupa, kategoriju topoloških prostora s neprekidnim preslikavanjima itd. Ideja ove teorije međutim nije klasifikacija tih objekata, već pomak točke gledišta s pojedinosti nekih objekata na ono što im je zajedničko. Iz ove nove perspektive onda primjerice vidimo vezu između disjunktne unije skupova, najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju brojeva i direkte sume vektorskih prostora - sve tri konstrukcije su koprodukti u odgovarajućim kategorijama.

Naglasak nije stavljen na objekte u kategoriji, nego na morfizme. Budući da su i kategorije svojevrsni objekti, zanimaju nas morfizmi između kategorija. Tako dolazimo do pojma funktora. Možemo ići još dalje i gledati morfizme između funktora. Oni se nazivaju prirodne transformacije i povijesno gledano, razlog su zašto postoji teorija kategorija. Naime, četrdesetih godina dvadesetog stoljeća pojavila se potreba za formalizacijom pojma *prirodnosti* koji su matematičari koristili za opis konstrukcija u kojima se ne koriste proizvoljni izbori. Tako Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane uvode pojam prirodne transformacije. Kako bi se on precizno definirao, bilo je potrebno uvesti i pojam funktora, a onda i pojam kategorije. Ove definicije označavaju početak teorije kategorija.

1.1 Kategorije

Sada krećemo s osnovama teorije kategorija, počevši od definicije kategorije. Ovdje iznosimo samo definicije i rezultate koji će nam trebati u radu. Za potpuniji pregled teorije kategorija vidi primjerice [16], [15] i [22].

Definicija 1.1.1. Kategorija $\mathcal{C}$ *sastoji se od*

- *kolekcije* objekata $Ob(\mathcal{C}$
- *za svaki par objekata* (A, B)*, kolekcije* morfizama *iz* A *u* B $Hom(A, B)$
- *za svaku trojku objekata* (A, B, C)*, operacije* kompozicije $\circ_{A,B,C} : Hom(B, C) \times Hom(A, B) \to Hom(A, C)$
- *za svaki objekt* A*, istaknutog morfizma* id_A *kojeg zovemo* identiteta na A.

Ovi podaci zadovoljavaju sljedeće aksiome:

- *Skupovi* $Hom(A, B)$ *i* $Hom(A', B')$ *su disjunktni ako je* $A \neq A'$ *ili* $B \neq B'$
- *Kompozicija je asocijativna*
- *Za objekte* $A, B \in Ob(\mathcal{C}$ *i morfizam* $f \in Hom(A, B)$ *vrijedi* $f \circ id_A = f$ *i* $id_B \circ f = f$.

Napomena 1.1.2. *Često se za kolekciju morfizama* $Hom(A, B)$ *u kategoriji* $\mathcal{C}$ *još koriste oznake* $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *i* $\mathcal{C}(A, B)$*. Morfizam* $f \in Hom(A, B)$ *često pišemo kao* $f : A \to B$ *ili* $A \xrightarrow{f} B$.
Nadalje, umjesto $A \in Ob(\mathcal{C})$*, često se piše samo* $A \in \mathcal{C}$.
U nastavku izostavljamo indeks "A, B, C*" iz oznake za kompoziciju* $\circ_{A,B,C}$ *i za sve trojke pišemo samo* $\circ$ *ili čak potpuno izostavljamo simbol za kompoziciju pa za* $f \circ g$ *pišemo samo* fg.

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je* $f \in Hom(A, B)$ izomorfizam *ako postoji morfizam* $g \ni Hom(B, A)$ *takav da je* $gf = id_A$ *i* $fg = id_B$*. U slučaju da postoji izomorfizam* $f \in Hom(A, B)$*, kažemo da su* A *i* B *izomorfni objekti i pišemo* $A \cong B$.

Primijetimo, u definiciji kategorije koristili smo pojmove "kolekcija objekata" i "kolekcija morfizama". To je zato što ove kolekcije ne moraju uvijek biti skupovi (štoviše, u nama najvažnijim primjerima kolekcije objekata neće biti skupovi). Naime, iz poznatog Russelovog paradoksa slijedi da ne postoji skup svih skupova. Isto tako ne postoji skup svih grupa niti skup svih topoloških prostora.
Zato teoriju kategorija radimo u nekom proširenju ZFC aksiomatike teorije skupova koje aksiomatizira i prave klase. Primjerice, aksiomima ZFC teorije može se dodati Grothendieckov aksiom o postojanju tzv. univerzuma koji rješava mnoge potencijalne skupovno-teorijske probleme. Mi nećemo dalje raspravljati o ovoj problematici čiji se detalji mogu pročitati primjerice u [16] i [23].

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je kategorija* $\mathcal{C}$ mala *ako su kolekcije objekata* $Ob(\mathcal{C})$ *i morfizama* $Hom(A, B)$*, za sve* $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ *skupovi.*
Kategorija je lokalno mala ako su za sve $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ *kolekcije* $Hom(A, B)$ *skupovi.*

Definicija 1.1.5. *Kategoriju $\mathcal{D}$ za koju je $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$ i $Hom_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ za sve $A, B \in \mathcal{D}$, nazivamo* potkategorijom *od $\mathcal{C}$.*
Za potkategoriju kažemo da je puna *ako je $Hom_{\mathcal{D}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ za sve $A, B \in \mathcal{D}$.*

Navedimo neke primjere kategorija:

Primjer 1.1.6.

1. **Set** *je kategorija čiji su objekti skupovi, a morfizmi funkcije.*
2. *Kategoriju* **Grp** *čine grupe i homomorfizmi grupa.*
3. **Ring** *je kategorija prstenova i homomorfizama prstenova, dok je* **CRing** *puna potkategorija komutativnih prstenova.*
4. *Za prsten R, s $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ označavamo kategoriju čiji su objekti R-moduli, a morfizmi homomorfizmi R-modula.*
5. **Vekt** *je kategorija vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{C}$ čiji su morfizmi linearni operatori.*

U do sad navedenim primjerima, objekti su bili skupovi s nekom dodatnom strukturom, a morfizmi funkcije koje čuvaju tu dodatnu strukturu. Takve kategorije zovemo *konkretnim kategorijama*, ali nisu sve kategorije konkretne. Pogledajmo još neke primjere:

Primjer 1.1.7.

1. *Za prsten s jedinicom R, s $\mathbf{Mat_R}$ označavamo kategoriju čiji su objekti prirodni brojevi, a skup morfizama iz n u m je skup svih $m \times n$ matrica s koeficijentima iz R.*
2. Diskretna kategorija *je kategorija u kojoj su jedini morfizmi identitete.*
3. Grupoid *je kategorija u kojoj su svi morfizmi izomorfizmi.*
4. Monoid *je kategorija s jednim objektom.*

Definicija 1.1.8. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije. Definiramo produktnu kategoriju $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ kao kategoriju čiji su objekti parovi (C, D), gdje je $C \in \mathcal{C}$, a $D \in \mathcal{D}$. Morfizmi su parovi (f, g), pri čemu je f neki morfizam u kategoriji $\mathcal{C}$, a g morfizam iz $\mathcal{D}$. Kompozicija je definirana po komponentama.*

Ako morfizme zamišljamo kao strelice koje idu od domene do kodomene, onda lako dolazimo do ideje suprotne kategorije - jednostavno okrenemo sve strelice. U sljedećoj definiciji formaliziramo ovu definiciju.

Definicija 1.1.9. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija. Definiramo* suprotnu kategoriju *kao kategoriju $\mathcal{C}^{op}$ zadanu sljedećim podacima:*

- $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$
- *za svaki morfizam $f : X \to Y$ u $\mathcal{C}$ postoji morfizam $f^{op} : Y \to X$ u $\mathcal{C}^{op}$ i svi morfizmi u $\mathcal{C}^{op}$ su ovog oblika*
- *za svaki objekt X, identiteta je id_X^{op}*
- *za morfizme f^{op}, g^{op} u $\mathcal{C}^{op}$ takve da je kodomena od f^{op} jednaka domeni od g^{op} definiramo kompoziciju $g^{op} \circ f^{op} := (f \circ g)^{op}$*

Očito je i ova kompozicija asocijativna i identitete su neutralni elementi za kompoziciju. Dakle, $\mathcal{C}^{op}$ je zaista kategorija.

Ova dualnost ima jednu važnu posljedicu. Svi teoremi koji sadrže izraz "za sve kategorije" automatski vrijede i za suprotne kategorije. Teorem interpretiran u suprotnoj kategoriji nazivamo *dualnim teoremom*, a dokaz dualnog teorema dobivamo okretanjem svih strelica u dokazu originalnog teorema.

Kategorijske definicije također imaju duale. Ilustrirat ćemo ovo na jednom jednostavnom, ali važnom primjeru:

Definicija 1.1.10. *U kategoriji $\mathcal{C}$, objekt $X \in \mathcal{C}$ je* inicijalni *ako za svaki drugi objekt $Y \in \mathcal{C}$ postoji jedinstveni morfizam $X \to Y$.*
Terminalni objekt *u kategoriji $\mathcal{C}$ je inicijalni objekt u suprotnoj kategoriji $\mathcal{C}^{op}$.*

Na ovom primjeru možemo vidjeti i dualnost teorema:

Propozicija 1.1.1. *U svakoj kategoriji $\mathcal{C}$, inicijalni objekt $X \in \mathcal{C}$ je jedinstven do na izomorfizam.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $X' \in \mathcal{C}$ također inicijalni objekt. Tada postoji jedinstveni morfizam $X' \to X$. No, X je također inicijalni objekt, pa postoji i jedinstveni morfizam $X \to X'$. U kompoziciji dobivamo $X' \to X \to X'$ koji mora biti jednak jedinstvenom morfizmu $X' \to X'$, a iz aksioma teorije kategorija slijedi da je taj morfizam upravo $id_{X'}$.
Analogno dobivamo da $X \to X'$ ima desni inverz, pa su X i X' izomorfni. $\square$

Posebno, ova propozicija vrijedi u kategoriji $\mathcal{C}^{op}$, pa kada ju interpretiramo koristeći dualne pojmove, dobivamo sljedeći rezultat.

Propozicija 1.1.2. *U svakoj kategoriji $\mathcal{C}$, terminalni objekt $X \in \mathcal{C}$ je jedinstven do na izomorfizam.*

1.2 Funktori i prirodne transformacije

Definicija 1.2.1. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije.* Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *zadan je sljedećim podacima:*

- *preslikavanja koje svakom objektu $X \in \mathcal{C}$ pridružuje objekt $FX \in \mathcal{D}$,*
- *Za svaka dva objekta $X, Y \in \mathcal{C}$, preslikavanja koje svakom morfizmu $f : X \to Y$ u $\mathcal{C}$ pridružuje morfizam $Ff : FX \to FY$ u $\mathcal{D}$.*

Ovi podaci zadovoljavaju dva aksioma:

- *Za svaka dva kompozabilna morfizma f i g u $\mathcal{C}$, vrijedi $F(g \circ f) = Gg \circ Ff$ u $\mathcal{D}$,*
- *Za svaki objekt $X \in \mathcal{C}$, vrijedi $F(id_X) = id_{F(X)}$.*

Ponekad ćemo naglasiti da je ovako definirani funktor *kovarijantan*, dok za funktor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ kažemo da je *kontravarijantni* funktor iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$.
Eksplicitno, kontravarijantni funktor zadan je također preslikavanjem $X \mapsto FX$ na objektima, dok morfizmima $f : X \to Y$ u $\mathcal{C}$ pridružuje morfizme $Ff : FY \to FX$. Također, prvi aksiom onda zamjenjujemo s aksiomom $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$.

Primjer 1.2.2. *Navodimo nekoliko primjera funktora:*

1. Zaboravni funktor *U:*$\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *šalje grupu G u skup koji čine elementi te grupe, a homomorfizam grupa u to isto preslikavanje, ali shvaćeno samo kao funkcija među skupovima.*

2. *Općenito, za svaku kategoriju čiji su objekti skupovi s dodatnom strukturom, a morfizmi funkcije koje čuvaju tu strukturu (primjerice,* $\mathbf{Grp}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Top}$ *itd.), možemo definirati zaboravni funktor koji zaboravlja dodatnu strukturu na skupu.*

3. *Postoje i zaboravni funktori koji zaboravljaju samo dio strukture. Recimo,* $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ *ili* $U : \mathbf{R-Mod} \to \mathbf{Ab}$ *koji preslikava prsten ili R-modul u skup elemenata, ali ostavlja na njemu strukturu Abelove grupe.*

4. *Funktor* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ *skupu X pridružuje slobodnu grupu generiranu tim skupom. Preciznije, F skupu X pridružuje grupu čiji su elementi konačne* riječi *formirane od elemenata skupa X i njihovih formalnih inverza, modulo relacija ekvivalencije koja poistovjećuje riječi "xx^{-1}" i "$x^{-1}x$" s praznom riječi.*

5. *Funktor* $(-)^* : Vect^{op} \to Vect$ *vektorskom prostoru* V *pridružuje dualni prostor* $V^* = Hom(V, \mathbb{C})$*, a linearnom preslikavanju* $\phi : V \to W$ *pridružuje linearni operator pretkompozicije* $f^* : W^* \to V^*$ *koji funkcional* $\phi : W \to \mathbb{C}$ *šalje u linearni funkcional* $\phi \circ f : V \to \mathbb{C}$*.*

Primjer 1.2.3. *U svakoj su kategoriji posebno važni* hom funktori.
Neka je $\mathcal{C}$ *proizvoljna lokalno mala kategorija i* $X \in \mathcal{C}$ *neki objekt. Definiramo* kovarijantni hom funktor

$$Hom(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

koji objektu $Y \in \mathcal{C}$ *pridružuje skup svih morfizma iz* X *u* Y*, a morfizmu* $f : Y \to Z$ *pridružuje funkciju postkompozicije*

$$f_* : Hom(X, Y) \to Hom(X, Z), \quad \phi \mapsto f \circ \phi.$$

Definiramo i kontravarijantni hom funktor

$$Hom(-, X) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$$

koji objektu $Y \in \mathcal{C}$ *pridružuje skup morfizama* $Y \to X$*, a svakom morfizmu* $f : Y \to Z$ *pridružuje funkciju pretkompozicije*

$$f^* : Hom(Z, X) \to Hom(Y, X), \quad \phi \mapsto \phi \circ f.$$

Rekli smo ranije da funktore shvaćamo kao morfizme između kategorija pa se postavlja pitanje možemo li kategorije i funktore također organizirati u kategoriju. Ovdje opet dolazimo do skupovno-teorijskih problema jer zbog Russelovog paradoksa ta kategorija ne može biti element same sebe. Možemo međutim definirati kategoriju **Cat** čiji su objekti sve male kategorije, a morfizmi funktori između malih kategorija. To je dobro definirana kategorija i lokalno je mala, ali ne i mala.
Također je dobro definirana kategorija **CAT** čiji su objekti sve lokalno male kategorije s funktorima između njih. Budući da ta kategorija nije lokalno mala, nemamo problema s Russelovim paradoksom.

Sada možemo promatrati definiciju 1.1.3 u smislu kategorija **Cat** i **CAT**. Time dolazimo do pojma *izomorfnih kategorija.* Eksplicitno, kategorije $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ su izomorfne ako postoje funktori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takvi da je $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$.

U teoriji kategorija izomorfne objekte poistovjećujemo, što znači da je zahtjev $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$ iz definicije izomorfnih kategorija prejak. Da bismo oslabili taj zahtjev, trebaju nam "morfizmi između funktora". Tako dolazimo do pojma *prirodne transformacije.*

Definicija 1.2.4. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ proizvoljne kategorije i $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktori.* Prirodna transformacija *$\alpha : F \Rightarrow G$ je familija morfizama u $\mathcal{D}$*

$$\{\alpha_C : F(C) \to G(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$$

indeksirana po objektima iz $\mathcal{C}$, takva da za svaki morfizam $f : C \to C'$ u $\mathcal{C}$, sljedeći dijagram komutira u $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "Ff"'] & G(C) \arrow[d, "Gf"] \\ F(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"] & G(C') \end{tikzcd}$$

Definicija 1.2.5. Prirodni izomorfizam *je prirodna transformacija $\alpha : F \Rightarrow G$ u kojoj je svaka komponenta α_C izomorfizam u $\mathcal{D}$. Ako postoji prirodni izomorfizam između F i G, pišemo $F \cong G$.*

Prirodne transformacije možemo komponirati po komponentama. Preciznije, ako su $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktori i $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ prirodne transformacije, tada definiramo prirodnu transformaciju $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ čije su komponente $(\beta \circ \alpha)_C = \beta_C \circ \alpha_C$.

Zbog asocijativnosti kompozicije u $\mathcal{D}$ je i kompozicija prirodnih transformacija asocijativna, pa su možemo promatrati kategoriju čiji su objekt funktori iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$, a morfizmi prirodne transformacije tih funktora. Ovu kategoriju zovemo *kategorijom funktora* i označavamo ju s $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

Sada kada znamo da postoje i morfizmi među funktorima, možemo oslabiti definiciju izomorfnih kategorija. Naime, sada više ne moramo zahtijevati jednakost funktora, nego nam je dovoljno da su oni izomorfni.

Definicija 1.2.6. *Kažemo da su kategorije $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$* ekvivalentne *ako postoje funktori $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ takvi da je $G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}$.*
Ako je kategorija $\mathcal{C}$ ekvivalentna kategoriji $\mathcal{D}^{op}$, kažemo da su te kategorije dualne.

Definicija 1.2.7. *Kažemo da je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$* vjeran *ako je za sve objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ preslikavanje $Hom(X, Y) \to Hom(FX, FY)$, $f \mapsto Ff$ injektivno.*
Kažemo da je F pun *ako je za sve objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ preslikavanje $Hom(X, Y) \to Hom(FX, FY)$, $f \mapsto Ff$ surjektivno.*
F je esencijalno surjektivan *ako za svaki objekt $D \in \mathcal{D}$ postoji objekt $C \in \mathcal{C}$ takav da je FC izomorfan objektu D.*

Imamo sljedeći karakterizaciju ekvivalencije kategorija.

Teorem 1.2.8. *Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definira ekvivalenciju kategorija $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ ako i samo ako je vjeran, pun i esencijalno surjektivan.*

Za dokaz vidi [22], Teorem 1.5.9, str. 31.

Definicija 1.2.9. *Neka je $\mathcal{C}$ lokalno mala kategorija. Za funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ kažemo da je* reprezentabilan *ako postoji objekt $C \in \mathcal{C}$ takav da je $F \cong Hom(C, -)$.*
Analogno, kontravarijantni funktor F je reprezentabilan ako je $F \cong Hom(-, C)$.

1.3 Yonedina lema

Teorem 1.3.1. *(Yonedina lema)*
Neka je $\mathcal{C}$ lokalno mala kategorija, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ funktor i C neki objekt iz $\mathcal{C}$. Tada postoji bijekcija

$$Nat(\mathcal{C}(C, -), F) \cong F(C)$$

koja prirodnoj transformaciji $\alpha : \mathcal{C}(C, -) \to F$ pridružuje element $\alpha_C(id_C)$ skupa $F(C)$.
Nadalje, ovaj izomorfizam je prirodan i u F i u C.

Dokaz. Najprije pokazujemo da je funkcija

$$\Phi : Nat(\mathcal{C}(C, -), F) \to F(C), \quad \Phi(\alpha) := \alpha_C(id_C)$$

iz iskaza bijekcija. Trebamo konstruirati inverzno preslikavanje, to jest, funkciju $\Phi : F(C) \to Nat(\mathcal{C}(C, -), F)$ koja svakom elementu $x \in F(C)$ pridružuje prirodnu transformaciju $\Psi(x) : \mathcal{C}(C, -) \to F$. Dakle, moramo konstruirati morfizme $\Psi(x)_D : \mathcal{C}(C, D) \to F(D)$ takve da za svaki morfizam $f : C \to D$ u $\mathcal{C}$, sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(C, C) & \xrightarrow{\Psi(x)_C} & F(C) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ \mathcal{C}(C, D) & \xrightarrow[\Psi(x)_D]{} & F(D). \end{array}$$

Donja lijeva kompozicija preslikava identitetu id_C u element $\Psi(x)_D(f) \in F(D)$, a gornja lijeva kompozicija ga preslikava u $Ff(\Psi(x)_C(id_C))$. Da bi Ψ bio inverz od Φ, mora vrijediti $\Psi(x)_C(id_C) = x$. Dakle, zbog uvjeta prirodnosti nužno je

$$\Psi : F(C) \to Nat(\mathcal{C}(C, -), F), \quad \Psi(x)_D(f) = Ff(x).$$

Moramo još dokazati da je $\Psi(x)$ prirodna za svaki x. Uzmimo proizvoljan morfizam $g : D \to E$ u $\mathcal{C}$ i pogledajmo dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(C,D) & \xrightarrow{\Psi(x)_D} & F(D) \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Fg} \\ \mathcal{C}(C,E) & \xrightarrow[\Psi(x)_E]{} & F(E). \end{array}$$

Donja lijeva kompozicija preslikava $f \in \mathcal{C}(C,D)$ u $\Psi(x)_E(g \circ f) = F(g \circ f)(x)$. Gornja desna kompozicija ga preslikava u $Fg(\Psi(x)_D(f)) = Fg(Ff(x))$. Zbog funktorijalnosti od F, ovi su elementi jednaki, pa gornji dijagram komutira.

Za svaki $x \in F(C)$ je $\Phi(\Psi(x)) = \Psi(x)_C(id_C) = x$, pa je Ψ desni inverz od Φ. Obratno, uzmimo prirodnu transformaciju $\alpha : \mathcal{C}(C,-) \Rightarrow F$. Po definiciji je $\Psi(\alpha_C(id_C))_D(f) = Ff(\alpha_C(id_C))$. Budući da je α prirodna, dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(C,C) & \xrightarrow{\Psi(x)_C} & F(C) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ \mathcal{C}(C,D) & \xrightarrow[\Psi(x)_D]{} & F(D). \end{array}$$

komutira za sve $f : C \to D$, pa zaključujemo da je $Ff(\alpha_C(id_C)) = \alpha_D(f)$. Dakle, $\Psi(\alpha_C(id_C))_D = \alpha_D$ za sve $D \in \mathcal{C}$, to jest, prirodne transformacije $Psi(\alpha_C(id_C))$ i α imaju iste komponente, pa su jednake. Dakle, Ψ je i lijevi inverz od Φ.

Dokažimo sada da je ova bijekcija prirodna u F i u C. Neka je $\beta : F \Rightarrow G$ prirodna transformacija. Tvrdimo da tada sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} Nat(\mathcal{C}(C,-),F) & \xrightarrow{\Phi_F} & F(C) \\ {\scriptstyle \beta_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_C} \\ Nat(\mathcal{C}(C,-),G) & \xrightarrow[\Phi_G]{} & F(D). \end{array}$$

Po definiciji kompozicije prirodnih transformacija je $\Phi_G(\beta \circ \alpha) = (\beta \circ \alpha)_C(id_C) = \beta_C(\alpha_C(id_C)) = \beta_C(\Phi_F(\alpha))$, pa gornji dijagram komutira.

Uzmimo sada morfizam $f : C \to D$ u $\mathcal{C}$. Tvrdimo da dijagram

$$\begin{array}{ccc} Nat(\mathcal{C}(C,-),F) & \xrightarrow{\Phi_C} & F(C) \\ {\scriptstyle (f^*)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ Nat(\mathcal{C}(D,-),F) & \xrightarrow[\Phi_D]{} & F(D) \end{array}$$

komutira. Gornja desna kompozicija preslikava $\alpha \in Nat(\mathcal{C}(C,-),F)$ u $Ff(\alpha_C(id_C))$, a donja lijeva u $(\alpha \circ f^*)_D(id_D)$. Po definiciji kompozicije prirodnih transformacija, ovo je jednako $\alpha_D(f)$, pa i drugi dijagram komutira. □

Potpuno analogno može se dokazati i kontravarijantna verzija Yonedine leme:

Teorem 1.3.2. *(kontravarijantna Yonedina lema)*
Neka je $\mathcal{C}$ lokalno mala kategorija, $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ funktor i C neki objekt iz $\mathcal{C}$. Tada postoji bijekcija

$$Nat(\mathcal{C}(-,C),F) \cong F(C)$$

koja prirodnoj transformaciji $\alpha : \mathcal{C}(-,C) \to F$ pridružuje element $\alpha_C(id_C)$ skupa $F(C)$.
Nadalje, ovaj izomorfizam je prirodan i u F i u C.

Dokazujemo direktnu posljedicu Yonedine leme koja kaže da se lokalno male kategorije ulažu u pripadne kategorije predsnopova.

Korolar 1.3.3. *(Yonedino ulaganje)*
Neka je $\mathcal{C}$ lokalno mala kategorija. Funktori

$$Y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}], \quad C \mapsto \mathcal{C}(-,C), \quad f \mapsto f_*$$

$$i \;\; Y : \mathcal{C}^{op} \to [\mathcal{C}, \mathbf{Set}], \quad C \mapsto \mathcal{C}(C,-), \quad f \mapsto f^*$$

definiraju puna ulaganja kategorija.

Dokaz. Funktori Y su puni i vjerni ako imamo bijekcije između skupova morfizama

$$\mathcal{C}(C,D) \cong Nat(\mathcal{C}(-,C),\mathcal{C}(-,D)), \quad \mathcal{C}(C,D) \cong Nat(\mathcal{C}(C,-),\mathcal{C}(D,-)).$$

No to je upravo tvrdnja Yonedine leme (i kontravarijantne Yonedine leme) primijenjena na funktore $Hom(-,C)$ i $Hom(C,-)$. □

1.4 Limesi i kolimesi

Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{J}$ proizvoljne kategorije. Kada govorimo o limesima i kolimesima, uobičajeno je funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ zvati *dijagramom oblika $\mathcal{J}$*.

Definicija 1.4.1. *Za objekt $C \in \mathcal{C}$, definiramo* konstantni funktor *$C : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ koji svaki objekt kategorije $\mathcal{J}$ preslikava u objekt C, a svaki morfizam u identitetu id_C.*

Konstantni funktori induciraju ulaganje $\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ kategorije $\mathcal{C}$ u kategoriju funktora $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ koje objektu $C \in \mathcal{C}$ pridružuje konstantni funktor C, a morfizmu $f : C \to D$ konstantnu prirodnu transformaciju čija je svaka komponenta jednaka morfizmu f.

Definicija 1.4.2. *Neka je $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dijagram oblika $\mathcal{J}$.* Stožac nad dijagramom F *s vrhom $C \in \mathcal{C}$ je prirodna transformacija $\lambda : C \Rightarrow F$.*

Eksplicitno, stožac nad $\mathcal{J}$ s vrhom C sastoji se od morfizama $\lambda_J : C \to FJ$ u $\mathcal{C}$ indeksiranih po J takvih da za svaki morfizam $f : J \to K$ u $\mathcal{J}$, trokut

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\lambda_J"'] \arrow[dr, "\lambda_K"] & \\ FJ \arrow[rr, "Ff"'] & & FK \end{tikzcd}$$

komutira.

Morfizam stožaca iz $C \Rightarrow F$ u $C' \Rightarrow F$ je morfizam $\phi : C \to C'$ u $\mathcal{C}$ takav da trokut

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\lambda_J"'] & & C' \arrow[dl, "\lambda'_J"] \\ & FJ & \end{tikzcd}$$

komutira za svaki $J \in \mathcal{J}$.

Definicija 1.4.3. Limes funktora F *je terminalni stožac, to jest, stožac* $lim_{\leftarrow} F \Rightarrow F$ *takav da za svaki drugi stožac $C \Rightarrow F$ postoji jedinstveni morfizam $C \to \varprojlim F$ takav da trokut*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] \arrow[dr] & & \varprojlim F \arrow[dl] \\ & FJ & \end{tikzcd}$$

komutira za svaki $J \in \mathcal{J}$.

Dualno možemo definirati pojam *kostošca*, *morfizma kostošca* i *kolimesa* $\varinjlim F$ kao inicijalnog kostošca.

Propozicija 1.4.1. *Limesi i kolimesi su jedinstveni do na izomorfizam.*

Definicija 1.4.4. *Kažemo da je kategorija $\mathcal{C}$ $\mathcal{J}$*-potpuna *ako ima sve limese oblika J. Kategorija je* potpuna *ako je $\mathcal{J}$-potpuna za svaku malu kategoriju $\mathcal{J}$.*
$\mathcal{C}$ je kopotpuna *ako ima sve male kolimese.*

Navodimo nekoliko primjera limesa i kolimesa:

Primjer 1.4.5. *Produkti i koprodukti:*
Produkt *je limes funktora s diskretne kategorije, to jest, kategorije kojoj su jedini morfizmi identitete.*
Uzmimo na primjer kategoriju $\mathbf{2}$ *koja se sastoji od dva objekta $\{1,2\}$ i morfizama $\{id_1, id_2\}$. Tada funktor $F : \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ odgovara izboru dvaju objekata, C_1 i C_2, u $\mathcal{C}$, pa se limes funktora F sastoji od jedinstvenog objekta iz $\mathcal{C}$ kojeg označavamo s $C_1 \times C_2$ i morfizama $\pi_1 : C_1 \times C_2 \to C_1$ i $\pi_2 : C_1 \times C_2 \to C_2$ koje nazivamo* projekcijama *i koji imaju sljedeće svojstvo:*
za svaki objekt $D \in \mathcal{C}$ i par morfizama $p_1 : D \to C_1$, $p_2 : D \to C_2$, postoji jedinstveni morfizam $\phi : D \to C_1 \times C_2$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ C_1 & C_1 \times C_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & C_2. \end{tikzcd}$$

Općenito, produkt familije objekata $\{C_j\}_j$ označavamo s $\prod_j C_j$.

Analogno, koprodukt *u kategoriji $\mathcal{C}$ je kolimes funktora $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, gdje je $\mathcal{J}$ neka diskretna kategorija. Koprodukt familije objekata $\{C_j\}_j$ označavamo s $\coprod_j C_j$.*

Primjer 1.4.6. Terminalni objekt *možemo shvatiti kao produkt nad praznom kategorijom. Naime, ako je $\mathcal{J}$ prazna kategorija, onda je $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ prazan dijagram, pa je stožac nad njim samo objekt u $\mathcal{C}$ bez ikakvih dodatnih podataka.*

Primjer 1.4.7. *Neka je $\mathcal{J}$ kategorija s dva objekta, $\circ$ i $\bullet$, i dva morfizma, $\circ \rightrightarrows \bullet$.*
Ujednačitelj *je limes funktora $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.*
Dijagram F odgovara izboru dvaju objekata $C, D \in \mathcal{C}$ i para morfizama $f, g : C \to D$. Stožac nad dijagramom F je onda objekt $B \in \mathcal{C}$ s morfizmom $e : B \to C$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

komutira. Ujednačitelj je terminalni stožac, to jest, morfizam $e : E \to C$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

komutira i za svaki $B \in \mathcal{C}$ i morfizam $h : B \to C$ takav da dijagram

$$B \xrightarrow{h} C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D$$

komutira, postoji jedinstveni morfizam $\tilde{h} : B \to E$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \\ B \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

komutira.

Dualno, koujednačitelj *je kolimes dijagrama $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Konkretno, za par morfizama $f, g : C \to D$, koujednačitelj je morfizam $c : D \to E$ takav da dijagram*

$$C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D \xrightarrow{c} E$$

komutira i c je univerzalni morfizam s tim svojstvom, to jest, za svaki drugi morfizam $h : D \to F$ takav da dijagram

$$C \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} D \xrightarrow{h} F$$

komutira, postoji jedinstveni morfizam $\tilde{h} : E \to F$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"] & E \arrow[d, "\tilde{h}"] \\ & & F \end{tikzcd}$$

komutira.

1.5 Adjungirani funktori

Sjetimo se, ranije smo uveli pojam izomorfizma kategorija za koji smo zaključili da je "prestrog", pa nemamo puno primjera izomorfnih kategorija. Zato smo oslabili uvjet $G \circ F = Id$ i $G \circ F = Id$ i došli do pojma ekvivalentnih kategorija. Sada uvodimo još generalniji pojam *adjungiranih funktora* i navodimo neka važna svojstva.

Definicija 1.5.1. *Kažemo da su je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$* lijevo adjungiran *funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (i G* desno adjungiran *funktoru F) i pišemo $F \dashv G$ ako postoji izomorfizam*

$$\mathcal{D}(FC, D) \cong \mathcal{C}(C, GD)$$

za svaki $C \in \mathcal{C}$ i $D \in \mathcal{D}$ koji je prirodan i u C i u D.

Ako su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ lokalno male kategorije, tada gornja definicija znači da postoji prirodni izomorfizam između bifunktora $\mathcal{D}(F-, -)$ i $\mathcal{C}(-, G-)$.

