

# Metoda homogenizacije u topološkoj optimizaciji

---

Ševerdija, Nela

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:789883>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-05**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Nela Ševerdija

**METODA HOMOGENIZACIJE U**  
**TOPOLOŠKOJ OPTIMIZACIJI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Metoda homogenizacije u 2D elastičnosti</b>	<b>3</b>
1.1 Definicija problema . . . . .	3
1.2 H-konvergencija . . . . .	5
1.3 Periodička homogenizacija . . . . .	14
1.4 Laminirane strukture . . . . .	16
1.5 Komponirani materijali . . . . .	20
1.6 Sekvencijalni laminati . . . . .	24
<b>2 Problem optimalnog dizajna</b>	<b>31</b>
2.1 Relaksacija problema . . . . .	32
2.2 Optimizacija krutosti materijala . . . . .	34
2.3 Topološka optimizacija . . . . .	39
<b>3 Numerički rezultati</b>	<b>46</b>
3.1 Numerički primjeri . . . . .	48
<b>Bibliografija</b>	<b>60</b>

# Uvod

Jedan od osnovnih ciljeva pri dizajniranju elastičnih struktura jest postići da one odgovaraju svojoj namjeni i budu u nekom smislu optimalne. Topološka optimizacija odnosi se na pitanje pronalaženja optimalnog oblika strukture u odnosu na neki kriterij, te je od velike važnosti u području strukturnog dizajna. Stoga ne čudi što su do danas razvijene brojne metode za određivanje takvih oblika, ovisno o namjeni i matematičkom modelu strukture, odabranoj funkciji cilja ili zadanim uvjetima optimizacije. Jedna od tih metoda je i metoda homogenizacije.

Metoda homogenizacije počela se razvijati 70-ih godina prošlog stoljeća radovima S. Spagnola [11] te F. Murata i L. Tartara [6]. Osnovna ideja homogenizacije je za heterogeni materijal (npr. sastavljen od više različitih materijala ili porozan, tj. ispunjen rupama) odrediti homogeni materijal koji ga najbolje aproksimira. .

U ovom radu bavimo se pitanjem pronalaženja optimalnog dizajna u kontekstu elastičnosti, unutar dvodimenzionalne domene na čijem je rubu propisan Neumannov rubni uvjet, osim na dijelovima na koje djeluje opterećenje, koristeći metodu homogenizacije. Želimo naći oblik strukture najveće krutosti uz zadanu dostupnu količinu materijala. Pritom uglavnom slijedimo rad G. Allairea [3].

U prvom poglavlju izneseni su glavni teorijski rezultati vezani uz metodu homogenizacije u kontekstu elastičnosti. Najprije je uveden pojam H-konvergenije te su zatim eksplicitno izračunata efektivna svojstva periodičnog materijala dobivenog homogenizacijom. Uveden je pojam komponiranih materijala te je pokazano da se efektivna svojstva struktura dobivenih laminacijom mogu aproksimirati strukturama sačinjenim od periodičnih materijala.

U drugom poglavlju definiran je pojam optimalnog dizajna u odnosu na maksimizaciju krutosti strukture te je prostor dopustivih rješenja proširen kako bi se osigurala egzistencija rješenja, odnosno provedena je relaksacija problema. Zatim je dokazano kako unutar

tog prostora postoji rješenje te su eksplicitno izračunate formule kojima je parametriziran optimalni dizajn.

U trećem poglavlju najprije je opisan algoritam koji rješava problem topološke optimizacije metodom homogenizacije, temeljen na algoritmu iznesenom u [3]. Opisane su karakteristike tog algoritma te je algoritam primijenjen na nekoliko primjera čiji su rezultati zatim grafički prikazani.

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Josipu Tambači, na bezgraničnom strpljenju i pomoći koju mi je iskazao tijekom izrade ovog rada.

# Poglavlje 1

## Metoda homogenizacije u 2D elastičnosti

### 1.1 Definicija problema

Neka je  $\Omega$  otvoren i ograničen skup u  $\mathbb{R}^2$ . Za sve  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  definiramo podskup  $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$  skupa  $\mathcal{M}_2^4$  svih simetričnih tenzora četvrtog reda koji djeluju nad simetričnim matricama dimenzije 2 sa

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \{M \in \mathcal{M}_2^4 \mid M\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, M^{-1}\xi \cdot \xi \geq \beta |\xi|^2, \forall \xi \in \mathcal{M}_2^s\},$$

gdje  $\mathcal{M}_2^s$  označava skup svih realnih simetričnih matrica reda 2. Tenzori iz skupa  $\mathcal{M}_2^4$  u kontekstu elastičnosti zovu se tenzori elastičnosti.

Elastično tijelo zadano na  $\Omega$  se uslijed djelovanja sile deformira te na njoj možemo promatrati funkciju pomaka  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , koja za svaku točku tijela opisuje njen položaj nakon deformacije. Kao mjera deformacije služi nam linearizirani tenzor deformacije  $e(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2 \in \mathcal{M}_2^s$ . Tenzor naprezanja  $\sigma \in \mathcal{M}_2^s$  opisuje djelovanje unutarnjih sila na pojedinu točku tijela. Vezu između tenzora deformacije  $e$  i tenzora naprezanja  $\sigma$  možemo izraziti pomoću posebnog tenzora elastičnosti  $A \in \mathcal{M}_2^4$  kao

$$\sigma(u) = Ae(u).$$

Tenzor elastičnosti  $A$  zadaje Hookeov zakon.

Neka je  $(A^\epsilon(x))_{\epsilon>0}$  niz tenzora u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Za zadanu funkciju  $f \in H^{-1}(\Omega)^2$  promatramo sljedeći sustav linearizirane elastičnosti

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon e(u_\epsilon)) = f & \text{u } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

Problem (1.1) dopušta sljedeću slabu formulaciju:

$$\int_{\Omega} A^{\epsilon} e(u_{\epsilon}) \cdot e(\phi) dx = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

pri čemu je  $\langle g, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = g(\varphi)$ ,  $g \in H^{-1}$ ,  $\varphi \in H_0^1$ . Uvrštavanjem  $u_{\epsilon}$  umjesto  $\phi$  u varijacijsku formulaciju i korištenjem pretpostavke da je  $A^{\epsilon}$  koercitivan, dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha \|e(u_{\epsilon})\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)}^2 &\leq \int_{\Omega} A^{\epsilon} e(u_{\epsilon}) \cdot e(u_{\epsilon}) dx \\ &= \langle f, u_{\epsilon} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &\leq \|f\|_{H^{-1}} \|u_{\epsilon}\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

Prema Kornovoj nejednakosti sada postoji  $C > 0$  tako da je

$$\|\phi\|_{H_0^1} \leq C \|e(\phi)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^2.$$

Obratna nejednakost je očita, pa zaključujemo da je norma  $\|e(\cdot)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)}$  ekvivalentna normi  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)^2}$  na prostoru  $H_0^1(\Omega)^2$ . Lax-Milgramova lema sada garantira da problem (1.1) ima jedinstveno slabo rješenje  $u_{\epsilon} \in H_0^1(\Omega)^2$ ,  $\epsilon > 0$  i za to rješenje je

$$\|u_{\epsilon}\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}}.$$

Zaključujemo da je niz rješenja  $(u_{\epsilon})_{\epsilon > 0}$  ograničen u  $H_0^1(\Omega)^2$ , pa postoje podniz tog niza, kojeg označavamo i dalje s  $\epsilon$ , i funkcija  $u \in H_0^1(\Omega)^2$  tako da

$$u_{\epsilon} \rightharpoonup u \text{ slabo u } H_0^1(\Omega)^2.$$

Niz tenzora naprezanja dan je sa  $\sigma_{\epsilon} = A^{\epsilon} e(u_{\epsilon})$ . Iz ograničenosti tenzora  $A^{\epsilon}$  zaključujemo da je i niz  $(\sigma_{\epsilon})_{\epsilon > 0}$  ograničen u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$ , te stoga postoje podniz  $\sigma_{\epsilon}$  tog niza i  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  tako da vrijedi

$$\sigma_{\epsilon} \rightharpoonup \sigma \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s).$$

Prema definiciji također očito vrijedi  $-\operatorname{div} \sigma_{\epsilon} = f$  u  $\Omega$ . Prelaskom na limes zaključujemo da tada vrijedi i  $-\operatorname{div} \sigma = f$  u  $\Omega$ .

Osnovno pitanje koje se nameće je postoji li veza između slabih limesa  $u$  i  $\sigma$ , odnosno postoji li tenzor  $A^* \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  tako da vrijedi

$$\sigma = A^* e(u).$$

Problem leži u činjenici da, unatoč tome što je niz  $(A^{\epsilon})_{\epsilon > 0}$  ograničen u  $L^{\infty}(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  te stoga postoji (do na podniz) njegov slabi-\* limes  $\bar{A}$  u istom skupu, produkt  $A^{\epsilon} e(u_{\epsilon})$  općenito ne konvergira prema  $\bar{A} e(u)$ , niti je  $\sigma = \bar{A} e(u)$ . Bit će potrebno uspostaviti drugu vrstu konvergencije na prostoru  $L^{\infty}(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  kako bi se dokazala željena relacija, čime se bavi sljedeća sekcija.



## 1.2 H-konvergenција

**Definicija 1.2.1.** Kažemo da niz tenzora elastičnosti  $A^\epsilon$  u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  konvergira u smislu homogenizacije, odnosno da H-konvergira, prema homogeniziranom tenzoru elastičnosti  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  ako za sve desne strane  $f \in H^{-1}(\Omega)^2$  niz rješenja  $u_\epsilon$  problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon e(u_\epsilon)) = f & u \text{ u } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

zadovoljava

$$\begin{cases} u_\epsilon \rightharpoonup u & \text{slabo u } H_0^1(\Omega)^2, \\ A^\epsilon e(u_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(u) & \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s), \end{cases} \quad (1.3)$$

pri čemu je  $u$  jedinstveno rješenje homogenizirane jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* e(u)) = f & u \text{ u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Osnovni rezultat ovog odjeljka bavi se pitanjem postojanja H-limesa niza  $A^\epsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Najprije navodimo nekoliko pomoćnih tvrdnji.

**Lema 1.2.2.** (*div-rot lema*) Neka su  $e^\epsilon$  i  $\sigma^\epsilon$  dva niza u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s)$  tako da vrijedi

$$\begin{cases} e^\epsilon \rightharpoonup e & \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ \sigma^\epsilon \rightharpoonup \sigma & \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s). \end{cases}$$

Neka također vrijedi

$$\operatorname{div}\sigma^\epsilon \rightarrow \operatorname{div}\sigma \text{ u } H^{-1}(\Omega)^2$$

i za sve  $i, j, k, l \in \{1, 2\}$  vrijedi

$$\frac{\partial e_{jl}^\epsilon}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial e_{ik}^\epsilon}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial e_{jk}^\epsilon}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial e_{il}^\epsilon}{\partial x_j \partial x_k} \rightarrow \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial e_{il}}{\partial x_j \partial x_k} \text{ u } H^{-1}(\Omega)^2.$$

Tada

$$e^\epsilon \sigma^\epsilon \rightharpoonup e\sigma \text{ u smislu distribucija.}$$

**Lema 1.2.3.** Neka je  $V_1$  separabilan i  $V_2$  refleksivan Banachov prostor. Neka je  $S_\epsilon$  ograničen niz linearnih operatora iz prostora  $V_1$  u  $V_2$ , dakle iz  $\mathbb{B}(V_1, V_2)$ . Tada postoji podniz (i dalje indeksiran sa  $\epsilon$ ) i operator  $S_0 \in \mathbb{B}(V_1, V_2)$  tako da vrijedi

$$\|S_0\| \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|S_\epsilon\|$$

i za sve  $f \in V_1$  vrijedi

$$S_\epsilon f \rightharpoonup S_0 f \text{ slabo u } V_2.$$

*Dokaz.* Označimo sa  $X_1$  prebrojiv gust podskup skupa  $V_1$ . Za svaki  $f \in X_1$  niz  $(S_\epsilon f)_{\epsilon>0}$  je ograničen pa, jer je prostor  $V_2$  refleksivan, ima slabo konvergentan podniz  $S_\epsilon f$  čiji slabi limes označimo sa  $S_0 f$ . Budući da je skup  $X_1$  prebrojiv, možemo dijagonalizacijom dobiti podniz (označen opet s  $\epsilon$ ) nizova  $(\epsilon f)_{f \in X_1}$  tako da za sve  $f \in X_1$  vrijedi

$$S_\epsilon f \rightharpoonup S_0 f \text{ slabo u } V_2.$$

Time smo definirali linearan operator  $S_0 : X_1 \rightarrow V_2$ . Budući da je norma slabo poluneprekidna odozdo, također vrijedi

$$\|S_0 f\|_{V_2} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|S_\epsilon f\|_{V_2} \leq C \|f\|_{V_1}, \quad (1.5)$$

što znači da je  $S_0 \in \mathbb{B}(X_1, V_2)$ . Operator  $S_0$  se može po neprekidnosti proširiti do operatora na čitavom  $V_1$  jer je  $X_1$  gust u  $V_1$ , odakle slijedi da za sve  $f \in V_1$  vrijedi

$$S_\epsilon f \rightharpoonup S_0 f \text{ slabo u } V_2.$$

Prva tvrdnja leme slijedi iz prve nejednakosti u 1.5. □

**Lema 1.2.4.** *Neka je  $V$  separabilan i refleksivan Banachov prostor. Neka su  $\alpha, \beta > 0$  i  $T_\epsilon$  niz operatora u  $\mathbb{B}(V, V')$  tako da za sve  $v \in V$  vrijedi*

$$\langle T_\epsilon v, v \rangle_{V', V} \geq \alpha \|v\|_V^2$$

*i za sve  $f \in V'$  vrijedi*

$$\langle T_\epsilon^{-1} f, f \rangle_{V, V'} \geq \beta \|f\|_{V'}^2.$$

*Tada postoje podniz (i dalje indeksiran s  $\epsilon$ ) i operator  $T_0 \in \mathbb{B}(V, V')$  tako da su  $T_0, T_0^{-1}$  također koercitivni s konstantama  $\alpha, \beta$  i za sve  $f \in V'$  vrijedi*

$$T_\epsilon^{-1} f \rightharpoonup T_0^{-1} f \text{ slabo u } V.$$

*Dokaz.* Budući da je dual reflektivnog, separabilnog Banachovog prostora također refleksivan i separabilan, možemo primijeniti Lemu 1.2.3 na niz  $(T_\epsilon^{-1})_{\epsilon>0}$  uz  $V_1 = V'$  i  $V_2 = V$ , odakle slijedi da postoje podniz  $(T_\epsilon^{-1})_{\epsilon>0}$  i operator  $T_0^{-1}$  tako da je

$$T_\epsilon^{-1} f \rightharpoonup T_0^{-1} f \text{ slabo u } V, \forall f \in V'.$$

Puštanjem limesa kad  $\epsilon \rightarrow 0$  dobivamo

$$\langle T_0^{-1} f, f \rangle_{V, V'} \geq \beta \|f\|_{V'}^2,$$

što zajedno s Lax - Milgramovom lemom povlači da je  $T_0^{-1}$  invertibilan. Uvrstimo  $v = T_\epsilon^{-1} f$  u pretpostavku koercitivnosti  $T_\epsilon$ :

$$\langle f, T_\epsilon^{-1} f \rangle_{V', V} \geq \|T_\epsilon^{-1} f\|_V^2.$$

Puštanjem limesa u ovoj nejednakosti i korištenjem slabe poluneprekidnosti odozdo norme na Banachovim prostorima dobivamo

$$\langle f, T_0^{-1} f \rangle_{V, V} \geq \alpha \|T_0^{-1} f\|_V.$$

Konačno, uvrštavanjem  $f = T_0 v$  slijedi koercitivnost  $T_0$ .  $\square$

Sada iznosimo glavni rezultat ovog odjeljka.