Pretpostavimo da je $F \dashv G$. Ekvivalencija $\mathcal{D}(FC, D) \cong \mathcal{C}(C, GD)$ za $D = FC$ posebno daje

$$\mathcal{D}(FC, FC) \cong \mathcal{C}(C, GF(C),$$

pa identiteta id_{FC} odgovara nekom morfizmu

$$\eta_C : C \to GF(C),$$

za svaki $C \in \mathcal{C}$.
Analogno, ako uzmemo $C = GD$, imamo izomorfizam

$$\mathcal{D}(FG(D), D) \cong \mathcal{C}(GD, GD),$$

pa identiteta id_{GD} odgovara morfizmu

$$\epsilon_D : FG(D) \to D$$

za svaki $D \in \mathcal{D}$.
Iz prirodnosti gornjih izomorfizama $\mathcal{D}(FC, -) \cong \mathcal{C}(C, G-)$ i $\mathcal{D}(F-, D) \cong \mathcal{C}(-, GD)$ slijedi da su gornji morfizmi komponente prirodnih transformacija $\eta : Id \Rightarrow GF$ i $\epsilon : FG \Rightarrow Id$. Prirodnu transformaciju η nazivamo *jedinicom*, a ϵ *kojedinicom*. Nadalje, uz ove transformacije sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Obratno, ako imamo zadane prirodne transformacije $\eta : Id \Rightarrow GF$ i $\epsilon : FG \Rightarrow Id$, tada postoji izomorfizam $\mathcal{D}(FC, D) \cong \mathcal{C}(C, GD)$. Naime, morfizmu $g : FC \to D$ možemo pridružiti morfizam $Gg \circ \eta_C$ iz $\mathcal{C}(C, GD)$, a morfizmu $f \in \mathcal{C}(C, GD)$ pridružujemo morfizam $\epsilon_D \circ Ff$.

Time smo skicirali dokaz sljedećeg korisnog teorema:

Teorem 1.5.2. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije te $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori među njima. Tada postoji adjunkcija $F \dashv G$ ako i samo ako postoji par (η, ϵ) jedinice i kojedinice uz koje gornji trokuti komutiraju.*

Potpuni dokaz teorema može se pronaći primjerice u [15], Teorem 2.2.5, str. 53.

Adjungirane funktore možemo definirati na još jedan ekvivalentan način.

Definicija 1.5.3. *Neka su $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ kategorije i $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funktori.* Koma kategorija $(F \downarrow G)$ *je kategorija čiji su objekti morfizmi $h : F(C) \to G(D)$ u $\mathcal{E}$, za $C \in \mathcal{C}$ i $D \in \mathcal{D}$, a morfizmi parovi morfizama $(f : C \to C', g : D \to D')$ takvih da sljedeći kvadrat komutira:*

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "h"'] & F(C') \arrow[d, "h'"] \\ G(D) \arrow[r, "Gg"] & G(D'). \end{tikzcd}$$

Posebno, možemo promatrati sljedeću koma kategoriju:
Neka je $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor i $C \in \mathcal{C}$. Neka je $F : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ funktor koji jedinstvenom objektu $1 \in \mathbf{1}$ pridružuje objekt $C \in \mathcal{C}$. Tada s $(C \downarrow G)$ označavamo koma kategoriju $(F \downarrow G)$.

Objekti ove kategorije su morfizmi $f : C \to G(D)$, a morfizmi su morfizmi $g : D \to D'$ u $\mathcal{D}$ za koje trokut

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G(D) \arrow[d, "Gg"] \\ & G(D') \end{tikzcd}$$

komutira.

Adjunkciju sada možemo okarakterizirati na sljedeći način:

Propozicija 1.5.1. *Neka su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori takvi da je $F \dashv G$ te neka je $C \in \mathcal{C}$. Tada je komponenta jedinice $\eta_C : C \to GF(C)$ inicijalni objekt koma kategorije $(C \downarrow G)$.*

Dokaz se može pronaći u [15], Lema 2.3.5, str. 60.

Iz ove propozicije slijedi i tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 1.5.4. *Neka su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori. Tada postoji bijektivna korespondencija između adjunkcija $F \dashv G$ i prirodnih transformacija $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ takvih da je za svaki $C \in \mathcal{C}$ morfizam $\eta_C : C \to GF(C)$ inicijalni objekt koma kategorije $(C \downarrow G)$.*

Za dokaz vidi [15], Teorem 2.3.6, str. 61.

1.6 Monoidalne kategorije

Nama važne kategorije često su opremljene nekom vrstom produkta, na primjer, direktnim produktom $\times$, direktnom sumom $\oplus$ ili tenzorskim produktom $\otimes$. Zanimaju nas produkti koji su asocijativni i imaju neutralni element. Ipak, stroga asocijativnost često je prestrog zahtjev, pa je dovoljno tražiti da produkti $A \otimes (B \otimes C)$ i $(A \otimes B) \otimes C$ budu samo izomorfni. U ovoj sekciji proučavamo kategorije opremljene takvim produktom koji ćemo u apstraktnom slučaju označavati s $\otimes$.

Definicija 1.6.1. *Kategorija $\mathcal{C}$ je* monoidalna kategorija *ako je opremljena*

- *bifunktorom $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$*
- *jediničnim objektom $I \in \mathcal{C}$*
- *prirodnim izomorfizmom α s komponentama $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$*
- *i prirodnim izomorfizmima λ i ρ s komponentama $\lambda_A : I \otimes A \to A$, $\rho_A : A \otimes I \to A$.*

Ovi prirodni izomorfizmi moraju zadovoljavati tzv. uvjete koherencije*, to jest, sljedeći dijagrami moraju komutirati:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho \otimes id"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "id \otimes \lambda"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[dl, "\alpha \otimes id"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "id \otimes \alpha"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

Uvjeti koherencije osiguravaju da svaki dijagram sastavljen od komponenti prirodnih izomorfizama α, λ i ρ te identiteta kompozicijom i produktom $\otimes$ komutiraju. Precizna formulacija ove tvrdnje naziva se *Mac Laneov teorem o koherenciji.*

Definicija 1.6.2. Strogo monoidalna kategorija *je monoidalna kategorija u kojoj su prirodni izomorfizmi α, λ i ρ identitete.*

Važno svojstvo monoidalnih kategorija je tzv. *zakon zamjene* koji govori o interakciji kompozicije morfizama i monoidalnog produkta.

Teorem 1.6.3. *(Zakon zamjene)*
Za sve morfizme $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $D \xrightarrow{h} E$ i $E \xrightarrow{j} F$ u monoidalnoj kategoriji $\mathcal{C}$ vrijedi

$$(g \circ f) \otimes (j \circ h) = (g \otimes j) \circ (f \otimes h).$$

Dokaz. Iz definicije kompozicije u $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (po komponentama) i funktorijalnosti produkta $\otimes$ slijedi

$$(g \circ f) \otimes (j \circ h) = \otimes((g, j) \circ (f, h)) = \otimes(g, j) \circ \otimes(f, h) = (g \otimes j) \circ (f \otimes h).$$

□

Primjer 1.6.4. *Navodimo nekoliko primjera monoidalnih kategorija:*

1. **Set** *je monoidalna kategorija čiji je monoidalni produkt kartezijev produkt $\times$, jedinični objekt je bilo koji skup s jednim elementom $\{\bullet\}$, komponente asocijatora α su funkcije $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$, a komponente lijeve i desne jedinične transformacije su funkcije $(\bullet, a) \mapsto a$ i $(a, \bullet) \mapsto a$.*

2. *Za komutativni prsten R, kategorija lijevih R-modula* $\mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ *je monoidalna. Monoidalni produkt je tenzorski produkt modula nad R, $\otimes_R$, jedinični objekt je R, a komponente prirodnih izomorfizama jedinstveni homomorfizmi modula određeni s $(a \otimes b) \otimes c \mapsto a \otimes (b \otimes c)$, $1 \otimes a \mapsto a$ i $a \otimes 1 \mapsto a$.*

3. *Kategorija endofunktora na kategoriji $\mathcal{C}$ je monoidalna kategorija. Monoidalni produkt joj je kompozicija funktora, a jedinični objekt identički funktor Id. Ova kategorija je strogo monoidalna kategorija zbog asocijativnosti kompozicije funktora.*

4. *Za svaku monoidalnu kategoriju $\mathcal{C}$, suprotna kategorija $\mathcal{C}^{op}$ je također monoidalna.*

Definicija 1.6.5. *Monoidalna kategorija je* pleteničasta *ako postoji prirodni izomorfizam σ čije su komponente morfizmi $\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ takvi da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma_{A,B\otimes C}"] \arrow[dl, "\alpha^{-1}_{A,B,C}"'] & (B \otimes C) \otimes A & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[dr, "\sigma_{A,B}\otimes id"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \arrow[ul, "\alpha^{-1}_{B,C,A}"'] \\
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{B,A,C}"'] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, "id\otimes\sigma_{A,C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A\otimes B,C}"] \arrow[dl, "\alpha_{A,B,C}"'] & C \otimes (A \otimes B) & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[dr, "id\otimes\sigma_{B,C}"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \arrow[ul, "\alpha_{C,A,B}"'] \\
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{A,C,B}"'] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, "\sigma_{A,C}\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

Definicija 1.6.6. *Pleteničasta monoidalna kategorija je* simetrična *ako je*

$$\sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = id_{A\otimes B}$$

za sve $A, B \in \mathcal{C}$. Prirodni izomorfizam σ u ovom se slučaju zove simetrija.

Kada definiramo neku novu strukturu na objektima, zanimljivo je gledati preslikavanja koja čuvaju tu strukturu. U ovom slučaju, zanimaju nas funktori koji čuvaju monoidalnu strukturu kategorija.

Definicija 1.6.7. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ monoidalne kategorije.* Monoidalni funktor *je funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zajedno s prirodnim izomorfizmom*

$$\phi_{A,B} : F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B), \quad \phi_I : I \to F(I)$$

za koji sljedeći dijagrami komutiraju:

$$\begin{tikzcd}
(FA \otimes FB) \otimes FC \arrow[r, "\alpha_{FA,FB,FC}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}\otimes id"'] & FA \otimes (FB \otimes FC) \arrow[d, "id\otimes\phi_{B,C}"] \\
F(A \otimes B) \otimes FC \arrow[d, "\phi_{A\otimes B,C}"'] & FA \otimes F(B \otimes C) \arrow[d, "\phi_{A,B\otimes C}"] \\
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r, "F(\alpha_{A,B,C})"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} FA \otimes I \arrow[r, "\rho_{FA}"] \arrow[d, "id \otimes \phi_I"'] & FA \arrow[d, "F(\rho_A^{-1})"'] \\ FA \otimes FI \arrow[r, "\phi_{A,I}"'] & F(A \otimes I) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \otimes FA \arrow[r, "\lambda_{FA}"] \arrow[d, "\phi_I \otimes id"] & FA \arrow[d, "F(\lambda_A^{-1})"] \\ FI \otimes FA \arrow[r, "\phi_{I,A}"'] & F(I \otimes A). \end{tikzcd}$$

Ukoliko su morfizmi $\phi_{A,B}$ *i* ϕ_I *identitete, kažemo da je* F *strogi monoidalni funktor.*

Poglavlje 2

Stoneova rekonstrukcija

Pojam Stoneove dualnosti obuhvaća nekoliko dualnosti prostora i algebri u topologiji. Mi ćemo obraditi slučaj Stoneovih prostora i Boolovih algebri koji je dokazao Marshall Stone, dok se ostali slučajevi mogu pronaći primjerice u [11].

2.1 Boolove algebre

Definicija 2.1.1. Parcijalno uređen skup *je skup* A *zajedno s relacijom* $\leq$ *koja je*

- *refleksivna:* $a \leq a$
- *tranzitivna:* $a \leq b$ *i* $b \leq c$ *povlači* $a \leq c$
- *antisimetrična:* $a \leq b$ *i* $b \leq a$ *povlači* $a = b$,

za sve $a, b, c \in A$.

Definicija 2.1.2. *Neka je* A *parcijalno uređen skup i* $S \subseteq A$ *konačan podskup. Definiramo* supremum od S *kao element* $\vee S$ *takav da*

- $s \leq \vee S$ *za sve* $s \in S$
- *za svaki* $x \in A$ *takav da je* $s \leq x$ *za sve* $s \in S$ *je i* $\vee S \leq x$

Infimum od S *definiramo kao element* $\wedge S$ *takav da je*

- $\wedge S \leq s$ *za sve* $s \in S$
- *za svaki* $x \in A$ *takav da je* $x \leq s$ *za sve* $s \in S$ *je i* $x \leq \wedge S$

Supremum praznog skupa označavamo s 0, a infimum s 1.

Definicija 2.1.3. Rešetka *je parcijalno uređen skup* A *kojem svaki konačan podskup ima infimum i supremum.*

Ako svaki, ne nužno konačan, podskup ima infimum i supremum, kažemo da je rešetka potpuna.
Rešetka je distributivna *ako vrijedi sljedeći zakon distribucije:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad \forall a, b, c \in A.$$

Definicija 2.1.4. *Neka je A distributivna rešetka i neka za svaki $a \in A$ postoji element $\neg a$ takav da je*

- $a \wedge \neg a = 0$
- $a \vee \neg a = 1.$

Tada kažemo da je $\neg a$ komplement od a.
Distributivna rešetka u kojoj svaki element ima komplement zove se Boolova algebra.

Primjer 2.1.5. *Navedimo neke primjere Boolovih algebri:*

1. *Dvočlani skup $\{0, 1\}$ u kojem je $0 \leq 1$ je Boolova algebra.*
2. *Neka je X skup. Tada je parcijalni skup $\mathcal{P}(X)$ uz uniju, presjek i komplement Boolova algebra.*
3. *Neka je X skup. Svaki neprazan podskup od $\mathcal{P}(X)$ zatvoren na uniju, presjek i komplement zovemo* poljem skupova nad X. *Svako polje skupova je Boolova algebra.*

Uvijek kada definiramo novu strukturu, zanima nas pojam podstrukture i pojam morfizma koji čuva tu strukturu. U ovom slučaju imamo sljedeće definicije.

Definicija 2.1.6. *Neka je A Boolova algebra. Podskup $B \subseteq A$ je* Boolova podalgebra *ako je B zatvoren na supremum, infimum i komplement.*

Na primjer, svako polje skupova nad X je podalgebra Boolove algebre $\mathcal{P}(X)$.

Definicija 2.1.7. *Neka su A i B Boolove algebre.* Homomorfizam Boolovih algebri *je preslikavanje $f : A \to B$ takvo da je $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ i $f(\neg a) = \neg f(a)$.*

Očito je kompozicija homomorfizama Boolovih algebri opet homomorfizam Boolovih algebri, pa imamo kategoriju **Bool** čiji su objekti Boolove algebre, a morfizmi njihovi homomorfizmi.

Primijetimo, za svaki homomorfizam $f : A \to B$, skup $f(A)$ je Boolova algebra. Naime, ovo slijedi direktno iz činjenice da homomorfizam čuva supremum, infimum i komplement.

2.2 Filteri i spektar Boolove algebre

Definicija 2.2.1. *Neka je A Boolova algebra. Neprazan podskup $F \subseteq A$ zove se* filter *ako*

- *za svaki $a \in F$ i $b \in A$, $a \leq b$ povlači da je i $b \in F$*
- *$a, b \in F$ povlači da je $a \wedge b \in F$.*

Skup svih filtera algebre A označavamo s $\mathcal{F}(A)$.

Definicija 2.2.2. *Neka je A Boolova algebra. Za pravi filter $F \subset A$ kažemo da je* ultrafilter *ako nije sadržan ni u jednom drugom pravom filteru.*
Skup svih ultrafiltera označavamo s $\mathcal{F}_u(A)$.

Istu definiciju ultrafiltera možemo uzeti i u slučaju proizvoljnog parcijalno uređenog skupa, no u slučaju Boolovih algebri, ultrafilteri imaju sljedeću zanimljivu karakterizaciju:

Propozicija 2.2.1. *Za pravi filter $F \subseteq A$ u Boolovoj algebri A ekvivalentno je:*

1. *F je ultrafilter*
2. *F je* prosti filter*, to jest $a \vee b \in F$ povlači $a \in F$ ili $b \in F$, za sve $a, b \in A$*
3. *$a \in F$ ako i samo ako $\neg a \notin F$, za sve $a \in A$.*

Dualno pojmu ultrafiltera, definiramo ideale Boolove algebre.

Definicija 2.2.3. *Neka je A Boolova algebra. Neprazan podskup $I \subseteq A$ zove se* ideal *ako*

- *$a \in A$, $b \in I$ i $a \leq b$ povlači $a \in I$*
- *$a, b \in I$ povlači $a \vee b \in I$.*

Ideal je prost *ako $a \wedge b \in I$ povlači $a \in I$ ili $b \in I$, za sve $a, b \in A$.*

Iz ovih definicija i karakterizacije ultrafiltera jasno je da je podskup $F \subseteq A$ ultrafilter ako i samo ako je $A \setminus F$ prost ideal.

Sada dokazujemo da svaku Boolovu algebru možemo uložiti u partitivni skup skupa $\mathcal{F}_u(A)$ svih ultrafiltera na A.

Teorem 2.2.4. *Neka je A Boolova algebra. Tada je preslikavanje*

$$\phi : B \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_u(A)), \quad \phi(a) = \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \in F\}$$

ulaganje Boolovih algebri.

Dokaz. Budući da ultrafilteri ne sadrže 0, imamo $\phi(0) = \emptyset$, a budući da svi sadrže 1, imamo $\phi(1) = \mathcal{F}_u(A)$.
Za $a, b \in A$ iz ultrafitera kao prostog filtera slijedi

$$\phi(a \wedge b) = \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \wedge b \in F\} = \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \in F \ i \ b \in F\} =$$

$$= \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \in F\} \cap \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ b \in F\} = \phi(a) \cap \phi(b)$$

i

$$\phi(a \vee b) = \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \vee b \in F\} = \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \in F \ ili \ b \in F\} =$$

$$= \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ a \in F\} \cup \{F \in \mathcal{F}_u(A) \ : \ b \in F\} = \phi(a) \cup \phi(b).$$

Dakle, ϕ je homomorfizam Boolovih algebri. Nadalje, ako je $a \neq b$, tada je $a \not\leq b$ ili $b \not\leq a$. Uzmimo bez smanjenja općenitosti da je $a \not\leq b$. Tada $a \wedge \neg b \neq 0$, pa je $\{F \in \mathcal{F} \ : \ a \wedge \neg b \in F\}$ pravi filter i stoga sadržan u nekom ultrafilteru G. Dakle, $a \in G$ i $\neg b \in G$, pa $b \notin G$. Slijedi da $F \in \phi(a)$ i $F \notin \phi(b)$, pa je ϕ injektivno. □

Sljedeći cilj nam je definirati topologiju na $\mathcal{F}_u(A)$ uz koju ćemo sliku $Im\phi$ moći opisati kao posebnu klasu podskupova od $\mathcal{F}_u(A)$.

Uočimo, $Im\phi$ nije zatvorena na uniju, pa skupovi u $Im\phi$ ne čine nužno topologiju. Međutim, sadrže $\emptyset$, $\mathcal{F}_u(A)$ i zatvoreni su na konačne presjeke pa čine bazu neke topologije. Definiramo topologiju $\mathcal{T}_A$ na $\mathcal{F}_u(A)$ kao topologiju čija je baza $Im\phi$.

Definicija 2.2.5. *Topološki prostor* $(\mathcal{F}_u(A), \mathcal{T}_A)$ *nazivamo* spektrom *Boolove algebre* A.

Definicija 2.2.6. *Kažemo da je podskup* $Y \subseteq X$ *topološkog prostora* X otvoreno-zatvoren *ako je istovremeno i otvoren i zatvoren.*

Sada možemo opisati skupove koji su u slici preslikavanja ϕ na sljedeći način:

Lema 2.2.7. *Neka je* A *Boolova algebra i* $B, C \subseteq A$ *podskupovi. Ako je* $\cap_B \phi(b) \subseteq \cup_C \phi(c)$*, onda postoje konačni podskupovi* $B' \subseteq B$, $C' \subseteq C$ *takvi da je* $\wedge B' \leq \vee C'$.

Teorem 2.2.8. $Im\phi$ *se sastoji od svih otvoreno-zatvorenih skupova prostora* $\mathcal{F}_u(A)$.

Dokaz. Sjetimo se, skupovi slike $Im\phi$ čine bazu topologije na $\mathcal{F}_u(A)$. Slijedi da je $\phi(a) \in \phi(A)$ po definiciji otvoren. No, $\mathcal{F}_u(A) \setminus \phi(a) = \phi(\neg a)$, a $\neg a \in A$, pa je $\phi(a)$ i zatvoren.

Obratno, ako je U otvoreno-zatvoren skup, onda postoje podskupovi $B, C \subseteq A$ takvi da je $U = \cup_B \phi(b)$ i $\mathcal{F}_u(A) \setminus U = \cup_C \phi(c)$. Ali

$$\mathcal{F}_u(A) \setminus U = \cup_C \phi(c) \;\Leftrightarrow\; U = \mathcal{F}_u(A) \setminus \cup_C \phi(c) \;\Leftrightarrow U = \cap_C \phi(\neg c).$$

Možemo pronaći konačne podskupove $B' \subseteq B$ i $C' \subseteq C$ takve da je
$U = \cap_C \phi(\neg c) \subseteq \cap_{C'} \phi(c) = \phi(\wedge C') \subseteq \phi(\vee B') = \cup_{B'} \phi(b) \subseteq \cup_B \phi(b) = U$.
Dakle, $U = \phi(\vee B')$, pa je $U \in Im\phi$. □

Očito je da otvoreno-zatvoreni skupovi nekog topološkog prostora čine Boolovu algebru. Posebno, otvoreno zatvoreni skupovi spektra Boolove algebre čine Boolovu algebru. Ako s $OC(X)$ označimo skup svih otvoreno-zatvorenih podskupova od X, onda štoviše imamo sljedeći rezultat:

Teorem 2.2.9. *Neka je A Boolova algebra i $Spec(A)$ njezin spektar. Tada je $A \cong OC(Spec(A))$.*

Dokaz. U teoremu 2.2.4 dokazali smo da se Boolova algebra A ulaže u partitivni skup svog spektra. Dakle, $A \cong \phi(A)$, a iz prethodnog teorema slijedi upravo da je $\phi(A) = OC(Spec(A))$. □

2.3 Stoneovi prostori

Definicija 2.3.1. *Kažemo da je Hausdorffov topološki prostor* potpuno nepovezan *ako se svaki otvoreni skup može prikazati kao unija otvoreno-zatvorenih skupova.*

Definiramo posebnu klasu topoloških prostora koja će odgovarati upravo slikama homomorfizma ϕ.

Definicija 2.3.2. Stoneov prostor *je Hausdorffov, kompaktan, potpuno nepovezan topološki prostor.*

Uz neprekidna preslikavanja, Stoneovi prostori čine kategoriju **Stone**.

Tvrdimo da su spektri Boolovih algebri upravo Stoneovi prostori.

Propozicija 2.3.1. *Neka je A Boolova algebra. Tada je $Spec(A)$ kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $Spec(A)$. Budući da $Im\phi$ čini bazu topologije na $Spec(A)$, možemo pretpostaviti da su svi skupovi pokrivača iz $Im\phi$.
Dakle, postoji podskup $B \subseteq A$ takav da je $Spec(A) = \cup_B \phi(b)$. Ali $Spec(A) = \cap_{\{1\}} \phi(1)$, pa postoji konačan podskup $C \subseteq B$ takav da je $Spec(A) = \cup_C \phi(c)$, što je redukcija pokrivača $\mathcal{U}$ na konačan pokrivač. □

Propozicija 2.3.2. *$Spec(A)$ je potpuno nepovezan.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz činjenice da $Im\phi$ čini bazu topologije na $Spec(A)$ i ranije dokazane činjenice da je $Im\phi$ upravo skup otvoreno-zatvorenih skupova u $Spec(A)$. □

Dakle, spektar Boolove algebre je Stoneov prostor.

Ako sada krenemo od Stoneovog prostora X i pridružimo mu Boolovu algebru otvoreno-zatvorenih skupova na njemu, zanima nas kako izgleda spektar te pridružene algebre.

Teorem 2.3.3. *Neka je X Stoneov prostor i $OC(X)$ Boolova algebra svih otvoreno-zatvorenih skupova u X. Tada su X i $Spec(OC(X))$ homeomorfni.*

Dokaz. Definiramo homeomorfizam $\psi : X \to Spec(OC(X))$ sa $\psi(x) = \{b \in OC(X) : x \in b\}$.
Jasno je iz definicija skupovnih operacija da je ovako definiran skup ultrafilter. Dokazujemo da je ψ bijekcija.
Budući da je X Hausdorffov prostor, svake dvije točke x i y možemo razdvojiti otvorenih disjunktnim skupovima, a budući da otvoreno-zatvoreni skupovi čine bazu, možemo ih razdvojiti otvoreno-zatvorenim skupovima. Dakle, postoji $b \in OC(X)$ koji sadrži x, a ne sadrži y. Onda $b \in \psi(x)$ i $b \notin \psi(y)$, pa je $\psi(x) \neq \psi(y)$.
Uzmimo sada proizvoljan $x \in Spec(OC(X))$ i pretpostavimo da nije u $Im\psi$. $Spec(OC(X))$ je potpuno nepovezan, pa za svaki $y \in Im\psi$ postoji otvoreno-zatvoreni skup U_y takav da je $y \in U_y$, a $x \notin U_y$. $Im\psi$ je kompaktan, pa otvoreni pokrivač $\{U_y\}$ možemo reducirati do konačnog pokrivača. Dakle, $Im\psi$ je konačna unija otvoreno-zatvorenih skupova, pa je i sama otvoreno-zatvoren skup i stoga je oblika $\phi(a)$ za neki $a \in OC(X)$.
Slijedi

$$X = \psi^{-1}(\phi(a)) = \{x \in X \ : \ \psi(x) \in \phi(a)\} = \{x \in X \ : \ a \in \psi(x)\} = a$$

što je u kontradikciji s $x \notin \phi(a)$.
Iz zadnje jednakosti slijedi i neprekidnost preslikavanja ψ. Naime, svaki bazni otvoreni skup je oblika $\phi(a)$, za $a \in OC(X)$, pa imamo da je $\psi^{-1}(\phi(a)) = a$ što je otvoren skup.
Budući da je domena kompaktan, a kodomena Hausdorffov prostor, ovo je dovoljno da zaključimo da je ψ homeomorfizam. □

2.4 Stoneova dualnost

U prethodnim sekcijama dokazali smo da postoji bijektivna korespondencija između Boolovih algebri i Stoneovih prostora koja se ostvaruje na sljedeći način:
Boolovoj algebri A pridružujemo spektar $Spec(A)$ koji se sastoji od ultrafiltera algebre A i ima strukturu Stoneovog prostora. Obratno, Stoneovom prostoru pridružujemo Boolovu algebru $OC(X)$ otvoreno-zatvorenih skupova na X.
Želimo dokazati da su ova pridruživanja funktorijalna.

Definiramo djelovanje $Spec(-)$ na homomorfizam Boolovih algebri na sljedeći način: za Boolove algebre A i B i homomorfizam $f : A \to B$, definiramo

$$Spec(f) : Spec(B) \to Spec(A), \quad Spec(f)(b) = f^{-1}(b).$$

Zaista, iz definicije homomorfizma Boolovih algebri slijedi da je praslika ultrafiltera opet ultrafilter, pa je $Spec(f)$ dobro definirano preslikavanje spektara.
Nadalje, za bazni otvoreni skup $\phi(a)$ u $Spec(A)$ imamo

$$b \in Spec(f)^{-1}(\phi(a)) \Leftrightarrow Spec(f)(b) \in \phi(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) \in \phi(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(b) \Leftrightarrow f(a) \in b \Leftrightarrow b \in \phi(f(a)),$$

što je bazni otvoreni skup u $Spec(B)$. Dakle, $Spec(f)$ je neprekidno preslikavanje.

Obratno, ako je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje Stoneovih prostora, onda definiramo

$$OC(f) : OC(Y) \to OC(X), \quad OC(f)(U) = f^{-1}(U).$$

Budući da je f neprekidno, praslika otvoreno-zatvorenog skupa je opet otvoreno-zatvoreni skup, pa je preslikavanje $OC(f)$ dobro definirano. Nadalje, očito je

$$OC(f)(Y) = X \quad i \quad OC(f)(\emptyset) = \emptyset,$$

a budući da praslika čuva skupovne relacije, imamo i

$$OC(f)(U \cup V) = OC(f)(U) \cup OC(f)(V) \quad i \quad OC(f)(U \cap V) = OC(f)(U) \cap OC(f)(V).$$

Dakle, $OC(f)$ je homomorfizam Boolovih algebri.

Konačno iz definicija $Spec(f)$ i $OC(f)$ te jednakosti $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ g^{-1}$ slijedi da su $Spec$ i OC kontravarijantni funktori,

$$Spec : \mathbf{Bool}^{op} \to \mathbf{Stone}, \quad OC : \mathbf{Stone}^{op} \to \mathbf{Bool}.$$

Uzmimo sada homomorfizam Boolovih algebri $f : A \to B$. Tada je

$$b \in OC(Spec(f)) \circ \phi)(a) \Leftrightarrow b \in Spec(f)^{-1}(\phi(a)) \Leftrightarrow Spec(f)(b) \in \phi(a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(b) \in \phi(a) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(b) \Leftrightarrow f(a) \in b \Leftrightarrow b \in \phi(f(a)) \Leftrightarrow y \in (\phi \circ f)(a)$$

što znači da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[d, "\phi"] \\
OC(Spec(A)) \arrow[r, "OC(Spec(f))"] & OC(Spec(B))
\end{tikzcd}$$

odnosno, imamo prirodnu transformaciju

$$\phi : Id \Rightarrow OC(Spec(-)).$$

Potpuno analogno može se dokazati da je i transformacija

$$\psi : Id \Rightarrow Spec(OC(-))$$

prirodna.
Dakle, funktori *Spec* i *OC* određuju dualnost kategorija **Bool** i **Stone**.

Poglavlje 3

Geljfand - Najmarkov teorem

Pregled nekih rekonstrukcijskih teorema nastavljamo Geljfand-Najmarkovim teoremom koji govori o dualnosti prostora i njegove algebre funkcija. Konkretno, govori o dualnosti kompaktnih topoloških prostora i komutativnih C^*-algebri s jedinicom. Ovaj se rezultat prvi put pojavljuje u članku [6] Geljfanda i Najmarka iz 1943. godine, jednom od ključnih članaka za razvoj nekomutativne geometrije. U istom je članku dokazana i nekomutativna verzija teorema prema kojoj se ne nužno komutativne C^*-algebre vjerno ulažu u kategoriju algebri ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru.

Sve algebre koje ćemo u ovom poglavlju proučavati bit će algebre s jedinicom, a homomorfizmi algebri bit će homomorfizmi algebri s jedinicom. Općenitije, mogu se dokazati slični rezultati i za Banachove algebre bez jedinice ako ih uložimo kao podalgebre u algebre s jedinicom. Za detalje vidi poglavlje 3 u [28].

3.1 Banachove algebre i njihovi spektri

Definicija 3.1.1. Banachova algebra *je Banachov prostor A koji je i asocijativna algebra takva da množenje zadovoljava $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ i $\|1\| = 1$.*

Primjer 3.1.2. *Neka je X topološki prostor i $C_b(X)$ prostor ograničenih neprekidnih funkcija $X \to \mathbb{C}$. Znamo da je to vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, a ako još definiramo množenje po točkama i normu $\|f\| = \sup\{f(x) : x \in X\}$, onda $C_b(X)$ postaje Banachova algebra. Primijetimo, komutativna je zbog komutativnosti u $\mathbb{C}$ i ima jedinicu - konstantnu funkciju 1.*
Ako je X diskretan skup, onda je $C_b(X) = l^\infty(X)$, a ako je X kompaktan, onda je $C_b(X) = C(X)$.

Definicija 3.1.3. *Za topološki prostor kažemo da je* lokalno kompaktan *ako svaka točka ima kompaktnu okolinu.*

Definicija 3.1.4. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da funkcija $f : X \to \mathbb{C}$* iščezava u beskonačnosti *ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan skup K takav da je $|f(x)| < \epsilon$ za svaki $x \notin K$.*

Primjer 3.1.5. *Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji nije kompaktan, onda sa $C_0(X)$ označavamo prostor svih neprekidnih funkcija $X \to \mathbb{C}$ koje iščezavaju u beskonačnosti. Uz* sup*-normu, $C_0(X)$ postaje Banachov prostor, a uz množenje po točkama postaje Banachova algebra bez jedinice. $C_0(X)$ ima jedinicu ako i samo ako je X kompaktan i u tom slučaju je $C_0(X) = C(X)$.*

Definicija 3.1.6. *Neka je A algebra s jedinicom i $x \in A$. Definiramo* spektar elementa *x kao skup*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ x - \lambda \cdot 1 \text{ nije invertibilan element od } A\}.$$

Spektralni radijus *elementa $x \in A$ definiramo kao*

$$\nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{1/n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Gornja definicija je opravdana sljedećim teoremom:

Teorem 3.1.7. *Neka je A algebra s jedinicom i $x \in A$. Tada je $(\|x^n\|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i $\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.*
Osim toga, vrijedi $0 \le \nu(x) \le \|x\|$.

Dokaz se može pronaći u [1], Teorem 7.1.9, str. 113.

Teorem 3.1.8. *Neka je A kompleksna Banachova algebra s jedinicom i $x \in A$. Tada je spektar $\sigma(x)$ neprazan.*

Za dokaz vidi [1], Teorem 7.1.12, str. 114.

Definicija 3.1.9. *Za A kompleksnu komutativnu Banachovu algebru s jedinicom, definiramo* spektar *$Spec(A)$ kao skup svih morfizama algebri s jedinicom (to jest ne-nul multiplikativnih linearnih funkcionala) $A \to \mathbb{C}$. Te morfizme nazivamo* karakterima.

Propozicija 3.1.1. *Svaki karakter je neprekidan i norme jednake* 1.