**Teorem 1.2.5.** *Za svaki niz tenzora elastičnosti  $A^\epsilon \subseteq L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  postoji podniz  $A^\epsilon$  i homogenizirani tenzor elastičnosti  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  tako da  $A^\epsilon$   $H$ -konvergira prema  $A^*$ .*

*Dokaz. Prvi korak*

Definiramo operatore  $T_\epsilon : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow H^{-1}(\Omega)^2$  i  $S_\epsilon : H^{-1}(\Omega)^2 \rightarrow L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  sa

$$\begin{aligned} T_\epsilon v &= -\operatorname{div}(A^\epsilon e(v)) \\ S_\epsilon f &= A^\epsilon e((T_\epsilon)^{-1} f), \end{aligned}$$

pri čemu su  $A^\epsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$ . Sva tri navedena prostora su separabilni i reflektivni Banachovi prostori te za operatore  $T_\epsilon$  vrijedi:

$$\langle T_\epsilon v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} A^\epsilon e(v) \cdot e(v) dx \geq \alpha \|e(v)\|_{L^2}^2.$$

Prema Kornovoj nejednakosti  $\|e(\cdot)\|_{L^2}$  uzimamo kao normu na prostoru  $H_0^1(\Omega)^2$ . Stoga zaključujemo da su  $T_\epsilon$  koercitivni operatori s konstantom  $\alpha$ . Također je

$$\langle T_\epsilon v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} (A^\epsilon)^{-1} (A^\epsilon e(v)) \cdot (A^\epsilon e(v)) dx \geq \beta \|A^\epsilon e(v)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)}$$

i

$$\|T_\epsilon v\|_{H^{-1}} = \sup_{\phi \in H_0^1} \frac{\langle T_\epsilon v, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\|\phi\|_{H_0^1}} = \sup_{\phi \in H_0^1} \frac{\int_{\Omega} A^\epsilon e(v) \cdot e(\phi) dx}{\|\phi\|_{H_0^1}} \leq \|A^\epsilon e(v)\|_{L^2}.$$

Stoga je

$$\langle T_\epsilon v, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \geq \|T_\epsilon v\|_{H^{-1}}.$$

Uvrštavanjem  $v = T_\epsilon^{-1} f$  slijedi

$$\langle T_\epsilon^{-1} f, f \rangle_{H_0^1, H^{-1}} \geq \beta \|f\|_{H^{-1}}^2.$$

Analogno, iz

$$\|S_\epsilon f\|_{L^2} \leq \beta^{-1} \|e(T_\epsilon^{-1} f)\|_{L^2}$$

i

$$\|e(T_\epsilon^{-1}f)\|_{L^2} \leq \|T_\epsilon^{-1}f\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq \alpha^{-1}\|f\|_{H^{-1}}$$

zaključujemo da su  $S_\epsilon$  također koercitivni te da su im inverzi dobro definirani i također koercitivni. Iz Lema 1.2.3 i 1.2.4 sada slijedi da postoje podnizovi nizova  $T_\epsilon$  i  $S_\epsilon$  te operatori  $T_0$  i  $S_0$  tako da za sve  $f \in H^{-1}(\Omega)^2$  vrijedi

$$\begin{aligned} u_\epsilon = T_\epsilon^{-1}f &\rightharpoonup u = T_0^{-1}f \text{ slabo u } H_0^1(\Omega)^2 \\ A^\epsilon e(u_\epsilon) = S_\epsilon f &\rightharpoonup S_0 f \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s). \end{aligned}$$

Drugi korak:

Neka je  $\hat{\Omega}$  otvoren i ograničen skup u  $\mathbb{R}^2$  tako da je  $\Omega$  kompaktno uloženo u  $\hat{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega} \subset \hat{\Omega}$ . Možemo proširiti matrice  $A^\epsilon$  na skup  $\hat{\Omega}$ , na primjer definiranjem  $A^\epsilon = \alpha I_4$  u  $\hat{\Omega} \setminus \Omega$ , pri čemu je  $I_4$  jedinični tenzor četvrtog reda. Neka je  $\phi$  test-funkcija iz prostora  $\mathcal{D}(\hat{\Omega})$  takva da je  $\phi \equiv 1$  u  $\Omega$ . Definiramo operator  $\hat{T}_\epsilon : H_0^1(\hat{\Omega})^2 \rightarrow H^{-1}(\hat{\Omega})^2$  sa

$$\hat{T}_\epsilon v = -\text{div}(A^\epsilon e(v)).$$

Kao u prvom koraku pokaže se da postoje podniz niza  $\hat{T}_\epsilon$  i operator  $\hat{T}_0$  tako da vrijedi

$$\hat{T}_\epsilon^{-1}f \rightharpoonup \hat{T}_0^{-1}f \text{ slabo u } H_0^1(\hat{\Omega})^2.$$

Označimo  $g_i = \hat{T}_0(\phi x_i)$  i definiramo niz test-funkcija  $w_\epsilon^i$  kao

$$w_\epsilon^i = \hat{T}_\epsilon^{-1}g_i.$$

Lako je provjeriti da tada vrijedi

$$\begin{aligned} w_\epsilon^i &\rightharpoonup x_i && \text{slabo u } H^1(\Omega)^2, \\ g_\epsilon^i = -\text{div}(A^\epsilon e(w_\epsilon^i)) &\rightarrow g_i && \text{u } H^{-1}(\Omega)^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Treći korak:

Nizovi  $(A^\epsilon e(w_\epsilon^i))_{i=1,2}$  su prema posljednjem zaključku ograničeni u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  pa postoje (do na podniz) matrice  $a^i$  tako da

$$A^\epsilon e(w_\epsilon^i) \rightharpoonup a^i \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s).$$

Sada možemo definirati tenzor  $A^*(x) = a^1(x) \otimes a^2(x)$ , gdje  $(\cdot \otimes \cdot)$  označava vanjski produkt matrica. Tada za  $w_\epsilon = \sum_{i=1}^2 \lambda^i w_\epsilon^i$ ,  $\lambda^i \in \mathcal{M}_2^s$  vrijedi

$$(A^\epsilon e(u_\epsilon) - A^\epsilon e(w_\epsilon)) \cdot (e(u_\epsilon) - e(w_\epsilon)) \geq 0,$$

jer su  $A^\epsilon$  koercitivne. Zbog  $-\operatorname{div}(A^\epsilon e(u_\epsilon) - A^\epsilon e(w_\epsilon)) \rightarrow f - g_\epsilon^i$  u  $H^{-1}(\Omega)^2$  prelaskom na limes i primjenom Leme 1.2.2 dobivamo

$$(S_0 f - A^* \lambda) \cdot (e(u) - \lambda) \geq 0 \text{ g.s. u } \Omega.$$

Neka je  $x_0$  točka u  $\Omega$  u kojoj vrijedi gornja nejednakost. Odaberimo  $\lambda = e(u(x_0)) - t\mu$ , pri čemu je  $t > 0$  i  $\mu \in \mathcal{M}_2^s$ . Tada je

$$(S_0 f(x_0) - A^*(x_0)e(u(x_0)) + tA^*(x_0)\mu) \cdot t\mu \geq 0.$$

Posljednju nejednakost podijelimo sa  $t$  i pustimo  $t \rightarrow 0$  pa dobivamo

$$(S_0 f(x_0) - A^*(x_0)e(u(x_0))) \cdot \mu \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}_2^s.$$

Uvrštavanjem  $\mu = -\mu$  zaključujemo da je gornja nejednakost zapravo jednakost, odakle slijedi

$$(S_0 f)(x_0) = A^*(x_0)e(u(x_0)),$$

i ta jednakost vrijedi gotovo svuda u  $\Omega$ . Konačno, iz definicije operatora  $S_\epsilon$  (posljedično i  $S_0$ ) dobivamo da je operator  $T_0$  dan sa

$$T_0 v = -\operatorname{div}(A^* e(v)).$$

Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$\begin{cases} u_\epsilon \rightharpoonup u & \text{slabo u } \Omega, \\ A^\epsilon e(u_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(u) & \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s), \end{cases}$$

pri čemu je  $u$  rješenje homogenizirane jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* e(u)) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Preostaje još pokazati da tenzor  $A^*$  pripada prostoru  $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ . Neka je  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  proizvoljna test-funkcija. Tada je

$$\int_{\Omega} \phi^2 A^\epsilon e(w_\epsilon) \cdot e(w_\epsilon) dx \geq \alpha \int_{\Omega} \phi^2 |e(w_\epsilon)|^2 dx.$$

Iz (1.6) i Leme 1.2.2 slijedi da je opravdavan prelazak na limes pa dobivamo

$$\int_{\Omega} \phi^2 A^* \lambda \cdot \lambda dx \geq \alpha \int_{\Omega} \phi^2 |\lambda|^2 dx,$$

što uz činjenicu da je desna strana nejednakosti poluneprekidna odozdo daje  $A^* \geq \alpha I_2$ . Slično, budući da je  $A^\epsilon \in \mathcal{M}_{\alpha,\beta}$  slijedi

$$\int_{\Omega} \phi^2 A^{\epsilon-1}(A^\epsilon e(w_\epsilon)) \cdot (A^\epsilon e(w_\epsilon)) dx \geq \beta \int_{\Omega} \phi^2 |A^\epsilon e(w_\epsilon)|^2 dx.$$

Ponovnom primjenom Leme 1.2.2 slijedi

$$\int_{\Omega} \phi^2 A^* \lambda \cdot \lambda dx \geq \beta \int_{\Omega} \phi^2 |A^* \lambda|^2 dx,$$

pa uvrštavanjem  $\lambda = (A^*)^{-1} \mu$  dobivamo da je i  $(A^*)^{-1} \geq \beta I_2$ .  $\square$

U nastavku navodimo neka od važnijih svojstava H-konvergenције. Prvi rezultat utvrđuje jedinstvenost H-limesa, te lokalnost H-konvergenције, u smislu da vrijednosti tenzora  $A^*$  u određenom podskupu od  $\Omega$  ne ovise o vrijednostima izvan tog podskupa.

**Propozicija 1.2.6.** *Postoje pozitivna konstanta  $C > 0$  i realan broj  $\delta > 1$  takvi da za svaka dva niza tenzora elastičnosti  $A^\epsilon(x), B^\epsilon(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  koji H-konvergiraju prema  $A^*, B^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  vrijedi*

$$\|A^* - B^*\|_{L^\delta(\Omega; \mathcal{M}_N^s)} \leq C \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|A^\epsilon - B^\epsilon\|_{L^\delta(\Omega; \mathcal{M}_N^s)}.$$

*Posebno, ako postoji  $\omega \Subset \Omega$  takav da je  $A^\epsilon(x) = B^\epsilon(x), \forall x \in \omega$ , onda je  $A^*(x) = B^*(x), \forall x \in \omega$ .*

*Dokaz.* Dokazujemo drugu tvrdnju. Budući da je  $\omega$  kompaktno sadržan u  $\Omega$ , postoji test-funkcija  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takva da je  $\phi \equiv 1$  u  $\omega$ . Za  $\lambda \in \mathcal{M}_2^s$  definiramo  $w(x) = \lambda x \phi(x)$  i  $g = -\operatorname{div} A^* e(w)$ . Neka je  $w_\epsilon \in H_0^1(\Omega)^2$  rješenje jednadžbe

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon e(w_\epsilon)) = g & \text{u } \Omega, \\ w_\epsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Budući da  $A^\epsilon$  prema pretpostavci H-konvergira prema  $A^*$ , zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} w_\epsilon &\rightharpoonup w && \text{slabo u } H_0^1(\Omega)^2 \\ A^\epsilon e(w_\epsilon) &\rightharpoonup A^* e(w) && \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s). \end{aligned}$$

Slično, za  $\mu \in \mathcal{M}_2^s$  definiramo  $v(x) = \mu x \phi(x)$ ,  $f = -\operatorname{div}(A^* e(v))$  i  $v_\epsilon$  analogno  $u_\epsilon$  pa zaključujemo

$$\begin{aligned} v_\epsilon &\rightharpoonup v && \text{slabo u } H_0^1(\Omega)^2 \\ B^\epsilon e(v_\epsilon) &\rightharpoonup B^* e(v) && \text{slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s). \end{aligned}$$

Primjenom Leme 1.2.2 slijedi

$$(A^\epsilon e(w_\epsilon) - B^\epsilon e(v_\epsilon)) \cdot (e(w_\epsilon) - e(v_\epsilon)) \rightharpoonup (A^* e(w) - B^* e(v)) \cdot (e(w) - e(v))$$

u smislu distribucija. Prema pretpostavci,  $A^\epsilon = B^\epsilon$  gotovo svuda u  $\omega$  i  $A^\epsilon$  su koercitivni, pa je lijeva strana zadnje jednakosti gotovo svuda pozitivna. Slijedi

$$(A^* e(w) - B^* e(v)) \cdot (e(w) - e(v)) = (A^* \lambda - B^* \mu) \cdot (\lambda - \mu) \geq 0 \text{ g.s. u } \omega.$$

Odaberemo  $\mu = \lambda + t\nu$  uz  $t > 0$ ,  $\nu \in \mathcal{M}_2^s$ , podijelimo jednadžbu s  $t$  i pustimo  $t \rightarrow 0$  pa dobivamo

$$(A^* - B^*)\lambda \cdot \nu \geq 0, \quad \forall \lambda, \nu \in \mathcal{M}_2^s.$$

Ako uvrstimo  $\nu = -\nu$  gornja nejednakost postaje jednakost, pa zaključujemo da je  $A^* = B^*$  u  $\omega$ .  $\square$

Iako smo H-limes definirali vezano uz problem s Dirichletovim rubnim uvjetom, ta je pretpostavka zapravo bila nepotrebna. Niz  $u_\epsilon$  može zadovoljavati bilo kakav rubni uvjet, što pokazuje sljedeća propozicija.

**Propozicija 1.2.7.** *Neka je  $A^\epsilon$  niz tenzora elastičnosti u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  s H-limesom  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Tada za svaki niz  $z_\epsilon$  koji zadovoljava*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A^\epsilon e(z_\epsilon)) = f_\epsilon &\rightarrow f && \text{u } H_{loc}^{-1}(\Omega)^2, \\ z_\epsilon &\rightharpoonup z && \text{slabo u } H_{loc}^1(\Omega)^2 \end{aligned}$$

vrijedi

$$A^* e(z_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(z) \text{ slabo u } L_{loc}^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$$

*Dokaz.* Neka je  $\omega$  skup koji je kompaktno sadržan u  $\Omega$ . Prema definiciji,  $z_\epsilon$  je ograničen niz u  $H^1(\omega)^2$ , pa postoji  $\sigma \in L^2(\omega; \mathcal{M}_2^s)$  tako da (do na podniz)

$$A^\epsilon e(z_\epsilon) \rightharpoonup \sigma \text{ slabo u } L^2(\omega; \mathcal{M}_2^s).$$

Uvodimo niz test-funkcija  $w_\epsilon$  definiranih kao u dokazu Teorema 1.2.5. Neka je  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  takva da je  $\phi \equiv 1$  na  $\omega$ . Za  $\lambda \in \mathcal{M}_2^s$  definiramo  $w(x) = \lambda x \phi(x)$  i  $g = -\operatorname{div}(A^* e(w))$ . Tada su  $w_\epsilon$  definirane kao  $H_0^1(\Omega)^2$ -rješenja od

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon e(w_\epsilon)) = g & \text{u } \Omega, \\ w_\epsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Niz  $A^\epsilon$  H-konvergira prema  $A^*$ , pa slijedi

$$w_\epsilon \rightharpoonup w \text{ slabo u } H_0^1(\Omega)^2, \quad (1.7)$$

$$A^\epsilon e(w_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(w) \text{ slabo u } L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s). \quad (1.8)$$

Koercitivnost  $A^\epsilon$  povlači

$$(A^\epsilon e(z_\epsilon) - A^\epsilon e(w_\epsilon)) \cdot (e(z_\epsilon) - e(w_\epsilon)) \geq 0 \text{ g.s. u } \omega,$$

pa primjenom Leme 1.2.2 dobivamo

$$(\sigma - A^* \lambda) \cdot (e(z) - \lambda) \geq 0 \text{ g.s. u } \omega.$$

Neka je  $x_0 \in \omega$  točka u kojoj vrijedi gornja nejednakost. Odaberimo  $\lambda = e(z(x_0)) + t\mu$ ,  $t > 0$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_2^s$ . Podijelimo nejednakost s  $t$  i pustimo limes kad  $t \rightarrow 0$  pa zbog proizvoljnosti  $\mu$  slijedi

$$\sigma(x_0) = A^*(x_0)e(z(x_0)) \text{ g.s. u } \omega.$$

Slabi limes  $\sigma$  je jedinstveno određen dobivenom jednadžbom neovisno o izboru podniza  $\epsilon$ , stoga za cijeli niz vrijedi

$$A^\epsilon e(z_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(z) \text{ slabo u } L^2(\omega; \mathcal{M}_2^s).$$

Kako je  $\omega$  odabran proizvoljno, dobivena konvergencija vrijedi na čitavom  $L_{loc}^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$ .  $\square$

H-konvergencija implicira konvergenciju funkcije gustoće energije sustava, kao što je dokazano u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.2.8.** *Neka je  $A^\epsilon$  niz tenzora elastičnosti u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  s H-limesom  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Tada za svaku desnu stranu  $f \in H^{-1}(\Omega)^2$  niz  $u_\epsilon$  rješenja 1.4 zadovoljava*

$$A^\epsilon e(u_\epsilon) \cdot e(u_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(u) \cdot e(u) \text{ u smislu distribucija}$$

*i*

$$\int_{\Omega} A^\epsilon e(u_\epsilon) \cdot e(u_\epsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega} A^* e(u) \cdot e(u) dx,$$

*pri čemu je  $u$  slabi limes od  $u_\epsilon$  u  $H_0^1(\Omega)^N$  i rješenje homogenizirane jednadžbe (1.3).*

*Dokaz.* Primjenom Leme 1.2.2 dobivamo da vrijedi konvergencija

$$A^\epsilon e(u_\epsilon) \cdot e(u_\epsilon) \rightharpoonup A^* e(u) \cdot e(u)$$



u smislu distribucija u  $\Omega$ . Parcijalnom integracijom jednadžbe za  $u_\epsilon$  slijedi

$$\int_{\Omega} A^\epsilon e(u_\epsilon) \cdot e(u_\epsilon) dx = \int_{\Omega} f \cdot u_\epsilon dx \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

Parcijalna integracija homogenizirane jednadžbe daje

$$\int_{\Omega} A^* e(u) \cdot e(u) dx = \int_{\Omega} f \cdot u dx.$$

Dakle,

$$\int_{\Omega} A^\epsilon e(u_\epsilon) \cdot e(u_\epsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega} A^* e(u) \cdot e(u) dx.$$

□

Na kraju navodimo još dva rezultata vezana uz ponašanje H-konvergenције u odnosu na uređaj tenzora (pod tim smatramo da za tenzore  $A$  i  $B$  vrijedi  $A \leq B$  ako je tenzor  $(B - A)$  nenegativan u smislu kvadratnih formi).

**Propozicija 1.2.9.** *Neka su  $A^\epsilon(x), B^\epsilon(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  dva niza tenzora elastičnosti koji H-konvergiraju prema  $A^*, B^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Ako za sve  $\epsilon > 0$  vrijedi*

$$A^\epsilon \xi \cdot \xi \leq B^\epsilon \xi \cdot \xi \text{ g.s. u } \Omega, \forall \xi \in \mathcal{M}_2^s,$$

tada i za homogenizirane limese vrijedi

$$A^* \xi \cdot \xi \leq B^* \xi \cdot \xi \text{ g.s. u } \Omega, \forall \xi \in \mathcal{M}_2^s.$$

**Propozicija 1.2.10.** *Neka je  $A^\epsilon(x)$  niz tenzora elastičnosti u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  koji H-konvergiraju prema  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Ako vrijedi*

$$A^\epsilon \xrightarrow{*} \bar{A} \text{ slabo-* u } L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_2^4)$$

i

$$(A^\epsilon)^{-1} \xrightarrow{*} (\underline{A})^{-1} \text{ slabo-* u } L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_2^4),$$

onda za homogenizirani limes  $A^*$  g.s. u  $\Omega$  vrijedi

$$\underline{A} \xi \cdot \xi \leq A^* \xi \cdot \xi \leq \bar{A} \xi \cdot \xi, \forall \xi \in \mathcal{M}_2^s.$$

### 1.3 Periodička homogenizacija

Neka je  $\Omega$  otvoren i ograničen skup u  $\mathbb{R}^2$  u kojem se nalazi linearan, elastičan i periodičan materijal perioda  $\epsilon$ . Koordinatni sustav odaberemo tako da je osnovna ćelija periodičnosti  $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ . Materijal u  $\Omega$  određen je periodičnim tenzorom elastičnosti  $A(y)$ , gdje je  $y = \frac{x}{\epsilon} \in Y$ ,  $x \in \Omega$ . Uz zadano djelovanje sile na  $\Omega$  i Dirichletov rubni uvjet, problem linearizirane elastičnosti u  $\Omega$  glasi:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)e(u_\epsilon)\right) = f & \text{u } \Omega, \\ u_\epsilon = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Cilj nam je odrediti svojstva materijala u  $\Omega$  kad  $\epsilon \rightarrow 0$ . Najprije definiramo funkcijske prostore  $L_\#^p(Y)$ ,  $H_\#^p(Y)$  sa

$$L_\#^p(Y) = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2) \mid f \text{ je } Y\text{-periodička} \right\},$$

$$H_\#^p(Y) = \left\{ f \in H_{loc}^p(\mathbb{R}^2) \mid f \text{ je } Y\text{-periodička} \right\}.$$

i na njima definiramo norme  $\|\cdot\|_{L^p(Y)}$ ,  $\|\cdot\|_{H^p(Y)}$ .

Tada se tenzor elastičnosti  $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  nalazi u prostoru  $L_\#^\infty(Y; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Željeli bismo ga eksplicitno odrediti. U tu svrhu iznosimo sljedećih nekoliko rezultata.

**Lema 1.3.1.** *Neka je  $f(y) \in L_\#^2(Y)$ . Niz  $f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  je slabo konvergentan u  $L_\#^2(Y)$  sa limesom  $\int_Y f(y)dy$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\Omega$  proizvoljan ograničen skup u  $\mathbb{R}^2$  i  $(Y_i^\epsilon)_{1 \leq i \leq n(\epsilon)}$  familija disjunktih kvadrata s duljinama stranica  $\epsilon$  koji čine pokrivač od  $\Omega$  (svaki od kvadrata  $Y_i^\epsilon$  dobiven je iz  $Y$  skaliranjem i translacijom). Označimo s  $x_i^\epsilon$  središte svakog od kvadrata  $Y_i^\epsilon$ . Ukupan broj kvadrata je  $n(\epsilon) = \frac{|\Omega|}{\epsilon^2}(1 + o(1))$ . Sada je

$$\int_{Y_i^\epsilon} f_\epsilon(x)^2 dx = \int_{Y_i^\epsilon} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 dx = \epsilon^2 \int_Y f(y)^2 dy,$$

pa slijedi

$$\|f_i^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} \int_{Y_i^\epsilon \cap \Omega} f_\epsilon(x)^2 dx = |\Omega| \left( \int_Y f(y)^2 dy \right) (1 + o(1)),$$

odakle zaključujemo da je  $f_\epsilon$  ograničen niz u  $L^2(\Omega)$ .

Označimo  $m(f) = \int_Y f(y)dy$ . Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\int_\Omega f_\epsilon(x)\phi(x) \rightarrow m(f) \int_\Omega \phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Iz pretpostavljene periodičnosti funkcije  $f$  slijedi

$$\int_{Y_i^\epsilon} f_\epsilon(x) dx = \epsilon^2 m(f).$$

Neka je  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  proizvoljna. Tada vrijedi

$$\left| \int_{Y_i^\epsilon} f_\epsilon(x) \phi(x) dx - \epsilon^2 m(f) \phi(x_i^\epsilon) \right| \leq \epsilon^2 m(|f|) \max_{x, x' \in Y_i^\epsilon} |\phi(x) - \phi(x')|.$$

Sumiramo po  $i$  pa dobivamo

$$\left| \int_{\Omega} f_\epsilon(x) \phi(x) dx - \epsilon^2 m(f) \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} \phi(x_i^\epsilon) \right| \leq \epsilon^2 m(|f|) n(\epsilon) \max_{|x-x'| \leq 2\epsilon} |\phi(x) - \phi(x')|.$$

Konačno, zbog  $\max_{|x-x'| \leq 2\epsilon} |\phi(x) - \phi(x')| = o(1)$ , jer je niz  $\epsilon^2 n(\epsilon)$  uniformno ograničen te jer vrijedi

$$\epsilon^2 \sum_{i=1}^{n(\epsilon)} \phi(x_i^\epsilon) = \int_{\Omega} \phi(x) dx + o(1),$$

slijedi tražena konvergencija. □

**Lema 1.3.2.** Neka je  $f \in L^2_\#(Y)$ . Problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)e(w(y))) = f & u Y, \\ y \rightarrow w(y) & Y\text{-periodično.} \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje u  $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$  ako i samo ako vrijedi  $\int_Y f(y) dy = 0$  (Fredholmova alternativa).

*Dokaz.* Zbog periodičnosti rubnog uvjeta, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_Y (\operatorname{div} A(y)e(w(y))) dy = 0, \quad \forall w \in H^1_\#(Y),$$

pa je  $\int_Y f(y) dy = 0$  nužan uvjet za postojanje rješenja.

Obratno, neka je  $\int_Y f(y) dy = 0$ . Lako se vidi da je  $\|e(\cdot)\|_{L^2(Y)^2}$  norma na kvocijentalnom prostoru  $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$ . Varijacijska formulacija zadane jednadžbe glasi

$$\int_Y A(y)e(w(y)) \cdot e(v(y)) dy = \int_Y f(y) \cdot v(y) dy, \quad \forall v \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}.$$

Provjeravamo uvjete Lax-Milgramove leme. Lijeva strana slabe formulacije očito definira bilinearnu formu koja je neprekidna i koercitivna na  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ . Budući da je  $\int_Y f(y)dy = 0$ , desnu stranu možemo zapisati u obliku

$$\int_Y f(y) \cdot v(y)dy = \int_Y f(y) \cdot \left( v(y) - \int_Y v(y)dy \right) dy,$$

što je neprekidan linearan funkcional na  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$  zbog Poincaré-Wirtingerove nejednakosti (vidi [1]):

$$\|v(y) - \int_Y v(y)dy\|_{L^2(Y)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(Y)^2} \leq C\|e(v)\|_{L^2(Y)^2}.$$

Zaključujemo da dani problem ima jedinstveno rješenje u  $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ .  $\square$

Sada navodimo osnovni rezultat ovog dijela izlaganja.