Dokaz. Neka je $\phi \in Spec(A)$. Za svaki $a \in A$ imamo $\phi(a) = \phi(a \cdot 1) = \phi(a)\phi(1)$, pa je $a - \phi(a) \cdot 1 \in \ker(\phi)$. Slijedi da $a - \phi(a) \cdot 1$ nije invertibilan element, pa $\phi(a)$ pripada spektru $\sigma(a)$. Onda je prema prethodnom teoremu $|\phi(a)| \le \|a\|$. Slijedi da je ϕ neprekidan te da je $\|\phi\| \le 1$.
Obratno, $\phi(1) = 1$, pa je $1 = \|\phi(1)\| \le \|\phi\|\|1\| = \|\phi\|$. Dakle, $\|\phi\| = 1$. $\square$

Lema 3.1.10. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom. Tada je skup $G(A)$ invertibilnih elemenata u A otvoren.*

Za dokaz vidi [1] Propozicija 7.1.6, str. 113.

Teorem 3.1.11. *(Geljfand-Mazur)*
Neka je A kompleksna Banachova algebra s jedinicom u kojoj je svaki ne-nul element invertibilan. Tada je $A \cong \mathbb{C}$.

Dokaz. Neka je $a \in A$. Vidjeli smo da je spektar $\sigma(a)$ neprazan, pa postoji $\lambda_a \in \mathbb{C}$ takav da je $a - \lambda_a \cdot 1 \notin G(A)$. Budući da je po pretpostavci $A \setminus G(A) = \{0\}$, vrijedi $a - \lambda_a \cdot 1 = 0$, to jest, $a = \lambda_a \cdot 1$. Sada izomorfizam možemo uspostaviti preslikavanjem $a \mapsto \lambda_a$. □

Spec(A) također možemo opisati kao skup maksimalnih ideala od A:

Propozicija 3.1.2. *Za A kompleksnu komutativnu Banachovu algebru s jedinicom postoji bijekcija između Spec(A) i skupa svih maksimalnih ideala od A.*

Dokaz. Svakom karakteru $\phi : A \to \mathbb{C}$ pridružimo jezgru $I = \ker \phi$. Zbog linearnosti i činjenice da je $\phi(1) = 1$ je ϕ surjekcija, pa je po Prvom teoremu o izomorfizmu $A/I \cong \mathbb{C}$, iz čega zaključujemo da je I maksimalan ideal u A.
Pretpostavimo sada da je I maksimalan ideal u A. Onda je I zatvoren. Naime, I je pravi ideal, pa ne sadrži invertibilne elemente. Stoga je $I \subseteq A \setminus G(A)$, što je prema prethodnoj lemi zatvoren skup. Onda je $I \subseteq \overline{I} \subseteq A \setminus G(A)$, pa posebno $\overline{I} \neq A$. Ali onda je $\overline{I}$ pravi ideal koji sadrži I, pa je zbog maksimalnosti ideala I nužno $I = \overline{I}$. Dakle, I je zatvoren.
Sada slijedi da je i A/I Banachova algebra (vidi [1] Zadatak 1.3.19). Zbog maksimalnosti od I je svaki ne-nul element od A/I invertibilan, pa je po Geljfand-Mazurovom teoremu $A/I \cong \mathbb{C}$.
Označimo s $\alpha : A/I \to \mathbb{C}$ taj izomorfizam, a s $\pi : A \to A/I$ kanonski epimorfizam. Onda je $\alpha \circ \pi$ homomorfizam $A \to \mathbb{C}$ s jezgrom I. Nadalje, zato što je α izomorfizam i zbog definicije množenja na kvocijentnom prostoru, slijedi da je $(\alpha \circ \pi)(ab) = (\alpha \circ \pi)(a)(\alpha \circ \pi)(b)$, pa je $\alpha \circ \pi$ karakter.
Također, preslikavanje $\phi \mapsto \ker \phi$ je injektivno jer iz $\ker \phi = \ker \psi$ slijedi da je $a - \phi(a) \cdot 1 \in \ker \psi$, pa je $\psi(a) = \phi(a)$, za svaki $a \in A$. Dakle, $\phi = \psi$. □

Propozicija 3.1.3. *Za A komutativnu Banachovu algebru s jedinicom, Spec(A) je neprazan.*

Dokaz. Ako su svi elementi iz A invertibilni, onda je $A \cong \mathbb{C}$, pa je izomorfizam $A \to \mathbb{C}$ karakter.

Inače, ako postoji $a \in A$ koji nije invertibilan, onda je aA pravi ideal, pa je sadržan u nekom maksimalnom idealu. Dakle, $Max(A)$ je neprazan, pa je $Spec(A)$ neprazan. □

Napomena 3.1.12. *Za nekomutativnu algebru, s druge strane, spektar može biti prazan. Uzmimo primjerice $A = M_n(\mathbb{C})$ algebru kompleksnih $n \times n$ matrica za $n > 1$. Označimo s $E_{i,j}$ matricu koja na mjestu (i,j) ima jedinicu, a na svim ostalim mjestima nulu. Primijetimo, tada za sve $i,j \in \{1,...,n\}$, $i \neq j$, vrijedi $E_{i,j}^2 = 0$ i $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$.*
Pretpostavimo da je $\phi : A \to \mathbb{C}$ karakter. Tada iz gornjih jednakosti slijedi da je $\phi(E_{i,j}) = 0$ i $\phi(E_{i,i}) = \phi(E_{i,j})\phi(E_{j,i}) = 0$ za svaki $i \in \{1,...,n\}$.
Ali ϕ je i linearan, pa za jediničnu matricu vrijedi

$$\phi(I) = \phi(E_{1,1} + ... + E_{n,n}) = \phi(E_{1,1}) + ... + \phi(E_{n,n}) = 0$$

što je nemoguće jer karakter preslikava jedinicu u jedinicu.
Dakle, $Spec(A)$ je prazan.

Topologija koju promatramo na $Spec(A)$ je tzv. *w^*-topologija.* To je slaba topologija na dualu A' generirana svim evaluacijskim funkcionalima $\hat{x}$ na A'. Preciznije, generirana je okolinama

$$B_{\phi,x_1,...,x_n,\epsilon} = \{f \in X' : |f(x_i) - \phi(x_i)| < \epsilon,\ i = 1,...,n\},$$

za proizvoljne $x_1,...,x_n \in X$ i $\epsilon > 0$.
Budući da $\hat{x}$, za $x \in X$, razlikuju točke, $Spec(A)$ s ovom topologijom je Hausdorffov topološki prostor.

Da dokažemo da je i kompaktan, koristit ćemo Banach-Alaogluov teorem:

Teorem 3.1.13. ***(Banach-Alaoglu)***
Zatvorena jedinična kugla u A', dualnom prostoru Banachovog prostora A, kompaktan je skup u w^*-topologiji.

Propozicija 3.1.4. *$Spec(A)$ komutativne Banachove algebre s jedinicom A je w^*-zatvoren podskup jedinične kugle u A', pa je kompaktan.*

Dokaz. Dokazali smo ranije da je svaki karakter neprekidan funkcional s normom jednakom 1. Dakle, $Spec(A)$ je zaista sadržan u zatvorenoj jediničnoj kugli u A'. Dokažimo da je w^*-zatvoren.
Neka je $\phi \in A' \setminus Spec(A)$. Ako je $\phi = 0$, onda imamo

$$0 \in B_{0,1_A,\frac{1}{2}} = \{f \in X' : |f(1)| < \frac{1}{2}\} \subseteq A' \setminus Spec(A)$$

jer je za svaki $f \in Spec(A)$, $f(1_A) = 1$.
Za $\phi \neq 0$, zbog $\phi \notin Spec(A)$, postoje $x, y \in A$ takvi da je $\phi(x)\phi(y) \neq \phi(xy)$. Tada je okolina $B_{\phi,x,y,xy,\epsilon}$ sadržana u $A' \setminus Spec(A)$ za neki ϵ. Naime, ako je $f \in B_{\phi,x,y,xy,\epsilon}$, onda je $|f(x)-\phi(x)|, |f(y)-\phi(y)|, |f(xy)-\phi(xy)| < \epsilon$. Kad bi f bio multiplikativan, onda bi vrijedilo

$$|\phi(xy) - \phi(x)\phi(y)| \leq$$
$$\leq |\phi(xy) - f(xy)| + |f(x)f(y) - f(x)\phi(y)| + |f(x)\phi(y) - \phi(x)\phi(y)| <$$
$$< \epsilon + |f(x)|\epsilon + |\phi(y)|\epsilon = const. \cdot \epsilon.$$

Kad bi za svaki ϵ postojao multiplikativni f u okolini $B_{\phi,x,y,xy,\epsilon}$, vidimo iz gornje nejednakosti da bi vrijedilo da je i ϕ multiplikativan. Dakle, postoji otvorena okolina od ϕ sadržana u $A' \setminus Spec(A)$, pa je $Spec(A)$ zatvoren. □

Definicija 3.1.14. *Za Banachovu algebru A s jedinicom, definiramo* Geljfandovu transformaciju *kao homomorfizam*

$$\widehat{\ }: A \to C(Spec(A)), \quad \hat{x}(\phi) = \phi(x),$$

za svaki $\phi \in Spec(A)$.

Zaista, ako pretpostavimo da je $(\phi_\alpha)_\alpha$ mreža koja konvergira prema ϕ u $Spec(A)$, onda po definiciji w^*-topologije $\hat{x}(\phi_\alpha) = \phi_\alpha(x) \to \phi(x) = \hat{x}(\phi)$ za svaki $x \in A$, pa je svaki $\hat{x}$ neprekidan, to jest $\hat{x} \in C(Spec(A))$. Nadalje, $\widehat{\ }$ je homomorfizam jer je svaki $\phi \in Spec(A)$ multiplikativni linearni funkcional. Primijetimo također, $\|\hat{x}(\phi)\| = \|\phi(x)\| \leq \|\phi\|\|x\| = \|x\|$ za svaki $\phi \in Spec(A)$, pa je $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$.
Dokazali smo da je $Spec(A)$ kompaktan Hausdorffov prostor, pa je prema 3.1.5 $C(Spec(A))$ komutativna Banachova algebra s jedinicom.

Sljedeća propozicija opravdava naziv "spektar" za skup svih karaktera:

Propozicija 3.1.5. *Neka je A komutativna Banachova algebra s jedinicom. Za svaki $x \in A$ je $Im(\hat{x}) = \hat{x}(Spec(A)) = \sigma(x)$ spektar elementa x.*

Dokaz. Vidjeli smo već u dokazu neprekidnosti karaktera da je za svaki $a \in A$ i $\phi \in Spec(A)$, $\phi(a) = \hat{a}(\phi) \in \sigma(a)$. Dakle, $Im(\hat{a}) \subseteq \sigma(a)$.
Neka je $\lambda \in \sigma(a)$. Tada je $a - \lambda \cdot 1$ singularan, pa je $(a - \lambda \cdot 1)A$ pravi ideal te je sadržan u nekom maksimalnom idealu I. Dokazali smo da su svi maksimalni ideali u A zapravo jezgre karaktera, pa postoji karakter $\phi : A \to \mathbb{C}$ takav da je $I = \ker \phi$. Onda je $\phi(a - \lambda \cdot 1) = 0$, to jest, $\phi(a) = \hat{a}(\phi) = \lambda$. Dakle, $\lambda \in Im(\hat{a})$. □

3.2 C^*-algebre i Geljfand-Najmarkov teorem

Sada nam je cilj pronaći klasu algebri za koju će Geljfandova transformacija imati bolja svojstva.

Definicija 3.2.1. Banachova *-algebra *je Banachova algebra A s operacijom involucije $a \mapsto a^*$ koja zadovoljava:*

- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
- $a^{**} = a$
- $(ab)^* = a^* b^*$
- $\|a^*\| = \|a\|$.

za sve $a, b \in A$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.
C^*-algebra *je Banachova *-algebra koja još zadovoljava C^*-jednakost: $\|a^* a\| = \|a\|^2$.*

Primjer 3.2.2. *Za X kompaktan prostor, $C(X)$ je C^*-algebra s jedinicom, uz sup-normu i involuciju $f \mapsto \overline{f}$.*
Ako je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor koji nije kompaktan, onda je $C_0(X)$ C^*-algebra bez jedinice. (Jedinica $f \in C_0(X)$ mora zadovoljavati $f^2 = f$, pa može poprimati samo vrijednosti 0 i 1. No $f \equiv 1$ ne iščezava u 0, a bilo koja druga funkcija koja iščezava ne zadovoljava definiciju jedinice).

Definicija 3.2.3. *-homomorfizam *C^*-algebri A i B je homomorfizam algebri $\phi : A \to B$ koji još zadovoljava $\phi(x^*) = \phi(x)^*$.*

Definicija 3.2.4. *Kažemo da je element a C^*-algebre A* hermitski *ako je $a^* = a$.*

Lema 3.2.5. *Neka je A C^*-algebra s jedinicom i $a \in A$ hermitski element. Tada je spektar $\sigma(a)$ elementa a realan.*

Dokaz vidi u [28], Propozicija 3.6, str. 26.

Primijetimo, svaki element $a \in A$ možemo zapisati u obliku $a = \frac{1}{2}(a+a^*) + i\frac{1}{2i}(a - a^*)$ i $\frac{1}{2}(a + a^*)$ i $i\frac{1}{2i}(a - a^*)$ su hermitski.

Teorem 3.2.6. ***(Geljfand-Najmark)***
*Neka je A komutativna Banachova *-algebra s jedinicom. Geljfandova transformacija $\widehat{\ } : A \to C(Spec(A))$ je izometrički *-izomorfizam ako i samo ako je A C^*-algebra.*

Dokaz. Ako je $\widehat{\ }$ izometrički izomorfizam, onda za svaki $x \in A$ vrijedi

$$\|x^* x\| = \|\widehat{x^* x}\|_\infty = \|\widehat{x^*}\widehat{x}\|_\infty = \|(\widehat{x})^* \widehat{x}\|_\infty =$$

$$= \|\overline{\widehat{x}}\widehat{x}\|_\infty = \||\widehat{x}|^2\|_\infty = \|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|x\|^2,$$

a to je točno C^*-jednakost.

Obratno, neka je A C^*-algebra. Neka su $a, b \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Onda je

$$(\widehat{\alpha a + \beta b})(\phi) = \phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b) = \alpha\widehat{a}(\phi) + \beta\widehat{b}(\phi)$$

za svaki $\phi \in Spec(A)$. Nadalje,

$$(\widehat{ab})(\phi) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \widehat{a}(\phi)\widehat{b}(\phi),$$

pa je $\widehat{\ }$ homomorfizam algebri. Moramo još provjeriti je li kompatibilan s involucijom: Uzmimo proizvoljan $a \in A$ i $\phi \in Spec(A)$. Vidjeli smo da a možemo zapisati u obliku $x + iy$ za x i y hermitske elemente. Sada je

$$\widehat{a^*}(\phi) = \phi(a^*) = \phi(x - iy) = \phi(x) - i\phi(y) = \overline{\phi(x) + i\phi(y)} = \overline{\phi(a)} = \overline{\widehat{x}(\phi)},$$

a kompleksna konjugacija je involucija u C^*-algebri $\mathbb{C}$. (U četvrtoj jednakosti koristili smo tvrdnju prethodne leme iz koje slijedi da je $\phi(x)$, $\phi(y) \in \mathbb{R}$). Dakle, $\widehat{\ }$ je *-homomorfizam.

Dalje tvrdimo da je $\widehat{\ }$ izometrija. Sjetimo se definicije i formule za spektralni radijus: za $a \in A$, spektralni radijus je $\nu(a) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(a)\}$ i vrijedi $\nu(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.
U našem slučaju, uzmimo prvo $a \in A$ hermitski. Iz C^*-jednakosti slijedi da je $\|a^2\| = \|a\|^2$, pa je $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$. Sjetimo se da je $Im(\widehat{a}) = \sigma(a)$, pa je

$$\|\widehat{a}\|_\infty = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in Im(\widehat{a}) = \sigma(a)\} = \nu(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2n}\|^{1/2n} = \|a\|.$$

Sada za proizvoljan $x \in A$ primijetimo da je x^*x hermitski, pa imamo:

$$\|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|\overline{\widehat{x}}\widehat{x}\|_\infty = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = \|x^*x\| = \|x\|^2,$$

pa je $\widehat{\ }$ izometrija. Posebno slijedi da je $\widehat{\ }$ injekcija.

Konačno, pokažimo još da je $\widehat{\ }$ surjekcija. Budući da je $\widehat{\ }$ izometrija, slika $Im(\widehat{\ })$ joj je zatvorena u $C(Spec(A))$. $C(Spec(A))$ je kompaktan Hausdorffov prostor, a sve $\widehat{a} \in Im(\widehat{\ })$ razlikuju točke, pa iz kompleksnog Stone-Weierstrassovog teorema slijedi da je $Im(\widehat{\ })$ gust podskup od $C(Spec(A))$. Budući da je zatvoren, imamo $Im(\widehat{\ }) = C(Spec(A))$. $\square$

Geljfand-Najmarkov teorem ključan je dio dokaza dualnosti kategorije komutativnih C^*-algebri s jedinicom $\mathbf{C^* - Alg_{com}}$ i kategorije kompaktnih Hausdorffovih prostora $\mathbf{Top_{cmp}}$. Opišimo te kategorije.

Kategoriju $\mathbf{C^* - Alg_{com}}$ čine

- objekti: komutativne C^*-algebre s jedinicom i
- morfizmi: *-homomorfizmi s uobičajenom kompozicijom funkcija.

Kategoriju $\mathbf{Top_{cmp}}$ čine

- objekti: kompaktni Hausdorffovi topološki prostori i
- morfizmi: neprekidna preslikavanja s uobičajenom kompozicijom funkcija.

Vidjeli smo da svakoj komutativnoj Banachovoj algebri s jedinicom možemo pridružiti kompaktan Hausdorffov prostor $Spec(A)$. Želimo dobiti i pridruživanje odgovarajućih morfizama kako bi $Spec(-)$ postao funktor.

Za $A, B \in Ob(\mathbf{C^* - Alg_{com}})$ i $f : A \to B$ *-homomorfizam, definiramo

$$Spec(f) : Spec(B) \to Spec(A), \quad Spec(f)(\phi) = \phi \circ f.$$

Tada je $Spec(f)(\phi) : A \to \mathbb{C}$ multiplikativni linearni funkcional (jer su i f i ϕ linearni i multiplikativni). Dakle, $Spec(f)(\phi) \in Spec(A)$.

Nadalje, za $A, B, C \in Ob(\mathbf{C^* - Alg_com})$ i $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ je

$$Spec(g \circ f)(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = (\phi \circ g) \circ f = Spec(g)(\phi) \circ f = Spec(f)(Spec(g)(\phi))$$

$$i \quad Spec(id_A)(\phi) = \phi = id_{Spec(A)}(\phi),$$

pa je $Spec(-)$ kontravarijantni funktor.

Obratno, svakom kompaktnom Hausdorffovom prostoru X možemo pridružiti komutativnu C^*-algebru s jedinicom $C(X)$ koja se sastoji od svih neprekidnih kompleksnih funkcija na X.
Neka su $X, Y \in Ob(\mathbf{Top_{cmp}})$ i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Definiramo morfizam $C(f) : C(Y) \to C(X)$ sa $C(f)(\phi) = \phi \circ f \in C(X)$ za svaki $\phi \in C(Y)$. Za $\phi, \psi \in C(Y)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ imamo:

$$C(f)(\alpha\phi + \beta\psi) = (\alpha\phi + \beta\psi) \circ f = \alpha\phi \circ f + \beta\psi \circ f = \alpha C(f)(\phi) + \beta C(f)(\psi),$$

$$C(f)(\phi\psi) = (\phi\psi) \circ f = (\phi \circ f)(\psi \circ f) = C(f)(\phi)C(f)(\psi)$$

$$i \quad C(f)(\overline{\phi}) = \overline{\phi \circ f},$$

pa je $C(f)$ *-homomorfizam C^*-algebri.
Isto kao za *Spec* slijedi da je $C(-)$ kontravarijantan funktor.

Dakle, imamo par kontravarijantnih funktora

$$\mathbf{C^* - Alg_{com}^{op}} \underset{Spec}{\overset{C}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top_{cmp}}$$

Iz Geljfand-Najmarkovog teorema slijedi da je kompozicija ovih funktora $C(Spec(-))$ izomorfna identičkom funktoru $Id_{\mathbf{C^*-Alg_{com}}}$.
Ako sada uzmemo morfizam $A \xrightarrow{f} B$ u $\mathbf{C^* - Alg_{com}}$ i $a \in A$, onda je

$$(C(Spec(f)(\widehat{a}))(\phi) = (C(\widehat{a}(f)))(\phi) = \phi(\widehat{a}(f)) = \phi(f(a))$$

$$i \quad \widehat{f(a)}(\phi) = \phi(f(a))$$

za svaki $\phi \in Spec(B)$ čime smo dokazali da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, "f"'] & C(Spec(A)) \arrow[d, "C(Spec(f))"] \\ B \arrow[r, "\widehat{\ }"] & C(Spec(B)) \end{tikzcd}$$

Dakle, izomorfizam funktora $C(Spec(-))$ i $Id_{\mathbf{C^*-Alg_{com}}}$ je prirodan.

Sada dokazujemo drugi smjer dualnosti:

Teorem 3.2.7. *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor i $A = C(X)$ prostor svih neprekidnih funkcija na X, komutativna C^*-algebra s jedinicom. Tada je $Spec(A) \simeq X$.*

Dokaz. Za $x \in X$, definiramo evaluacijski funkcional

$$\phi_x : A \to \mathbb{C}, \quad \phi_x(a) = a(x)$$

za svaki $a \in A$. Očito je $\phi_x \in Spec(A)$.
Ako su $x_1,\ x_2 \in X$ takvi da je $\phi_{x_1} = \phi_{x_2}$, onda je $a(x_1) = a(x_2)$ za svaki $a \in A$, a budući da elementi iz A razlikuju točke, mora biti $x_1 = x_2$. Dakle, preslikavanje $x \mapsto \phi_x$ je injektivno.
Za dokaz surjektivnosti, uzmimo $\phi \in Spec(A)$ i pretpostavimo da je $\phi \neq \phi_x$ za svaki $x \in X$. Onda za svaki $x \in X$ postoji neki $a_x \in A$ za koji je $\phi(a_x) \neq \phi_x(a_x)$. Po definiciji funkcionala ϕ_x to znači da je $\phi(a_x) \neq a_x(x)$.
Definiramo $b_x = a_x - \phi(a_x) \cdot 1_a$. Onda je $b_x(x) \neq 0$, pa je $b_x \neq 0$, ali $\phi(b_x) = 0$. Budući

da je b_x neprekidna na X, postoji okolina U od x takva da je $b_x \neq 0$ na cijelom U. Budući da je $\phi \neq \phi_x$ za svaki $x \in X$, takvu okolinu U možemo dobiti za svaki $x \in X$ i označit ćemo ju s U_x. Onda je $\{U_x : x \in X\}$ otvoreni pokrivač kompaktnog skupa X, pa ga možemo reducirati na konačni pokrivač $\{U_{x_1}, ..., U_{x_k}\}$.
Sada definiramo funkcional $a \in A$ sa $a(x) = |b_{x_1}(x)|^2 + ... + |b_{x_k}(x)|^2$. Primijetimo, $a(x) > 0$ za svaki $x \in X$ i

$$\phi(a) = \phi(b^*_{x_1} b_{x_1}) + ... + \phi(b^*_{x_k} b_{x_k}) = \phi(b^*_{x_1})\phi(b_{x_1}) + ... + \phi(b^*_{x_k})\phi(b_{x_k}) = 0.$$

Dakle, $a \in \ker \phi$. Budući da je $a > 0$ na cijelom X, on ima inverz a^{-1} u A, pa je $1 = \phi(1) = \phi(a)\phi(a^{-1}) = 0$, što je kontradikcija. Zaključujemo da mora postojati $x \in X$ takav da je $\phi = \phi_x$.
Dakle, preslikavanje $\Phi : x \mapsto \phi_x$ je bijekcija.
Još nam preostaje dokazati da je to preslikavanje neprekidno. Uočimo, budući da je domena kompaktan skup, a kodomena Hausdorffov, odmah slijedi i neprekidnost inverza.
Neka je x_α mreža u X koja konvergira prema x u X. Onda za svaki $a \in A$, zbog neprekidnosti od a vrijedi $\phi_{x_\alpha}(a) = a(x_\alpha) = a(x) = \phi_x(a)$. Iz definicije w^*-topologije slijedi da $\phi_{x_\alpha} \to \phi_x$ u $Spec(A)$, pa je Φ neprekidno. $\square$

Dakle, i funktor $Spec(C(-))$ je izomorfan identičkom funktoru $Id_{\mathbf{Top_{cmp}}}$. Analogno gornjem računu za $C(Spec(-))$ dobivamo da je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widehat{\ }} & Spec(C(X)) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle Spec(C(f))} \\ Y & \xrightarrow{\widehat{\ }} & Spec(C(Y)) \end{array}$$

Slijedi da su $Spec(C(-))$ i $Id_{\mathbf{Top_{cmp}}}$ prirodno izomorfni funktori, pa konačno zaključujemo da su $\mathbf{C^*} - \mathbf{Alg_{com}}$ i $\mathbf{Top_{cmp}}$ dualne kategorije.

Poglavlje 4

Rekonstrukcija algebarskih skupova

Dualnost sličnu Geljfandovoj nalazimo i u algebarskoj geometriji. Ovdje se radi o dualnosti afinih algebarskih skupova i komutativnih konačnogeneriranih reduciranih K-algebri. Budući da su mnoge konstrukcije analogne onima u dokazu Geljfandove dualnosti, ovdje ne dajemo detaljne dokaze, a oni se mogu pronaći primjerice u [8], [24] ili [18].

Definicija 4.0.1. *Neka je K polje i $S \subseteq K[T_1, ..., T_n]$ bilo koji skup polinoma. Definiramo* afini algebarski skup *određen sa S kao skup*

$$\mathcal{Z}(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \ : \ f(x) = 0, \ \forall f \in S\}.$$

Afini algebarski skup određen jednim polinomom $\mathcal{Z}(\{f\})$ nazivamo afina hiperploha.

Ako s I označimo ideal u $K[T_1, ..., T_n]$ generiran sa S, po Hilbertovom teoremu o bazi (vidi [13]), taj je ideal konačnogeneriran nekim polinomima $f_1, ..., f_n$. Lako se provjeri da onda vrijedi $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(f_1, ..., f_n)$. Dakle, svaki algebarski skup je generiran s konačno mnogo polinoma, pa ga možemo prikazati kao presjek konačno mnogo hiperploha $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{Z}(f_i)$.

Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ bilo koji skup. Možemo mu pridružiti skup

$$I(X) = \{f \in K[T_1, ..., T_n] \ : \ f(x) = 0, \ \forall x \in X\}$$

svih polinoma koji se poništavaju na X. To je ideal u prstenu polinoma $K[T_1, ..., T_n]$.

Definicija 4.0.2. *Neka je R prsten i I ideal u R. Definiramo* radikal *ideala I kao prsten $\sqrt{I} = \{r \in R \ : \ r^n \in I$ za neki $n \in \mathbb{N}\}$.*
Kažemo da je ideal I radikalan *ako je $I = \sqrt{I}$.*

Sljedeći je teorem osnovni teorem algebarske geometrije i daje vezu između afinih algebarskih skupova i radikalnih ideala u prstenu polinoma. Dokaz se može naći primjerice u [8].

Teorem 4.0.3. ***(Hilbertov teorem o nulama; Nullstellensatz)***
Za svaki ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[T_1, ..., T_n]$ *vrijedi* $I(\mathcal{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Nullstellensatz ima sljedeće važne posljedice:

Korolar 4.0.4. *Preslikavanje* $\mathfrak{a} \mapsto \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ *je bijekcija sa skupa svih radikalnih ideala od* $K[T_1, ..., T_n]$ *na skup svih afinih algebarskih skupova u* $\mathbb{A}^n$.

Korolar 4.0.5. *Preslikavanje* $\alpha \mapsto I(\{a\})$ *je bijekcija s* $\mathbb{A}^n$ *u skup svih maksimalnih ideala u* $K[T_1, ..., T_n]$.

Sada ćemo definirati K-algebre i pokazati njihovu vezu s algebarskim skupovima.

Definicija 4.0.6. *Neka je* K *algebarski zatvoreno polje.* K-algebra *je prsten* R *s jedinicom zajedno s morfizmom prstena s jedinicom* $K \xrightarrow{i} \mathcal{Z}(R)$.
Ako su R *i* S K*-algebre s morfizmima* $K \xrightarrow{i} R$ *i* $K \xrightarrow{j} S$*, onda je* homomorfizam K-algebri *svaki homomorfizam prstena s jedinicom* $f : R \to S$ *takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & R \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Ekvivalentno, homomorfizam K*-algebri možemo definirati kao* K*-linearan homomorfizam prstena.*
R *je* konačnogenerirana *ako postoje elementi* $r_1, ..., r_n \in R$ *takvi da je evaluacijski homomorfizam* $K[T_1, ..., T_n] \to R$, $T_i \mapsto r_i$*, surjektivan.*
R *je* reducirana *ako nema nilpotentnih elemenata različitih od 0.*

Primjer 4.0.7. *Za ideal* $\mathfrak{a} \subseteq K[T_1, ..., T_n]$*, kvocijentni prsten* $K[T_1, ..., T_n]/\mathfrak{a}$ *je konačnogenerirana i reducirana* K*-algebra.*

Definicija 4.0.8. *Za afini algebarski skup* $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{A}^n$*, definiramo* afinu algebru

$$\mathcal{O}(\mathcal{Z}) := K[T_1, ..., T_n]/I(\mathcal{Z}).$$

Propozicija 4.0.1. *Svaka konačnogenerirana reducirana* K*-algebra je afina algebra nekog algebarskog skupa.*

Dokaz. Ako je R konačnogenerirana K-algebra, onda postoje $r_1, ..., r_n \in R$ takvi da je $\phi : K[T_1, ..., T_n] \to R$, $T_i \mapsto r_i$ epimorfizam. Onda je po prvom teoremu o izomorfizmu $K[T_1, ..., T_n]/\ker\phi \cong R$.
$\ker\phi$ je radikalan ideal jer $f^l \in \ker\phi$ povlači $\phi(f^l) = \phi(f)^l = 0$, pa je $\phi(f) = 0$, to jest, $f \in \ker\phi$.
Sada iz 4.0.4 slijedi da je $\ker\phi = I(\mathcal{Z})$ za neki algebarski skup $\mathcal{Z}$. □

Definicija 4.0.9. *Neka su $X \subseteq K^n$ i $Y \subseteq K^m$ algebarski skupovi.* Regularno preslikavanje *među njima je preslikavanje $f : X \to Y$ oblika $f = (f_1, ..., f_m)$, za $f_i \in \mathcal{O}(X)$.*

Označimo s **Aff-Set** kategoriju svih afinih algebarskih skupova čiji su objekti afini algebarski skupovi, a morfizmi regularna preslikavanja među njima.
Nadalje, s **K-Aff** ćemo označavati kategoriju konačnogeneriranih reduciranih K-algebri uz morfizme koji su homomorfizmi K-algebri.

$\mathcal{O}$: **Aff-Set** $\to$ **K-Aff** je jedan funktor u dualnosti koju želimo dokazati (analogon funktora C u Geljfandovoj dualnosti).
Drugi funktor je $Spec$: **K-Aff** $\to$ **Aff-Set** koji svakoj konačnogeneriranoj reduciranoj K-algebri A pridružuje $Hom_{K-Aff}(A, K)$.

Kao i kod Geljfandove dualnosti, pokaže se da za svaki $A \in$ **K-Aff** postoji bijekcija $Hom_{K-Aff}(A, K) \cong Max(A)$ između $Spec(A)$ i skupa svih maksimalnih ideala od A. (Ta bijekcija je dana s $Spec(A) \ni \phi \mapsto \ker\phi \in Max(A)$.)

Sada možemo pokazati:

Teorem 4.0.10. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ algebarski skup. Tada je $X \cong Spec(\mathcal{O}(X))$.*

Ideja dokaza: Kao i u Geljfandovoj dualnosti, bijekcija se ostvaruje preslikavanjem $X \ni x \mapsto ev_x \in Spec(\mathcal{O}(X))$, gdje je ev_x evaluacijski funkcional koji $f + I(X) \in \mathcal{O}(X)$ preslikava u $f(x)$. □

Teorem 4.0.11. *Neka je A konačnogenerirana i reducirana K-algebra. Tada je $\mathcal{O}(Spec(A)) \cong A$.*

Dokaz. Vidjeli smo ranije da je svaka konačnogenerirana reducirana K-algebra oblika $\mathcal{O}(\mathcal{Z})$ za neku afini algebarski skup $\mathcal{Z}$. Koristeći činjenicu da maksimalni ideali u $\mathcal{O}(\mathcal{Z})$ odgovaraju maksimalnim idealima u $K[T_1, ..., T_n]$ koji sadrže $I(\mathcal{Z})$ i činjenicu je skup maksimalnih ideala u $K[T_1, ..., T_n]$ u bijekciji s $\mathbb{A}^n$, dobivamo da je $Spec(A) \cong \mathcal{Z}$. Onda je $\mathcal{O}(Spec(A)) \cong \mathcal{O}(\mathcal{Z}) = A$, pa smo dobili traženi izomorfizam. □

Slično kao kod Gelfandove dualnosti dokaže se prirodnost ovih izomorfizama, pa dobivamo da su kategorije **Aff-Set** i **K-Aff** dualne.

Kasnije ćemo se opet vratiti algebarskoj geometriji, ali će nas zanimati pristup koji koristi teoriju kategorija i omogućuje jednostavniji prijelaz na nekomutativni slučaj.