**Teorem 1.3.3.** *Niz  $A^\epsilon = A(\frac{x}{\epsilon})$   $H$ -konvergira kad  $\epsilon \rightarrow 0$  prema konstantnom homogeniziranom tenzoru  $A^* \in \mathcal{M}_{\alpha,\beta}$  definiranom po komponentama sa*

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^* &= \int_Y [(A(y)e_y(w_{ij}(y)))_{kl} + A_{ijkl}(y)]dy = \\ &= \int_Y A(y)(e_{ij} + e_y(w_{ij}(y))) \cdot (e_{kl} + e_y(w_{kl}(y)))dy, \end{aligned} \quad (1.10)$$

pri čemu su  $(e_{ij})_{i,j=1,2}$  matrice baze prostora simetričnih matrica,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i),$$

$e_1, e_2$  vektori kanonske baze za  $\mathbb{R}^2$ , i  $w_{ij} \in H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$  rješenja problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)(e_{ij} + e_y(w_{ij}(y)))) = 0 & u Y, \\ y \rightarrow w_{ij}(y) & Y\text{-periodično} \end{cases}$$

*Dokaz.* Dokaz teorema može se naći u [3].  $\square$

## 1.4 Laminirane strukture

Radi jednostavnosti u daljnjem pretpostavljamo da tenzori elastičnosti  $A^\epsilon$  ovise samo o prvoj prostornoj varijabli,  $A^\epsilon(x) \equiv A^\epsilon(x_1)$ . Pretpostavljamo još da  $A^\epsilon$  poprima samo dvije vrijednosti u  $\Omega$ ,

$$A^\epsilon(x_1) = \chi_\epsilon(x_1)A + (1 - \chi_\epsilon(x_1))B,$$

pri čemu su  $\chi_\epsilon$  karakteristične funkcije u  $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ . Osnovni rezultat ovog odjeljka dan je u sljedećoj lemi.

**Lema 1.4.1.** (formula laminacije) Neka je  $\chi_\epsilon(x_1)$  niz karakterističnih funkcija koji slabo-\* konvergira prema  $\theta(x_1)$  u  $L^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ . Neka su  $A$  i  $B$  dva konstantna tenzora elastičnosti u  $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ . Tada niz matrica  $A^\epsilon \subseteq L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$  definiran sa

$$A^\epsilon(x_1) := \chi_\epsilon(x_1)A + (1 - \chi_\epsilon(x_1))B$$

$H$ -konvergira prema tenzoru elastičnosti  $A^* = A^*(x_1)$  danom formulom

$$A^*\xi = (\theta A + (1 - \theta)B)\xi - \frac{\theta(1 - \theta)}{2}(A - B)(q(e_1)((A - B)\xi)(e_1 \otimes e_1) + (e_1 \otimes e_1)((A - B)\xi)q(e_1)),$$

za svaki  $\xi \in \mathcal{M}_2^s$ , pri čemu je  $q(e_1)$  simetrična matrica definirana kvadratnom formom

$$q(e_1)^{-1}v \cdot v = (((1 - \theta)A + \theta B)v \otimes e_1) \cdot (v \otimes e_1), \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti (zbog lokalnosti  $H$ -konvergencije, Lema 1.2.6) možemo pretpostaviti da je  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Konstruiramo niz pomaka  $u_\epsilon$  kao niz rješenja problema

$$-\operatorname{div}(A^\epsilon e(u_\epsilon)) = 0 \text{ u } \mathbb{R}^2.$$

Neka su  $\xi_A$  i  $\xi_B$  dvije matrice u  $\mathcal{M}_2^s$ . Želimo naći rješenje  $u_\epsilon$  tako da je

$$e(u_\epsilon) = \xi_A \chi_\epsilon + \xi_B (1 - \chi_\epsilon),$$

što vrijedi za

$$u_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(x_1)\tilde{\xi}_A x + (1 - \chi_\epsilon(x_1))\tilde{\xi}_B x + c_\epsilon(x_1),$$

pri čemu su  $\tilde{\xi}_A, \tilde{\xi}_B$  matrice takve da je

$$\xi_A = \frac{1}{2}(\tilde{\xi}_A + \tilde{\xi}_A^T), \quad \xi_B = \frac{1}{2}(\tilde{\xi}_B + \tilde{\xi}_B^T)$$

i  $c_\epsilon(x_1)$  je po dijelovima konstantna funkcija u  $x_1$  takva da je  $u_\epsilon$  neprekidna. Ovako definiran  $u_\epsilon$  pripada prostoru  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)^2$  pod uvjetom da je neprekidan na svim granicama materijala  $A$  i  $B$ , što povlači određene uvjete na vrijednosti  $c_\epsilon$  i matrice  $\tilde{\xi}_A, \tilde{\xi}_B$ :

$$(\tilde{\xi}_A - \tilde{\xi}_B)x = (\tilde{\xi}_A - \tilde{\xi}_B)y, \quad x, y \in \text{granica } A|B.$$

Granice materijala  $A$  i  $B$  su hiperravnine s vektorom normale  $e_1$ , stoga zaključujemo da je  $x = y + te_2$ , pa postoji konstantni vektor  $w \in \mathbb{R}^2$  tako da je

$$\tilde{\xi}_A - \tilde{\xi}_B = w \otimes e_1,$$

odakle slijedi

$$\xi_A - \xi_B = w \odot e_1,$$

gdje  $\odot$  označava simetrični tenzorski produkt,  $u \odot v = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u)$ . Sada je  $e(u_\epsilon) = \chi_\epsilon \xi_A + (1 - \chi_\epsilon) \xi_B$ , pa je naprezanje  $\sigma_\epsilon$  dano sa

$$\sigma_\epsilon = \chi_\epsilon(x_1) A \xi_A + (1 - \chi_\epsilon(x_1)) B \xi_B.$$

$\sigma_\epsilon$  je po dijelovima konstantno, pa da bismo osigurali  $-\operatorname{div} \sigma_\epsilon = 0$  u  $\mathbb{R}^2$  u smislu distribucija, mora vrijediti

$$(A \xi_A) e_1 = (B \xi_B) e_1,$$

što povlači dodatne uvjete na vektor  $w$ . Iz definicije  $u_\epsilon$  i  $\sigma_\epsilon$  zaključujemo

$$\begin{cases} e(u_\epsilon) \rightharpoonup e(u) = \theta \xi_A + (1 - \theta) \xi_B & \text{slabo u } L_{loc}^2(\mathbb{R}^2; \mathcal{M}_2^s) \\ \sigma_\epsilon \rightharpoonup \sigma = \theta A \xi_A + (1 - \theta) B \xi_B & \text{slabo u } L_{loc}^2(\mathbb{R}^2; \mathcal{M}_2^s). \end{cases}$$

Prema Teoremu 1.2.5 postoje podniz niza  $A^\epsilon$  i matrica  $A^*$  tako da  $A^\epsilon$  H-konvergira prema  $A^*$ . Slijedi

$$\sigma = A^* e(u).$$

Definiramo matricu  $\xi = \theta \xi_A + (1 - \theta) \xi_B$  pa je

$$\xi_A = \xi + (1 - \theta) w \odot e_1, \quad \xi_B = \xi - \theta w \odot e_1.$$

Tada vrijedi

$$A^* \xi = \theta A \xi + (1 - \theta) B \xi + \theta(1 - \theta)(A - B) w \odot e_1.$$

Potrebno je još odrediti vektor  $w$ . Uvjet  $(A \xi_A) e_1 = (B \xi_B) e_1$  pomnožimo vektorom  $v$  i uvrstimo izračunate  $\xi_A, \xi_B$ :

$$((A - B) \xi) e_1 \cdot v + ((1 - \theta) A + \theta B) w \odot e_1 \cdot v = 0.$$

Korištenjem identiteta  $(C(w \odot e_1)) e_1 \cdot v = (C(w \otimes e_1)) \cdot (v \otimes e_1)$  slijedi

$$((A - B) \xi) e_1 \cdot v + q(e_1)^{-1} w \cdot v = 0,$$

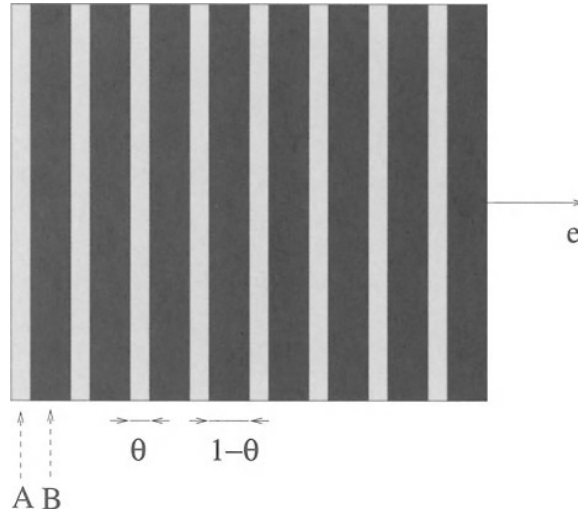
odnosno

$$w = -q(e_1) ((A - B) \xi) e_1.$$

□

**Napomena 1.4.2.** Za materijal definiran u Lemi 1.4.1 kažemo da je jednostavan laminat faza  $A$  i  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$  i sa smjerom laminacije  $e_1$ . Jedan jednostavan primjer takvog laminata prikazan je na Slici 1.1.

Analogno se dokazuje sljedeća ekvivalentna formulacija:



Slika 1.1: Primjer jednostavnog laminata

**Lema 1.4.3.** Uz pretpostavke kao u prošloj lemi i ako je  $(A - B)$  invertibilna, tenzor elastičnosti  $A^*$  je ekvivalentno definiran sa

$$\theta(A^* - B)^{-1}\xi = (A - B)^{-1}\xi + \frac{1 - \theta}{2}(q_B(e_1)\xi(e_1 \otimes e_1) + (e_1 \otimes e_1)\xi q_B(e_1)), \quad (1.11)$$

pri čemu je  $\xi$  proizvoljna simetrična matrica i  $q_B(e_1)$  simetrična matrica definirana kvadratnom formom

$$q_B(e_1)^{-1}v \cdot v = (B(v \otimes e_1)) \cdot (v \otimes e_1), \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Ako  $(A - B)$  nije invertibilna, formula 1.11 vrijedi za sve matrice  $\xi \in \text{Ker}(A - B)^\perp$  te vrijedi  $A^* = A = B$  na  $\text{Ker}(A - B)$ .

Ako uvedemo dodatnu pretpostavku da je materijal  $B$  izotropan, matricu  $q_B(e_1)$  možemo eksplicitno izračunati, pa formula dobivena u prošloj lemi poprima oblik naveden u sljedećem korolaru.

**Korolar 1.4.4.** Neka je  $B$  izotropan, tj. postoje  $\kappa_B, \mu_B > 0$  tako da je

$$B = 2\mu_B I_4 + \left(\kappa_B - \frac{2\mu_B}{N}\right) I_2 \otimes I_2.$$

Tada je tenzor elastičnosti  $A^*$  ekvivalentno definiran sa

$$\theta(A^* - B)^{-1} = (A - B)^{-1} + (1 - \theta)f_B(e_1), \quad (1.12)$$

pri čemu je  $f_B(e_1)$  pozitivno nedefinitan tenzor četvrtog reda definiran sa

$$f_B(e_1)\xi = \frac{1}{\mu_B}((\xi e_1) \odot e_1 - (\xi e_1 \cdot e_1)e_1 \otimes e_1) + \frac{1}{2\mu_B + \lambda_B}(\xi e_1) \cdot e_1 = e_1 \otimes e_1,$$

ili ekvivalentno pomoću kvadratne forme

$$f_B(e_1)\xi \cdot \xi = \frac{1}{\mu_B}(|\xi e_1|^2 - (\xi e_1 \cdot e_1)^2) + \frac{1}{2\mu_B + \lambda_B}(\xi e_1 \cdot e_1)^2,$$

za sve simetrične matrice  $\xi$ .

Formula laminacije može se ekvivalentno izraziti pomoću tenzora  $A^{-1}$  i  $B^{-1}$ . Jednostavnim računom pokazuje se da izraz (1.12) tada postaje

$$\theta((A^*)^{-1} - B^{-1})^{-1} = (A^{-1} - B^{-1})^{-1} + (1 - \theta)f_B^c(e_1), \quad (1.13)$$

pri čemu je  $f_B^c(e_1)$  simetričan, pozitivno nedefinitan tenzor četvrtog reda dan za svaku simetričnu matricu  $\xi$  sljedećom kvadratnom formom:

$$f_B^c(e_1)\xi \cdot \xi = B\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu_B}|B\xi e_1|^2 + \frac{\mu_B + \lambda_B}{\mu_B(2\mu_B + \lambda_B)}((B\xi)e_1 \cdot e_1)^2. \quad (1.14)$$

## 1.5 Komponirani materijali

**Definicija 1.5.1.** Neka je  $\chi^\epsilon$  niz karakterističnih funkcija u  $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  i  $A^\epsilon$  niz tenzora definiranih s

$$A^\epsilon(x) = \chi^\epsilon(x)A + (1 - \chi^\epsilon(x))B.$$

Pretpostavimo da postoje  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  i  $A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{T}_n^s)$  tako da vrijedi

$$\chi^\epsilon(x) \xrightarrow{*} \theta(x) \text{ slabo-}^* \text{ u } L^\infty(\Omega; [0, 1])$$

i

$$A^\epsilon(x) \text{ H-konvergira prema } A^*(x).$$

$A^*$  zovemo homogeniziranim tenzorom elastičnosti dvofaznog komponiranog materijala dobivenog spajanjem faza  $A$  i  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$ , s mikrostrukturuom definiranom nizom  $(\chi^\epsilon)_{\epsilon > 0}$ .

Uočimo da Teorem 1.2.5 osigurava da je tenzor  $A^*$  dobro definiran za svaki niz  $\chi^\epsilon$ .



**Definicija 1.5.2.** Za funkciju gustoće  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  sa  $\mathcal{G}_\theta$  označavamo skup svih mogućih H-limesa pridruženih funkciji  $\theta$  u smislu definicije 1.5.1, odnosno

$$\mathcal{G}_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{T}_2^s) \left| \begin{array}{l} \exists \chi_\epsilon \text{ t.d. } \chi_\epsilon(x) \xrightarrow{*} \theta(x) \\ A^\epsilon \text{ H-konvergira prema } A^* \end{array} \right. \right\}.$$

**Napomena 1.5.3.** Glavni cilj ove sekcije je naći eksplicitnu karakterizaciju skupa  $\mathcal{G}_\theta$ . Preciznije, želimo naći zatvarač skupa  $\{A, B\}$  u odnosu na H-konvergenciju. Taj problem naziva se problemom G-zatvorenja. Nažalost, u kontekstu elastičnosti karakterizacija skupa  $\mathcal{G}_\theta$  još je otvoreno pitanje. Ipak, pokazat će se da je u određenom broju slučajeva opravdano zamijeniti skup  $\mathcal{G}_\theta$  nekim manjim podskupom za kojeg je dostupna eksplicitna karakterizacija.

Za konstantnu  $\theta \in [0, 1]$  označimo s  $P_\theta \subset \mathcal{M}_2^4$  svih konstantnih H-limesa dobivenih periodičkom homogenizacijom, kao u odjeljku 1.3. Označimo još s  $G_\theta$  zatvarač skupa  $P_\theta$  u  $\mathcal{M}_2^4$ .

**Lema 1.5.4.** Neka je  $\theta(x)$  proizvoljna funkcija u  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$ . G-zatvorenje skupa  $\mathcal{G}_\theta$  je zatvoreno na homogenizaciju, odnosno za svaki niz  $A^\epsilon$  u  $\mathcal{G}_\theta$  se njegov H-limes  $A^*$  također nalazi u  $\mathcal{G}_\theta$ .

*Dokaz.* Neka je  $A^\epsilon$  niz u  $\mathcal{G}_\theta$  s H-limesom  $A^*$ . Za svaki fiksni  $\epsilon$  je  $A^\epsilon$  također H-limes, pa budući da je topologija inducirana H-konvergencijom metrizabilna, možemo naći dijagonalni niz  $\tilde{A}^\epsilon(x) = \chi_\epsilon(x)A + (1 - \chi_\epsilon(x))B$ , pri čemu je  $\chi_\epsilon$  karakteristična funkcija, tako da je  $A^*$  H-limes i za taj niz. Sada zbog  $A^\epsilon \in \mathcal{G}_\theta$ ,  $\forall \epsilon > 0$ , zaključujemo da je slabi limes niza  $\chi_\epsilon$  upravo  $\theta$ , odnosno  $A^* \in \mathcal{G}_\theta$ .  $\square$

Za dokaz tvrdnje glavnog rezultata bit će potrebno nekoliko pomoćnih tvrdnji koje u nastavku navodimo.

**Teorem 1.5.5.** (Meyersov teorem) Neka je  $\Omega$  otvoren i ograničen skup u  $R^N$  s rubom klase  $C^2$  te neka je  $A(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ . Za  $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ , neka je u jedinstveno  $H_0^1(\Omega)^N$ -rješenje sustava

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tada postoje  $p > 2$  i  $C > 0$  tako da, ako je  $f \in W^{-1,p}(\Omega)^N$ , vrijedi  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^N$  i

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}}.$$

**Lema 1.5.6.** Neka su  $\chi_1, \chi_2$  dvije karakteristične funkcije u  $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  i  $A_1^*, A_2^* \in \mathcal{M}_2^4$  tenzori dobiveni periodičkom homogenizacijom materijala  $(\chi_1 A + (1 - \chi_1)B)$  i  $(\chi_2 A + (1 - \chi_2)B)$ . Tada postoje konstante  $C > 0, \delta > 0$ , koje ne ovise o  $\chi_1, \chi_2$ , takve da vrijedi

$$\|A_1^* - A_2^*\| \leq C \left( \int_Y |\chi_1(y) - \chi_2(y)| dy \right)^\delta,$$

pri čemu je  $\|\cdot\|$  proizvoljna norma na  $\mathcal{M}_2^4$ .

*Dokaz.* Dokaz se može naći u [3]. □

**Lema 1.5.7.** Postoje konstante  $C > 0, \delta > 0$  takve da za sve  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$  vrijedi

$$d(G_{\theta_1}, G_{\theta_2}) \leq C|\theta_1 - \theta_2|^\delta,$$

pri čemu je  $d$  Hausdorffova udaljenost na podskupovima od  $\mathcal{M}_2^4$ ,

$$d(K_1, K_2) = \max_{x_1 \in K_1} \min_{x_2 \in K_2} d(x_1, x_2) + \max_{x_2 \in K_2} \min_{x_1 \in K_1} d(x_1, x_2).$$

Ovdje  $d(x_1, x_2)$  označava neku mjeru udaljenosti na promatranom metričkom prostoru.

*Dokaz.* Dovoljno je pokazati da za svaku karakterističnu funkciju  $\chi_1$  koja slabo-\* konvergira prema  $\theta_1$  postoji karakteristična funkcija  $\chi_2$  koja slabo-\* konvergira prema  $\theta_2$  tako da je  $|A_1^* - A_2^*| \leq C|\theta_1 - \theta_2|^\delta$ , pri čemu su  $A_1^*, A_2^*$  tenzori dobiveni periodičkom homogenizacijom kao u prošloj lemi. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\theta_2 \leq \theta_1$ . Označimo s  $E_1$  izmjeriv podskup od  $Y$  definiran sa

$$E_1 = \{y \in Y | \chi_1(y) = 1\}.$$

Neka je  $K(r)$  kugla radijusa  $r > 0$  u  $Y$  i  $E_r = E_1 \cap K(r)$ . Mjera tog skupa na  $Y$  je neopadajuća funkcija od  $r$  i vrijedi  $|E(0)| = 0, |E(\sqrt{2})| = \theta_1$ . Zaključujemo da mora postojati radijus  $r_2 > 0$  tako da je  $|E(r_2)| = \theta_2$ . Definiramo  $\chi_2$  kao karakterističnu funkciju skupa  $E(r_2)$  pa slijedi

$$\int_Y (\chi_1(y) - \chi_2(y)) dy = \theta_1 - \theta_2.$$

Željeni rezultat sada slijedi iz prošle leme. □

Sljedeći rezultat daje najbitniju tvrdnju ove sekcije. Konkretno, pokazat ćemo da je skup  $P_\theta$  gust u  $\mathcal{G}_\theta$ , što u nekoliko specijalnih slučajeva omogućava eksplicitno računanje efektivnog tenzora elastičnosti proučavanog materijala.

**Teorem 1.5.8.** Za svaku funkciju  $\theta(x) \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$   $G$ -zatvorenje skupa  $\mathcal{G}_\theta$  je karakterizirano sa

$$\mathcal{G}_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_2^4) \mid A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ g.s. u } \Omega \right\}.$$

*Dokaz.* Definiramo skup  $\mathcal{A}_\theta$  sa

$$\mathcal{A}_\theta = \{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{T}_2^s) \mid A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ g.s. u } \Omega \}.$$

- $\mathcal{G}_\theta \subseteq \mathcal{A}_\theta$  :

Neka je  $A^* \in \mathcal{G}_\theta$ . Prema Teoremu 1.2.5 postoje niz  $\theta_n(x)$  u  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  koji gotovo svuda u  $\Omega$  konvergira prema  $\theta(x)$  i niz  $A_n^*$  u  $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_2^4)$  takav da  $A_n^*(x)$  pripadaju  $P_{\theta_n(x)}$  i konvergira za gotovo sve u  $x \in \Omega$  prema  $A^*(x)$ . Budući da je  $G_\theta$  definiran kao zatvarač od  $P_\theta$  i prema Lemi 1.5.7 varira neprekidno u odnosu na  $\theta$ , zaključujemo da je  $A^*(x) \in G_{\theta(x)}$  za gotovo sve  $x \in \Omega$ .

- $\mathcal{A}_\theta \subseteq \mathcal{G}_\theta$  :

Neka je  $(\omega_j^n)_{1 \leq j \leq n}$  familija disjunktih otvorenih skupova koji pokrivaju  $\Omega$  tako da  $\max_{1 \leq j \leq n} \text{diam}(\omega_j^n)$  teži u nulu kad  $n \rightarrow \infty$ . Neka su  $\chi_j^n$  karakteristične funkcije skupova  $\omega_j^n$ . Definiramo po dijelovima konstantnu funkciju  $\theta^n \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  sa

$$\theta^n(x) = \sum_{j=1}^n \theta_j^n \chi_j^n(x), \quad \theta_j^n = \frac{1}{|\omega_j^n|} \int_{\omega_j^n} \theta(x) dx.$$

Niz  $\theta^n(x)$  konvergira prema  $\theta(x)$  u  $L^p(\Omega)$  za sve  $1 \leq p < \infty$ . Označimo s  $\tilde{A}^n(x)$  niz matrica dobivenih projekcijom  $A^*(x)$  na  $G_{\theta_j^n}$  u svakom od skupova  $\omega_j^n$ . Prema Lemi 1.5.7, postoje  $C > 0$ ,  $\delta > 0$  tako da vrijedi

$$|A^*(x) - \tilde{A}^n(x)| \leq C|\theta(x) - \theta_j^n|^\delta,$$

pa niz  $\tilde{A}^n$  konvergira prema  $A^*$  u  $L^p(\Omega; \mathcal{M}_2^4)$  za  $1 \leq p < \infty$ . Definiramo niz po dijelovima konstantnih matrica

$$\hat{A}^n(x) = \sum_{j=1}^n \hat{A}_j^n \chi_j^n(x), \quad \hat{A}_j^n = \frac{1}{|\omega_j^n|} \int_{\omega_j^n} \tilde{A}^n(x) dx.$$

Lako je provjeriti da vrijedi

$$\|\hat{A}^n\|_{L^p(\Omega; \mathcal{T}_2^s)} \leq \|\tilde{A}^n\|_{L^p(\Omega; \mathcal{T}_2^s)},$$

stoga zaključujemo da i niz  $\hat{A}^n$  konvergira prema  $A^*$  u  $L^p(\Omega; \mathcal{M}_2^4)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Definiramo konstantnu matricu  $A_j^n$  kao projekciju  $\hat{A}_j^n$  na  $G_{\theta_j^n}$  i po dijelovima konstantnu matricu

$$A^n(x) = \sum_{j=1}^n A_j^n \chi_j^n(x),$$

koja po definiciji pripada  $\mathcal{G}_{\theta^n}$ . Po konstrukciji, za projekciju  $A_j^n$  vrijedi

$$|A_j^n - \hat{A}_j^n| \leq |M - \hat{A}_j^n|, \quad \forall M \in G_{\theta_j^n}.$$

Posebno, za gotovo svaki  $x \in \omega_j^n$  vrijedi

$$|A^n(x) - \hat{A}_j^n(x)| = |A_j^n(x) - \hat{A}_j^n(x)| \leq |\tilde{A}_j^n(x) - \hat{A}_j^n(x)|.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} |A^n(x) - A^*(x)| &\leq |A^n(x) - \hat{A}^n(x)| + |\hat{A}^n(x) - \tilde{A}^n(x)| + |\tilde{A}^n(x) - A^*(x)| \leq \\ &\leq 2|\hat{A}^n(x) - \tilde{A}^n(x)| + |\tilde{A}^n(x) - A^*(x)|. \end{aligned}$$

Znamo da u  $L^p(\Omega; \mathcal{M}_2^4)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\tilde{A}^n$  konvergira prema  $A^*$  i  $\hat{A}^n$  konvergira prema  $\tilde{A}^n$ . Zaključujemo da u istom prostoru  $A^n$  konvergira prema  $A^*$ . Budući da jaka konvergencija povlači H-konvergenciju, slijedi da tada  $A^n$  i H-konvergira prema  $A^*$ . Konačno, činjenica da  $\theta^n$  konvergira prema  $\theta$  povlači da je  $A^* \in \mathcal{G}_\theta$ .

□

## 1.6 Sekvencijalni laminati

Lema 1.4.3 osigurava da je rezultat ponovne laminacije laminiranog materijala opet dvo-fazni komponirani materijal. Stoga uvodimo sljedeću definiciju.

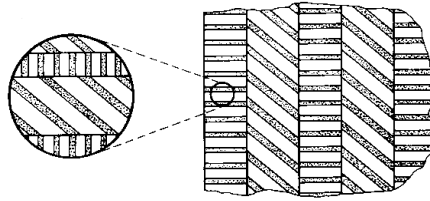
**Definicija 1.6.1.** *Skup  $L_\theta \subset G_\theta$  svih laminiranih materijala dobivenih spajanjem materijala  $A$  i  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$  je najmanji podskup od  $G_\theta$  koji sadrži sve jednostavne laminate (definirane s (1.12)) i zatvoren je na laminaciju.*

Jednostavan laminat  $A_1^*$  dobiven je laminacijom materijala  $A$  i  $B$  u omjerima  $\theta_1$  i  $(1 - \theta_1)$  u smjeru  $e_1$ . Taj laminat možemo ponovno laminirati fazom  $A$  u omjerima  $\theta_2$  i  $(1 - \theta_2)$  u smjeru  $e_2$ . Rezultat ove nove laminacije je ponovno laminat kojeg označimo s  $A_2^*$ . Taj proces možemo induktivno nastaviti mijenjajući omjere i smjerove laminacije. Iz formule (1.12) dobivamo formulu za tenzor elastičnosti konačnog rezultata laminacije  $A_p^*$ :

$$\left( \prod_{i=1}^p (1 - \theta_i) \right) ((A^*)_p^{-1} - A^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} + \sum_{i=1}^p \left( \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \theta_j) \right) f_A^c(e_i). \quad (1.15)$$

**Definicija 1.6.2.** *Komponirani materijal definiran formulom (1.15) zovemo sekvencijalnim laminatom ranga  $p$  s matricom  $A$  i jezgrom  $B$  i on je u potpunosti određen smjerovima laminacije  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  te omjerima  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq p}$ .*

Jedan primjer dvofaznog sekvencijalnog laminata dan je na Slici 1.2.



Slika 1.2: Primjer sekvencijalnog laminata

U dobivenom sekvencijalnom laminatu ukupni volumni udio faze  $A$  je jednak

$$\theta = 1 - \prod_{i=1}^p (1 - \theta_i).$$

Alternativna formulacija (1.15) dana je sljedećom lemom.

**Lema 1.6.3.** *Neka je  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  skup jediničnih vektora i  $\theta$  zadani volumni udio u  $[0, 1]$ . Za svaki skup nenegativnih realnih brojeva  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$  takvih da je  $\sum_{i=1}^p m_i = 1$  postoji sekvencijalni laminat ranga  $p$  s matricom  $A$  i jezgrom  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$  i smjerovima laminacije  $e_i$  tako da vrijedi*

$$(1 - \theta)((A_p^*)^{-1} - A^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i). \quad (1.16)$$

Brojeve  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$  zovemo parametrima laminacije.