Poglavlje 5

Afini Serreov teorem

U prvom dijelu ovog poglavlja definiramo pojam afine sheme koji poopćuje pojam afinog varijeteta. Naime, u prošlom poglavlju smo vidjeli da algebarski skup možemo rekonstruirati kao maksimalni spektar afine algebre. Ideja generalizacije je prijeći na skup prostih ideala nekog proizvoljnog komutativnog prstena R. Tako dolazimo do pojma spektra komutativnog prstena. Ovaj spektar možemo opskrbiti topologijom Zariskog i možemo na njemu definirati snop prstenova. Na taj način $Spec(R)$ postaje lokalno prstenovani prostor koji nam služi kao "model" za afinu shemu. Prednost prelaska na prosti spektar je što je pridruživanje $R \mapsto Spec(R)$ funktorijalno i, štoviše, ono određuje dualnost kategorija afinih shema i komutativnih prstenova.

U drugom dijelu dokazujemo afini Serreov teorem, novi tip rekonstrukcije koji kaže da su kategorije R-modula i kvazi-koherentnih $\mathcal{O}_X$-modula ekvivalentne. Gledajući posebne slučajeve kvazi-koherentnih $\mathcal{O}_X$-modula, dobivamo nove ekvivalencije kategorija, a jedna od najznačajnijih je ekvivalencija kategorije vektorskih svežnjeva nad afinim algebarskim varijetetom i kategorije konačnogeneriranih projektivnih modula nad koordinatnim prstenom varijeteta. To je *Serreov teorem.* Postoji i topološki analogon ovog teorema, takozvani *Swanov teorem*, koji kaže da je kategorija vektorskih svežnjeva na kompaktnom Hausdorffovom prostoru X ekvivalentna kategoriji konačnogeneriranih projektivnih $C(X)$-modula, gdje je $C(X)$ algebra neprekidnih kompleksnih funkcija na X. Ova dva rezultata poznata su i pod nazivom *Serre-Swanov teorem* i temelj su teorije vektorskih svežnjeva u nekomutativnoj geometriji.

5.1 Spektar komutativnog prstena

Definicija 5.1.1. *Neka je R prsten. Definiramo* spektar prstena R *kao*

$$Spec(R) = \{\mathfrak{p} \subseteq R \ : \ \mathfrak{p} \textit{ je prost ideal u } R\}.$$

Ako je R komutativan prsten s jedinicom, tada je $Spec(R)$ neprazan. Naime, posljedica je Zornove leme da R ima barem jedan maksimalni ideal, pa ima i prosti ideal.

Sljedeći korak je definicija topologije na $Spec(R)$:
Za svaki ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ definiramo

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \ : \ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Uočimo:

- Za $\mathfrak{a} = R$ je $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$ jer ni jedan prosti ideal ne sadrži cijeli prsten.
- Za $\mathfrak{a} = \{0\}$ je $V(\mathfrak{a}) = R$ jer svaki ideal sadrži 0.
- Ako su $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali u R, tada je $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.
  Naime, ako je $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ i $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, onda je i $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ jer se radi o idealima. Dakle, $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Obratno, pretpostavimo da $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, a $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Onda $\mathfrak{p}$ ne sadrži ni $\mathfrak{a}$ ni $\mathfrak{b}$, pa postoje $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$ i $b \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$. Ali $ab \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ što je kontradikcija s činjenicom da je $\mathfrak{p}$ prost.
- Za familiju ideala $(\mathfrak{a}_\alpha)_\alpha$ u R je $\bigcap_\alpha V(\mathfrak{a}_\alpha) = V(\sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha)$.
  Naime, ako $\mathfrak{p}$ sadrži $\sum_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$, onda očito sadrži i svaki $\mathfrak{a}_\alpha$. Obratno, ako sadrži svaki $\mathfrak{a}_\alpha$, onda sadrži i ideal generiran njihovom unijom.

Dakle, skupovi $V(\mathfrak{a})$ zadovoljavaju aksiome zatvorenih skupova topoloških prostora, pa definiraju topologiju koju nazivamo *topologijom Zariskog* na prostoru $Spec(R)$.

U nastavku će nam biti korisno znati neku "dobru" bazu topologije Zariskog. Označimo $X = Spec(R)$ i promotrimo glavne ideale u R, to jest, ideale oblika $(f) = Rf = \{rf \ : \ r \in R\}$ za $f \in R$.

Definicija 5.1.2. *Neka je $f \in R$. Definiramo* glavni otvoreni skup X_f *sa*

$$X_f = Spec(R) \setminus V(Rf).$$

Propozicija 5.1.1. *Glavni otvoreni skupovi X_f čine bazu topologije Zariskog na X.*

Dokaz. Neka je $V(\mathfrak{a})$ proizvoljan zatvoren skup. Ideal $\mathfrak{a}$ je očito generiran svim svojim elementima, to jest pripadnim glavnim idealima, pa je $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(Rf)$. Dakle, svaki zatvoreni skup je presjek skupova oblika $V(Rf)$, pa je svaki otvoreni skup unija glavnih ovorenih skupova.
Neka su sada X_f i X_g glavni otvoreni skupovi. Tada je

$$V(Rf) \cup V(Rg) = V(RfRg) = V(Rfg),$$

pa je $X_f \cap X_g = X_{fg}$. Dakle, presjek glavnih otvorenih skupova je opet glavni otvoreni skup, pa zaključujemo da glavni otvoreni skupovi čine bazu topologije Zariskog. $\square$

Sljedeći cilj nam je konstruirati snop prstenova na prostoru $Spec(R)$. Najprije ćemo izreći definiciju snopa te se prisjetiti nekih definicija koje će nam biti potrebne u konstrukciji snopa na $Spec(R)$.

Definicija 5.1.3. *Neka je X topološki prostor.* Predsnop prstenova na X $\mathcal{O}$ *zadan je sljedećim podacima:*

- *Svakom otvorenom podskupu $U \subseteq X$ pridružen je prsten $\Gamma(U, \mathcal{O})$*
- *Za svaku skupovnu inkluziju $U \subseteq V \subseteq X$ dan je homomorfizam prstenova -* restrikcija $res_U^V : \Gamma(V, \mathcal{O}) \to \Gamma(U, \mathcal{O})$
- *Ti podaci zadovoljavaju sljedeće uvjete:*
  - *Ako je $U \subseteq V \subseteq W$, onda je $res_U^W = res_U^V \circ res_V^W$*
  - *res_U^U je identiteta*
  - $\Gamma(\emptyset, \mathcal{O}) = 0$

Ovu definiciju možemo jednostavnije izreći u jeziku teorije kategorija:
Neka je X topološki prostor i $\mathbf{Op}(\mathbf{X})$ kategorija čiji su objekti otvoreni podskupovi od X, a morfizmi inkluzije otvorenih podskupova. Tada možemo definirati

Definicija 5.1.4. Predsnop *prstenova na X je kontravarijantni funktor* $\mathbf{Op}(\mathbf{X}) \to$ **CRing** *iz kategorije otvorenih skupova na X u kategoriju komutativnih prstena s jedinicom.*
Morfizam predsnopova *je prirodna transformacija između predsnopova.*

Definicija 5.1.5. *Neka je $\mathcal{O}$ predsnop na topološkom prostoru X i $U \subseteq X$ otvoren podskup. Element prstena $\Gamma(U, \mathcal{O})$ nazivamo* prerezom predsnopa $\mathcal{O}$ nad U*, dok prerez nad čitavim prostorom X zovemo* globalnim prerezom.

Definicija 5.1.6. Snop prstenova *na topološkom prostoru X je predsnop $\mathcal{O}$ na X koji još zadovoljava sljedeće uvjete:*

- *Za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ i otvoreni pokrivač $\{U_\alpha\}_\alpha$ od U, ako je $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ i $res_{U_\alpha}^U = 0$ za svaki α, onda je $s = 0$.*
- *Za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ i otvoreni pokrivač $\{U_\alpha\}_\alpha$ od U, ako su $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ takvi da za sve α, β vrijedi $res_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = res_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$, tada postoji prerez $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ takav da je $res_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ za svaki α.*

Opet, ove uvjete možemo izraziti u jeziku teorije kategorija:

Definicija 5.1.7. Snop *na X je predsnop $\mathcal{O}$ takav da je za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ i otvoreni pokrivač $\{U_\alpha\}_\alpha$ dijagram*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\prod_\alpha res^U_{U_\alpha}} \prod_\alpha \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}) \underset{res^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}}{\overset{res^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta} \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O})$$

ujednačitelj.

Imamo još jednu karakterizaciju koja će nam kasnije biti korisna.
Neka je U otvoreni podskup od X i $\{U_i\}_i$ otvoreni pokrivač za U.
Definiramo preslikavanje

$$\alpha : \Gamma(U, \mathcal{O}) \to \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

koje šalje svaki prerez s nad U u familiju restrikcija $\{s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O})\}_i$.
Definiramo još preslikavanje

$$\beta : \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \to \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

koje familiju $\{s_k\}_k$ preslikava u familiju

$$\{res^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) - res^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)\}_{i,j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}).$$

Propozicija 5.1.2. *Predsnop $\mathcal{O}$ na topološkom prostoru X je snop ako i samo ako je za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ i svaki otvoreni pokrivač $\{U_i\}_i$ niz*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

egzaktan.

Dokaz. Činjenica da je α injektivan ekvivalentna je prvom uvjetu iz definicije snopa, a činjenica da je slika morfizma α jednaka jezgri morfizma β ekvivalentna je drugom uvjetu iz definicije snopa. $\square$

Definicija 5.1.8. Prstenovani prostor *je uređeni par $(X, \mathcal{O})$ koji se sastoji od topološkog prostora X i snopa prstenova $\mathcal{O}$ na X kojeg zovemo* strukturni snop.

Definicija 5.1.9. Morfizam prstenovanih prostora *iz* $(X, \mathcal{O}_X)$ *u* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *je par* $(\phi, \phi^\#)$ *gdje je* $\phi : X \to Y$ *neprekidno preslikavanje i za svaki otvoren podskup* $U \subseteq X$ *imamo inducirani homomorfizam prstena*

$$\phi^\#_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

koji je kompatibilan s restrikcijama. Preciznije, za svaku inkluziju $V \subseteq U \subseteq Y$, *sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\phi^\#_V"] \arrow[d, "res^V_U"'] & \Gamma(\phi^{-1}V, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "res^{\phi^{-1}V}_{\phi^{-1}U}"] \\
\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\phi^\#_U"] & \Gamma(\phi^{-1}U, \mathcal{O}_X).
\end{tikzcd}$$

Definicija 5.1.10. *Neka je* $\mathcal{O}$ *snop na topološkom prostoru* X *i* p *točka u* X. *Definiramo* vlat $\mathcal{O}_p$ *snopa* $\mathcal{O}$ *u točki* p *kao kolimes* $\mathcal{O}_p = colim_{p \in U} \mathcal{O}(U)$, *pri čemu kolimes uzimamo po svim otvorenim podskupovima* $U \subseteq X$ *koji sadrže točku* p.

Svaki morfizam prstenovanih prostora $(\phi, \phi^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ inducira homomorfizam prstenova $\phi^\#_p : \mathcal{O}_{Y,\phi(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ za svaku točku $p \in X$.
Naime, za sve otvorene podskupove $V \subseteq Y$ koji sadrže $\phi(p)$ je kompozicija

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\phi^\#(V)} \Gamma(\phi^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,p}$$

kompatibilna s restrikcijama snopa $\mathcal{O}_Y$ pa inducira traženi homomorfizam.

Definicija 5.1.11. *Kažemo da je prsten* R *lokalan ako ima jedinstveni maksimalni ideal. Homomorfizam između lokalnih prstenova je* lokalni homomorfizam, *ako je praslika maksimalnog ideala maksimalan ideal.*

Definicija 5.1.12. Lokalno prstenovani prostor *je prstenovani prostor* $(X, \mathcal{O})$ *za koji je svaka vlat* $\mathcal{O}_p$, $p \in X$, *lokalan prsten.*
Morfizam lokalno prstenovanih prostora *je morfizam prstenovanih prostora* $(\phi, \phi^\#)$ *za koji je svaki inducirani homomorfizam prstenova* $\phi^\#_p : \mathcal{O}_{Y,\phi(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ *lokalni homomorfizam.*

5.2 Snop prstenova na $Spec(R)$

U konstrukciji snopa na $Spec(R)$ koristit ćemo lokalizaciju prstena. Prisjetimo se definicije lokalizacije i nekih primjera koji će nam biti važni u nastavku.

Definicija 5.2.1. *Neka je R prsten s jedinicom i $S \subseteq R$. Kažemo da je S* multiplikativni skup *ako je $1 \in S$ i za sve $s, t \in S$ je $st \in S$.*

Na $R \times S$ definiramo relaciju $\sim$ sa

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists \sigma \in S \ \ t.d. \ \ \sigma(at - bs) = 0$$

Lako se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Definicija 5.2.2. *Definiramo* lokalizaciju prstena *R po S kao kvocijentni skup*

$$R \times S/ \sim =: S^{-1}R.$$

Klasu $[(a, s)]$ označavamo s $\frac{a}{s}$.

Lokalizacija $S^{-1}R$ je uz operacije zbrajanja i množenja

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \qquad \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

opet prsten s jedinicom $\frac{1}{1}$.
Imamo kanonski homomorfizam prstena $i : R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ koji je monomorfizam ukoliko je R integralna domena.
Također, lokalizacija ima sljedeće univerzalno svojstvo:

Propozicija 5.2.1. *Neka je $f : R \to P$ homomorfizam prstena s jedinicom i S multiplikativan skup u R takav da je $f(S) \subseteq P^{\times}$. Tada postoji jedinstven homomorfizam prstena $g : S^{-1}R \to P$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & S^{-1}R \arrow[d, "g"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Primjer 5.2.3. *Neka je $\mathfrak{p} \subseteq R$ prost ideal u prstenu R. Tada je $S := R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativni skup.*
Naime, prost ideal je po definiciji pravi podskup pa ne sadrži jedinicu. Dakle, $1 \in S$. Ako su $s, t \in S$, tada i st mora biti u S jer po definiciji prostog ideala, $st \in \mathfrak{p}$ povlači da je $s \in \mathfrak{p}$ ili $t \in \mathfrak{p}$.
Lokalizaciju po ovom multiplikativnom skupu označavamo s $R_{\mathfrak{p}}$.

Nas će posebno zanimati slučaj multiplikativnog skupa

$$S = \{f^n \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

za $f \in R$. Ova lokalizacija se najčešće označava s $R[f^{-1}]$, a njezini elementi su oblika $\frac{r}{f^n}$ za $r \in R$ i $n \in \mathbb{N}_0$.
Za svaki $f \in R$, označimo s $\alpha_f : R \to R[f^{-1}]$ kanonski homomorfizam lokalizacije.

Neka su $f, g \in R$ i $X_f \subseteq X_g$. Tada je $V(Rg) \subseteq V(Rf)$, pa svaki prosti ideal u R koji sadrži g sadrži i f. Ako sada gledamo kanonski epimorfizam $R \to R/Rg$, slijedi da je $f + Rg$ sadržan u svakom prostom idealu prstena R/Rg, pa je nilpotentan u njemu. Dakle, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^m \in Rg$, to jest, $f^m = rg$ za neki $r \in R$.

Sada slijedi da je $\alpha_f(g) = \frac{g}{1}$ invertibilan u $R[f^{-1}]$ jer je $\frac{g}{1}\frac{r}{f^m} = \frac{rg}{f^m} = 1$, pa po univerzalnom svojstvu lokalizacije slijedi da postoji jedinstveni homomorfizam prstena s jedinicom α_f^g takav da je $\alpha_f = \alpha_f^g \circ \alpha_g$.
Za $f, g, h \in R$ takve da je $X_f \subseteq X_g \subseteq X_h$ onda iz univerzalnog svojstva lokalizacije i jedinstvenosti homomorfizma α_f^h slijedi da je $\alpha_f^h = \alpha_f^g \circ \alpha_g^h$.

Posebno, za $X_f = X_g$ imamo jedinstvene homomorfizme prstena

$$\alpha_f^g : R[g^{-1}] \to R[f^{-1}] \quad i \quad \alpha_g^f : R[f^{-1}] \to R[g^{-1}]$$

za koje vrijedi

$$\alpha_f^g \circ \alpha_g^f = id \quad i \quad \alpha_g^f \circ \alpha_f^g = id.$$

Dakle, prsteni $R[f^{-1}]$ i $R[g^{-1}]$ su izomorfni.

Želimo definirati snop prstenova $\tilde{R}$ na topološkom prostoru $Spec(R) =: X$. Najprije ga zadajemo na glavnim otvorenim skupovima, to jest, na bazi topologije.

Definicija 5.2.4. *Neka je $U \subseteq X$ glavni otvoreni skup u X. Za $f \in R$ takav da je $U = X_f$ definiramo*

$$\Gamma(U, \tilde{R}) := R[f^{-1}].$$

U prethodnoj diskusiji smo vidjeli da su za $f, g \in R$ takve da je $X_f = X_g$ prstenovi $R[f^{-1}]$ i $R[g^{-1}]$ izomorfni pa je definicija dobra.

Definicija 5.2.5. *Neka su $X_f \subseteq X_g$ dva glavna otvorena skupa. Definiramo* restrikciju *sa*

$$res_{X_f}^{X_g} : \Gamma(X_g, \tilde{R}) \to \Gamma(X_f, \tilde{R}), \quad res_{X_f}^{X_g} = \alpha_f^g.$$

Vidjeli smo ranije da je za $X_f \subseteq X_g \subseteq X_h$, $\alpha_f^h = \alpha_f^g \circ \alpha_g^h$, pa je i

$$res_{X_f}^{X_h} = res_{X_f}^{X_g} \circ res_{X_g}^{X_h}.$$

Također,

$$res_{X_f}^{X_f} = \alpha_f^f = id \quad i$$

$$\Gamma(\emptyset, \tilde{R}) = \Gamma(X_0, \tilde{R}) = 0$$

jer je za multiplikativni skup S koji sadrži nulu lokalizacija $S^{-1}R$ trivijalna.

Dakle, ovako definirani prstenovi $\Gamma(U, \tilde{R})$ zadovoljavaju definicijske uvjete predsnopova, ali sjetimo se, definirali smo ih samo na glavnim otvorenim skupovima U. Sljedeći korak je proširenje ovog predsnopa na cijeli prostor.
Očekujemo da se to može napraviti jer je svaki snop određen svojim djelovanjem na baznim otvorenim skupovima. Naime, svaki otvoreni skup U može se pokriti baznim otvorenim skupovima $\{U_i\}_i$. Onda je po propoziciji 5.1.2 niz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

egzaktan, pa, ako znamo $\Gamma(U_i, \mathcal{O})$, $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$ i restrikcije među njima, onda možemo izračunati i $\Gamma(U, \mathcal{O})$.

Lema 5.2.6. *Neka je X topološki prostor i pretpostavimo da je zadana baza topologije na X. Pretpostavimo da za svaki bazni otvoreni skup U imamo prsten $\Gamma(U, \mathcal{O})$ te da za inkluziju baznih otvorenih skupova $U \subseteq V$ imamo zadanu restrikciju $res_U^V : \Gamma(V, \mathcal{O}) \to \Gamma(U, \mathcal{O})$. Pretpostavimo nadalje da za sve $U \subseteq V \subseteq W$ u bazi vrijedi $res_U^V \circ res_V^W = res_U^W$ i $\Gamma(\emptyset, \mathcal{O}) = 0$. Neka su zadani morfizmi α i β kao gore i neka je za svaki pokrivač $\{U_i\}_i$ baznog otvorenog skupa U baznim otvorenim skupovima niz*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

egzaktan. Tada se $\mathcal{O}$ jedinstveno proširuje do snopa prstenova na X.

Skica dokaza. Neka je V proizvoljan otvoren skup u X i $\{U_i\}_i$ maksimalan pokrivač od V baznim otvorenim skupovima. Preciznije, pokrivač $\{U_i\}_i$ sadrži sve bazne otvorene skupove koji su sadržani u V.
Definiramo $\tilde{\Gamma}(V, \mathcal{O})$ kao jezgru morfizma β kako bi niz

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

bio egzaktan.
Ako je $V \subseteq W$, onda je maksimalan pokrivač od V baznim otvorenim skupovima sadržan u maksimalnom pokrivaču od W. Zato možemo promatrati projekcije

$$\prod_{i \in I'} \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \to \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}) \quad i \quad \prod_{i,j \in I'} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}) \to \prod_{i,j \in I} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$$

tako da je

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \tilde{\Gamma}(W,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{i\in I'}\Gamma(U_i,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\beta'} & \prod_{i,j\in I'}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow \tilde{\Gamma}(V,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{i\in I}\Gamma(U_i,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\beta} & \prod_{i,j\in I}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}) \end{array}$$

komutativan dijagram s egzaktnim redovima.
Sada definiramo $res_V^W : \tilde{\Gamma}(W,\mathcal{O}) \to \tilde{\Gamma}(V,\mathcal{O})$ kao morfizam koji nadopunjuje gornji komutativni dijagram.
Ovim podacima je zadan predsnop na X, a ovako zadan predsnop je zbog 5.1.2 i snop na X. □

Lema 5.2.7. *Neka je $X = Spec(R)$ i $X_f \subseteq \bigcup_{i\in I} X_{g_i}$. Tada postoji konačan podskup $\{g_{i_1},...,g_{i_r}\} \subseteq \{g_i : i \in I\}$ takav da je $X_f \subseteq \bigcup_{j=1}^r X_{g_{i_j}}$.*
Nadalje, postoji $m \in \mathbb{N}$ i $a_1,...,a_r \in R$ takvi da je $f^m = a_1 g_{i_1} + ... + a_r g_{i_r}$.

Dokaz se može pronaći u [19], Lema 3.3.8, str 34.

Teorem 5.2.8. *Na $X = Spec(R)$ postoji jedinstven snop $\tilde{R}$ zadan s $\Gamma(X_f,\tilde{R}) = R[f^{-1}]$ na glavnim otvorenim skupovima.*

Dokaz. Zahvaljujući lemi 5.2.6, moramo samo provjeriti sljedeće:
Ako je $X_f = \bigcup_i X_{g_i}$ otvoreni pokrivač baznog otvorenog skupa baznim otvorenim skupovima, onda je niz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X_f,\tilde{R}) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \Gamma(X_{g_i},\tilde{R}) \xrightarrow{\beta} \prod_{i,j} \Gamma(X_{g_i}\cap X_{g_j},\tilde{R})$$

egzaktan.

Pokažimo prvo da je α injektivan. Neka je $s \in \Gamma(X_f,\tilde{R})$ u jezgri od α. Tada je restrikcija od s na svaki X_{g_i} trivijalna. Iz prethodne leme slijedi da je X_f unija konačno mnogo baznih skupova X_{g_i}, recimo $X_f = \bigcup_{i=1}^r X_{g_i}$.
s je element prstena $\Gamma(X_f,\tilde{R}) = R[f^{-1}]$, pa je oblika $s = \frac{x}{f^n}$ za neki $x \in R$ i $n \in \mathbb{N}$. Slika od s je trivijalna u $R[g^{-1}]$, pa postoje prirodni brojevi m_i takvi da je $g_i^{m_i}x = 0$. Ako uzmemo $m = \max\{m_1,...,m_r\}$, onda je $g_i^m x = 0$ za sve $i = 1,...,r$. Budući da je $X_{g_i^m} = X_{g_i}$, imamo $X_f = \bigcup_{i=1}^r X_{g_i} = \bigcup_{i=1}^r X_{g_i^m}$. Opet iz prethodne leme slijedi da postoje $a_1,...,a_r \in R$ takvi da je $f^l = a_1 g_1^m + ... + a_r g_r^m$. Ako pomnožimo ovu jednakost s x, dobivamo da je $f^l x = 0$, a je $s = \frac{x}{f^l}$ nula u $\Gamma(X_f,\tilde{R})$.

Dalje dokazujemo da je $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. Kao i u prvom dijelu dokaza, imamo $X_f = \bigcup_{i=1}^{r} X_{g_i}$. Uzmimo proizvoljan element iz $Ker(\beta)$. Tada za svaki $i = 1, ..., r$ imamo $s_i \in \Gamma(X_{g_i}, \tilde{R})$ i ti prerezi zadovoljavaju

$$res^{X_{g_i}}_{X_{g_i} \cap X_{g_j}}(s_i) = res^{X_{g_j}}_{X_{g_i} \cap X_{g_j}}(s_j).$$

Za svaki i, $s_i \in \Gamma(X_{g_i}, \tilde{R})$ možemo zapisati u obliku $s_i = \frac{x_i}{g_i^n}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Iz $res^{X_{g_i}}_{X_{g_i} \cap X_{g_j}}(s_i) = res^{X_{g_j}}_{X_{g_i} \cap X_{g_j}}(s_j)$ slijedi da su s_i i s_j jednaki u prstenu $\Gamma(X_{g_i} \cap X_{g_j}, \tilde{R}) = \Gamma(X_{g_i g_j}, \tilde{R}) = R[(g_i g_j)^{-1}]$. Dakle, $\frac{x_i}{g_i^n} = \frac{x_j}{g_j^n}$, to jest, $\frac{g_j^n x_i}{(g_i g_j)^n} = \frac{g_i^n x_j}{(g_i g_j)^n}$. Iz definicije lokalizacije slijedi da postoji neki $N \in \mathbb{N}$ takav da je $(g_i g_j)^N g_j^n x_i = (g_i g_j)^N g_i^n x_j$.
Po prethodnoj lemi je $X_f = \bigcup_{i=1}^{r} X_{g_i^{N+n}}$ i $f^l = a_1 g_1^{N+n} + ... + a_r g_r^{N+n}$, pa je za $x = a_1 g_1^N x_1 + ... + a_r g_r^N x_r$ i $s = \frac{x}{f^l}$, $g_i^{N+n} x = f^l g_i^N x_i$. Iz ovoga slijedi da u prstenu $R[g_i^{-1}]$ vrijedi jednakost $\frac{x}{f^l} = \frac{x_i}{g_i^n}$ što znači da je restrikcija $res^{X_f}_{X_{g_i}}(s) = s_i$.

Dakle, niz iz iskaza je egzaktan, pa po lemi 5.2.6 postoji jedinstven snop prstenova $\tilde{R}$ na $Spec(R)$ takav da je na glavnim otvorenim skupovima $\Gamma(X_f, \tilde{R}) = R[f^{-1}]$. □

5.3 Afine sheme

Vidjeli smo kako počevši od komutativnog prstena s jedinicom R možemo konstruirati prstenovani prostor $Spec(R)$. Posvetimo se sada morfizmima. Zanima nas hoće li i homomorfizam prstenova $\phi : R \to S$ inducirati morfizam pripadnih prstenovanih prostora.

Definicija 5.3.1. *Neka je $\phi : R \to S$ homomorfizam prstenova. Definiramo preslikavanje*

$$Spec(\phi) : Spec(S) \to Spec(R) \quad sa \quad S \supseteq \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq R.$$

Uočimo, definicija je dobra jer je praslika prostog ideala opet prost ideal.
Nadalje, ovo preslikavanje je neprekidno. Za proizvoljan zatvoren skup $V(\mathfrak{a})$, prost ideal $\mathfrak{p}$ se nalazi u $(Spec(\phi))^{-1}(V(\mathfrak{a}))$ ako i samo ako je $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq \mathfrak{a}$, a ovo je ekvivalentno sa $\mathfrak{p} \supseteq \phi(\mathfrak{a})$.
Neka je $\mathfrak{b}$ ideal u S generiran s $\phi(\mathfrak{a})$. Tada je gornje ekvivalentno sa $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$, pa konačno imamo $(Spec(\phi))^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{b})$.

Ako označimo $X = Spec(S)$ i $Y = Spec(R)$, onda homomorfizam $\phi : R \to S$ inducira neprekidno preslikavanje $Spec(\phi) : X \to Y$ i imamo

$$(Spec(\phi))^{-1}(Y_f) = X_{\phi(f)}.$$

Naime, vidjeli smo da je $(Spec(\phi))^{-1}(V(Rf)) = V(S\phi(f))$, pa sada možemo samo uzeti komplement ove jednakosti.

Sljedeći korak je proširivanje preslikavanja ϕ do preslikavanja prstenovanih prostora.

Propozicija 5.3.1. *Neka je zadan $\phi : R \to S$ homomorfizam prstenova i neka su $X = Spec(S)$ i $Y = Spec(R)$ pripadni spektri. Tada se neprekidno preslikavanje $Spec(\phi) : X \to Y$ može proširiti do jedinstvenog morfizma prstenovanih prostora $(Spec(\phi), \tilde{\phi}) : (X, \tilde{S}) \to (Y, \tilde{R})$ takvog da je $\tilde{\phi}_Y : \Gamma(Y, \tilde{R}) \to \Gamma((Spec(\phi))^{-1}Y, \tilde{S}) = \Gamma(X, \tilde{S})$ upravo $\phi : R \to S$.*

Dokaz. Vidjeli smo ranije da je praslika od Y_f jednaka $X_{\phi(f)}$, pa moramo definirati homomorfizme prstenova

$$\tilde{\phi}_{Y_f} : \Gamma(Y_f, \tilde{R}) \to \Gamma(X_{\phi(f)}, \tilde{S}).$$

Pretpostavimo da je za $f = 1$ preslikavanje $\tilde{\phi}_Y : R \to S$ zaista jednako $\phi : R \to S$. Po definiciji preslikavanja prstenovanih prostora, dijagram

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(Y, \tilde{R}) \arrow[r, "\tilde{\phi}_Y"] \arrow[d, "res^Y_{Y_f}"'] & \Gamma(X, \tilde{S}) \arrow[d, "res^X_{X_{\phi(f)}}"] \\
\Gamma(Y_f, \tilde{R}) \arrow[r, "\tilde{\phi}_{Y_f}"] & \Gamma(X_{\phi(f)}, \tilde{S})
\end{tikzcd}$$

mora komutirati. U našem slučaju to znači da dijagram

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha_f"'] & S \arrow[d, "\alpha_{\phi(f)}"] \\
R[f^{-1}] \arrow[r, "\tilde{\phi}_{Y_f}"] & S[(\phi(f))^{-1}]
\end{tikzcd}$$

komutira za jedinstveni morfizam $\tilde{\phi}_{Y_f} : R[f^{-1}] \to S[(\phi(f))^{-1}]$.

Nadalje, ako uzmemo glavne otvorene skupove $Y_f \subseteq Y_g \subseteq Y$, tada dijagrami

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha_g"'] & S \arrow[d, "\alpha_{\phi(g)}"] \\
R[g^{-1}] \arrow[d, "\alpha^g_f"'] & S[(\phi(g))^{-1}] \arrow[d, "\alpha^{\phi(g)}_{\phi(f)}"] \\
R[f^{-1}] \arrow[r, "\tilde{\phi}_{Y_f}"'] & S[(\phi(f))^{-1}]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha_g"'] & S \arrow[d, "\alpha_{\phi(g)}"] \\
R[g^{-1}] \arrow[r, "\tilde{\phi}_{Y_g}"'] & S[(\phi(g))^{-1}] \arrow[d, "\alpha^{\phi(g)}_{\phi(f)}"] \\
 & S[(\phi(f))^{-1}]
\end{tikzcd}$$

komutiraju po definiciji morfizama $\tilde{\phi}_{Y_f}$ i $\tilde{\phi}_{Y_g}$ te zbog jednakosti $\alpha_f = \alpha_f^g \alpha_g$ i $\alpha_{\phi(f)} = \alpha_{\phi(f=}^{\phi(g)} \alpha_{\phi(g)}$.
Iz ovoga slijedi da je i dijagram

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & S \\
{\scriptstyle\alpha_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{\phi(g)}} \\
R[g^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{Y_g}} & S[(\phi(g))^{-1}] \\
{\scriptstyle\alpha_f^g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{\phi(f)}^{\phi(g)}} \\
R[f^{-1}] & \xrightarrow[\tilde{\phi}_{Y_f}]{} & S[(\phi(f))^{-1}]
\end{array}$$

komutativan, pa posebno komutira kvadrat

$$\begin{array}{ccc}
R[g^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{\phi}_{Y_g}} & S[(\phi(g))^{-1}] \\
{\scriptstyle\alpha_f^g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{\phi(f)}^{\phi(g)}} \\
R[f^{-1}] & \xrightarrow[\tilde{\phi}_{Y_f}]{} & S[(\phi(f))^{-1}]
\end{array}$$

Time smo pokazali da postoje jedinstveni morfizmi $\tilde{\phi}_V$ za glavne otvorene skupove $V = Y_f$. Sada nastavljamo kao u dokazu leme 5.2.6. Za proizvoljan otvoren podskup $W \subseteq Y$ i njegovu prasliku V, komutativni dijagram s egzaktnim redovima

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(W,\tilde{R}) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}\Gamma(Y_{f_i},\tilde{R}) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I}\Gamma(Y_{f_i}\cap Y_{f_j},\tilde{R}) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(V,\tilde{S}) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}\Gamma(X_{\phi(f_i)},\tilde{S}) & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I}\Gamma(X_{\phi(f_i)}\cap X_{\phi(f_j)},\tilde{S})
\end{array}$$

proširimo morfizmom $\tilde{\phi}_W : \Gamma(W,\tilde{R}) \to \Gamma(V,\tilde{S})$ do komutativnog dijagrama. Time dobivamo morfizme prstenova i za ostale otvorene skupove i dobro definirano jedinstveno preslikavanje prstenovanih prostora. □

Ova propozicija ima za posljedicu sljedeću bijekciju:

Propozicija 5.3.2. *Neka su R i S komutativni prsteni s jedinicom i $X = Spec(R)$, $Y = Spec(S)$ pripadni spektri. Tada je preslikavanje*

$$\Phi : Hom((X,\tilde{R}),(Y,\tilde{S})) \to Hom(S,R), \quad (f,f^{\#}) \mapsto f_Y^{\#}$$

bijektivno.