*Dokaz.* Usporedbom formula (1.15) i (1.16) vidimo da je

$$\theta m_i = \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \theta_j)$$

Ako su  $\theta$  i parametri  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$  zadani, iz gornje formule možemo redom računati omjere  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Obratno, ako su zadani  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq p}$ , parametre  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  možemo izračunati iz gornje formule uz korištenje  $\theta = 1 - \prod_{i=1}^p \theta_i$ . Dakle, gornja jednakost definira 1-1 korespondenciju između  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq p}$  i  $(\theta, (m_i)_{1 \leq i \leq p})$ .  $\square$

Zamjenom uloga materijala  $A$  i  $B$  dobivamo ekvivalentnu formulu za sekvencijalni laminat dobiven laminiranjem matrice  $B$  jezgrom  $A$ :

$$(1 - \theta)((B_p^*)^{-1} - B^{-1}) = (A^{-1} - B^{-1})^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_B^c(e_i). \quad (1.17)$$

**Definicija 1.6.4.** Skup svih sekvencijalnih laminata  $(A_p^*)^{-1}$  s matricom  $A$  i jezgrom  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$  definiranih formulom (1.16), dobiven variranjem broja laminacija  $p$ , smjerova laminacije  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  i parametara laminacije  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ , označavamo sa  $L_\theta^-$ . Analogno, skup svih sekvencijalnih laminata  $(B_p^*)^{-1}$  s matricom  $B$  i jezgrom  $A$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$  definiranih formulom (1.17), dobiven variranjem broja laminacija  $p$ , smjerova laminacije  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  i parametara laminacije  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ , označavamo sa  $L_\theta^+$ .

**Lema 1.6.5.** Neka je  $C$  konveksna ljuska u prostoru tenzora četvrtog reda skupa  $e \otimes e \otimes e \otimes e$  kad  $e$  prolazi jediničnom sferom  $S_1$ . Ekstremalne točke od  $C$  su upravo  $e \otimes e \otimes e \otimes e$ .

**Lema 1.6.6.** Skup  $L_\theta^-$  je ograničen, zatvoren podskup skupa svih simetričnih tenzora četvrtog reda  $A^*$  takvih da postoji vjerojatnosna mjera  $\nu$  na jediničnoj sferi  $S_1$  za koju je

$$(1 - \theta)((A^*)^{-1} - B^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1} + \theta \int_{S_1} f_A^c(e) d\nu(e).$$

Štoviše, svaki tenzor  $A^* \in L_\theta^-$  je tenzor elastičnosti sekvencijalnog laminata konačnog ranga definiranog s (1.16) i ranga  $p \leq 5$ .

*Dokaz.* Očito, svaki sekvencijalni laminat definiran s (1.16) zadovoljava uvjet leme uz izbor

$$\nu(e) = \sum_{i=1}^p m_i \delta(e - e_i),$$

pri čemu je  $\delta$  Diracova masa u ishodištu.

Obratno, primijetimo da je  $f_A^c(e)$  na jediničnoj sferi homogeni polinom stupnja 4, pa postoji linearan operator  $L_A$  tako da je

$$\int_{S_1} f_A^c(e) d\nu(e) = L_A \left( \int_{S_1} e \otimes e \otimes e \otimes e d\nu(e) \right). \quad (1.18)$$

Ako je  $\nu$  vjerojatnosna mjera na  $S_1$ , tenzor s desne strane gornje jednakosti opisuje konveksan skup svih simetričnih tenzora četvrtog reda  $A$  za koje je

$$A_{ijkl} = A_{kjil} = A_{klij} = A_{jilk},$$

koji su jediničnog traga,  $\sum_{i,j=1}^2 A_{ijij} = 1$ , i imaju dimenziju 4. Prema Lemi 1.6.5, ekstremalne točke tog skupa su upravo oblika  $e \otimes e \otimes e \otimes e$ , pa Carathéodoryjev teorem povlači da vjerojatnosnu mjeru  $\nu$  u (1.18) možemo zamijeniti diskretnom, što daje željeni rezultat.  $\square$

**Napomena 1.6.7.** Analogna tvrdnja vrijedi i za skup  $L_\theta^+$ .

**Teorem 1.6.8.** Za svaki tenzor elastičnosti  $A^* \in G_\theta$  postoje sekvencijalni laminati  $A^+ \in L_\theta^+$ ,  $A^- \in L_\theta^-$  takvi da je

$$A^- \leq A^* \leq A^+$$

u smislu kvadratnih formi.

*Dokaz.* Originalni dokaz nalazi se u [5]  $\square$

**Definicija 1.6.9.** Neka je  $\xi$  simetrična matrica u  $\mathcal{M}_2^s$ . Realna funkcija  $f^+(\theta, A, B, \xi)$  ( $f^-(\theta, A, B, \xi)$ ) je gornja (donja) granica ako za svaki homogenizirani tenzor  $A^* \in G_\theta$  vrijedi

$$A^* \xi \cdot \xi \leq f^+(\theta, A, B, \xi) \quad (\geq f^-(\theta, A, B, \xi)).$$

Za gornju granicu  $f^+$  (donju granicu  $f^-$ ) kažemo da je optimalna ako za svaki  $\xi \in \mathcal{M}_2^s$  postoji  $A_\xi^* \in G_\theta$  tako da je

$$A_\xi^* \xi \cdot \xi = f^+(\theta, A, B, \xi) \quad (f^-(\theta, A, B, \xi)).$$

Teorem 1.6.8 omogućava nam eksplicitno računanje optimalnih granica za efektivnu energiju komponiranih materijala. Konkretno, vrijede sljedeće ocjene:

**Propozicija 1.6.10.** (Hashin-Shtrikmanove ocjene) Neka je  $\xi$  simetrična matrica u  $\mathcal{M}_2^s$ . Za svaki homogenizirani tenzor elastičnosti  $A^* \in G_\theta$  vrijedi

$$A^* \xi \cdot \xi \geq A \xi \cdot \xi + (1 - \theta) \max_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} [2\xi \cdot \eta - (B - A)^{-1} \eta \cdot \eta - \theta g(\eta)], \quad (1.19)$$

pri čemu je  $g(\eta)$  definiran sa

$$g(\eta) = \max_{e \in \mathcal{S}_1} f_A(e) \eta \cdot \eta,$$

i

$$A^* \xi \cdot \xi \leq B \xi \cdot \xi + \theta \min_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} [\xi \cdot \eta - (B - A)^{-1} \eta \cdot \eta - \theta h(\eta)], \quad (1.20)$$

gdje je  $h(\eta)$  definiran sa

$$h(\eta) = \min_{e \in \mathcal{S}_1} f_B(e) \eta \cdot \eta$$

i  $f_A(e)$ ,  $f_B(e)$  su definirane kao u Korolaru 1.4.4. Štoviše, navedene ocjene su optimalne u smislu Definicije 1.6.9 i optimalnost se postiže sekvencijalnim laminatom konačnog ranga.

*Dokaz.* Izvest ćemo ocjenu za donju granicu. Dokaz tvrdnje za gornju granicu je analogan. Primjena Teorema 1.6.8 daje sljedeću ocjenu:

$$A^* \xi \cdot \xi \geq A^- \xi \cdot \xi,$$

pa, budući da je skup  $L_\theta^-$  zatvoren, zaključujemo da je to i optimalna granica. Pomoću karakterizacije tenzora  $A^-$  iz Leme 1.6.6 i Legendrove transformacije primijenjene na  $(A^- - A)$  dobivamo

$$A^- \xi \cdot \xi = A \xi \cdot \xi + (1 - \theta) \max_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} [2\xi \cdot \eta - (B - A)^{-1} - \theta g_\nu(\eta)],$$

gdje je  $g_\nu(\eta) = \left( \int_{S_1} f_A(e) dv(e) \right) \eta \cdot \eta$ . Da bismo dobili donju granicu, potrebno je dobiveni izraz minimizirati po  $\nu$ . Primijetimo da je gornja jednakost linearna po  $\nu$  i konkavna po  $\eta$ , pa je opravdana zamjena poretka minimizacije i maksimizacije. Problem je time sveden na maksimizaciju funkcije  $g_\nu$  po svim mjerama  $\nu$ , što se postiže za Diracovu masu koncentriranu u onim  $e \in S_1$  u kojima je izraz  $f_A(e) \eta \cdot \eta$  maksimalan. Slijedi da je  $g_\nu = g$ .  $\square$

**Propozicija 1.6.11.** *Optimalnost u granicama (1.19) i (1.20) može se postići sekvencijalnim laminatom ranga 2 sa smjerovima laminacije koji su ekstremalni u definiciji članova  $g(\eta)$ ,  $h(\eta)$ . Posebno, za gornju granicu optimalni laminat ranga 2 ima smjerove laminacije određene svojstvenim vektorima od  $\xi$ .*

*Dokaz.* Dokaz se može naći u [3].  $\square$

**Propozicija 1.6.12.** *Hashin-Shtrikmanove ocjene za komplementarnu/dualnu energiju Neka je  $\sigma$  matrica u  $\mathcal{M}_2^s$ . Za svaki homogenizirani tenzor elastičnosti  $A^* \in G_\theta$  vrijedi*

$$(A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma \geq B^{-1} \sigma \cdot \sigma + \theta \max_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} \left[ 2\sigma \cdot \eta - (A^{-1} - B^{-1})^{-1} \eta \cdot \eta - (1 - \theta) g^c(\eta) \right], \quad (1.21)$$

pri čemu je

$$g^c(\eta) = \max_{e \in S_1} (f_B^c(e) \eta \cdot \eta) = B \eta \cdot \eta - h(B \eta),$$

i

$$(A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma \leq (1 - \theta) \min_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} \left[ 2\sigma \cdot \eta + (A^{-1} - B^{-1})^{-1} \eta \cdot \eta - \theta h^c(\eta) \right], \quad (1.22)$$

gdje je

$$h^c(\eta) = \min_{e \in S_1} (f_A^c(e) \eta \cdot \eta) = A \eta \cdot \eta - g(A \eta)$$

i  $f_A^c, f_B^c$  su definirane sa (1.14). Štoviše, navedene ocjene su optimalne u smislu definicije (1.6.9) i postižu se sekvencijalnim laminatima ranga 2 sa smjerovima laminacije određenima vektorima  $e$  u definiciji  $g^c(\eta), h^c(\eta)$ . Posebno, optimalni laminat za donju granicu (1.21) ima smjerove laminacije određene svojstvenim vektorima od  $\sigma$ .



*Dokaz.* Dokaz je analogan dokazima Propozicija 1.6.10 i 1.6.11. Treba pokazati jedino da je

$$g^c(\eta) = B\eta \cdot \eta - h(B\eta).$$

Primijetimo da za sve  $e \in S_1$  vrijedi

$$f_B^c(e)\eta \cdot \eta + f_B(e)(B\eta) \cdot (B\eta) = B\eta \cdot \eta.$$

Posebno, budući da je  $B$  prema pretpostavci izotropan, prva jednakost povlači da su ekstremalni vektori  $e$  u definiciji  $g^c(\eta)$  i  $h(B\eta)$  jednaki te da se radi upravo o svojstvenim vektorima od  $\eta$ .  $\eta$  i  $\sigma$  se mogu istovremeno dijagonalizirati pa zaključujemo da se donja granica u (1.21) postiže sekvencijalnim laminatom ranga 2 sa smjerovima laminacije određenima svojstvenim vektorima od  $\sigma$ .  $\square$

**Korolar 1.6.13.** *Neka je  $\sigma \in \mathcal{M}_2^s$  i  $A^* \in G_\theta$ . Ako je  $A = 0$ , donja Hashin-Shtrikmanova granica za komplementarnu energiju poprima oblik*

$$(A^*)^{-1}\sigma \cdot \sigma \geq B^{-1}\sigma \cdot \sigma + \frac{\theta}{1-\theta}g^*(\sigma), \quad (1.23)$$

pri čemu je  $g^*$  Legendreova transformacija funkcije  $g^c$  definirane u prošloj propoziciji, tj.

$$g^*(\sigma) = \max_{\eta \in \mathcal{M}_2^s} (2\sigma \cdot \eta - g^c(\eta)).$$

$g^*$  je neprekidna, konveksna, pozitivna (osim u  $\sigma = 0$ ) i homogena stupnja 2.

*Dokaz.* Formula (1.23) slijedi iz činjenice da je  $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = 0$  za  $A = 0$ . Svojstva funkcije  $g^*$  slijede iz njene definicije kao Legendreove transformacije funkcije  $g^c$  koja je pozitivna i homogena stupnja 2.  $\square$

**Definicija 1.6.14.** *Neka je  $A^*$  sekvencijalni laminat ranga  $p$  materijala  $B$  oko šuplje jezgre u omjerima  $(1-\theta)$  i  $\theta$  sa smjerovima laminacije  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  i parametrima laminacije  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $\sum_{i=1}^p m_i = 1$ . Tenzor elastičnosti  $A^*$  definiran je sa*

$$\theta[(A^*)^{-1} - B^{-1}]^{-1} = (1-\theta) \sum_{i=1}^p m_i f_B^c(e_i), \quad (1.24)$$

pri čemu je  $f_B^c(e_i)$  tenzor četvrtog reda definiran za svaku  $\xi \in \mathcal{M}_2^s$  kvadratnom formom

$$f_B^c(e_i)\xi \cdot \xi = B\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu}|B\xi e_i|^2 + \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)}((B\xi)e_i \cdot e_i)^2.$$

**Teorem 1.6.15.** *Ocjena (1.23) ekvivalentna je*

$$(A^*)^{-1}\sigma \cdot \sigma \geq B^{-1}\sigma \cdot \sigma + \frac{(\kappa + \mu)\theta}{4\kappa\mu(1 - \theta)}(|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2,$$

*pri čemu su  $\sigma_1, \sigma_2$  svojstvene vrijednosti naprezanja  $\sigma$ . Optimalni sekvencijalni laminat ranga 2 ima smjerove laminacije određene svojstvenim vektorima od  $\sigma$  i parametre laminacije*

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

*Dokaz.* Dokaz je izveden u [2] i [6].