Dokaz. Vidjeli smo u prethodnoj propoziciji da svakom homomorfizmu prstenova možemo pridružiti jedinstveni morfizam prstenovanih prostora. Upravo to pridruživanje je inverzno preslikavanju Φ iz iskaza. □

Može se pokazati da vrijede i sljedeće tvrdnje o morfizmima prstenovanih prostora:

Propozicija 5.3.3. *Za homomorfizme prstenova $R \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{\psi} T$, kompozicija morfizama prstenovanih prostora*

$$(Spec(T), \tilde{T}) \xrightarrow{(Spec(\psi), \tilde{psi})} (Spec(S), \tilde{S}) \xrightarrow{(Spec(\phi), \tilde{\phi})} (Spec(R), \tilde{R})$$

jednaka je morfizmu $(Spec(T), \tilde{T}) \xrightarrow{(Spec(\psi\phi), \tilde{\psi\phi})} (Spec(R), \tilde{R})$.

Propozicija 5.3.4. *Neka je $X = Spec(R)$, $(X, \tilde{R})$ prstenovani prostor i $X_f \subseteq X$ glavni otvoreni podskup. Tada je prstenovani prostor $(X_f, \tilde{R}|_{X_f})$ također oblika $(Spec(R'), \tilde{R}')$ za $R' = R[f^{-1}]$.*

Dokazi ovih propozicija mogu se pronaći u [19], poglavlje 3.7.

Izračunajmo vlati snopa $\tilde{R}$. Po definiciji je za točku $\mathfrak{p} \in X$ vlat u $\mathfrak{p}$

$$\tilde{R}_{\mathfrak{p}} = colim_{\mathfrak{p} \in U} \Gamma(U, \tilde{R}),$$

pri čemu kolimes uzimamo po svim otvorenim okolinama točke $\mathfrak{p}$. Međutim, opet je dovoljno gledati samo bazne okoline za koje imamo eksplicitni opis prstena $\Gamma(X_f, \tilde{R}) = R[f^{-1}]$. Za dokaz ovoga i općenitu diskusiju o opisu snopova na bazi topološkog prostora vidi [25], sekciju 6.30.
Sada računamo

$$\tilde{R}_{\mathfrak{p}} = colim_{f \in R,\ f \notin \mathfrak{p}} R[f^{-1}] = R_{\mathfrak{p}}.$$

Dakle, vlati snopa su lokalni prstenovi pa zaključujemo da je $(Spec(R), \tilde{R})$ lokalno prstenovani prostor.

Definicija 5.3.2. Afina shema *je lokalno prstenovan prostor izomorfan (kao lokalno prstenovan prostor) spektru $Spec(R)$ za neki prsten R.*
Morfizam afinih shema *je morfizam lokalno prstenovanih prostora.*

Afine sheme zajedno s morfizmima afinih shema čine kategoriju afinih shema koju ćemo označavati s **AffSch**. Naime, vidjeli smo da je kompozicija morfizama prstenovanih prostora opet morfizam prstenovanih prostora, a očito je očuvan i uvjet lokalnosti.

Do sada dokazane rezultate onda možemo sumirati ovako:
Postoji kontravarijantni funktor

$$Spec : \mathbf{CRing} \to \mathbf{AffSch}$$

s kategorije komutativnih prstenova s jedinicom **CRing** u kategoriju afinih shema **AffSch** koji prstenu R pridružuje lokalno prstenovani prostor $(Spec(R), \tilde{R})$, a homomorfizmu prstenova $\phi : R \to S$ morfizam lokalno prstenovanih prostora $(Spec(\phi), \tilde{\phi})$.
Obratno, imamo kontravarijantni funktor

$$\mathcal{O} : \mathbf{AffSch} \to \mathbf{CRing}$$

s kategorije afinih shema **AffSch** u kategoriju komutativnih prstenova s jedinicom **CRing** koji afinoj shemi $(X, \mathcal{O}_X)$ pridružuje prsten globalnih prereza $\mathcal{O}_X(X)$, a morfizmu shema $f : X \to Y$ homomorfizam $f_Y^{\#} : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$.
Dakle, kategorija komutativnih prstenova s jedinicom dualna je kategoriji afinih shema.

5.4 Snopovi modula

Do sada smo se bavili samo strukturnim snopovima na topološkim prostorima, a sada počinjemo proučavati snopove modula.

Definicija 5.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ prstenovani prostor.* Snop $\mathcal{O}_X$-modula *(ili samo* $\mathcal{O}_X$-modul*) je snop $\mathcal{F}$ na X takav da je za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$, grupa $\mathcal{F}(U)$ $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-modul, a za svaku inkluziju otvorenih podskupova $V \subseteq U$, restrikcija $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ je kompatibilna sa strukturom modula.*
Morfizam snopova $\mathcal{O}_X$-modula *$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je morfizam snopova takav da je za svaki otvoreni podskup $U \subseteq X$ preslikavanje $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ homomorfizam $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-modula.*

Opišimo preciznije što znači zahtjev kompatibilnosti restrikcija sa strukturom modula. Za svaki $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ je $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-modul, što znači da postoji djelovanje $\delta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$.
Nadalje, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{O}_X$ su snopovi, pa za inkluziju otvorenih skupova $U \subseteq V \subseteq X$ imamo restrikcije prereza s V na U. Sada uvjet kompatibilnosti zapravo znači da sljedeći dijagram komutira za sve $U \subseteq U \subseteq X$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\delta_V} & \mathcal{F}(V) \\ {\scriptstyle res_U^V \otimes res_U^V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res_U^V} \\ \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\delta_U} & \mathcal{F}(U). \end{array}$$

Sada ćemo gledati poseban slučaj snopa modula definiranog na prstenovanom prostoru $(Spec(R), \tilde{R})$ pridruženog modulu M nad prstenom R.

Potpuno analogno lokalizaciji prstena, možemo definirati lokalizaciju modula. Opet nas posebno zanima slučaj lokalizacije po multiplikativnom skupu potencija nekog elementa $S = \{f^n \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$, za element $f \in R$.
Za R-modul M i element $f \in R$, postoji R-modul $M[f^{-1}]$ čiji su elementi oblika $\frac{m}{f^n}$ za $m \in M$ i $n \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, postoji kanonski homomorfizam $\alpha_f : M \to M[f^{-1}]$ koji preslikava $m \in M$ u $\frac{m}{1}$.
I u ovom slučaju, vrijedi univerzalno svojstvo lokalizacije koje glasi:
Ako su M i N R-moduli i $\rho : M \to N$ homomorfizam te f djeluje na N bijektivno, onda postoji jedinstveni morfizam $\sigma : M[f^{-1}] \to N$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[dr, "\rho"'] & M[f^{-1}] \arrow[d, "\sigma"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Definicija 5.4.2. *Neka je R komutativan prsten s jedinicom i M R-modul. Definiramo* snop pridružen modulu M *kao snop $\tilde{M}$ na topološkom prostoru $Spec(R)$ određen djelovanjem na bazi sa*

$$\tilde{M}(X_f) = M[f^{-1}].$$

Kao i kod strukturnog snopa, inkluzija $X_g \subseteq X_f$ inducira jedinstveni morfizam

$$res_{X_f}^{X_g} : M[f^{-1}] \to M[g^{-1}]$$

dobiven iz univerzalnog svojstva lokalizacije.

Ista konstrukcija snopa kao u lemi 5.2.6 funkcionira i u ovom slučaju. Štoviše, ta konstrukcija je dobra i za snopove skupova, snopove grupa itd. (vidi [3], Lema 4, poglavlje 6.6). Dakle, zadavanjem snopa na bazi topologije zaista možemo dobiti dobro definiran snop $\mathcal{O}_X$-modula, to jest, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 5.4.1. *Neka je R komutativni prsten s jedinicom, M R-modul i $\tilde{M}$ snop na $X = Spec(R)$ pridružen modulu M. Tada je $\tilde{M}$ $\mathcal{O}_X$-modul.*

Analogno svojstvima snopa prstenova $\tilde{R}$, za snop $\tilde{M}$ vrijede i sljedeća svojstva:

- Za svaki $f \in R$, $\Gamma(X_f, \tilde{M}) = M[f^{-1}]$ je $R[f^{-1}]$-modul.
- Za $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, vlat $\tilde{M}_{\mathfrak{p}}$ je lokalni prsten $M_{\mathfrak{p}}$.

- Pridruživanje $M \mapsto \tilde{M}$ je funktorijalno u M.

Štoviše, vrijede sljedeća svojstva funktora $\tilde{\cdot}$:

Propozicija 5.4.2. *Funktor koji R-modulu M pridružuje $\tilde{R}$-modul $\tilde{M}$, a homomorfizmima R-modula odgovarajuće morfizme snopova je egzaktan, pun i vjeran funktor.*

Dokaz. Sjetimo se, vlati snopa $\tilde{M}$ su oblika $M_{\mathfrak{p}}$ za svaku točku $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. Funktor $\tilde{\cdot}$ je egzaktan jer je funktor lokalizacije egzaktan, a egzaktnost je dovoljno provjeriti na vlatima (vidi Lemu 17.3.1 u [25]).

Tvrdnja da je ovaj funktor pun i vjeran znači da postoji bijekcija između skupova morfizama modula $Hom(M, N)$ i $Hom(\tilde{M}, \tilde{N})$ za sve R-module M i N.
Homomorfizmu $\phi : M \to N$ pridružimo kanonski morfizam snopova $\tilde{\phi} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ čije su komponente za svaki glavni otvoreni skup X_f homomorfizmi $R[f^{-1}]$-modula $M[f^{-1}] \to N[f^{-1}]$.
Inverzno preslikavanje definiramo ovako: svakom morfizmu snopova ψ pridružimo komponentu ψ_X. Da je ovo preslikavanje zaista inverzno slijedi iz činjenice da je $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$ za svaki R-modul M. □

Štoviše, možemo dokazati i sljedeću jaču tvrdnju:

Propozicija 5.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Spec(R), \tilde{R})$ afina shema, M R-modul i $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-modul. Tada postoji izomorfizam*

$$Hom(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong Hom(\tilde{M}, \mathcal{F}).$$

Dokaz. Ponovno je preslikavanje $Hom(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \to Hom(\tilde{M}, \mathcal{F})$ dano s $\phi \mapsto \tilde{\phi}$, kao u prethodnoj propoziciji. Inverzno preslikavanje je opet $\psi \mapsto \psi_X$. Naime, iz univerzalnog svojstva lokalizacije sijedi da dijagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ M[f^{-1}] \arrow[r, "\exists! \psi_{X_f}"] & \Gamma(X_f, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

komutira za svaki $f \in R$, pa su komponente ψ_{X_f} jedinstveno određene s ψ_X. □

Ova propozicija nam govori da su funktori $\tilde{(-)}$ i $\Gamma(X, -)$ adjungirani.

Definicija 5.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{O}_X)$ afina shema. Kažemo da je snop $\mathcal{O}_X$-modula $\mathcal{F}$* kvazi-koherentan *ako postoji otvoreni pokrivač $\{U_i\}_i$ takav da za svaki element pokrivača U_i postoji neki komutativni prsten s jedinicom R_i takav da je $U_i \cong Spec(R_i)$, te postoji R_i-modul M_i takav da je $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$.*

Propozicija 5.4.4. *Neka je* $(X, \mathcal{O}_X) = (Spec(R), \tilde{R})$ *afina shema i* $\mathcal{F}$ *kvazi-koherentan* $\mathcal{O}_X$ *modul. Tada je* $\mathcal{F}$ *izomorfan snopu pridruženom* R*-modulu* $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Dokaz. Uzmemo modul $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Tada iz prethodne propozicije slijedi da postoji morfizam snopova $\alpha : \tilde{M} \to \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ je kvazi-koherentan pa postoji pokrivač $\{X_i := X_{f_i}\}_i$ takav da su $\mathcal{F}|_{X_i} \cong \tilde{M_i}$ za neke $R[f_i^{-1}]$-module M_i.
Ali $\Gamma(X_i, \mathcal{F})$ je izomorfan s $M[f_i^{-1}]$, pa je $M_i \cong M[f_i^{-1}]$. Slijedi da je α restringiran na X_i izomorfizam za svaki X_i iz pokrivača, pa je α izomorfizam i na cijelom X. □

Ova propozicija nam govori da ako se ograničimo samo na kvazi-koherentne $\mathcal{O}_X$-module, onda funktor $\tilde{\cdot}$ postaje i esencijalno surjektivan. Dakle, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 5.4.4. *Neka je* R *komutativan prsten s jedinicom i* $(Spec(R), \tilde{R})$ *afina shema. Funktor*

$$(\tilde{-}) : \mathbf{R-Mod} \to \mathbf{Qcoh(Spec(R))}$$

koji djeluje sa $M \mapsto \tilde{M}$ *daje ekvivalenciju kategorije* R*-modula i kategorije kvazi-koherentnih* $\tilde{R}$*-modula. Inverzni funktor*

$$\Gamma(X, -) : \mathbf{Qcoh(Spec(R))} \to \mathbf{R-Mod}$$

kvazi-koherentnom $\tilde{R}$*-modulu* $\mathcal{F}$ *pridružuje* R*-modul* $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Poglavlje 6

Funktorijalna i nekomutativna algebarska geometrija

U ovom poglavlju prelazimo na novi pristup algebarskoj geometriji u kojem afine sheme definiramo kao reprezentabilne funktore $\mathbf{K} - \mathbf{cAlg} \to \mathbf{Set}$ poznate kao *funktore točaka*. Ovaj pristup algebarskoj geometriji zove se *funktorijalna algebarska geometrija* i osim što olakšava neke standardne konstrukcije u teoriji shema, također omogućava jednostavan prijelaz na nekomutativni slučaj.
Funktorijalnu geometriju razvijali su Michel Demazure i Pierre Gabriel, a i Grothendieck je u svom predavanju [7] iz 1973. zagovarao prelazak na funktorijalnu geometriju. Detaljnije o njoj može se čitati u knjizi Demazurea i Gabriela [4]. Jedan moderniji pregled funktorijalne geometrije može se naći u [10].

6.1 Geometrijski i kvantni prostori

Neka je K polje, A proizvoljna komutativna K-algebra i neka su $p_1, ..., p_m \in K[x_1, ..., x_n]$ polinomi s koeficijentima iz K. Tada algebri A možemo pridružiti zajedničke nultočke polinoma $p_1, ..., p_m$ u A^n, to jest, skup

$$\mathcal{X}(A) = \{(a_1, ..., a_n) \in A^n \ : \ p_i(a_1, ..., a_n) = 0, \text{ za sve } i = 1, ..., m\}.$$

Neka su A i B K-algebre i $f : A \to B$ homomorfizam K-algebri. Njemu možemo pridružiti funkciju $\mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(A) \to \mathcal{X}(B)$ koja djeluje sa

$$\mathcal{X}(f)(a_1, ..., a_n) = (f(a_1), ..., f(a_n)).$$

Uočimo, za $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{X}(A)$ je

$$p_i(\mathcal{X}(f)(a_1, ..., a_n)) = p_i(f(a_1), ..., f(a_n)) = f(p_i(a_1, ..., a_n)) = f(0) = 0,$$

pa je $\mathcal{X}(f)$ dobro definirano.
Očito onda za $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ vrijedi $\mathcal{X}(g \circ f) = \mathcal{X}(g) \circ \mathcal{X}(f)$, pa je $\mathcal{X} : \mathbf{K-cAlg} \to \mathbf{Set}$ funktor iz kategorije komutativnih K-algebri u kategoriju skupova.

Definicija 6.1.1. *Funktor* $\mathcal{X} : \mathbf{K-cAlg} \to \mathbf{Set}$ *zovemo* afina shema *definirana polinomima* $p_1, ..., p_m$*, a za* K*-algebru* A*, elemente skupa* $\mathcal{X}(A)$ *nazivamo* A-točkama *afine sheme* $\mathcal{X}$*.*

Teorem 6.1.2. *Afina shema* $\mathcal{X}$ *definirana polinomima* $p_1, ..., p_m$ *je reprezentabilan funktor s reprezentirajućom algebrom*

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) = K[x_1, ..., x_n]/I(p_1, ..., p_m).$$

Dokaz. Svaka n-torka $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ određuje homomorfizam algebri $f : K[x_1, ..., x_n] \to A$ definiran s $x_i \mapsto a_i$, $i = 1, ..., n$, to jest, $f(p) = p(a_1, ..., a_n)$, za sve $p \in K[x_1, ..., x_n]$.
Sada je $(a_1, ..., a_n)$ zajednička nultočka polinoma $p_1, ..., p_m$ ako i samo ako je $f(p_1) = 0$, to jest, ako i samo ako su $p_1, ..., p_m$ u jezgri homomorfizma f. Ovo je pak ekvivalentno s uvjetom da se f poništava na idealu $I(p_1, ..., p_m)$, a u tom se slučaju f faktorizira kroz kanonski epimorfizam $K[x_1, ..., x_n] \to K[x_1, ..., x_n]/I(p_1, ..., p_m)$.
Tako dobivamo bijekciju

$$Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(K[x_1, ..., x_n]/I(p_1, ..., p_m), A) \ni f \mapsto (f(x_1), ..., f(x_n))\mathcal{X}(A).$$

Za sve K-algebre A i B te homomorfizam $\phi : A \to B$ sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(\mathcal{O}(\mathcal{X}), A) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{X}(A) \\ {\scriptstyle Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(\phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{X}(\phi)} \\ Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(\mathcal{O}(\mathcal{X}), B) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{X}(B) \end{array}$$

po definiciji ovih preslikavanja, iz čega zaključujemo da su funktori $\mathcal{X}$ i $Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(\mathcal{O}(\mathcal{X}), -)$ prirodno izomorfni. □

Definicija 6.1.3. *Algebru* $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ *nazivamo* afinom algebrom funktora $\mathcal{X}$*.*

Uočimo, afine algebre afinih shema su konačnogenerirane komutativne K-algebre, a zbog Hilbertovog teorema o bazi je svaka takva algebra afina algebra neke afine sheme. Onda zbog gornjeg izomorfizma funktora da možemo definirati:

Definicija 6.1.4. Afina shema *je svaki reprezentabilni funktor*

$$Hom_{\mathbf{K-Aff}}(A, -) : \mathbf{K-Aff} \to \mathbf{Set}.$$

Afine sheme zajedno s prirodnim transformacijama čine kategoriju **AffSch** afinih shema nad K.
Funktor koji afinoj algebri A pridružuje afinu shemu reprezentiranu s A označavamo sa

$$Spec : \mathbf{K} - \mathbf{Aff} \to \mathbf{AffSch}.$$

Ovaj funktor određuje dualnost kategorija konačnogeneriranih komutativnih K-algebri i afinih shema. Naime, prema Yonedinoj lemi je funktor $Spec$ pun i potpun, a po definiciji afinih shema, on je i esencijalno surjektivan. Dakle, radi se o ekvivalenciji kategorija.

Općenitije, možemo promatrati proizvoljne komutativne K-algebre (ne nužno konačnogenerirane). One također definiraju reprezentabilne funktore na kategoriji komutativnih K-algebri $\mathbf{K} - \mathbf{cAlg}$ koje onda zovemo *geometrijskim prostorima.*

Sljedeći cilj nam je pokazati da i uz ove apstraktne definicije geometrijskih prostora, pripadajuću afinu algebru (reprezentirajuću algebru) možemo shvaćati kao algebru funkcija na tom geometrijskom prostoru.

Definicija 6.1.5. *Neka je $\mathcal{X}$ geometrijski prostor s afinom algebrom A te neka je D proizvoljna algebra. Prirodna transformacija $\rho : D \times \mathcal{X} \to \mathbb{A}$ zove se* djelovanje algebre *ako je za svaki $B \in \mathbf{K} - \mathbf{cAlg}$ i $p \in \mathcal{X}(B)$ preslikavanje $\rho(B)(-, p) : D \to B$ homomorfizam algebri.*

Ovdje ćemo samo skicirati dokaz sljedećeg teorema, a detalji se mogu pronaći u [20], Teorem 1.1.11, str. 9.

Teorem 6.1.6. *Neka je $\mathcal{X}$ geometrijski prostor s pripadajućom afinom algebrom A. Tada je A izomorfan skupu prirodnih transformacija $Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A})$ kao K-algebra, gdje $\mathbb{A}$ označava zaboravni funktor $\mathbf{K} - \mathbf{cAlg} \to \mathbf{Set}$.*
Izomorfizam $A \cong Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A})$ inducira prirodnu transformaciju čije su komponente djelovanja algebre $A \times \mathcal{X}(B) \to B$ (prirodnu u B).

Skica dokaza. Uočimo, zaboravni funktor $\mathbb{A}$ je reprezentabilan s reprezentirajućom algebrom $K[x]$, pa po Yonedinoj lemi imamo

$$Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A}) = Nat(\mathbf{K} - \mathbf{cAlg}(A, -), \mathbf{K} - \mathbf{cAlg}(K[x], -)) \cong$$

$$\cong \mathbf{K} - \mathbf{cAlg}(K[x], A) = \mathbb{A}(A) \cong A.$$

Dakle, A i $Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A})$ su izomorfni kao skupovi. Sada se može pokazati da $Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A})$ ima strukturu K-algebre te da se ona podudara sa strukturom K-algebre na A.

Sada za K-algebru B opisujemo djelovanje algebre $A \times \mathcal{X}(B) \to B$. Prema gornjem izomorfizmu K-algebri, elementu $a \in A$ odgovara jedinstvena prirodna transformacija $\mathcal{X} \to \mathbb{A}$ s komponentom $\mathcal{X}(B) \to B$. Sada za $p : A \to B$, B-točku u $\mathcal{X}(B) = Hom_{\mathbf{K-cAlg}}(A, B)$, definiramo djelovanje $(a, p) \mapsto p(a)$.
Zbog ovakve definicije i činjenice da je p homomorfizam algebri slijedi da se radi o djelovanju algebre. Budući da za proizvoljan homomorfizam K-algebri $f : B \to B'$ sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \times \mathcal{X}(B) \arrow[r] \arrow[d, "A\times\mathcal{X}(f)"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \times \mathcal{X}(B') \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

zaključujemo da se zaista radi o prirodnoj transformaciji. □

Sada je jednostavno prijeći na nekomutativni slučaj. Definiramo:

Definicija 6.1.7. *Neka je A K-algebra (ne nužno komutativna). Tada funktor*

$$\mathcal{X} := \mathbf{K} - \mathbf{Alg}(A, -) : \mathbf{K} - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$$

reprezentiran algebrom A zovemo nekomutativan geometrijski prostor *ili* kvantni prostor*.*
Morfizmi kvantnih prostora *su prirodne transformacije između ovih prostora.*
Uz uobičajenu kompoziciju prirodnih transformacija, dobivamo kategoriju kvantnih prostora koju označavamo s **QS**.

Kao i u komutativnom slučaju, elemente skupa $\mathbf{K} - \mathbf{Alg}(A, B)$ nazivamo *B-točkama*, a homomorfizmi kvantnih prostora su prirodne transformacije.
Također, vrijedi analogon Teorema 0.45.:

Teorem 6.1.8. *Ako je A K-algebra koja reprezentira kvantni prostor $\mathcal{X}$, onda postoji izomorfizam K-algebri $A \cong Nat(\mathcal{X}, \mathbb{A})$ i taj izomorfizam inducira prirodnu transformaciju $A \times \mathcal{X} \to \mathbb{A}$.*

Zato algebru A možemo shvaćati kao algebru funkcija koja djeluje na kvantnom prostoru $\mathcal{X}$.
Osim toga, A je univerzalna algebra s tim svojstvom, to jest, vrijedi tvrdnja sljedeće propozicije:

Propozicija 6.1.1. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor, D neka K-algebra i $\rho : D \times \mathcal{X} \to \mathbb{A}$ djelovanje algebre. Tada postoji jedinstveni homomorfizam K-algebri $f : D \to A$ za koji sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} D \times \mathcal{X}(B) \arrow[d, "f \times id"'] \arrow[dr, "\rho(B)"] & \\ A \times \mathcal{X}(B) \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Sada želimo bolje opisati strukturu kategorije kvantnih prostora **QS**.

Definicija 6.1.9. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor s algebrom funkcija A i neka je $\mathcal{X}_c$ restrikcija funktora $\mathcal{X}$ na kategoriju komutativnih algebri* $\mathbf{K} - \mathbf{cAlg}$*. Tada funktor $\mathcal{X}_c$ zovemo* komutativni dio kvantnog prostora *$\mathcal{X}$.*

Definicija 6.1.10. *Neka su A i A' algebre funkcija kvantnih prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ i neka je B proizvoljna K-algebra. Kažemo da su B-točke $p : A \to B$ u $\mathcal{X}(B)$ i $p' : A' \to B$ u $\mathcal{X}'(B)$* komutirajuće točke *ako slike homomorfizama p i p' komutiraju.*

Definicija 6.1.11. *Za kvantne prostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, funktor $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y} :$* $\mathbf{K} - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ *definiran djelovanjem na objektima sa*

$$(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B) = \{(p, p') \in \mathcal{X}(B) \times \mathcal{Y}(B) \ : \ p \text{ i } p' \text{ komutiraju}\},$$

a na morfizmima sa

$$(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(f) : (\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B) \to (\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B'), \quad (p, p') \mapsto (f \circ p, f \circ p')$$

za homomorfizam algebri $f : B \to B'$, zove se ortogonalni produkt *kvantnih prostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$.*

Ortogonalni produkt $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ je zaista dobro definiran funktor $\mathbf{K} - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ jer za homomorfizam algebri $f : B \to B'$ imamo:

$$(f \circ p)(a)(f \circ p')(a') = f(p(a)p'(a')) = f(p'(a')p(a)) = (f \circ p')(a')(f \circ p)(a),$$

pa točke $f \circ p$ i $f \circ p'$ komutiraju.

Propozicija 6.1.2. *Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ kvantni prostori, onda je i $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ kvantni prostor s algebrom funkcija $\mathcal{O}(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}) = \mathcal{O}(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{Y})$.*

Dokaz. Označimo $A = \mathcal{O}(\mathcal{X})$ i $A' = \mathcal{O}(\mathcal{Y})$. Neka je $(p, p') \in (\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B)$ par komutirajućih točaka. Tada postoji jedinstveni homomorfizam algebri $h : A \otimes A' \to B$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "p"'] & A \otimes A' \arrow[d, "h"] & A' \arrow[l, "\imath'"'] \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

i on na elementarnim tenzorima djeluje sa $h(a \otimes a') = p(a)p'(a')$.
Za proizvoljan homomorfizam $h : A \otimes A' \to B$, slike elemenata $a \otimes 1$ i $1 \otimes a'$ komutiraju jer ti elementi komutiraju u $A \otimes A'$, pa h određuje jedan par komutirajućih točaka (p, p') definiran sa $p(a) = h(a \otimes 1)$ i $p'(a') = h(1 \otimes a')$.
Dakle, imamo izomorfizam

$$(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y})(B) \cong \mathbf{K} - \mathbf{Alg}(A \otimes A', B)$$

pa je $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ kvantni prostor s algebrom funkcija $A \otimes A'$. □

Nadalje, ortogonalni produkt je asocijativan, to jest, za kvantne prostore $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ vrijedi $(\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}) \perp \mathcal{Z} \cong \mathcal{X} \perp (\mathcal{Y} \perp \mathcal{Z})$.
Osim toga, imamo istaknuti kvantni prostor $\mathcal{E}$ s reprezentirajućom algebrom K za koji vrijedi $\mathcal{X} \perp \mathcal{E} \cong \mathcal{X} \cong \mathcal{E} \perp \mathcal{X}$. Dakle, kategorija kvantnih prostora **QS** je monoidalna kategorija u kojoj je ortogonalni produkt $\perp$ tenzorski produkt.

6.2 Kvantni monoidi

Postojanje tenzorskog produkta omogućuje nam da govorimo o monoidima u kategoriji **QS**.

Definicija 6.2.1. *Neka je $\mathcal{M}$ kvantni prostor, a $m : \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ i $e : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ morfizmi u* **QS** *takvi da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \arrow[r, "m \perp id"] \arrow[d, "id \perp m"'] & \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \perp \mathcal{E} \cong \mathcal{M} \cong \mathcal{E} \perp \mathcal{M} \arrow[r, "id \perp e"] \arrow[d, "e \perp id"'] \arrow[dr, "id"] & \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Tada za trojku $(\mathcal{M}, m, e)$ kažemo da je kvantni monoid.

Ova dodatna struktura na kvantnom prostoru $\mathcal{M}$ odražava se i na pripadnoj algebri funkcija, što dokazujemo u sljedećoj propoziciji.

Definicija 6.2.2. *Neka je C vektorski prostor nad K i neka su $\Delta : C \to C \otimes C$ i $\epsilon : C \to K$ linearna preslikavanja za koja sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "id"] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon \otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \epsilon"] & C \otimes K \cong C \cong K \otimes C \end{tikzcd}$$

Tada C zovemo koalgebrom.

Definicija 6.2.3. Bialgebra *je vektorski prostor koji je istovremeno algebra i koalgebra te su preslikavanja Δ i ϵ iz definicije koalgebre homomorfizmi algebri.*

Propozicija 6.2.1. *Neka je $\mathcal{M}$ kvantni prostor s algebrom funkcija H. Tada je H bialgebra ako i samo ako je $\mathcal{M}$ kvantni monoid.*

Dokaz. Kvantni prostori $\mathcal{M}$ i $\mathcal{E}$ reprezentirani su algebrama H i K respektivno, pa su $\mathcal{M} \perp \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \perp \mathcal{E}$ i $\mathcal{E} \perp \mathcal{M}$ reprezentirani algebrama $H \otimes H$, $H \otimes K \cong H$ i $K \otimes H \cong H$.
Prema Yonedinoj lemi, za sve algebre A, B postoji prirodni izomorfizam

$$Hom(\mathbf{K} - \mathbf{Alg}(A, -), \mathbf{K} - \mathbf{Alg}(B, -)) \cong \mathbf{K} - \mathbf{Alg}(A, B),$$

pa posebno imamo izomorfizam između morfizama kvantnih prostora $m : \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ i homomorfizama algebri $\Delta : H \to H \otimes H$ te između morfizama kvantnih prostora $e : \mathcal{E} \to \mathcal{M}$ i homomorfizama algebri $\epsilon : H \to K$.
Također, po Yonedinoj lemi dijagrami iz definicije kvantnog monoida komutiraju ako i samo ako komutiraju dijagrami iz definicije koalgebre u $\mathbf{K} - \mathbf{Alg}$. $\square$

Definicija 6.2.4. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor i $\mathcal{M}$ kvantni monoid. Morfizam kvantnih prostora $\rho : \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ zove se* djelovanje monoida $\mathcal{M}$ na $\mathcal{X}$ *ako sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \perp \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "m \perp id"] \arrow[d, "id \perp \rho"] & \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \cong \mathcal{E} \perp \mathcal{X} \arrow[r, "e\perp id"] \arrow[dr, "id"'] & \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "\rho"] \\
& \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

*U tom slučaju, kažemo da je $\mathcal{X}$ $\mathcal{M}$-*prostor.

Propozicija 6.2.2. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor s algebrom funkcija A i $\mathcal{M}$ kvantni monoid s algebrom funkcija H. Neka je $\rho : \mathcal{M} \perp \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ morfizam kvantnih prostora i $f : A \to H \otimes A$ odgovarajući morfizam algebri. Tada je ρ djelovanje monoida $\mathcal{M}$ na $\mathcal{X}$ ako i samo ako je A H-komodul.*

I ovaj dokaz se, kao i prethodni, temelji na dualnosti pojmova djelovanja i kodjelovanja te na Yonedinoj lemi, pa ga izostavljamo.

Definicija 6.2.5. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor. Kvantni prostor $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ zajedno s morfizmom $\mu : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \perp \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ zove se* univerzalni kvantni prostor za $\mathcal{X}$ *ako za svaki kvantni prostor $\mathcal{Y}$ i morfizam $f : \mathcal{Y} \perp \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ postoji jedinstveni morfizam $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}(\mathcal{X})$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \perp \mathcal{X} \arrow[d, "g\perp id"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathcal{M}(\mathcal{X}) \perp \mathcal{X} \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

Dualno, u terminima algebri imamo sljedeću definiciju:

Definicija 6.2.6. *Neka je A K-algebra. K-algebra $M(A)$ zajedno s homomorfizmom $\delta : A \to M(A) \otimes A$ zove se* univerzalna algebra za A *(ili algebra s univerzalnim kodjelovanjem na A) ako za svaku K-algebru B i homomorfizam $f : A \to B \otimes A$ postoji jedinstveni homomorfizam algebri $g : M(A) \to B$ za koji sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "g\otimes id"] \\
& B \otimes A
\end{tikzcd}$$

Ako univerzalni kvantni prostor postoji, onda je on kvantni monoid koji djeluje na $\mathcal{X}$ i univerzalni je monoid s tim svojstvom. Dualno, ako univerzalna algebra postoji, onda ona ima strukturu bialgebre i A postaje $M(A)$-komodul te je $M(A)$ univerzalna bialgebra s tim svojstvom.

Elemente univerzalnog monoida koji djeluje na $\mathcal{X}$ shvaćamo kao endomorfizme kvantnog prostora. Dualno onda elemente univerzalne bialgebre shvaćamo kao koendomorfizme, pa definiramo:

Definicija 6.2.7. *Neka je A K-algebra. Univerzalna algebra $M(A)$ za A zove se još* bialgebra koendomorfizama od A.