□

## Poglavlje 2

### Problem optimalnog dizajna

Neka je  $\Omega$  ograničen i otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$  ispunjen s dva elastična materijala, za koje pretpostavljamo da su izotropni sa konstantnim tenzorima elastičnosti  $A$  i  $B$  danima sa

$$A = 2\mu_A I_4 + (\kappa_A - \frac{2\mu_A}{n}) I_2 \otimes I_2, \quad (2.1)$$

$$B = 2\mu_B I_4 + (\kappa_B - \frac{2\mu_B}{n}) I_2 \otimes I_2, \quad (2.2)$$

gdje  $I_2$  označava jediničnu matricu u  $\mathcal{M}_2^s$  i  $I_4$  je jedinični tenzor u  $\mathcal{M}_2^4$ . Također pretpostavljamo da su materijali  $A$  i  $B$  dobro uređeni, odnosno da vrijedi

$$0 < \kappa_A \leq \kappa_B, \quad 0 < \mu_A \leq \mu_B,$$

te da su savršeno spojeni, tj. da su pomak i vektor naprezanja u normalnom smjeru neprekidni na cijeloj domeni. Označimo sa  $\chi(x)$  karakterističnu funkciju onog dijela domene u kojem se nalazi materijal  $A$ . Tada je ukupni tenzor elastičnosti u  $\Omega$  definiran sa

$$A_\chi(x) = \chi(x)A + (1 - \chi(x))B.$$

Uz zadano djelovanje sile  $f \in L^2(\Omega)^2$  i zadan rubni uvjet, na primjer homogeni Dirichletov rubni uvjet na čitavoj granici, jednačba stanja u  $\Omega$  glasi:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\chi e(u_\chi)) = f & \text{u } \Omega, \\ u_\chi = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

gdje  $u_\chi$  označava funkciju pomaka i  $e(u_\chi) = (\nabla u_\chi + \nabla u_\chi^T)/2$  je linearizirani tenzor deformacije u  $\Omega$ . Kao u prvom odjeljku prvog poglavlja zaključujemo da navedeni sustav ima jedinstveno slabo rješenje u  $H_0^1(\Omega)^2$ .

**Definicija 2.0.1.** *Optimalni dizajn je karakteristična funkcija koja minimizira zadanu funkciju cilja*

$$J(\chi) = \int_{\Omega} [\chi(x)g_A(x, u_\chi(x)) + (1 - \chi(x))g_B(x, u_\chi(x))] dx, \quad (2.4)$$

pri čemu su  $g_A$  i  $g_B$  "dovoljno glatke" funkcije u  $x$  i  $u_\chi(x)$ .

Prema Soboljevljevom teoremu ulaganja, dovoljno je pretpostaviti da su  $g_A$  i  $g_B$  Carathéodoryjeve funkcije i da zadovoljavaju sljedeći uvjet rasta u beskonačnosti:

$$\begin{aligned} x &\mapsto g_{A,B}(x, \lambda) && \text{je izmjeriva } \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda &\mapsto g_{A,B}(x, \lambda) && \text{je neprekidno za g.s. } x \in \Omega, \\ |g_{A,B}(x, \lambda)| &\leq k(x) + C|\lambda|^m, && k \in L^1(\Omega), 1 \leq m < \infty, \end{aligned} \quad (2.5)$$

jer je tada preslikavanje  $u \mapsto g_{A,B}(x, u)$  neprekidno sa  $H_0^1(\Omega)$  u  $L^1(\Omega)$  što povlači da je funkcija  $J$  dobro definirana na  $L^\infty(\Omega)$ .

**Definicija 2.0.2.** *Prostor dopustivih dizajna je prostor svih karakterističnih funkcija  $\chi$  takvih da je*

$$\int_{\Omega} \chi(x) dx = V_A, \quad 0 < V_A \leq |\Omega|.$$

Problem optimalnog dizajna tada glasi:

$$\begin{aligned} &\text{naći } \chi \text{ t.d.} \\ J(\chi) &= \inf_{\substack{v \in L^\infty(\Omega; \{0,1\}) \\ \int_{\Omega} v = V_A}} J(v). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ekvivalentnu formulaciju možemo dobiti uvođenjem Lagrangeovog multiplikatora  $l \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\text{naći } \chi \text{ t.d.} \\ J(\chi) + l \int_{\Omega} \chi dx &= \inf_{v \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J(v) + l \int_{\Omega} v(x) dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Napomena 2.0.3.** *Može se pokazati da za problem 2.6, ili ekvivalentno 2.7 ne postoji rješenje u skupu  $L^\infty(\Omega, \{0, 1\})$  (vidi odjeljak 4.1.2 u [3]). Uzrok tome leži u činjenici da limes (čak ni slabi-\* limes) niza karakterističnih funkcija  $\chi_n$  u pravilu nije karakteristična funkcija, nego pripada  $L^\infty(\Omega, [0, 1])$ , pa za minimizirajući niz nekog od gornjih problema ne možemo garantirati da se minimum postiže. Zato je potrebno proširiti skup po kojem se provodi minimizacija. Taj proces zovemo relaksacija problema i to je tema sljedećeg odjeljka.*

## 2.1 Relaksacija problema

**Definicija 2.1.1.** *Skup generaliziranih ili komponiranih dizajna je*

$$\mathcal{CD} = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times \mathcal{M}_n^4) \mid A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ g.s. u } \Omega, \right\}$$

pri čemu je za  $\theta \in [0, 1]$   $G_{\theta(x)}$  skup svih homogeniziranih tenzora elastičnosti dobivenih miješanjem materijala  $A$  i  $B$  u omjerima  $\theta$  i  $(1 - \theta)$ .

Uz ovu definiciju modificirana funkcija cilja glasi:

$$J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} [\theta(x)g_A(x, u(x)) + (1 - \theta(x))g_B(x, u(x))]dx + l \int_{\Omega} \theta(x)dx, \quad (2.8)$$

gdje je  $u(x) \in H_0^1(\Omega)^2$  jedinstveno rješenje problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^*e(u)) = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Pridruženi optimizacijski problem je tada

$$\begin{aligned} & \text{naći } (\theta, A^*) \in \mathcal{CD} \text{ t.d.} \\ J(\theta, A^*) &= \inf_{(\theta, X) \in \mathcal{CD}} J(\theta, X) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sada dokazujemo glavni rezultat ove sekcije, a to je postojanje barem jednog optimalnog dizajna za ovako definiran problem.

**Teorem 2.1.2.** *Vrijedi sljedeće:*

1. *postoji barem jedan minimizator problema (2.10);*
2. *svaki minimizirajući niz  $\chi_n$  funkcije  $J$  slabo-\* konvergira u  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  prema funkciji gustoće  $\theta$  i pridruženi tenzor elastičnosti  $A_{\chi_n}$  H-konvergira prema tenzoru elastičnosti  $A^*$  tako da je  $(\theta, A^*)$  minimizator za  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$ ;*
3. *obratno, svaki minimizator  $(\theta, A^*)$  za  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$  dostiže se kao slabo-\*, odnosno H-limes minimizirajućeg niza od  $J$ .*

*Dokaz.* Neka je  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  minimizirajući niz karakterističnih funkcija u polaznom problemu (2.4). Vrijedi

$$\|\chi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1,$$

odnosno niz  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je ograničen, pa postoji njegov podniz, i dalje indeksiran sa  $n$ , te  $\theta_\infty \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  tako da  $\chi_n$  konvergira slabo-\* u  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  prema  $\theta_\infty$ . Prema Teoremu 1.2.5 tada postoje podniz tog podniza, još uvijek označen s  $\chi_n$ , i  $A_\infty^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$  tako da  $A_{\chi_n} = \chi_n A + (1 - \chi_n) B$  H-konvergira prema  $A_\infty^*$ . Tada prema definiciji H-konvergencije niz rješenja  $u_{\chi_n}$  jednadžbe stanja (2.3) slabo konvergira u  $H_0^1(\Omega)$  prema rješenju  $u_\infty$  homogenizirane jednadžbe s tenzorom elastičnosti  $A_\infty^*$ . Sada Rellichov teorem povlači:

$$u_{\chi_n} \longrightarrow u_\infty \text{ u } L^2(\Omega),$$

pa, jer jaka konvergencija povlači konvergenciju g.s., slijedi da (do na podniz) vrijedi

$$u_{\chi_n} \longrightarrow u_\infty \text{ g.s. u } \Omega.$$

Budući da funkcije  $g_{A,B}(x, u_{\chi_n}(x))$  zadovoljavaju uvjet rasta (2.5), prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$g_{A,B}(x, u_{\chi_n}(x)) \longrightarrow g_{A,B}(x, u_{\infty}(x)) \text{ u } L^1(\Omega).$$

Sada možemo zaključiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\chi_n) = J^*(\theta_{\infty}, A_{\infty}^*).$$

Također je

$$J^*(\theta_{\infty}, A_{\infty}^*) = \inf_{\chi \in L^{\infty}(\Omega; \{0,1\})} J(\chi),$$

jer je  $\chi_n$  minimizirajući niz za  $J$ . Prema Teoremu 1.5.8, svaki generalizirani dizajn  $(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}$  može se dobiti kao limes nekog niza karakterističnih funkcija  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{\infty}(\Omega; \{0,1\})$ , pa vrijedi

$$J^*(\theta, A^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\chi_n) \geq \inf_{\chi \in L^{\infty}(\Omega; \{0,1\})} J(\chi).$$

Zaključujemo da je  $(\theta_{\infty}, A_{\infty}^*)$  minimizator za  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$ , čime su dokazane prve dvije tvrdnje teorema. Treća tvrdnja je opet posljedica činjenice da je svaki  $(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}$  dobiven kao limes nekog niza  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{\infty}(\Omega; \{0,1\})$ , koji je očito minimizirajući niz za  $J$  ako je  $(\theta, A^*)$  minimizator dobiven relaksacijom.  $\square$

U daljnjem uvodimo dodatne pretpostavke na funkcije  $g_A, g_B$ , točnije na njihove parcijalne derivacije, za koje pretpostavljamo da su Carathéodoryjeve funkcije i zadovoljavaju odgovarajući uvjet rasta u beskonačnosti, slično kao u (2.5).

## 2.2 Optimizacija krutosti materijala

U nastavku proučavamo funkciju cilja specijalnog oblika:

$$J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} f(x) \cdot u(x) dx + l \int_{\Omega} \theta(x) dx. \quad (2.11)$$

Izraz  $\int_{\Omega} f \cdot u dx$  zovemo podatljivost materijala. Podatljivost označava rad koji sila obavi na tijelo te je jednaka pohranjenoj elastičnoj energiji materijala:

$$\int_{\Omega} f \cdot u dx = \int_{\Omega} A^* e(u) \cdot e(u) dx.$$

Dakle, minimizacija funkcije cilja (2.11) odgovara pronalaženju najkruće kompozicije materijala  $A$  i  $B$  u domeni  $\Omega$ .

Iz principa minimalne komplementarne energije slijedi

$$\int_{\Omega} f \cdot u dx = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s), \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \int_{\Omega} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau dx$$

i minimum se postiže za  $\sigma = A^* e(u)$ . Funkcija cilja postaje

$$J^*(\theta, A^*) = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \int_{\Omega} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau dx + l \int_{\Omega} \theta dx. \quad (2.12)$$

Problem optimalnog dizajna sada postaje problem dvostruke minimizacije čiji je poredak minimizacije nevažan:

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*) = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} \int_{\Omega} ((A^*)^{-1} \tau \cdot \tau + l) \theta. \quad (2.13)$$

**Teorem 2.2.1.** *Neka je  $(\theta, A^*)$  minimizator funkcije (2.11) i  $\sigma$  jedinstveni minimizator funkcije (2.12). Tada za  $\sigma$  vrijedi:*

$$\begin{cases} \sigma = A^* e(u) & \text{u } \Omega, \\ -\operatorname{div} \sigma = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pritom je  $u \in H_0^1(\Omega)^2$  i za  $(\theta, A^*)$  g.s. u  $\Omega$  vrijedi

$$(A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma = g(\theta, \sigma),$$

gdje je  $g(\theta, \sigma)$  donja Hashin-Shtrikmanova granica za komplementarnu energiju (1.23) i  $\theta$  jedinstveni minimizator od

$$\min_{0 \leq \theta \leq 1} (g(\theta, \sigma) + l\theta).$$

*Dokaz.* Prema (2.13),  $(\theta, A^*)$  je također minimizator za

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} \int_{\Omega} ((A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma + l\theta) dx.$$

Teorem 1.5.8 opravdava zamjenu poretka minimizacije i integracije pa dobivamo

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} \int_{\Omega} ((A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma + l\theta) dx = \int_{\Omega} \min_{0 \leq \theta \leq 1} \left( \min_{A^* \in \mathcal{G}_\theta} (A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma + l\theta \right) dx.$$

Iz Propozicije 1.6.10 imamo

$$\min_{A^* \in \mathcal{G}_\theta} (A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma = g(\sigma, \theta),$$

pri čemu je  $g(\sigma, \theta)$  definirana kao  $g^c$  u tvrdnji propozicije. Prema definiciji,  $g(\sigma, \theta)$  je  $C^1$  i strogo konveksna funkcija u  $\theta$ , pa postoji jedinstveni minimizator u  $[0, 1]$  za preslikavanje

$$\theta \mapsto g(\sigma, \theta) + l\theta,$$

čime je dokaz završen. □

**Napomena 2.2.2.** *Dobiveni uvjeti optimalnosti su nužni, ali nije poznato jesu li dovoljni. U slučaju da je tenzor naprezanja  $\sigma$  poznat, ti uvjeti postaju nužni i dovoljni za  $(\theta, A^*)$ .*

**Definicija 2.2.3.** *Skup sekvencijalno laminiranih dizajna je*

$$\mathcal{LD}^+ = \left\{ (\theta, A^*) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times \mathcal{M}_n^4 \mid A^*(x) \in L_{\theta(x)}^+ \text{ g.s u } \Omega) \right\}.$$

Sljedeći rezultat konačno opravdava primjenu metode homogenizacije u kontekstu elastičnosti. Iako ne znamo eksplicitnu karakterizaciju skupa svih homogeniziranih dizajna  $G_\theta$ , u specijalnom slučaju kad je cilj maksimizacija krutosti materijala maksimum se postiže u manjem skupu čija karakterizacija nam je ipak poznata.