Općenito, algebra A ne mora imati univerzalnu bialgebru, no za posebne klase algebri, univerzalna bialgebra se uvijek može konstruirati. Primjerice, imamo teorem Tambare koji glasi

Teorem 6.2.8. *(Tambara)*
Neka je A konačnodimenzionalna K-algebra. Tada postoji univerzalna algebra $M(A)$ zajedno s morfizmom algebri $\delta : A \to M(A) \otimes A$.

Konstrukcija ove univerzalne algebre može se pronaći u [20], Teorem 1.3.12, str. 24.

6.3 Hopfove algebre i kvantne grupe

Rezimirajmo dosadašnje rezultate. U prvom dijelu ovog poglavlja definirali smo što je kvantni (nekomutativni geometrijski) prostor X i kvantni monoid $M(X)$ (univerzalni kvantni prostor pridružen kvantnom prostoru X). Elemente kvantnog monoida koji djeluju na kvantnom prostoru X shvaćamo kao endomorfizme tog kvantnog prostora.
S algebarske (dualne) strane, promatrali smo K-algebre i njima pridružene univerzalne algebre $M(A)$ s kodjelovanjem $A \to M(A) \otimes A$ za koje je pokazano da su bialgebre. Time A postaje $M(A)$-komodul.
Pokazano je također da svi konačni kvantni prostori imaju univerzalni kvantni monoid s morfizmom kvantnih prostora $\mu : M(X) \perp X \to X$. Dualno, svaka konačnodimenzionalna K-algebra A ima univerzalnu bialgebru $M(A)$ uz koju postaje $M(A)$ komodul preko kodjelovanje $\delta : A \to M(A) \otimes A$. To je Tambarin teorem.

Međutim, nas više zanimaju automorfizmi kvantnih prostora, a ne endomorfizmi. Automorfizmi bi uz kompoziciju trebali činiti grupu, pa tražimo strukturu grupe na kvantnim monoidima, to jest, tražimo kvantne grupe. To je lako za učiniti u komutativnom slučaju (tj ako je reprezentirajuća algebra kvantnog monoida komutativna) - to su afine algebarske grupe.
U nekomutativnom slučaju, istim postupkom nećemo dobiti grupe u smislu teorije kategorija, pa je u ovom slučaju traženje grupe automorfizama teže.

Krećemo s proučavanjem Hopfovih algebri koje će biti reprezentirajući objekti za kvantne grupe.

Definicija 6.3.1. *Neka je $(H, \Delta, \epsilon, \nabla, \eta)$ bialgebra. Za K-linearni homomorfizam $S : H \to H$ kažemo da je* lijevi antipod za H *ako sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & K \arrow[r, "\eta"] & H \\ H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes id"] & & H \otimes H \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

Kažemo da je homomorfizam $S : H \to H$ desni antipod za H *ako komutira sljedeći dijagram:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\Delta"] & K \arrow[r, "\eta"] & H \\ H \otimes H \arrow[rr, "id \otimes S"] & & H \otimes H \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

Ako je S i lijevi i desni antipod, zovemo ga samo antipodom.
Ako postoji antipod S, kažemo da je H Hopfova algebra.

Napomena 6.3.2. *Svaki homomorfizam bialgebri je kompatibilan s antipodom, pa za homomorfizme Hopfovih algebri uzimamo homomorfizme pripadnih bialgebri. To znači da je kategorija Hopfovih algebri **K-Hopf** puna potkategorija kategorije bialgebri.*

Prije nego što pomoću Hopfovih algebri definiramo kvantne grupe, definirat ćemo pojam grupe u proizvoljnoj kategoriji. Najčešće se one definiraju koristeći kategorijski produkt, međutim možemo ih jednostavno definirati i u kategorijama bez produkta.

Definicija 6.3.3. *Neka je $\boldsymbol{C}$ proizvoljna kategorija i $G \in \boldsymbol{C}$ proizvoljan objekt. Za svaki $X \in \boldsymbol{C}$ označimo $G(X) := Hom_{\boldsymbol{C}}(X, G)$, za svaki $f : X \to Y$, $G(f) = Hom_{\boldsymbol{C}}(f, G)$, a za svaki $f : G \to G'$, $f(X) := Hom_{\boldsymbol{C}}(X, f)$.*
Kažemo da je G uz prirodnu transformaciju $m : G(-) \times G(-) \to G(-)$ grupa (monoid) *u $\boldsymbol{C}$ ako su skupovi $G(X)$ s operacijama $m(X) : G(X) \times G(X) \to G(X)$ grupe (monoidi) s množenjem $m(X)$ za svaki $X \in \boldsymbol{C}$.*
Kogrupe (komonoidi) *u $\boldsymbol{C}$ su grupe (monoidi) u kategoriji $\boldsymbol{C}^{op}$.*

Definicija 6.3.4. *Neka su (G, m) i (G', m') grupe u $\boldsymbol{C}$. Morfizam $f : G \to G'$ je* homomorfizam grupa *ako sljedeći dijagram komutira za svaki $X \in \boldsymbol{C}$:*

$$\begin{tikzcd} G(X) \times G(X) \arrow[r, "m(X)"] \arrow[d, "f(X) \times f(X)"'] & G(X) \arrow[d, "f(X)"] \\ G'(X) \times G'(X) \arrow[r, "m'(X)"] & G'(X) \end{tikzcd}$$

Napomena 6.3.5. *Ako kategorija* $\boldsymbol{C}$ *ima konačne produkte, onda se ova definicija grupe podudara s uobičajenom definicijom koja koristi produkte.*

Pogledajmo kako ove konstrukcije izgledaju u kategorijama **K-cAlg** komutativnih K-algebri i **K-cCoalg** komutativnih K-koalgebri.

Definicija 6.3.6. Afina algebarska grupa *je grupa u kategoriji komutativnih geometrijskih prostora.*
Dualno, afina algebarska grupa je reprezentirana kogrupom u ***K-cAlg****.*

Propozicija 6.3.1. *Neka je* $H \in$ ***K-cAlg****.* H *je reprezentirajući objekt za funktor* ***K-cAlg*** $\to$ ***Gr*** *ako i samo ako je* H *Hopfova algebra.*

Zahtjev da je geometrijski prostor **K-cAlg** $\to$ **Set** grupa znači upravo da se radi o (reprezentabilnom) funktoru **K-cAlg** $\to$ **Gr**, pa nam gornja propozicija kaže da je geometrijski prostor afina algebarska grupa ako i samo ako mu je reprezentirajuća algebra Hopfova algebra. Odnosno, kategorija komutativnih Hopfovih algebri dualna je kategoriji afinih algebarskih grupa.

Definicija 6.3.7. *Formalna grupa je grupa u kategoriji* ***K-cCoalg*** *kokomutativnih koalgebri.*

Analogno prethodnoj propoziciji, može se pokazati da je reprezentirajuća algebra formalne grupe kokomutativna Hopfova algebra i obratno, svaka kokomutativna Hopfova algebra je reprezentirajuća algebra neke formalne grupe.
Dakle, kategorija kokomutativnih Hopfovih algebri je dualna kategoriji formalnih grupa.

Sada želimo ovu situaciju poopćiti na sve Hopfove algebre (i nekomutativne i nekokomutativne), pa sukladno prethodnim razmatranjima definiramo:

Definicija 6.3.8. *Funktor* $\mathbf{K} - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ *reprezentiran Hopfovom algebrom zove se* kvantna grupa.

Teorem 6.3.9. *Neka je* B *bialgebra. Tada postoji Hopfova algebra* $H(B)$ *i homomorfizam bialgebri* $i : B \to H(B)$ *takav da za svaku Hopfovu algebru* H *i homomorfizam bialgebri* $f : B \to H$ *postoji jedinstveni homomorfizam Hopfovih algebri* $g : H(B) \to H$ *uz koji sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & H(B) \arrow[d, "g"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Sjetimo se sada da smo ranije za neke (na primjer, sve konačnodimenzionalne) K-algebre A konstruirali univerzalnu bialgebru $M(A)$ s kodjelovanjem $A \to M(A) \otimes A$. Onda iz prethodnog teorema dobivamo i preslikavanje $\delta' : A \to H(M(A)) \otimes A$ uz koje je A komodul nad Hopfovom algebrom $H(M(A))$.
Ako je H Hopfova algebra i A H-komodul uz kodjelovanje $\eta : A \to H \otimes A$, onda po univerzalnom svojstvu od $M(A)$ postoji jedinstveni homomorfizam bialgebri $f : M(A) \to H$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\eta"'] & M(A) \otimes A \arrow[d, "f \otimes id"] \\ & H \otimes A \end{tikzcd}$$

Nadalje, iz univerzalnog svojstva od $H(M(A))$ (iz prethodnog teorema) dobivamo da se f faktorizira kroz jedinstveni homomorfizam Hopfovih algebri $\overline{f} : H(M(A)) \to H$, pa i sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta'"] \arrow[dr, "\eta"'] & H(M(A)) \otimes A \arrow[d, "\overline{f} \otimes id"] \\ & H \otimes A \end{tikzcd}$$

Prelaskom na kvantne prostore pomoću ranije dobivene dualnosti dobivamo sljedeći rezultat:

Teorem 6.3.10. *Neka je $\mathcal{X}$ kvantni prostor s univerzalnim kvantnim monoidom $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Tada postoji jedinstvena kvantna grupa $\mathcal{H}(\mathcal{M}(\mathcal{X}))$ koja djeluje na $\mathcal{X}$.*

Kvantnu grupu iz prethodnog teorema shvaćamo kao grupu kvantnih automorfizama na $\mathcal{X}$.
U sljedećem poglavlju bavimo se rekonstrukcijom upravo takvih objekata simetrije, grupa, kvantnih grupa i Hopfovih algebri iz pripadnih kategorija reprezentacija.

Poglavlje 7

Tannakina rekonstrukcija

U fizici, proučavanje simetrija svodi se na proučavanje grupa ili Liejevih algebri i njihovih reprezentacija, to jest, na proučavanje djelovanja grupa i Liejevih algebri na prostor. U ovom poglavlju obrađujemo novi tip rekonstrukcije u kojem objekt simetrije kao što je grupa rekonstruiramo iz pripadne kategorije reprezentacija. Povijesno, Tannaka-Kreinova dualnost nastala je kao poopćenje Pontrjaginove dualnosti, prema kojoj je kategorija lokalno kompaktnih Abelovih grupa dualna samoj sebi, na slučaj ne nužno Abelovih grupa.
Kasnije su dobivena i mnoga druga poopćenja ove dualnosti, a nas će još zanimati Tannakina rekonstrukcija za kvantne grupe za koje smo vidjeli da predstavljaju grupe automorfizama kvantnih prostora. Budući da su kvantne grupe reprezentirane Hopfovim algebrama, ovaj se problem svodi na proučavanje koreprezentacija Hopfovih algebri.

Ideja Tannakine rekonstrukcije je sljedeća:
Za objekt simetrije A, gledamo pripadnu kategoriju reprezentacija $\mathbf{Rep}(\mathbf{A})$ i zaboravni funktor F s $\mathbf{Rep}(\mathbf{A})$ koji se u ovoj situaciji često zove *funktor vlakna*. Tada A možemo rekonstruirati iz funktora F kao objekt endomorfizama od F, $End(F)$.

7.1 Tannakina rekonstrukcija za grupe i direktna poopćenja

Najprije dokazujemo jednostavan slučaj Tannakine rekonstrukcije za grupe u kojem se jasno vidi formalizacija gornje ideje rekonstrukcije. Iz tog dokaza bit će jasno da ista tvrdnja vrijedi i u nešto većoj općenitosti, primjerice za monoide.

Neka je G grupa. Svaku grupu možemo promatrati u svjetlu teorije kategorija kao grupoid s jednim objektom, to jest, kao kategoriju $\mathbf{\Sigma G}$ koja ima samo jedan objekt $\star$, dok je grupa izomorfizama $Hom_{\mathbf{\Sigma G}}(\star, \star)$ s operacijom kompozicije izomorfna početnoj grupi G.

Definicija 7.1.1. Reprezentacija grupe G na skupu X *je svaki homomorfizam* $\rho : G \to Aut(X)$ *s* G *u grupu automorfizama od* X*.*

Primjećujemo da reprezentaciju ρ onda možemo opisati kao funktor $\mathbf{\Sigma G} \to \mathbf{Set}$ koji jedinstveni objekt $\star$ od $\mathbf{\Sigma G}$ preslikava u skup X, te osim toga zadaje preslikavanje $Hom_{\mathbf{\Sigma G}}(\star, \star) \cong G \to Aut(X)$. Zato kategoriju reprezentacija grupe G $\mathbf{Rep_{Set}(G)}$ definiramo kao kategoriju funktora $[\mathbf{\Sigma G}, \mathbf{Set}]$.

Promatramo zaboravni funktor $F : \mathbf{Rep_{Set}}(G) \to \mathbf{Set}$ koji šalje svaku reprezentaciju ρ u odgovarajući skup $\rho(\star)$.

U upravo definiranoj situaciji imamo sljedeću tvrdnju:

Teorem 7.1.2. *Postoji izomorfizam grupa* $Aut(F) \cong G$*.*

Dokaz. Najprije želimo dokazati da je F reprezentabilan funktor. U tu svrhu, promotrimo Yonedino ulaganje $Y : \mathbf{\Sigma G} \to \mathbf{Rep_{Set}}(G)$, koje djeluje sa $\star \mapsto Y\star = \mathbf{\Sigma G}(\star, -)$. Prema Yonedinoj lemi, za svaku reprezentaciju $\rho \in \mathbf{Rep_{Set}}(G)$ imamo:

$$Nat(Y\star, \rho) = Nat(\mathcal{G}(\star, -), \rho) \cong \rho(\star) = F(\rho)$$

i taj izomorfizam je prirodan u ρ. Dakle, imamo prirodni izomorfizam funktora F i $Nat(Y\star, -)$, pa vidimo da je F reprezentabilni funktor.

Sada dvostrukom primjenom Yonedine leme dobivamo:

$$Aut(F) = Aut(Nat(Y\star, -)) = Nat(Nat(Y\star, -), Nat(Y\star, -)) \cong$$
$$\cong Nat(Y\star, Y\star) = Nat(\mathbf{\Sigma G}(\star, -), \mathbf{\Sigma G}(\star, -)) \cong \mathbf{\Sigma G}(\star, \star) \cong G$$

. □

Iz gornjeg dokaza vidimo da možemo dobiti neka direktna poopćenja ovog teorema. Naime, ako uzmemo bilo koji monoid M umjesto grupe G, možemo ga promatrati kao kategoriju $\mathbf{\Sigma M}$ s jednim objektom $\star$ i skupom morfizama $Hom_{\mathbf{\Sigma M}}(*, *) = M$. Definiramo kategoriju reprezentacija monoida M, $\mathbf{Rep_{Set}(M)}$, kao kategoriju funktora $[\mathbf{\Sigma M}, \mathbf{Set}]$, te funktor $F : \mathbf{Rep_{Set}(M)} \to \mathbf{Set}$ koji šalje reprezentaciju ρ u skup $\rho(*)$. Tada kao gore možemo dokazati $M \cong End(F)$.

Još općenitije, ako je $\mathcal{C}$ bilo koja lokalno mala kategorija, onda za nju vrijedi Yonedina lema, pa možemo ovako generalizirati gornju situaciju:
Promatramo kategoriju reprezentacija $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}, Set]$ i za svaki objekt $c \in \mathcal{C}$ definiramo funktor $F_c : \mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Set}$ koji evaluira reprezentaciju u c, to jest, $F_c(\rho) = \rho(c)$.
Tada kao i u slučaju grupa iz Yonedine leme slijedi da je funktor F_c prirodno izomorfan funktoru $Hom_{\mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{C})}(Yc, -)$, gdje je Yc slika objekta c po Yonedinom ulaganju $\mathcal{C} \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{C})$. Onda kao gore možemo dokazati da je $Hom(F_c, F_{c'}) \cong Hom(c, c')$.

7.2 Reprezentacije kvantnih grupa

Sada krećemo na proučavanje teorije reprezentacija kvantnih grupa. Zanima nas koje informacije o kvantnoj grupi ili Hopfovoj algebri sadrži kategorija njihovih reprezentacija i kakva je struktura te kategorije.

Definicija 7.2.1. *Neka je A K-algebra s množenjem $m : A \otimes A \to A$ i morfizmom $e : K \to A$.* A-modul *je vektorski prostor M nad K zajedno s linearnim preslikavanjem $\rho : A \otimes M \to M$ za koje sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\rho"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\rho"] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes M \arrow[r, "e\otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Definicija 7.2.2. *Neka je C koalgebra s komnoženjem Δ i kojediničnim morfizmom ϵ nad poljem K.* C-komodul *vektorski prostor M zajedno s linearnim preslikavanjem $\delta : M \to C \otimes M$ za koje sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & C \otimes M \arrow[d, "id\otimes\delta"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\cong"'] & C \otimes M \arrow[d, "\epsilon\otimes id"] \\ & K \otimes M \end{tikzcd}$$

Definicija 7.2.3. *Neka je A algebra nad poljem K. Tada svaki A-modul zovemo* reprezentacijom od A *i kategoriju reprezentacija od A označavamo s* ***A-Mod****.*
Ako je C koalgebra nad K, onda s ***C-Comod*** *označavamo kategoriju C-komodula čije objekte nazivamo* koreprezentacijama od C.

Analogno, ako imamo bialgebru B, možemo definirati reprezentaciju od B kao B-modul. Štoviše u slučaju bialgebre, moći ćemo kanonski definirati i tenzorski produkt reprezentacija pa će kategorija reprezentacija **B-Mod** biti monoidalna kategorija. Također, imat ćemo kanonski tenzorski produkt koreprezentacija.

Postavlja se pitanje kako definirati reprezentaciju kvantne grupe ili Hopfove algebre koje imaju dodatnu strukturu. Najprije ćemo promotriti reprezentacije "običnih" grupa.

Definicija 7.2.4. *Neka je G konačna grupa.* Reprezentacija od G *je vektorski prostor M s homomorfizmom grupa $G \to Aut(M)$*

Ekvivalentno, reprezentaciju konačne grupe G možemo opisati kao modul nad grupovnom algebrom KG, $KG \otimes M \to M$.

Neka je $U : \mathbf{K} - \mathbf{Alg} \to \mathbf{Gr}$ funktor iz kategorije K-algebri u kategoriju grupa koji algebri A pridružuje grupu invertibilnih elemenata $\{a \in A \ : \ \exists a^{-1}\}$. *Grupovna algebra* konačne grupe G nad poljem K je algebra KG zajedno s homomorfizmom grupa $\imath : G \to U(KG)$ takva da za svaku drugu algebru A i homomorfizam grupa $f : G \to U(A)$ postoji jedinstveni homomorfizam algebri $g : KG \to A$ za koji sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "f"'] & U(KG) \arrow[d, "g"] \\ & U(A) \end{tikzcd}$$

Elemente grupovne algebre KG shvaćamo kao linearne kombinacije elemenata iz G $\sum_{g\in G} \lambda_g g$, za $\lambda_g \in K$, a množenje je onda definirano sa

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g)(\sum_{h\in G} \mu_h h) = \sum_{g\in G, h\in G} \lambda_g \mu_h gh.$$

Ako imamo reprezentaciju $\rho : G \to Aut(M)$ konačne grupe G, onda

$$(\sum_{g\in G} \lambda_g g)v := \sum_{g\in G} \lambda_g \rho(v)$$

za sve $v \in M$ definira strukturu KG-modula na V. Naime, aksiomi modula slijede direktno korištenjem linearnosti i činjenice da je ρ homomorfizam grupa.

Obratno, ako je M KG-modul uz linearno preslikavanje $r : KG \otimes M \to M$, onda je za svaki $g \in G$ $r(g, -) : M \to M$ automorfizam vektorskog prostora M (s inverzom $r(g^{-1}, -)$), a iz aksioma modula slijedi da je za sve $g, h \in G$

$$r(gh, -) = r(g, -) \circ r(h, -),$$

pa je pridruživanje $g \mapsto r(g, -)$ homomorfizam grupa. Dakle, struktura KG-modula na M određuje reprezentaciju $G \to Aut(M)$.

Lema 7.2.5. *Grupovna algebra KG konačne grupe G je Hopfova algebra.*

Skica dokaza. Komnoženje dobivamo iz univerzalnog svojstva grupovne algebre iz dijagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "f"'] & KG \arrow[d, "\Delta"] \\ & KG \otimes KG \end{tikzcd}$$

gdje je f definiran s $f(g) = g \otimes g$.
Kojedinični morfizam dobivamo iz

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "f"'] & KG \arrow[d, "\epsilon"] \\ & K \end{tikzcd}$$

gdje je $f(g) = 1$.
Konačno, antipod dobivamo iz

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "f"'] & KG \arrow[d, "\S"] \\ & KG \end{tikzcd}$$

gdje je $f(g) = g^{-1}$. □

Grupovna algebra KG je vektorski prostor s bazom G, pa je homomorfizam $KG \to K$ u potpunosti određen djelovanjem na elementima grupe G. Zato je $Hom_{\mathbf{K-Alg}}(KG, K) \cong Hom_{\mathbf{Set}}(G, K)$, pa je dual algebre KG skup funkcija $G \to K$, $Hom_{\mathbf{Set}}(G, K) =: K^G$.

Dualni objekti dolaze uz morfizme evaluacije i dualne baze $ev : KG \otimes K^G \to K$ i $db : K \to K^G \otimes KG$ pomoću kojih ćemo uspostaviti korespondenciju između KG-modula i K^G-komodula. (Više i preciznije o dualnim objektima govorit ćemo kasnije).

Ako imamo KG-modul M s djelovanjem $KG \otimes M \xrightarrow{\rho} M$, onda ga možemo prirodno opskrbiti strukturom K^G-komodula definirajući ovako kodjelovanje:

$$M \cong K \otimes M \xrightarrow{db \otimes id} K^G \otimes KG \otimes M \xrightarrow{id \otimes \rho} K^G \otimes G.$$

Slično, ako je M K^G-komodul uz kodjelovanje $M \xrightarrow{\delta} K^G \otimes M$, onda je M i KG-modul uz djelovanje

$$KG \otimes M \xrightarrow{id \otimes \delta} KG \otimes K^G \otimes M \xrightarrow{ev \otimes id} K \otimes M \cong M.$$

Dakle, reprezentacije grupe G su zapravo KG-moduli, a oni odgovaraju K^G-komodulima, pri čemu je K^G prostor funkcija na G.
Vidjeli smo da Hopfovu algebru H koja reprezentira kvantnu grupu $\mathcal{G}$ možemo shvatiti kao algebru funkcija na $\mathcal{G}$, pa je time motivirana sljedeća definicija:

Definicija 7.2.6. *Neka je $\mathcal{G}$ kvantna grupa s reprezentirajućom Hopfovom algebrom H. Tada definiramo* reprezentaciju od *$\mathcal{G}$ kao H-komodul.*

Svaka Hopfova algebra posebno je i bialgebra, a već smo najavili da ćemo imati kanonsku definiciju tenzorskog produkta H-modula i H-komodula za svaku bialgebru H. U sljedećoj lemi to i dokazujemo.

Napomena 7.2.7. *Kod rada s koalgebrama koristimo Sweedlerovu notaciju: ako je (C, Δ, e) koalgebra, onda Δ preslikava neki element $c \in C$ u element od $C \otimes C$ koji je stoga oblika $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ za neke $a_i, b_i \in C$. Prema Sweedlerovoj notaciji, umjesto uvođenja novih simbola, jednostavno pišemo $\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_{(1)i} \otimes c_{(2)i}$ ili još jednostavnije $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$.*

Lema 7.2.8. *Neka je B bialgebra i neka su $M, N \in$ **B-Mod** dva B-modula. Tada $M \otimes N$ ima strukturu B-modula uz djelovanje $B \otimes (M \otimes N) \to M \otimes N$ definirano sa $b(m \otimes n) = \sum b_{(1)}m \otimes b_{(2)}n$.*
Ako su $f : M \to M'$ i $g : N \to N'$ homomorfizmi B-modula, onda je i $f \otimes g : M \otimes M' \to N \otimes N'$ homomorfizam B-modula.

Dokaz. Ako su M i N K-vektorski prostori, onda je to i $M \otimes N$, pa trebamo samo pokazati da je gore definirano preslikavanje djelovanje B na $M \otimes N$.
Reprezentacije M i N možemo ekvivalentno gledati kao homomorfizme K-algebri $\alpha : B \to End(M)$ i $\beta : B \to End(N)$. Onda je i preslikavanje

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes \beta} End(M) \otimes End(N) \to End(M \otimes N)$$

također homomorfizam K-algebri, pa je $M \otimes N$ B-modul.
Prema gornjem preslikavanju imamo djelovanje $B \otimes (M \otimes N) \to M \otimes N$ definirano sa

$$b(m \otimes n) = (\alpha \otimes \beta)\left(\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}\right)(m \otimes n) = \left(\sum \alpha(b_{(1)}) \otimes \beta(b_{(2)})\right)(m \otimes n) =$$

$$= \sum \alpha(b_{(1)})(m) \otimes \beta(b_{(2)})(n) = \sum b_{(1)}m \otimes b_{(2)}n.$$

Također je

$$1(m \otimes n) = 1m \otimes 1n = m \otimes n.$$

Ako su f i g homomorfizmi B-modula, onda imamo

$$(f \otimes g)(b(m \otimes n)) = (f \otimes g)\left(\sum b_{(1)}m \otimes b_{(2)}n\right) = \sum f(b_{(1)}m) \otimes g(b_{(2)}n) =$$

$$= \sum b_{(1)}f(m) \otimes b_{(2)}g(n) = b(f(m) \otimes g(n)) = b(f \otimes g)(m \otimes n).$$

Dakle, $f \otimes g$ je homomorfizam B-modula. □

Napomena 7.2.9. *Vidimo da smo u dokazu prethodne leme koristili komnoženje Δ, pa nam je zaista bila potrebna struktura bialgebre da bismo mogli konstruirati djelovanje $B \otimes (M \otimes N) \to M \otimes N$.*

Iz ove leme slijedi da je $\otimes$: **B-Mod** $\times$ **B-Mod** $\to$ **B-Mod** funktor. Naime, pokazali smo da je tenzorski produkt B-modula opet B-modul te da je tenzorski produkt homomorfizama B-modula opet homomorfizam B-modula, a ostala potrebna svojstva su naslijeđena iz kategorije K-vektorskih prostora.

Slično, tenzorski produkt B-komodula je opet B-komodul:

Lema 7.2.10. *Neka je B bialgebra i $M, N \in$ **B-Comod** B-komoduli. Tada je i $M \otimes N$ B-komodul uz kodjelovanje $\delta(m \otimes n) = \sum m_{(1)}n_{(1)} \otimes m_{(M)} \otimes n_{(N)}$.*
Ako su $f : M \to M'$ i $g : N \to N'$ homomorfizmi B-komodula, onda je i $f \otimes g : M \otimes M' \to N \otimes N'$ homomorfizam B-komodula.

Iz ovog rezultata zaključujemo da je i $\otimes$: **B-Comod** $\times$ **B-Comod** $\to$ **B-Comod** funktor.

Funktor tenzoriranja na **B-Mod** također zadovoljava sljedeća svojstva:

- postoji prirodni izomorfizam α između funktora $\otimes \circ (\otimes \times id)$ i $\otimes \circ (id \times \otimes)$ s komponentama $\alpha_{M,N,P} : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P)$, $(m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p)$;

- postoji prirodni izomorfizam λ između funktora $K \otimes -$ i id s komponentama $\lambda_M : K \otimes M \to M$, $k \otimes m \mapsto km$;
- postoji prirodni izomorfizam ρ između funktora $- \otimes K$ i id s komponentama $\rho_M : M \otimes K \to M$, $m \otimes k \mapsto km$;
- sljedeći dijagrami komutiraju za sve $M, N, P, Q \in$ **B-Mod**:

$$\begin{tikzcd}
((M \otimes N) \otimes P) \otimes Q \arrow[r, "\alpha_{M,N,P} \otimes id"] \arrow[d, "\alpha_{M \otimes N,P,Q}"] & (M \otimes (N \otimes P)) \otimes Q \arrow[r, "\alpha_{M,N \otimes P,Q}"] & M \otimes ((N \otimes P) \otimes Q) \arrow[d, "id \otimes \alpha_{N,P,Q}"] \\
(M \otimes N) \otimes (P \otimes Q) \arrow[rr, "\alpha_{M,N,P \otimes Q}"] & & M \otimes (N \otimes (P \otimes Q))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes K) \otimes N \arrow[rr, "\alpha_{M,K,N}"] \arrow[dr, "\rho_M \otimes id"'] & & M \otimes (K \otimes N) \arrow[dl, "id \otimes \lambda_N"] \\
& M \otimes N &
\end{tikzcd}$$

Ova svojstva nam govore da je **B-Mod** monoidalna kategorija s inicijalnim objektom K, prirodnim izomorfizmom asocijativnosti α te jediničnim i kojediničnim prirodnim izomorfizmom λ i ρ.

Analogni rezultati mogu se pokazati za **B-Comod**, pa zaključujemo da je i to monoidalna kategorija.

Pogledajmo sada zaboravni funktor $\mathcal{U}$: **B-Mod** $\to$ **Vec**. Ako su $M, N \in$ **B-Mod** proizvoljni objekti, a f i g proizvoljni morfizmi u **B-Mod**, onda vrijedi

$$\mathcal{U}(M \otimes N) = \mathcal{U}(M) \otimes \mathcal{U}(N),$$
$$\mathcal{U}(f \otimes g) = f \otimes g,$$
$$\mathcal{U}(K) = K \quad i$$
$$\mathcal{U}(\alpha) = \alpha,\ \mathcal{U}(\lambda) = \lambda,\ \mathcal{U}(\rho) = \rho$$

(α, λ i ρ su asocijator te jedinični i kojedinični izomorfizmi iz definicije monoidalne kategorije).

Iz ovih svojstava slijedi da je zaboravni funktor $\mathcal{U}$ monoidalni funktor.
Opet, analogni rezultat može se dokazati za zaboravni funktor na kategoriji komodula $\mathcal{U}$: **C-Comod** $\to$ **Vec**.

Sada neke od ovih pojmova želimo definirati u općenitim monoidalnim kategorijama. Primjerice, algebru i koalgebru možemo definirati općenito ovako:

Definicija 7.2.11. *Neka je* $\boldsymbol{C}$ *proizvoljna monoidalna kategorija.* Algebra *u* $\boldsymbol{C}$ *je objekt* A *s množenjem* $\nabla : A \otimes A \to A$ *i jediničnim morfizmom* $\eta : I \to A$ *uz koje sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\nabla"] \arrow[d, "\nabla\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\nabla"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes A \cong A \cong A \otimes I \arrow[r, "id\otimes\eta"] \arrow[d, "\eta\otimes id"'] \arrow[dr, "id"] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\nabla"] & A
\end{tikzcd}$$

Neka su A *i* B *algebre u* $\boldsymbol{C}$*.* Morfizam algebri $f : A \to B$ *je morfizam u* $\boldsymbol{C}$ *koji dodatno zadovoljava*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\nabla_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\nabla_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\quad i \quad
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\eta_A"'] \arrow[dr, "\eta_B"] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

.

Potpuno analogno definira se koalgebra C s komnoženjem $\Delta : C \to C \otimes C$ i kojediničnim morfizmom $\epsilon : C \to I$:

Definicija 7.2.12. *Neka je* $\boldsymbol{C}$ *proizvoljna monoidalna kategorija.* Koalgebra *u* $\boldsymbol{C}$ *je objekt* C *s komnoženjem* $\Delta : C \to C \otimes C$ *i kojediničnim morfizmom* $\epsilon : C \to I$ *takvima da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\
C \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "id"] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\epsilon\otimes id"] & I \otimes C \cong C \cong C \otimes I
\end{tikzcd}$$

Za koalgebre $C, D \in \boldsymbol{C}$*,* morfizam koalgebri *je morfizam* $f : C \to D$ *u* $\boldsymbol{C}$ *koji zadovoljava*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D \otimes D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Bialgebra i Hopfova algebra ne mogu se definirati u proizvoljnoj monoidalnoj kategoriji. Naime, u definiciji bialgebre koristi se morfizam koji "zamjenjuje" dvije algebre u tenzorskom produktu, a takav morfizam ne postoji u svakoj monoidalnoj kategoriji. Ako želimo općenitu definiciju bialgebre i Hopfove algebre, moramo promatrati primjerice pleteničaste monoidalne kategorije o kojima ćemo govoriti kasnije.

Sljedeće važno svojstvo koje želimo prenijeti iz kategorije vektorskih prostora u proizvoljnu monoidalnu kategoriju je posjedovanje duala. Kod vektorskih prostora, duali imaju dva svojstva koja daju dva načina za prenošenje pojma duala u proizvoljnu monoidalnu kategoriju.

Prvi način je promatranje skupa linearnih preslikavanja $Hom(V, W)$ između dva vektorska prostora i specijalizacija na funkcionale $Hom(V, K)$.
Drugi način je promatranje preslikavanja koje prirodno dolazi uz dual. *Evaluacija* je preslikavanje $ev : V^* \otimes V \to K$, $ev(f \otimes v) = f(v)$. Osim evaluacije, imamo i preslikavanje $db : K \to V \otimes V^*$ koje je na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima definirano sa $db(\lambda) = \lambda \sum v_i \otimes v^i$, gdje je $\{v_i\}_i$ baza za V, a $\{v^i\}_i$ njoj dualna baza.

Definicija 7.2.13. *Neka je $\boldsymbol{C}$ proizvoljna monoidalna kategorija i $M \in \boldsymbol{C}$ neki objekt. Za objekt $M^* \in \boldsymbol{C}$ s morfizmom $ev : M^* \otimes M \to I$ (evaluacija) kažemo da je* lijevi dual *od M ako postoji morfizam $db : I \to M \otimes M^*$ (dualna baza) u $\boldsymbol{C}$ takav da je*

$$M \xrightarrow{db \otimes id} M \otimes M^* \otimes M \xrightarrow{id \otimes ev} M = id_M \quad i$$

$$M^* \xrightarrow{id \otimes db} M^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{ev \otimes id} M^* = id_{M^*}$$

Kažemo da je monoidalna kategorija $\boldsymbol{C}$ lijevo kruta *ako svaki objekt ima lijevi dual.*

Za objekt ${}^*M \in \boldsymbol{C}$ s morfizmom $ev : M \otimes^* M \to I$ kažemo da je desni dual *od M ako postoji morfizam $I \to^* M \otimes M$ takav da je*

$$M \xrightarrow{id \otimes db} M \otimes^* M \otimes M \xrightarrow{ev \otimes id} M = id_M \quad i$$

$${}^*M \xrightarrow{db \otimes id}{}^* M \otimes M \otimes^* M \xrightarrow{id \otimes ev}{}^* M = id_{{}^*M}.$$

$\boldsymbol{C}$ je desno kruta kategorija *ako svaki objekt ima desni dual.*

Možemo primijetiti da su jednakosti u definiciji dualnih objekata slične uvjetima za adjungiranost funktora. To nije slučajno. Naime, ako je M^* lijevi dual objekta M, onda je funktor $-\otimes M : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ lijevo adjungiran funktoru $-\otimes M^* : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, a funktor $M^* \otimes - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ je lijevo adjungiran funktoru $M \otimes - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Odnosno, imamo prirodne izomorfizme $Hom(- \otimes M, -) \cong Hom(-, - \otimes M^*)$ i $Hom(M^* \otimes -, -) \cong Hom(-, M \otimes -)$.
Obratno, ako je $- \otimes M$ lijevo adjungiran funktoru $- \otimes M^*$, onda je M^* lijevi dual od M.

Definicija 7.2.14. *Neka su $M, N \in \boldsymbol{C}$ i (M^*, ev_M), (N^*, ev_N) njihovi lijevi duali. Za morfizam $f : M \to N$, definiramo njemu* transponirani morfizam *$f^* : N^* \to M^*$ sa*

$$N^* \xrightarrow{id \otimes db_M} N^* \otimes M \otimes M^* \xrightarrow{id \otimes f \otimes id} N^* \otimes N \otimes M^* \xrightarrow{ev_N \otimes id} M^*.$$

Ovime smo definirali kontravarijantni funktor $-^*$ na krutoj kategoriji $\mathbf{C}$ koji objekte preslikava u njihove lijeve duale, a morfizme u njima transponirane morfizme.

Nama važan primjer krutih monoidalnih kategorija su kategorije H-modula i H-komodula za Hopfovu algebru H.

Propozicija 7.2.1. *Neka je H Hopfova algebra. Tada je kategorija konačno dimenzionalnih lijevih H-modula kruta. Za M neki H-modul, $M^* := Hom(M, K)$ je H-modul uz djelovanje*

$$H \otimes Hom(M, K) \to Hom(M, K), \quad (hf)(m) = f(S(h)m).$$

Dokaz. Znamo da je $Hom(M, N)$ vektorski prostor uz operacije po točkama.
Uzmimo sada $h, k \in H$, $f \in Hom(M, N)$ i $m \in M$. Tada je

$$((hk)f)(m) = f(S(hk)m) = f(S(h)S(k)m) = (hf)(S(k)m) = (k(hf))(m).$$

Nadalje,

$$(hf)(m+n) = f(S(h)(m+n)) =$$
$$= f(S(h)m + S(h)n) = f(S(h)m) + f(S(h)n) = (hf)(m) + (hf)(n),$$
$$((h+k)f)(m) = f(S(h+k)m) = f(S(h)m + S(k)m) =$$
$$= f(S(h)m) + f(S(k)m) = (hf)(m) + (kf)(m) \quad i$$
$$(1f)(m) = f(S(1)m) = f(m)$$

jer su f i S homomorfizmi. $\square$

Isto tako, kategorija konačnodimenzionalnih lijevih H-komodula je kruta. Naime, za H-komodul M, $M^* = Hom(M, K)$ će opet biti H-komodul uz kodjelovanje zadano na bazi na sljedeći način:
ako je $\{m_i\}$ baza za M i kodjelovanje na M je $\delta(m_i) = \sum h_{ij} \otimes m_j$, onda je

$$M^* \to H \otimes M^*, \quad d(m^j) = \sum S(h_{ij}) \otimes m^i$$

kodjelovanje na M. (Ovdje m^i označava dualnu bazu.)

Vratimo se sada na prvi način definiranja dualnosti u proizvoljnim monoidalnim kategorijama. Ovaj će pristup biti generalniji od onog koji koristi morfizme ev i db jer se neće oslanjati na rezultate koji vrijede samo za konačnodimenzionalne vektorske prostore, nego na svojstva skupova linearnih preslikavanja $Hom(V, W)$ između vektorskih prostora, bili oni konačno dimenzionalni ili ne.

Definicija 7.2.15. *Neka je $\boldsymbol{C}$ monoidalna kategorija i $V, W \in \boldsymbol{C}$ proizvoljni objekti. Definiramo* unutrašnji hom-objekt $[V, W]$ *kao reprezentirajući objekt (ako postoji) kontravarijantnog funktora $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Set}$ koji preslikava objekt Z u skup $Hom_{\boldsymbol{C}}(Z \otimes V, W)$, a morfizme ϕ u $(\phi \otimes id)^* = - \circ (\phi \otimes id)$.*

Sada vezu s prvom definicijom duala daje sljedeća lema:

Lema 7.2.16. *Neka je $\boldsymbol{C}$ monoidalna kategorija i $V \in \boldsymbol{C}$ kruti objekt. Tada je $[V, W] = W \otimes V^*$ unutrašnji hom-objekt za sve $W \in \boldsymbol{C}$.*

Dokaz. Izomorfizam između $Hom(- \otimes V, W)$ i $Hom(-, W \otimes V^*)$ dobivamo na sljedeći način: za $\phi : Z \otimes V \to W$, definiramo

$$\theta(\phi) = (\phi \otimes id) \circ (id \otimes db_V) : Z \to W \otimes V^*,$$

a obratno, za $\psi : Z \to W \otimes V^*$ definiramo

$$\theta^{-1}(\psi) = (id \otimes ev_V) \circ (\psi \otimes id).$$

□

Primjer 7.2.17. *Neka je H Hopfova algebra. Tada monoidalna kategorija* ***H-Mod*** *H-modula ima unutrašnji hom dan sa $[V, W] = Hom(V, W)$, a djelovanje H na $[V, W]$ je definirano s $(hf)(v) = \sum h_{(1)} f(vS(h_{(2)}))$.*

7.3 Tannaka - Kreinov teorem

Sada stajemo s proučavanjem svojstava kategorije reprezentacija bialgebri i Hopfovih algebri i prelazimo na dokazivanje obrata: zanima nas kada ćemo kategorije s određenim svojstvima moći gledati kao kategoriju reprezentacija neke bialgebre ili Hopfove algebre.

Započinjemo proučavanjem dijagrama $\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ za $\mathbf{C}$ monoidalnu kategoriju, kojima ćemo pridružiti univerzalnu koalgebru $coend(\omega)$. Ako pretpostavimo da je $\mathbf{D}$ monoidalna kategorija, dobit ćemo dodatno množenje na $coend(\omega)$, odnosno dobit ćemo strukturu bialgebre. Konačno, ako je $\mathbf{D}$ kruta, a ω monoidalni funktor, dobit ćemo i antipod, pa će $coend(\omega)$ biti Hopfova algebra.
Također, dokazat ćemo da je za specijalan dijagram ω_A pridružen konačno dimenzionalnoj algebri A, $coend(\omega_A)$ izomorfan kao bialgebra univerzalnoj bialgebri $M(A)$ (reprezentirajućoj bialgebri za prostor endomorfizama kvantnog prostora reprezentiranog algebrom A).

U nastavku ćemo raditi sa sljedećim objektima:
Neka je $\mathbf{D}$ proizvoljna kategorija, $\mathbf{C}$ kopotpuna monoidalna kategorija u kojoj tenzorski produkt čuva kolimese u oba argumenta. Nadalje, s $\mathbf{C}_0$ označavamo punu potkategoriju objekata u $\mathbf{C}$ koji imaju lijevi dual. (Nama najvažniji primjer bit će kategorija $\mathbf{C} = \mathbf{Vect}$ vektorskih prostora, a $\mathbf{C}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{Vect}$ konačnodimenzionalnih vektorskih prostora.)

Neka je $\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ dijagram takav da je $\omega(X) \in \mathbf{C}_0$ za sve $X \in \mathbf{D}$.

Konačno, za $M \in \mathbf{C}$ označimo s $\omega \otimes M : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktor definiran sa $(\omega \otimes M)(X) = \omega(X) \otimes M$.

Uz ove oznake, možemo dokazati sljedeći ključni teorem:

Teorem 7.3.1. *(Tannaka-Krein) Neka je $\omega : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ dijagram takav da je $\omega(X) \in \boldsymbol{C}_0$ za sve $X \in \boldsymbol{D}$. Tada postoji objekt $coend(\omega) \in \boldsymbol{C}$ i prirodna transformacija $\delta : \omega \to \omega \otimes coend(\omega)$ sa sljedećim univerzalnim svojstvom: za svaki objekt $M \in \boldsymbol{C}$ i prirodnu transformaciju $\phi : \omega \to \omega \otimes M$ postoji jedinstveni morfizam $\tilde{\phi} : coend(\omega) \to M$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\phi"'] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, "id\otimes\tilde{\phi}"] \\ & \omega \otimes M. \end{tikzcd}$$

Dokaz. Definiramo novu kategoriju $\tilde{\mathbf{D}}$ na sljedeći način:
Za svaki morfizam $f : X \to Y$, postoji objekt $\tilde{f} \in \tilde{\mathbf{D}}$. Za svaki morfizam $f : X \to Y$ u $\mathbf{D}$, definiramo dva morfizma u $\tilde{\mathbf{D}}$, $f_1 : \tilde{f} \to \tilde{id_X}$ i $f_2 : \tilde{f} \to \tilde{id_Y}$. Nadalje, imamo identitete $id_{\tilde{f}}$. Jedina moguća kompozicija je $(id_X)_1 \circ f_j$ i definiramo ju sa $(id_X)_1 \circ f_j := f_j$, za $i, j = 1, 2$.
Definiramo dalje dijagram $\omega^* \otimes \omega : \tilde{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}$ ovako:
za $f : X \to Y$ u $\mathbf{D}$ definiramo

$$(\omega^* \otimes \omega)(\tilde{f}) := \omega(Y)^* \otimes \omega(X),$$

$$(\omega^* \otimes \omega)(f_1) := \omega(f)^* \otimes \omega(id_X),$$
$$(\omega^* \otimes \omega)(f_2) := \omega(id_Y)^* \otimes \omega(f).$$

Kolimes dijagrama $\omega^* \otimes \omega$ se onda sastoji od objekta $coend(\omega) \in \mathbf{C}$ i familije morfizama $\imath(X, X) : \omega(X)^* \otimes \omega(X) \to coend(\omega)$ takvih da sljedeći dijagram komutira za sve $f : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd}
 & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[dr, "\imath(X,X)"] & \\
(\omega^* \otimes \omega)(\tilde{f}) \arrow[ur, "\omega(f)^* \otimes id"] \arrow[dr, "id \otimes \omega(f)"'] & & coend(\omega) \\
 & \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[ur, "\imath(Y,Y)"'] &
\end{tikzcd}$$

Familiju $\imath(\tilde{X}) := \imath(X, X)$ možemo jedinstveno proširiti do prirodne transformacije definirajući $\imath(\tilde{f}) : (\omega^* \otimes \omega)(\tilde{f}) \to coend(\omega)$ tako da dobijemo komutativan dijagram

$$\begin{tikzcd}
 & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[dr, "\imath(X,X)"] & \\
(\omega^* \otimes \omega)(\tilde{f}) \arrow[ur, "\omega(f)^* \otimes id"] \arrow[rr, "\imath(\tilde{f})"] \arrow[dr, "id \otimes \omega(f)"'] & & coend(\omega) \\
 & \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[ur, "\imath(Y,Y)"'] &
\end{tikzcd}$$

Ovo je točno konstrukcija univerzalnog objekta koji se u literaturi zove *coend* bifunktora $\omega^* \otimes \omega : \mathbf{D}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$.

Sada definiramo prirodnu transformaciju $\delta : \omega \to \omega \otimes coend(\omega)$ po komponentama. Morfizam $\delta(X) : \omega(X) \to \omega(X) \otimes coend(\omega)$ definiramo sa

$$\omega(X) \xrightarrow{db \otimes id} \omega(X) \otimes \omega(X)^* \otimes \omega(X) \xrightarrow{id \otimes \imath(X,X)} \omega(X) \otimes coend(X).$$

Po vezi između dualnosti objekata i adjungiranosti odgovarajućih funktora onda dobivamo da je $\imath(X,X) = (id \otimes ev) \circ (id \otimes \delta(X))$.

Uzmimo sada proizvoljan morfizam $f : X \to Y$ u $\mathbf{D}$. Tada dijagram

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "db_X"] \arrow[d, "db_Y"'] & \omega(X) \otimes \omega(X)^* \arrow[d, "\omega(f)\otimes id"] \\
\omega(Y) \otimes \omega(Y)^* \arrow[r, "id\otimes\omega(f)^*"] & \omega(Y) \otimes \omega(X)^*
\end{tikzcd}$$

komutira, pa komutira i sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[r, "db\otimes id"] \arrow[dr, "db\otimes id"'] \arrow[dd, "\omega(f)"'] & \omega(X) \otimes \omega(X)^* \omega(X) \arrow[rr, "id\otimes\imath(X,X)"] \arrow[dr, "\omega(f)\otimes id\otimes id"] & & \omega(X) \otimes coend(\omega) \arrow[dd, "\omega(f)\otimes id"] \\
& \omega(Y) \otimes \omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[r, "id\otimes\omega(f)^*\otimes id"] \arrow[dr, "id\otimes id\otimes\omega(f)"'] & \omega(Y) \otimes \omega(X)^* \omega(X) \arrow[dr, "id\otimes\imath(X,X)"] & \\
\omega(Y) \arrow[rr, "db\otimes id"] & & \omega(Y) \otimes \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[r, "id\otimes\imath(Y,Y)"] & \omega(Y) \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti vanjskog pravokutnika dijagrama dobivamo da je δ zaista prirodna transformacija.

Uzmimo sada neki $M \in \mathbf{C}$ i prirodnu transformaciju $\phi : \omega \to \omega \otimes M$. Primijetimo da dijagram

$$\begin{tikzcd}
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[r, "\omega(f)^*\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\omega(f)"'] & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[d, "ev"] \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[r, "ev"] & I
\end{tikzcd}$$

komutira, pa komutira i

$$\begin{tikzcd}
\omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[rr, "id\otimes\phi(X)"] & & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes M \arrow[dr, "ev\otimes id"] & \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[u, "\omega(f)^*\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\omega(f)"'] \arrow[r, "id\otimes\phi(X)"] & \omega(Y)^* \otimes \omega(X) \otimes M \arrow[ur, "\omega(f)^*\otimes id\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes\omega(f)\otimes id"] & & M \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[rr, "id\otimes\phi(Y)"] & & \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \otimes M \arrow[ur, "ev\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

Onda iz definicije kolimesa kao univerzalnog objekta slijedi da postoji jedinstveni morfizam $\tilde{\phi} : coend(\omega) \to M$ takav da je i sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd}
& \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[dr, "\imath(X{,}X)"] \arrow[drr, bend left, "(ev\otimes id)(id\otimes\phi(X))"] & & \\
\omega(Y)^* \otimes \omega(X) \arrow[ur, "\omega(f)^*\otimes id"] \arrow[dr, "id\otimes\omega(f)"'] & & coend(\omega) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & M \\
& \omega(Y)^* \otimes \omega(Y) \arrow[ur, "\imath(Y{,}Y)"'] \arrow[urr, bend right, "(ev\otimes id)(id\otimes\phi(Y))"'] & &
\end{tikzcd}$$

Konačno, komutira i sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \arrow[rr, "\delta(X)"] \arrow[dr, "db\otimes id"] \arrow[ddd, "\phi(X)"'] & & \omega(X) \otimes coend(\omega) \arrow[ddd, "id\otimes\tilde{\phi}"] \\
& \omega(X) \otimes \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[ur, "id\otimes\imath(X{,}X)"] \arrow[d, "id\otimes id\otimes\phi(X)"] & \\
& \omega(X) \otimes \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes M \arrow[dr, "id\otimes ev\otimes id"] & \\
\omega(X) \otimes M \arrow[ur, "db\otimes id\otimes id"] \arrow[rr, "id"] & & \omega(X) \otimes M
\end{tikzcd}$$

Naime, desni četverokut komutira zbog jednakosti $(ev\otimes id)\circ(id\otimes\phi(X)) = \tilde{\phi}\circ\imath(X, X)$ iz prethodnog dijagrama, dok komutativnost ostatka slijedi iz definicija odgovarajućih morfizama. Iz vanjskog pravokutnika ovog dijagrama dobivamo traženu jednakost $\phi = (id \otimes \tilde{\phi}) \circ \delta$.

Preostaje još samo pokazati jedinstvenost morfizma $\tilde{\phi}$. Pretpostavimo da je $\tilde{\phi}_0$ neki drugi morfizam za koji vrijedi $\phi(X) = (id\otimes\tilde{\phi}_0)\delta(X)$ za sve $X \in \mathbf{D}$. Tada sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
& \omega(X)^* \otimes \omega(X) \arrow[dl, "id\otimes\phi(X)"'] \arrow[d, "id\otimes\delta(X)"] \arrow[dr, "\imath(X{,}X)"] & \\
\omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes M \arrow[dr, "ev\otimes id"'] & \omega(X)^* \otimes \omega(X) \otimes coend(\omega) \arrow[l, "id\otimes id\otimes\tilde{\phi}_0"] \arrow[r, "ev\otimes id"] & coend(\omega) \arrow[dl, "\tilde{\phi}_0"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

iz čega slijedi $\tilde{\phi}_0\circ\imath(X, X) = (ev\otimes id)\circ(id\otimes\phi(X))$, pa zaključujemo da je $\tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}$. $\square$

Recimo nešto općenito o *coend*-u i zašto je on logičan izbor univerzalne koalgebre.

Najprije definiramo pojam dijagonalne prirodne transformacije, proširenje pojma prirodne transformacije između funktora.

Definicija 7.3.2. *Neka su* $\mathbf{C}$ *i* $\mathbf{D}$ *dvije kategorije i* $S, T : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funktori.* Dijagonalna prirodna transformacija $\alpha : S \Rightarrow T$ *je familija morfizama* $\alpha_c : S(c,c) \to T(c,c)$ *takva da dijagram*

$$\begin{tikzcd}
 & S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] & T(c,c) \arrow[dr, "T(id,f)"] & \\
S(d,c) \arrow[ur, "S(f,id)"] \arrow[dr, "S(id,f)"'] & & & T(c,d) \\
 & S(d,d) \arrow[r, "\alpha_d"] & T(d,d) \arrow[ur, "T(f,id)"'] &
\end{tikzcd}$$

komutira za svaki morfizam $f : c \to d$ *u* $\mathbf{C}$.

Posebno, možemo gledati dijagonalnu prirodnu transformaciju između funktora S i konstantnog funktora b koji svakom paru objekata iz $\mathbf{C}$ pridružuje objekt $b \in \mathbf{D}$.

U tom slučaju, dijagonalna prirodna transformacija α je familija morfizama $\alpha_c : S(c,c) \to b$ takva da sljedeći dijagram komutira za svaki morfizam $f : c \to d$ u $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd}
S(d,c) \arrow[r, "S(id,f)"] \arrow[d, "S(f,id)"'] & S(d,d) \arrow[d, "\alpha_d"] \\
S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] & b
\end{tikzcd}$$

Ovakva dijagonalna prirodna transformacija zove se *klin*.

Definicija 7.3.3. *Neka je* $S : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funktor. Definiramo coend* funktora S *kao objekt* $d = \int^{c \in \mathbf{C}} S(c,c)$ *kategorije* $\mathbf{D}$ *zajedno s dijagonalnom prirodnom transformacijom (klinom)* $\mu : S \to d$*, univerzalnom među dijagonalnim prirodnim transformacijama sa* S *u konstantu.*

Preciznije, za svaki drugi klin $\alpha : S \to e$ postoji jedinstveni morfizam $f : d \to e$ u $\mathbf{D}$ takav da je $\alpha_c = f \circ \mu_c$ za svaki $c \in \mathbf{C}$.

Slično možemo definirati *end* funktora S:

Definicija 7.3.4. *Neka je* $S : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funktor. Definiramo end* funktora S *kao objekt* $e = \int_{c \in \mathbf{C}} S(c,c)$ *zajedno s dijagonalnom prirodnom transformacijom* $\mu : e \to S$*, univerzalnom među dijagonalnim prirodnim transformacijama iz konstante u* S*.*

Pogledajmo kako izgleda *end* funktora $Hom_{\mathbf{D}}(F(-), G(-))$ u **Set**, gdje su $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ proizvoljni funktori.

$$\int_{X \in \mathbf{C}} Hom_{\mathbf{D}}(FX, GX) =$$

$$= \left\{ (\alpha_X) \in \prod_{X \in \mathbf{C}} \ : \ \forall f : X \to Y,\ Hom(Ff, GY)(\alpha_Y) = Hom(FX, Gf)(\alpha_X) \right\} =$$

$$= \left\{ (\alpha_X) \in \prod_{X \in \mathbf{C}} \ : \ \forall f : X \to Y,\ \alpha_Y F(f) = G(f)\alpha_X \right\} =$$

$$= Nat(F, G)$$

Dakle, *end* ovog funktora je upravo skup prirodnih transformacija s F u G. Posebno, za $F = G$, *end* funktora $End_{\mathbf{D}}(F(-))$ će biti skup endomorfizama $End(F)$. Analogno, *coend* shvaćamo kao objekt koendomorfizama.

7.4 Rekonstrukcija Hopfovih algebri

Kao posljedicu Tannaka-Kreinovog teorema dobivamo izomorfizam

$$\theta : Nat(\omega, \omega \otimes M) \cong Hom_{\mathbf{C}}(coend(\omega), M)$$

između skupa prirodnih transformacija s funktora ω na $\omega \otimes M$ i skupa homomorfizama s $coend(\omega)$ na M u $\mathbf{C}$, za svaki $M \in \mathbf{C}$. Dakle, funktor $Nat(\omega, \omega \otimes -)$ je reprezentabilan s reprezentirajućim objektom $coend(\omega)$.

Osim toga, iz teorema direktno slijedi da objekt $coend(\omega)$ ima strukturu koalgebre, što dokazujemo u sljedećem teoremu:

Teorem 7.4.1. *Neka je $\boldsymbol{C}$ monoidalna kategorija i $\omega : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ dijagram u $\boldsymbol{C}$. Ako postoje univerzalni objekt $coend(\omega)$ i prirodna transformacija $\delta : \omega \to \omega \otimes coend(\omega)$ kao u Tannaka-Kreinovu teoremu, tada $coend(\omega)$ ima jedinstvenu strukturu koalgebre $(coend(\omega), \Delta, \epsilon)$ takvu da sljedeći dijagrami komutiraju:*

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\
\omega \otimes coend(\omega) \arrow[r, "\delta \otimes id"] & \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "id_\omega"'] & coend(\omega) \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\
& \omega \otimes I
\end{tikzcd}
$$

Dokaz. Gledamo objekt $coend(\omega) \otimes coend(\omega)$ i prirodnu transformaciju

$$(\delta \otimes id) \circ \delta : \omega \to \omega \otimes coend(\omega) \to \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega).$$

Prema univerzalnom svojstvu objekta $coend(\omega)$, postoji jedinstveni morfizam Δ : $coend(\omega) \to coend(\omega) \otimes coend(\omega)$ takav da dijagram

$$
\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "(\delta\otimes id)\circ\delta"'] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\
& \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}
$$

komutira, a to je upravo prvi dijagram iz iskaza teorema.
Nadalje, ako uzmemo jedinični objekt I i prirodnu transformaciju $\rho_\omega^{-1} : \omega \to \omega \otimes I$, onda po univerzalnom svojstvu objekta $coend(\omega)$ postoji morfizam $\epsilon : coend(\omega) \to I$ takav drugi dijagram iz iskaza komutira.

Tvrdimo da je $(coend(\omega), \Delta, \epsilon)$ koalgebra.
Sljedeći dijagram komutira

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & \omega \arrow[dlll, "\delta"'] \arrow[dl, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] \arrow[drrr, "\delta"] & & & \\
\omega \otimes coend(\omega) \arrow[dr, "id\otimes\Delta"'] & & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[dl, "\delta\otimes id"] \arrow[dr, "\delta\otimes id"'] & & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[dl, "id\otimes\Delta"] \arrow[dr, "\delta\otimes id"] & & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[dl, "id\otimes\Delta"] \\
 & \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \arrow[drr, "\Delta\otimes id\otimes id"'] & & \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \arrow[d, "\delta\otimes id\otimes id"] & & \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \arrow[dll, "id\otimes\Delta\otimes id"] & \\
 & & & \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) & & &
\end{tikzcd}
$$

zbog komutativnosti prvog dijagrama iz iskaza te zbog jednakosti

$$(\delta \otimes id \otimes id)(id \otimes \Delta) = \delta \otimes \Delta = (id \otimes \Delta \otimes id)(\delta \otimes id),$$

pa prateći rubne strelice dijagrama iz univerzalnog svojstva objekta $coend(\omega)$ dobivamo da je $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$ što znači da je Δ koasocijativno.

Nadalje, dijagram

$$
\begin{tikzcd}
\omega \otimes coend(\omega) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "id\otimes\Delta"] & & \omega \otimes coend(\omega) \otimes I \\
& \omega \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \arrow[ur, "id\otimes id\otimes\epsilon"] & \\
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[uu, "\delta"] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[r, "id\otimes\epsilon"] \arrow[u, "\delta\otimes id"'] & \omega \otimes I \arrow[uu, "\delta\otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

također komutira zbog komutativnosti dijagrama iz zadatka, pa iz gornjeg trokuta po univerzalnom svojstvu dobivamo $(id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id$. Analogno bismo dobili $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = id$, pa konačno zaključujemo da je $coend(\omega)$ koalgebra. □

Iz ovog teorema zaključujemo da su svi objekti dijagrama ω $coend(\omega)$-komoduli, a svi morfizmi u dijagramu su morfizmi komodula. Štoviše, $coend(\omega)$ je univerzalna koalgebra uz koju svi objekti u ω postaju komoduli, a svi morfizmi morfizmi komodula. Naime, ako uzmemo neku drugu koalgebru (D, d, e) takvu da su svi objekti dijagrama ω D-komoduli uz kodjelovanje $\phi(X) : \omega(X) \to \omega(X) \otimes D$ te takvu da su svi morfizmi u ω morfizmi komodula, tada postoji jedinstven morfizam koalgebri $\tilde{\phi} : coend(\omega) \to D$ takav da je $\phi = (id \otimes \tilde{\phi} \otimes \delta)$.
Egzistenciju morfizma $\tilde{\phi}$ imamo iz prethodnog teorema, pa je potrebno provjeriti samo da je $\tilde{\phi}$ morfizam koalgebri.
To slijedi iz komutativnosti ova dva dijagrama (označavamo $C := coend(\omega)$):

$$
\begin{tikzcd}
\omega \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "id"] & & \omega \otimes C \arrow[dr, "id\otimes\Delta"] \arrow[dd, "id\otimes\tilde{\phi}"] & \\
& \omega \otimes C \arrow[rr, "\delta\otimes id"] \arrow[dd, "id\otimes\tilde{\phi}"] & & \omega \otimes C \otimes C \arrow[dd, "id\otimes\tilde{\phi}\otimes\tilde{\phi}"] \\
\omega \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"] & & \omega \otimes D \arrow[dr, "id\otimes d"] & \\
& \omega \otimes D \arrow[rr, "\phi\otimes id"] & & \omega \otimes D \otimes D
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "id"'] \arrow[drr, "id"] & \omega \otimes C \arrow[d, "id\otimes\tilde{\phi}"'] \arrow[dr, "id\otimes\epsilon"] & \\
\omega \arrow[r, "\phi"] \arrow[drr, "id"'] & \omega \otimes D \arrow[dr, "id\otimes e"] & \omega \otimes K \arrow[d, "id"] \\
& & \omega \otimes K.
\end{tikzcd}$$

Sada nas zanima kako upravo konstruirana koalgebra $coend(\omega)$ odgovara početnoj kategoriji **C**. Primjerice, možemo očekivati da će za danu koalgebru $C \in$ **Vec** i zaboravni funktor ω : **Comod-C** $\to$ **Vec** iz kategorije desnih C-komodula u kategoriju vektorskih prostora $coend(\omega)$ biti upravo početna koalgebra C.
Nadalje, vidjet ćemo da dodavanjem nekih novih pretpostavki na kategoriju **C** (npr. pleteničaste) i na dijagram ω, možemo dobiti i dodatnu strukturu na koalgebri $coend(\omega)$. Tako ćemo dobiti rekonstrukciju bialgebri i Hopfovih algebri.

Započinjemo s rekonstrukcijom koalgebri:

Teorem 7.4.2. *Neka je $C \in$ **Vec** koalgebra i ω : **Comod-C** $\to$ **Vec** zaboravni funktor. Tada je $C \cong coend(\omega)$.*

Dokaz. Neka je M proizvoljan vektorski prostor i $\phi : \omega \to \omega \otimes M$ prirodna transformacija. Tvrdimo da postoji jedinstveni homomorfizam $\tilde{\phi} : C \to M$ takav da dijagram

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\phi"'] & \omega \otimes C \arrow[d, "id\otimes\tilde{\phi}"] \\
& \omega \otimes M
\end{tikzcd}$$

komutira. Definiramo ga sa $\tilde{\phi} = (\epsilon \otimes id)\phi(C) : C \to M$.

Uzmimo proizvoljan $N \in$ **Comod-C**. Tada je $N \otimes C$ desni C-komodul, a N je podkomodul od $N \otimes C$ uz morfizam $\delta : N \to N \otimes C$. Onda sljedeći dijagram komutira:

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi(N)"'] & N \otimes C \arrow[d, "\phi(N\otimes C)=id_N\otimes\phi(C)"'] \arrow[ddr, bend left, "id\otimes\tilde{\phi}"] & \\
N \otimes M \arrow[r, "\delta\otimes id"] \arrow[drr, bend right=15, "id"'] & N \otimes C \otimes M \arrow[dr, "id\otimes\epsilon\otimes id"] & \\
 & & N \otimes M
\end{tikzcd}
$$

pa praćenjem vanjskih strelica ovog dijagrama zbog proizvoljnosti od N zaključujemo da traženi dijagram komutira.

Dalje dokazujemo jedinstvenost od $\tilde{\phi}$. Pretpostavimo da je $\overline{\phi} : C \to M$ neki drugi homomorfizam za koji odgovarajući dijagram komutira. Onda za $c \in C$ imamo

$$\overline{\phi}(c) = \overline{\phi}(\epsilon \otimes id)\Delta(c) = (\epsilon \otimes id)(id \otimes \overline{\phi})\Delta(c) = (\epsilon \otimes id)\phi(C)(c) = \tilde{\phi}(c).$$

Iz jedinstvenosti reprezentirajućeg objekta sada slijedi $C \cong coend(\omega)$. □

Dalje želimo vidjeti kako dodavanjem pretpostavki na kategoriju $\mathbf{C}$ i dijagram ω možemo dobiti dodatnu strukturu na koalgebri $coend(\omega)$.
Najprije, trebamo tenzorski produkt u kategoriji dijagrama. Za $\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ i $\omega' : \mathbf{D}' \to \mathbf{C}$ dijagrame u $\mathbf{C}$, definiramo novi dijagram $(\mathbf{D}, \omega) \otimes (\mathbf{D}', \omega') := (\mathbf{D} \times \mathbf{D}', \omega \otimes \omega')$ sa $(\omega \otimes \omega')(X, Y) := \omega(X) \otimes \omega'(Y)$.
Nadalje, pretpostavimo da je $\mathbf{C}$ simetrična monoidalna kategorija.

Sjetimo se da u općenitoj monoidalnog kategoriji nismo mogli definirati bialgebru i Hopfovu algebru. U pleteničastoj (i simetričnoj) monoidalnoj kategoriji to možemo učiniti jer na raspolaganju imamo prirodnu transformaciju $\tau : X \otimes Y \to Y \otimes X$ koja je potrebna da bi $X \otimes X$ bio algebra ako je X algebra.

Definicija 7.4.3. *U pleteničastoj monoidalnoj kategoriji* $\boldsymbol{C}$*,* bialgebra *je algebra* B *zajedno s homomorfizmima algebri* $\Delta : B \to B \otimes B$ *i* $\epsilon : B \to I$ *koji ju čine koalgebrom u kategoriji* $\boldsymbol{C}$*.*
Bialgebra je Hopfova algebra *ako postoji morfizam* $S : B \to B$ *koji zadovoljava uobičajene aksiome za Hopfove algebre (ali sada kao morfizam u* $\boldsymbol{C}$*, a ne u* $\boldsymbol{Vec}$*).*

Propozicija 7.4.1. *Neka su* $(\boldsymbol{D}, \omega)$ *i* $(\boldsymbol{D}', \omega')$ *dijagrami u* $\boldsymbol{C}$ *takvi da je* $\omega(X), \omega'(X') \in \boldsymbol{C}_0$ *za sve* $X \in \boldsymbol{D}$ *i* $X' \in \boldsymbol{D}'$*. Tada je* $coend(\omega \otimes \omega') \cong coend(\omega) \otimes coend(\omega)$*.*

Dokaz propozicije slijedi iz pretpostavke da tenzorski produkt u monoidalnoj kategoriji $\mathbf{C}$ čuva kolimese u oba argumenta, a njezina posljedica je da postoji univerzalna prirodna transformacija

$$\delta : \omega \otimes \omega' \to \omega \otimes \omega' \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega')$$

takva da za svaki $M \in \mathbf{C}$ i prirodnu transformaciju $\phi : \omega \otimes \omega' \to \omega \otimes \omega' \otimes M$ postoji jedinstven morfizam $\tilde{\phi} : coend(\omega) \otimes coend(\omega') \to M$ uz koji dijagram

$$\begin{tikzcd}
\omega \otimes \omega' \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\phi"] & \omega \otimes \omega' \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega') \arrow[d, "id \otimes id \otimes \tilde{\phi}"] \\
& \omega \otimes \omega' \otimes M
\end{tikzcd}$$

komutira.

Definicija 7.4.4. *Neka je $(\boldsymbol{D}, \omega)$ dijagram, $\boldsymbol{D}$ monoidalna kategorija i ω monoidalni funktor. Tada kažemo da je $(\boldsymbol{D}, \omega)$* monoidalni dijagram*.*
Neka je $(\boldsymbol{D}, \omega)$ monoidalni dijagram i $(B, m, \eta) \in \boldsymbol{C}$ algebra. Kažemo da je prirodna transformacija $\phi : \omega \to \omega \otimes B$ monoidalna prirodna transformacija *ako sljedeći dijagrami komutiraju za sve $X, Y \in \boldsymbol{D}$:*

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[r, "\phi(X \otimes \phi(Y))"] \arrow[d, "\rho"] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes B \otimes B \arrow[d, "\rho \otimes m"] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\phi(X \otimes Y)"] & \omega(X \otimes Y) \otimes B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & J \otimes J \arrow[d] \\
\omega(I) \arrow[r, "\phi(I)"] & \omega(I) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Sada dokazujemo da uz ove dodatne pretpostavke koalgebra $coend(\omega)$ postaje bialgebra.

Teorem 7.4.5. *Neka je $(\boldsymbol{D}, \omega)$ monoidalni dijagram u simetričnoj monoidalnoj kategoriji $\boldsymbol{C}$ takav da je $\omega(X) \in \boldsymbol{C}_0$ za sve $X \in \boldsymbol{D}$. Tada $coend(\omega)$ ima strukturu bialgebre, a $\delta : \omega \to \omega \otimes coend(\omega)$ je monoidalna prirodna transformacija.*
Nadalje, ako je B proizvoljna bialgebra i $d : \omega \to \omega \otimes B$ monoidalna prirodna transformacija, onda postoji jedinstveni homomorfizam bialgebri $f : coend(\omega) \to B$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "d"] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, "id \otimes f"] \\
& \omega \otimes B
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Množenje $\nabla : coend(\omega) \otimes coend(\omega) \to coend(\omega)$ dobivamo iz sljedećeg dijagrama:

$$\begin{tikzcd}
\omega(X) \otimes \omega(Y) \arrow[rr, "\delta\otimes\delta"] \arrow[d] & & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes coend(\omega) \otimes coend(\omega) \arrow[dl] \arrow[d] \\
\omega(X \otimes Y) \arrow[r, "\delta"] & \omega(X \otimes Y) \otimes coend(\omega) \arrow[r, "\cong"] & \omega(X) \otimes \omega(Y) \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}$$

Jedinični morfizam dobivamo promatrajući jedinični objekt u kategoriji dijagrama u $\mathbf{C}$, dijagram $\mathbf{D}_0 = (\{I\}, \{id\})$ s funktorom $\omega_0 : I \mapsto J$ (za J jedinični objekt u $\mathbf{C}$). U ovom slučaju $\omega_0 \to \omega_0 \otimes coend(\omega_0)$ odgovara morfizmu $J \to J \otimes J$, pa sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & J \otimes J \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\omega(I) \arrow[r] & \omega(I) \otimes coend(\omega) \arrow[r, "\cong"] & J \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}$$

Ovi dijagrami ujedno pokazuju da je δ monoidalna prirodna transformacija, a relacije za bialgebre slijede iz univerzalnog svojstva. □

Teorem 7.4.6. *Ako je **D** kruta monoidalna kategorija i $\omega : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ monoidalni funktor, onda $coend(\omega)$ postaje Hopfova algebra.*

Dokaz. Antipod $S : coend(\omega) \to coend(\omega)$ ćemo dobiti iz univerzalnog svojstva objekta $coend(\omega)$. Promotrimo morfizam

$$f := (ev \otimes id) \circ (id \otimes \delta) \circ db : coend(\omega) \cong K \otimes coend(\omega) \to K.$$

Prema univerzalnom svojstvu *coend*-a, postoji jedinstveni morfizam $S : coend(\omega) \to coend(\omega)$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "f"'] & \omega \otimes coend(\omega) \arrow[d, "id\otimes S"] \\
& \omega \otimes coend(\omega)
\end{tikzcd}$$

Tvrdimo da je S antipod za $coend(\omega)$.

To slijedi iz komutativnosti sljedećeg dijagrama:
(Radi bolje preglednosti, označit ćemo $H := coend(\omega)$)

$$
\begin{tikzcd}
 & \omega \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[r, "id\otimes db"] & \omega\otimes\omega^*\otimes\omega \arrow[dd, "id\otimes id\otimes\delta"'] \arrow[dddd, bend left, "id\otimes\delta_{\omega^*\otimes\omega}"] \\
\omega\otimes H \arrow[d, "id\otimes\Delta"'] & \omega\otimes H \arrow[dl, "\delta\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes S"] & \\
\omega\otimes H\otimes H \arrow[d, "id\otimes id\otimes S"'] & \omega\otimes H \arrow[dl, "\delta\otimes id"] & \omega\otimes\omega^*\otimes\omega\otimes H \arrow[l, "id\otimes ev\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes id\otimes\delta\otimes id"'] \\
\omega\otimes H\otimes H \arrow[dr, "id\otimes\nabla"'] & & \omega\otimes\omega^*\otimes\omega\otimes H\otimes H \arrow[d, "id\otimes id\otimes id\otimes\nabla"'] \\
 & \omega\otimes H & \omega\otimes\omega^*\otimes\omega\otimes H \arrow[l, "id\otimes ev\otimes id"]
\end{tikzcd}
$$

Naime, gornji lijevi četverokut je definicija komnoženja na H, komutativnost donjeg lijevog četverokuta i šesterokuta lako se provjeri direktno na elementima, gornji kvadrat je definicija antipoda S (strelice u smjeru kazaljke na satu u kompoziciji daju točno $id \otimes f$), dok je desni dio dijagrama definicija množenja na H. Dakle, dijagram je komutativan.

Budući da je δ prirodna transformacija, vrijedi $\delta_{\omega^*\otimes\omega} \circ db = (id \otimes db) \circ \delta_K$, pa vanjske strelice u smjeru kazaljke na satu u kompoziciji daju
$(id\otimes ev\otimes id)\circ(id\otimes\delta_{\omega^*\otimes\omega})\circ(id\otimes db) = (id\otimes ev\otimes id)\circ(id\otimes id\otimes db)\circ(id\otimes\delta_K) = id\otimes\delta_K$
zbog aksioma dualnih objekata.

Sada iz univerzalnog svojstva *coend*-a slijedi da vanjske strelice u smjeru obrnutom od kazaljke na satu moraju dati $(id \otimes (\eta \otimes \epsilon)) \circ \delta$ do na izomorfizam. Iz dijagrama vidimo da te strelice u kompoziciji daju $(id \otimes \nabla) \circ (id \otimes S \otimes id) \circ (id \otimes \Delta) \circ \delta$, pa iz univerzalnog svojstva slijedi da dijagram

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\epsilon"'] & H\otimes H \arrow[dd, "S\otimes id"] \\
K \arrow[d, "\eta"'] & \\
H & H\otimes H \arrow[l, "\nabla"]
\end{tikzcd}
$$

komutira, a to je upravo aksiom lijevog antipoda.
Potpuno analogno dokaže se aksiom desnog antipoda, pa zaključujemo da je $coend(\omega)$ Hopfova algebra. □

Vratimo se nakratko na kvantne prostore.
Promotrimo sljedeću shemu dijagrama: kategorija $\mathbf{D}[X; m, u]$ ima objekte $X \otimes ... \otimes X =: X^{\otimes n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $I := X^{\otimes 0}$. Nadalje, ima morfizme $m : X \otimes X \to X$, $u : I \to X$ i sve morfizme koji se mogu konstruirati od m, u i id pomoću kompozicije i tenzorskog produkta.
Neka je A konačnodimenzionalna algebra s množenjem m_A i jediničnim morfizmom u_A. Tada definiramo dijagram $\omega_A : \mathbf{D}[X; m, u] \to \mathbf{Vec}$ sa $\omega(X^{\otimes n}) = A^{\otimes n}$, $\omega(m) = m_A$ i $\omega(u) = u_A$. Tada vrijedi:

Teorem 7.4.7. *Univerzalna bialgebra $M(A)$ pridružena algebri A i $coend(\omega_A)$ izomorfne su kao bialgebre.*

Dakle, univerzalnu bialgebru možemo rekonstruirati iz teorije reprezentacija.

Poglavlje 8

Zajedničke ideje i posljedice rekonstrukcijskih teorema

8.1 Spektri

U ovom poglavlju predstavit ćemo ukratko razvoj pojma spektra koji se pojavljuje u mnogim rekonstrukcijskim teoremima. Za početak, prisjetimo se definicije spektra ograničenog linearnog operatora.

Definicija 8.1.1. *Za ograničeni linearni operator T na Banachovom prostoru X,* spektar operatora *T je skup svih skalara λ za koje operator $T - \lambda I$ nije invertibilan.*

Ovo je prirodno poopćenje pojma spektra matrice. Naime, spektar matrice T je skup njezinih svojstvenih vrijednosti, to jest, skup skalara λ za koje postoji $x \in X$, $x \neq 0$, takav da je $Tx = \lambda x$. Ekvivalentno, $(T - \lambda I)x = 0$, pa $T - \lambda I$ ima netrivijalnu jezgru, što znači da operator $Z - \lambda I$ nije invertibilan.
Budući da operatori na Banachovom prostoru čine algebru s jedinicom, definirali smo i pojam spektra elementa $x \in A$ za proizvoljnu algebru s jedinicom A sa

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ x - \lambda \cdot 1 \text{ nije invertibilan element od } A\}.$$

Sjetimo se dalje da smo definirali spektar Banachove algebre A kao skup svih karaktera, to jest, skup svih ne-nul multiplikativnih funkcionala $A \to \mathbb{C}$. Nadalje, dokazali smo sljedeći propoziciju:

Propozicija 8.1.1. *Neka je A komutativna Banachova algebra s jedinicom. Za svaki $x \in A$ je $Im(\hat{x}) = \hat{x}(Spec(A)) = \sigma(x)$ spektar elementa x.*

pri čemu je $\hat{x}$ Geljfandova transformacija elementa $x \in A$.
Dakle, za svaki element $f \in Spec(A)$ spektra Banachove algebre, $\hat{x}(f) = f(x)$ pripada spektru elementa x. I obratno, svaki element spektra elementa x je oblika $f(x)$ za neki $f \in Spec(A)$.

Daljnji razvoj pojma spektra opravdan je karakterizacijom spektra Banachove algebre koju smo dokazali u propoziciji 3.1.2, a glasi

Propozicija 8.1.2. *Za A kompleksnu komutativnu Banachovu algebru s jedinicom postoji bijekcija između $Spec(A)$ i skupa svih maksimalnih ideala od A.*

U rekonstrukciji afinih algebarskih skupova spektar konačnogenerirane reducirane K-algebre A smo definirali potpuno analogno spektrima Banachovih algebri. On je skup svih homomorfizama K-algebri $A \to K$. Ekvivalentno, on je skup svih maksimalnih ideala od A.

Kod Stoneove dualnosti, spektar Boolove algebre A definirali smo kao skup svih ultrafiltera na A. Osim toga, iz definicije je bilo jasno da imamo bijektivnu korespondenciju između ultrafiltera i prostih ideala algebre A.
Prirodno je pitanje možemo li i u ovom slučaju spektar $Spec(A)$ opisati kao skup morfizama s A u neku drugu Boolovu algebru. U Geljfandovoj rekonstrukciji i rekonstrukciji algebarskih skupova, algebre u kodomeni su bile bazne algebre $\mathbb{C}$, odnosno K, nad kojima smo gledali kategorije $\mathbf{C^*} - \mathbf{Alg_{com}}$ i $\mathbf{K} - \mathbf{Aff}$. U slučaju Stoneove rekonstrukcije biramo najjednostavniju Boolovu algebru $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.
Ako je I prost ideal u Boolovoj algebri A, onda definiramo funkciju

$$f : A \to \mathbf{2}, \quad f(a) = \begin{cases} 0 & a \in I \\ 1 & a \notin I \end{cases}$$

Iz činjenice da je I prost slijedi da se zaista radi o homomorfizmu Boolovih algebri. Naime, iz implikacija

$$a \leq b \text{ } i \text{ } b \in I \Rightarrow a \in I$$

$$a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$$

$$i \text{ } a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I \text{ } ili \text{ } b \in I$$

slijedi slijede svi uvjeti iz definicije homomorfizma Boolovih algebri.
Obratno, ako je f neki homomorfizam, njegova jezgra je prost ideal u A.

Dakle, ovi rekonstrukcijski teoremi nam pružaju novi pogled na geometrijske prostore koje sada usko povezujemo s pripadnim algebrama funkcija. Na temelju poznavanja algebre funkcija, geometrijski prostor rekonstruiramo kao spektar algebre.

Konkretno, točke prostora rekonstruiramo kao maksimalne ideale (odnosno, ultrafiltere ili maksimalne filtere) te algebre.

Sljedeći korak u razvoju ove ideje je definicija Grothendieckovog spektra komutativnog prstena. U ovom slučaju, spektar nije skup maksimalnih, već skup prostih ideala komutativnog prstena. Ovo je poželjna generalizacija jer nam činjenica da je praslika prostog ideala opet prosti ideal (dok praslika maksimalnog ne mora biti maksimalan) daje funktorijalnost pridruživanja spektra komutativnom prstenu. Na ovaj način, uzimajući spektar prstena regularnih funkcija na varijetetu, ne rekonstruiramo samo točke varijeteta, nego i sve podvarijetete. Točke opet odgovaraju maksimalnim idealima, dok preostali prosti ideali odgovaraju ostalim podvarijetetima. Time obogaćujemo pojam prostora novim točkama - tzv. *generičkim točkama*. Osim toga, spektar komutativnog prstena možemo opskrbiti i strukturnim snopom prstenova $\mathcal{O}_{Spec(R)}$ čime $Spec(R)$ postaje lokalno prstenovan prostor koji je model za definiciju afine sheme. Prelazak s varijeteta s topologijom Zariskog na spektre sa strukturnim snopovima omogućava daljnje generalizacije koncepata algebarske geometrije, primjerice, na slučaj polja koja nisu algebarski zatvorena. U konačnici dobivamo puno bogatiju i zanimljiviju teoriju shema.

U daljnjoj generalizaciji, sheme također možemo rekonstruirati, no sada više nije dovoljno promatrati algebre funkcija, već promatramo kategoriju kvazi-koherentnih snopova na toj shemi. Kvazi-kompaktnu kvazi-separiranu shemu rekonstruiramo kao tzv. *geometrijski centar* Abelove kategorije kvazi-koherentnih snopova. Taj rezultat zove se *Gabriel-Rosenbergov teorem rekonstrukcije.*

8.2 Isbellova dualnost

Mnoge dualnosti možemo smjestiti u formalni okvir takozvane *Isbellove dualnosti.* John Isbell prvi je primijetio da ponekad objekt koji se nalazi u dvije kategorije može proizvesti dualnost tih kategorija. Formalno, radi se o adjunkciji $\mathcal{O} \dashv Spec$ kategorija predsnopova i kopredsnopova

$$(\mathbf{Set}^{\mathcal{C}})^{op} \underset{Spec}{\overset{\mathcal{O}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$$

gdje su funktori $\mathcal{O}$ i $Spec$ definirani na objektima sa

$$\mathcal{O}(X):\ C \mapsto Hom(X, Hom(-, C)),$$

$$Spec(A):\ C \mapsto Hom(Hom(C, -), A),$$

a na morfizmima standardno kao hom-funktori. Ova adjunkcija onda se restringira na ekvivalenciju kategorija takozvanih *fiksnih objekata*.

Iako adjunkcija u ovom apstraktnom okruženju postoji, a priori nije jasno zašto bi potkategorije fiksnih objekata bile neprazne ili uopće zanimljive. Zato izostavljamo formalnosti i radije prelazimo na objašnjenje kako Isbellova dualnost obuhvaća neke dualnosti koje smo do sada promatrali. Svi detalji ipak se mogu pronaći u [2], [14] i [9].

Lawvere u [14] objašnjava da ako je $\mathcal{C}$ kategorija nekakvih geometrijskih prostora, onda se ona ulaže u puno veću kategoriju $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ općenitijih geometrijskih prostora. S druge strane, kategorija $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ sadrži algebarske objekte čije operacije odgovaraju geometrijskoj strukturi objekata iz $\mathcal{C}$. Zato ćemo razmišljati o ovoj situaciji kao da imamo dvije kategorije, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, jedna s geometrijskim objektima, a druga s algebarskim. Objekti obje kategorije su skupovi s dodatnom strukturom. Pretpostavimo da postoje objekti $Z_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ i $Z_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}$ koji su kao skupovi jednaki. Tada ovi objekti definiraju funktore

$$Hom(-, Z_{\mathcal{A}}) : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B},$$
$$Hom(-, Z_{\mathcal{B}}) : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{A}.$$

Fiksni objekti su objekti koji ostaju do na izomorfizam isti kada kompozicija gornjih funktora djeluje na njih. Preciznije, $A \in \mathcal{A}$ je fiksni objekt ako je $A \cong Hom(Hom(A, Z_{\mathcal{A}}), Z_{\mathcal{B}})$. Analogno za $B \in \mathcal{B}$.
Pokazuje se da imamo adjunkciju gornjih funktora

$$Hom(-, Z_{\mathcal{B}}) \dashv Hom(-, Z_{\mathcal{A}})$$

te da se ona restringira na ekvivalenciju potkategorija fiksnih objekata.
Tvrdimo da je ovo upravo situacija koju imamo u dualnostima geometrijskih prostora i algebri koje smo mi promatrali.

U Geljfand-Najmarkovoj rekonstrukciji, polje $\mathbb{C}$ ima strukturu komutativne C^*-algebre i lokalno kompaktnog topološkog prostora, pa imamo adjunkciju funktora $\mathcal{O} = Hom(-, \mathbb{C})$ koji lokalno kompaktnom topološkom prostoru pridružuje algebru neprekidnih funkcionala na njemu i funktora $Spec = Hom(-, \mathbb{C})$ koji C^*-algebri pridružuje prostor karaktera. Fiksni objekti su karakterizirani Geljfand-Najmarkovim teoremom.

U rekonstrukciji algebarskih skupova, polje K također pripada objema kategorijama. Naime, možemo ga gledati kao K-algebru ili kao algebarski skup koji se u tom slučaju najčešće označava s $\mathbb{A}^1$. Opet imamo ekvivalenciju kategorija fiksnih objekata koja je ostvarena pomoću funktora $Spec = Hom(-, K)$ koji K-algebri pridružuje prostor homomorfizama K-algebri i funktora $\mathcal{O} = Hom(-, \mathbb{A}^1)$ koji algebarskom skupu pridružuje skup regularnih preslikavanja.

U Stoneovoj dualnosti zajednički objekt je skup $\{0,1\}$ na koji možemo gledati kao na Boolovu algebru ili, uz diskretnu topologiju, kao na Stoneov prostor. Funktor *Spec* iz ove dualnosti Boolovoj algebri pridružuje prostor ultrafiltera za koji smo u prethodnoj sekciji vidjeli da odgovara homomorfizmima u Boolovu algebru $\mathbf{2} = \{0,1\}$, pa je $Spec = Hom(-, \mathbf{2})$. Drugi funktor je OC koji Stoneovom prostoru pridružuje Boolovu algebru otvoreno-zatvorenih skupova. Ali ta algebra odgovara upravo skupu neprekidnih preslikavanja u prostor $\{0,1\}$. Naime, očito podskup prostora X možemo poistovjetiti s homomorfizmom u $\{0,1\}$ na način da sve elemente podskupa preslikavamo u 1, a ostale elemente u 0. Budući da na $\{0,1\}$ imamo diskretnu topologiju, skupovi $\{0\}$ i $\{1\}$ su otvoreno-zatvoreni, pa će i početni podskup biti otvoreno-zatvoren. Dakle, $OC = Hom(-, \{0,1\})$.

8.3 Nekomutativna geometrija

Spektri i rekonstrukcijski teoremi temelj su nekomutativne geometrije. Naime, definicije *nekomutativnih prostora* temelje se na dualnosti geometrije i algebre. Ako promatramo odgovarajuće funkcije na nekom geometrijskom prostoru, one će tvoriti neku *komutativnu* algebarsku strukturu - komutativni prsten ili komutativnu algebru funkcija. Općenitije, promatramo kategorije vektorskih svežnjeva ili kvazikoherentnih snopova. Ideja nekomutativne geometrije je proširenje ove dualnosti na nekomutativne algebre i time na nekomutativne prostore.

Primjerice, Geljfand-Najmarkov teorem kaže da je kompaktan Hausdorffov prostor potpuno određen komutativnom C^*-algebrom s jedinicom kompleksnih funkcija na njemu. U drugoj varijanti teorema, kategorija lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostora dualna je kategoriji komutativnih C^*-algebri. To znači da teoriju koju razvijamo s kompaktnim Hausdorffovim prostorima i neprekidnim funkcijama možemo prevesti u potpuno algebarski jezik C^*-algebri. Na primjer, disjunktna unija prostora odgovara direktnoj sumi pripadnih algebri, zatvoreni potprostori odgovaraju zatvorenim idealima, kompaktifikacija lokalno kompaktnog Hausdorffovog prostora odgovara *unitizaciji*, to jest, dodavanju jedinice algebri.
Nadalje, ovom dualnošću kategorija inspirirana je i definicija kategorije nekomutativnih lokalno kompaktnih prostora kao duala kategorije ne nužno komutativnih C^*-algebri i kategorije kompaktnih Hausdorffovih prostora kao duala kategorije C^*-algebri s jedinicom. Sljedeći korak je prevođenje koncepata razvijenih na komutativnim prostorima u algebarski jezik i njihova generalizacija na nekomutativni slučaj. Osim toga, zanimljivo je proučavati i fenomene koji se javljaju isključivo u nekomutativnom slučaju.

Prelazak na nekomutativne prostore nije uvijek ovako direktan. Primjerice, dualnost afinih algebarskih skupova i konačnogeneriranih reduciranih komutativnih K-algebri ne daje dobar temelj za definiciju nekomutativnog afinog varijeteta niti općenito nekomutativne algebarske geometrije.

S druge strane, generalizacija nekih drugih geometrijskih konstrukcija u algebarskoj geometriji dobro funkcionira. U afinom Serreovom teoremu smo vidjeli da za afinu shemu $X \cong Spec(R)$ sa strukturnim snopom $\mathcal{O}_X$, kvazi-koherentni $\mathcal{O}_X$-moduli odgovaraju R-modulima. Pokazuje se korisnom definicija kategorije kvazi-koherentnih snopova nad nekomutativnih prostorom reprezentiranim prstenom R kao kategorije R-modula.
Spomenuli smo i Serre-Swanov teorem prema kojemu je kategorija vektorskih svežnjeva na afinom algebarskom varijetetu ekvivalentna kategoriji konačnih projektivnih modula nad prstenom regularnih funkcija tog varijeteta, dok je kategorija vektorskih svežnjeva na kompaktnom Hausdorffovom prostoru X ekvivalentna kategoriji konačnih projektivnih $C(X)$-modula. To nas motivira da definiramo nekomutativni vektorski svežanj na nekomutativnom prostoru reprezentiranom ne nužno komutativnom algebrom A kao konačni projektivni A-modul. Bogata teorija razvijena s ovim pojmom nekomutativnog vektorskog svežnja opravdava ovakvu definiciju.

Zadnji primjer kojim se bavimo su kvantne grupe. Iako se pojam *kvantne grupe* odnosi na više različitih (ali povezanih) objekata u nekomutativnoj geometriji, on uvijek označava neku vrstu Hopfove algebre. Nas najviše zanimaju kvantne grupe kao grupe automorfizama nekomutativnih (kvantnih) prostora. Pokazalo se da je u proučavanju "klasičnih" objekata simetrije, kao što su grupe i Liejeve algebre, izuzetno korisno promatrati njihove reprezentacije. Uz ideju generalizacije Pontrjaginove dualnosti za lokalno kompaktne Abelove grupe na neabelov slučaj, dolazimo do novog teorema rekonstrukcije - Tannakine dualnosti - koji opisuje rekonstrukciju raznih objekata simetrije iz njihovih kategorija reprezentacija. Elementi početnog objekta ovdje odgovaraju endomorfizmima funktora vlakna.
Obogaćivanje strukture objekta simetrije zahtjeva i obogaćivanje strukture kategorije modula (odnosno, kategorije reprezentacija). Tako smo pokazali da za rekonstrukciju bialgebre B trebamo monoidalnu strukturu na kategoriji B-modula, dok za rekonstrukciju Hopfove algebre trebamo i krutost, to jest, postojanje duala u kategoriji modula. Daljnje generalizacije uključuju primjerice uzimanje pleteničastih i simetričnih monoidalnih kategorija.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori (skripta)*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1617a.pdf` (ožujak 2017.)

[2] M. Barr, J. F. Kennison, R. Raphael, *Isbell Duality*, Theory and Applications of Categories, Vol. 20, No. 15 (2008), 504–542.

[3] S. Bosch, *Algebraic geometry and commutative algebra*, Springer, London, New York, 2013.

[4] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algebriques*, Mason and Cie, Paris, 1970.

[5] M. Dirks, *The Stone Representation Theorem for Boolean Algebras*, dostupno na `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Dirks.pdf` (kolovoz 2017.)

[6] I. M. Geljfand, M. A. Najmark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Matematicheskii Sbornik, 12 (2), (1943), 197–217.

[7] A. Grothendieck, *Introduction to functorial algebraic geometry (bilješke F. Gaetae s predavanja u Buffalu 1973.)*, dostupno na `http://matematicas.unex.es/~navarro/res/ifag.pdf` (kolovoz 2017.)

[8] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] Isbell duality, dostupno na `https://www.ncatlab.org/nlab/show/Isbell%20duality` (rujan 2017.)

[10] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2003.

[11] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge, Cambridgeshire, New York, Cambridge University Press, 1982.

[12] M. Khalkhali, *Basic noncommutative geometry*, Zürich, European Mathematical Society, 2013.

[13] S. Lang, *Algebra*, Springer, New York, 2002.

[14] F. W. Lawvere, *Taking Categories Seriously*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 8 (2005), 1–24.

[15] T. Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[16] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[17] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. New York, 2000.

[18] J.S. Milne, *Algebraic Geometry*, dostupno na `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AG.pdf`, (travanj 2017.)

[19] A. Neeman, *Algebraic and Analytic Geometry*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[20] B. Pareigis, *Quantum groups and noncommutative geometry (skripta)*, dostupno na `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/Papers/Endomorp.pdf` (svibanj 2017.)

[21] Y. Qiaochu, *Banach algebras, the Gelfand representation and the commutative Gelfand-Naimark theorem*, dostupno na `https://goo.gl/5hk1eb` (ožujak 2017.)

[22] E. Riehl, *Category theory in context*, dostupno na `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf` (kolovoz 2017.)

[23] M. Schulman, *Set theory for category theory*, dostupno na `https://arxiv.org/abs/0810.1279` (rujan 2017.)

[24] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.

[25] *The Stacks Project*, dostupno na `http://stacks.math.columbia.edu/` (kolovoz 2017.)

[26] R. Street, *Quantum Groups: A Path to Current Algebra*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[27] *Tannaka duality*, dostupno na https://ncatlab.org/nlab/show/Tannaka+duality (ožujak 2017.)

[28] W. M. Lawton, *Operator algebras (skripta)*, dostupno na http://www.math.nus.edu.sg/~matwml/Research_Materials/Operator%20Algebras/Wilde.pdf (ožujak 2017.)

Sažetak

U ovom radu dan je pregled nekih važnih rekonstrukcijskih teorema, odnosno, teorema koji daju vezu između dva objekta na način da je jedan objekt moguće potpuno rekonstruirati iz drugog i obratno. Važna klasa teorema rekonstrukcije su dualnosti geometrijskih prostora i pripadnih algebri funkcija. Ovdje spadaju Stoneova dualnost, Geljfand-Najmarkov teorem i rekonstrukcija algebarskih skupova koji su obrađeni u 2., 3. i 4. poglavlju rada.
Osim prostora, moguće je rekonstruirati i neke druge geometrijske objekte, recimo snopove ili vektorske svežnjeve na prostoru. Primjer ovakve rekonstrukcije je afini Serreov teorem koji je dokazan u 5. poglavlju.

Svi ovi teoremi izraženi su u jeziku teorije kategorija, pa je prvo poglavlje posvećeno osnovnim definicijama i rezultatima teorije kategorija. Ona nam omogućava i novu formulaciju algebarske geometrije u kojoj su prostori opisani kao reprezentabilni funktori. Ta takozvana *funktorijalna geometrija* omogućava nam jednostavan prijelaz na nekomutativni slučaj. Tako u 6. poglavlju dolazimo do definicije kvantnog prostora i kvantne grupe koja je grupa automorfizama kvantnog prostora.
Još jedna važna klasa rekonstrukcijskih teorema odnosi se na rekonstrukciju objekata simetrije, primjerice grupe automorfizama, a obrađujemo ih u 7. poglavlju. Teoremi ovog tipa poznati su pod zajedničkim nazivom *Tannakina dualnost*, a opisuju rekonstrukciju grupa, grupoida, Hopfovih algebri i sličnih objekata iz kategorije njihovih reprezentacija.

Zadnje poglavlje sadrži pregled nekih zajedničkih ideja teorema iz prethodnih poglavlja. Posebno je izložen razvoj pojma spektra i objašnjena važnost ovih dualnosti za nekomutativnu geometriju.

Summary

In this thesis, we present some important examples of reconstruction theorems, i.e. theorems that give correspondence between two objects in the sense that one object can be completely reconstructed from the other. An important class of reconstruction theorems is duality between geometric spaces and function algebras. Included here are Stone duality, Gel'fand-Naimark theorem and reconstruction of algebraic sets, which are covered in chapters 2, 3 and 4.
Apart from spaces, we can also reconstruct some other geometric objects, such as sheaves and vector bundles. Affine Serre theorem from chapter 5 is an example of such reconstruction.

All of these theorems are stated in the language of category theory, which is why the first chapter is dedicated to basic definitions and results of category theory. Also, category theory provides us with a new formulation of algebraic geometry in which spaces are described as representable functors. This so-called *functorial geometry* enables us to transfer to the noncommutative case easily. This way we are able to define a quantum space and a quantum group, which is an automorphism group of a quantum space.
Another important class of reconstruction theorems refers to reconstructing symmetry objects such as automorphism groups. We cover them in chapter 7. These theorems are known by their common name *Tannaka duality*, and they describe reconstructions of groups, groupoids, Hopf algebras and similar objects from their categories of representations.

The last chapter gives an overview of some common ideas from the theorems of the preceding chapters. We present the development of the notion of spectrum and explain the importance of these dualities for noncommutative geometry.

Životopis

Rođen sam 13. siječnja 1994. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Dragutina Domjanića i Prirodoslovno-matematičke gimnazije Lucijana Vranjanina, 2012. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, a 2015. godine diplomski studij teorijske matematike na istom fakultetu.
Tijekom studija držao sam demonstrature iz pet kolegija, a za uspjeh u studiju dobio sam 2015. i 2017. godine nagradu Matematičkog odsjeka za najbolje studente završnih godina studija. Akademske godine 2016./2017. napisao sam s kolegicama Barbarom Bošnjak i Veronikom Pedić rad *Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem* $\mathbb{C}$ za koji smo nagrađeni Rektorovom nagradom.
U siječnju 2017. godine održao sam u sklopu Seminara za matematičku logiku i osnove matematike i Seminara za teorijsko računarstvo predavanje pod nazivom *Teorija kategorija i kvantno računanje*, a tijekom završne godine studija aktivno sam sudjelovao u radu seminara *Uvod u diferencijalnu topologiju* za studente i doktorande, u sklopu kojega sam održao predavanje o de Rhamovoj kohomologiji.
Tijekom srpnja i kolovoza 2016. godine, proveo sam četiri tjedna u ljetnoj školi *AARMS Summer School: Applications of Category Theory, Combinatorics and Number Theory* na sveučilištu Dalhousie University, Halifax, Kanada.