**Teorem 2.2.4.** *Za funkciju cilja (2.11) vrijedi*

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*) = \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{LD}^+} J^*(\theta, A^*).$$

*Ako je  $(\theta, A^*)$  minimizator za  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$  i  $\sigma$  njemu pridruženi tenzor naprezanja, onda postoji sekvencijalni laminat  $\bar{A}^*$  takav da je  $(\theta, \bar{A}^*)$  minimizator za  $J^*$  u  $\mathcal{LD}^+$ ,  $\sigma$  pridruženi tenzor naprezanja i  $A^{*-1} \sigma = \bar{A}^{*-1} \sigma$ . Štoviše,  $\bar{A}^*$  se može izabrati kao sekvencijalni laminat ranga  $n$  s jezgrom  $A$  i matricom  $B$  kojemu su smjerovi laminacije određeni svojstvenim vektorima naprezanja  $\sigma$ .*

*Dokaz.* Neka je  $(\theta, A^*)$  minimizator za  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$  i  $\sigma$  pridruženi tenzor naprezanja koji minimizira (2.12). Prema prošlom teoremu  $A^*$  je optimalan za donju dualnu Hashin-Shtrikmanovu granicu, tj.

$$(A^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{B^* \in \mathcal{G}_\theta} (B^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma.$$

Propozicija 1.19 povlači da postoji sekvencijalni laminat ranga 2  $\bar{A}^*$  sa smjerovima laminacije određenima svojstvenim vektorima od  $\sigma$  koji je također optimalan za gornju ocjenu, odnosno

$$(\bar{A}^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{B^* \in \mathcal{G}_\theta} (B^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma.$$



Sada je

$$J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} (\bar{A}^*)^{-1} \sigma \cdot \sigma dx + l \int_{\Omega} \theta(x) dx \geq J^*(\theta, \bar{A}^*).$$

No, posljednja nejednakost je zapravo jednakost jer je  $(\theta, A^*)$  minimizator za  $J^*$ . Zaključujemo da je  $(\theta, \bar{A}^*)$  također minimizator za  $J^*$ .  $\bar{A}^*$  pripada prostoru  $\mathcal{LD}^+$  i  $\sigma$  je pridruženi tenzor naprezanja i za  $(\theta, \bar{A}^*)$  u smislu da je

$$\sigma = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \int_{\Omega} (\bar{A}^*)^{-1} \tau \cdot \tau dx.$$

Potrebno je još dokazati da je  $(A^*)^{-1} \sigma = (\bar{A}^*)^{-1} \sigma$ . Primijetimo da je preslikavanje

$$\tau \mapsto (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau - g(\theta, \tau)$$

nenegativno, klase  $C^1$  i dotiže minimum u  $\tau = \sigma$  (jer je u toj vrijednosti jednako nuli), te stoga i vrijednost derivacije iščezava u nuli. Dakle, za optimalni  $A^*$  vrijedi

$$(A^*)^{-1} \sigma = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\theta, \sigma).$$

Budući da je i  $\bar{A}^*$  optimalan, vrijedi ista jednakost, pa zaključujemo da je  $(A^*)^{-1} \sigma = (\bar{A}^*)^{-1} \sigma$ .  $\square$

Funkciju cilja u polaznom problemu (2.4) možemo zapisati u terminima minimizacije energije. Sjetimo se,

$$J(\chi) = \int_{\Omega} f(x) \cdot u_{\chi}(x) dx + l \int_{\Omega} \chi(x) dx,$$

te je

$$\int_{\Omega} f \cdot u_{\chi} dx = \min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} A_{\chi}^{-1} \tau \cdot \tau dx.$$

Dakle, tražimo  $\inf_{\chi} J(\chi)$ . Ponovno možemo zamijeniti poredak minimizacije pa problem glasi

$$\inf_{\chi \in L^{\infty}(\Omega; \{0,1\})} J(\chi) = \inf_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \int_{\Omega} \min_{\chi=0,1} (A_{\chi}^{-1} \tau \cdot \tau + l \chi) dx.$$

Minimizacija po točkama u  $\chi$  je jednostavna:

$$\min_{\chi=0,1} (A_{\chi}^{-1} \tau \cdot \tau + l \chi) = \min(A^{-1} \tau \cdot \tau + l, B^{-1} \tau \cdot \tau) =: F(\tau). \quad (2.14)$$

Minimizacijski problem

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J_\chi = \inf_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} \int_{\Omega} F(\tau) f x \quad (2.15)$$

zadan je u terminima naprezanja za polazni problem optimalnog dizajna. Ako je  $\chi$  minimizator za  $J$ , onda je optimalni  $\tau$  u također optimalan za (2.15), dok ako je  $\tau$  optimalan za (2.15), onda je funkcija  $\chi$  definirana s

$$\chi = \begin{cases} 1, & A^{-1} \tau \cdot \tau + l \leq B^{-1} \tau \cdot \tau \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

optimalna za  $J$ .

Može se pokazati da vrijedi (vidi sekciju 3.2 u [3]) sljedeći rezultat:

**Teorem 2.2.5.** *Relaksacija formulacije u terminima naprezanja (2.15) je*

$$\min_{\substack{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_n^s) \\ -\operatorname{div} \tau = f \text{ u } \Omega}} QF(\tau), \quad (2.16)$$

pri čemu je  $QF(\tau)$  kvazikonveksna ljuska od  $F(\tau)$  i dana je sa

$$QF(\tau) = \min_{0 \leq \theta \leq 1} (g(\theta, \tau) + l\theta)$$

te je to neprekidan funkcional kvadratnog rasta. U definiciji  $g(\theta, \tau)$  označava donju dualnu Hashin-Shtrikmanovu granicu,

$$g(\theta, \tau) = \min_{A^* \in \mathcal{G}_\theta} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau.$$

**Napomena 2.2.6.** *Za izmjerivu, lokalno ograničenu funkciju  $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  kažemo da je kvazikonveksna ako za svaki ograničeni skup  $D \subset \mathbb{R}^n$ , za svaku matricu  $\xi \in \mathbb{R}^{N \times n}$  i svaku funkciju  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^N)$  vrijedi*

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(\xi + \nabla \phi(x)) dx.$$

Za detalje o kvazikonveksnim funkcionalima i kvazikonveksifikaciji vidi npr. [10], [8], [7].

Minimizacija funkcije cilja (2.11) ekvivalentna je minimizacijskom problemu (2.16) u smislu da, ako je  $(\theta, A^*)$  minimizator za  $J^*$  u skupu  $\mathcal{CD}$ , onda je optimalno naprezanje  $\sigma$  u (2.12) optimalno za (2.16) i obratno, ako je  $\sigma$  minimizator za (2.16) u  $\{\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s) \mid -\operatorname{div}\tau = f \text{ u } \Omega\}$ , onda je par  $(\theta, A^*)$  pridružen  $\sigma$  pomoću Teroema 2.2.1 optimalan za (2.11).

**Napomena 2.2.7.** Razlog za prelaženje na ovu formulaciju leži i u činjenici da za neke probleme minimizacije podatljivosti u originalnoj formulaciji postoji beskonačno mnogo optimalnih dizajna (jedan primjer takvog problema dan je u odjeljku 3.2.6 u [3]). Međutim, pokazuje se da je numerički algoritam temeljen na optimizaciji funkcionala dobivenog kvazikonveksifikacijom neosjetljiv na izbor početnih podataka, što sugerira da taj funkcional dopušta samo globalne ekstreme u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$ . Ta je tvrdnja zasad dokazana u slučaju da je funkcional  $F$  definiran u (2.14) kvazikonveksan uz afini rubni uvjet (vidi Napomenu 3.2.26. u [3]). Zato se u nastavku koncentriramo na funkcional  $QF$  i navodimo preostale rezultate potrebne za ostvarenje spomenutog algoritma.

## 2.3 Topološka optimizacija

U ovom odjeljku bavimo se posebnim slučajem izvedenog problema kada je materijal  $A$  degeneriran, odnosno  $A = 0$ . Fizikalno, pokušavamo naći optimalni oblik strukture (u smislu podatljivosti) u kojoj je materijal  $B$  pun šupljina, s tim da je ukupni volumni udio šupljina unaprijed određen.

Budući da je materijal  $A$  degeneriran, ne može podnositi volumnu silu. Zato u nastavku smatramo da je zadana sila površinska, zadana samo na rubu domene  $\Omega$ , i da vrijedi barem  $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^2$ . Također pretpostavljamo da je domena pod opterećenjem u ravnoteži, odnosno da za svaki kruti pomak  $u$  vrijedi  $\int_{\partial\Omega} f \cdot u ds = 0$ .

Označimo s  $\omega$  dio domene u kojem se nalazi materijal  $B$ . Ako je  $\omega$  otvoren s dovoljno glatkim (npr. Lipchitzovim) rubom koji sadrži onaj dio  $\partial\Omega$  na koji djeluje opterećenje  $f$ , problem

$$\begin{cases} \sigma = Be(u) & \text{u } \omega, \\ \operatorname{div}\sigma = 0 & \text{u } \omega, \\ \sigma n = f & \text{na } \partial\omega \cap \partial\Omega, \\ \sigma n = 0 & \text{na } \partial\omega \setminus \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.17)$$

gdje  $n$  označava jediničnu vanjsku normalu na navedenom skupu, ima jedinstveno rješenje  $u \in H^1(\omega)^2$ .

Podatljivost strukture  $\omega$  definirana je s

$$c(\omega) = \int_{\partial\omega \cap \partial\Omega} f \cdot u ds$$

te uz

$$\Sigma(\omega) = \left\{ \tau \in L^2(\omega; \mathcal{M}_2^s) \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}\tau = 0 & \text{u } \omega \\ \sigma n = f & \text{na } \partial\omega \cap \partial\Omega \\ \sigma n = 0 & \text{na } \partial\omega \setminus \partial\Omega \end{array} \right. \right\}$$

prema principu komplementarne energije vrijedi

$$c(\omega) = \int_{\omega} B^{-1}\sigma \cdot \sigma dx = \min_{\tau \in \Sigma(\omega)} \int_{\omega} B^{-1}\tau \cdot \tau.$$

Uvjet na volumni udio šupljina u strukturi možemo reprezentirati Lagrangeovim multiplikatorom  $l \in \mathbb{R}$ . Funkcija cilja je tada

$$J(\omega) = c(\omega) + l|\Omega \setminus \omega|. \quad (2.18)$$

Pretpostavke na skup  $\omega$  nužne su kako bismo mogli garantirati postojanje rješenja sustava (2.17). Međutim, za minimizaciju funkcionala (2.18) takve su pretpostavke prerestriktivne, pa ih je stoga potrebno oslabiti. U daljnjem pretpostavljamo da je skup  $\omega$  izmjeriv sa dovoljno glatkim rubom (koji više ne sadrži nužno onaj dio granice  $\Omega$  na koji djeluje  $f$ ). Budući da svaki  $\tau \in \Sigma(\omega)$  možemo proširiti nulom na čitav  $\Omega$  tako da vrijedi  $\tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$ ,  $\operatorname{div}\tau = 0$  u  $\Omega$ , opravdana je sljedeća definicija:

**Definicija 2.3.1.** *Neka je  $\chi$  karakteristična funkcija onog dijela domene  $\Omega$  koji je ispunjen šupljinama. Skup dopustivih tenzora naprezanja na  $\Omega$  definiran je kao*

$$\Sigma(\chi) = \left\{ \tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s) \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}\tau = 0 & \text{u } \Omega \\ \tau n = f & \text{na } \partial\Omega \\ \tau(x) = 0 & \text{za } \chi(x) = 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Iako više ne možemo garantirati postojanje rješenja sustava (2.17), i dalje možemo mjeriti krutost strukture:

$$c(\omega) = \inf_{\tau \in \Sigma(\chi)} \int_{\Omega} B^{-1}\tau \cdot \tau dx.$$

Treći uvjet u definiciji  $\Sigma(\chi)$  možemo direktno uključiti u izraz za podatljivost:

$$c(\chi) = \inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} [(1 - \chi(x))B]^{-1}\tau \cdot \tau dx, \quad (2.19)$$

pri čemu je

$$\Sigma(\Omega) = \left\{ \tau \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s) \left| \begin{array}{ll} \operatorname{div}\tau = 0 & \text{u } \Omega, \\ \tau n = f & \text{na } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}$$

prostor dopustivih naprezanja na  $\Omega$ .

Konačno, cilj nam je naći minimum

$$\min_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J(\chi) = c(\chi) + l \int_{\Omega} \chi(x) dx. \quad (2.20)$$

**Napomena 2.3.2.** *Primijetimo da ako je Lagrangeov multiplikator  $l \geq 0$ , minimum se očito postiže za  $\chi \equiv 0$ , čime je narušen uvjet na volumni udio šupljina u  $\Omega$ . Zato u nastavku pretpostavljamo da je  $l < 0$ .*

Kao u prošlom odjeljku zaključujemo da je minimizacija (2.20) ekvivalentna minimizaciji

$$\inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} \min_{\chi=0,1} \left( [(1 - \chi(x))B]^{-1} \tau \cdot \tau + l\chi(x) \right) dx.$$

Za zadano naprezanje  $\tau$  minimum pod integralom je opet lako odrediti i on je jednak

$$F(\tau) := \begin{cases} l, & \tau = 0, \\ B^{-1} \tau \cdot \tau, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Dakle, problem se svodi na određivanje

$$\inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} F(\tau) dx, \quad (2.22)$$

gdje je  $F(\tau)$  definiran sa (2.21).

Minimizacijski problem (2.22) zovemo formulacijom u terminima naprezanja problema (2.20) i te su formulacije ekvivalentne (ako postoji minimizator  $\sigma$  za (2.22), onda je karakteristična funkcija skupa  $\{x \in \Omega \mid \sigma(x) = 0\}$  minimizator za (2.20)).

Sada želimo provesti relaksaciju problema (2.22), slično kao u odjeljku 2.2. Nažalost, postupak proveden u tom odjeljku teško je matematički opravdati kada je materijal  $A$  degeneriran. Stoga materijal  $A$  najprije zamijenimo materijalom  $A'$  čija je vrijednost blizu nuli i definiramo

$$F_{A'}(\tau) = \min\{(A')^{-1} \tau \cdot \tau + l, B^{-1} \tau \cdot \tau\},$$

pa je prema Teoremu 2.2.5 relaksacija problema

$$\inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} F_{A'}(\tau) dx$$

dana sa

$$\min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} QF_{A'}(\tau) dx,$$

pri čemu je

$$QF_{A'}(\tau) = \min_{0 \leq \theta \leq 1} (g_{A'}(\theta, \tau) + l\theta)$$

i

$$g_{A'}(\theta, \tau) = \min_{A^* \in G_\theta} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau.$$

Uočimo da, budući da za  $0 \leq A' \leq A''$  vrijedi  $F_{A''} \leq F_{A'}$  i  $g_{A''}(\theta, \tau) \leq g_{A'}(\theta, \tau)$ , ako pustimo materijal  $A'$  da ide u nulu, nizovi  $F_{A'}$  i  $g_{A'}$  monotono rastu prema  $F$  i  $g$  definiranim ranije za materijal  $A = 0$ . Zato su dobro definirani limesi

$$g(\theta, \tau) = \lim_{A \rightarrow 0} g_A(\theta, \tau)$$

i

$$QF(\tau) = \lim_{A \rightarrow 0} QF_A(\tau) = \min_{0 \leq \theta \leq 1} (g(\theta, \tau) + l\theta). \quad (2.23)$$

Relaksacija formulacije (2.22) bi stoga trebala glasiti

$$\min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} QF(\tau) dx. \quad (2.24)$$

**Teorem 2.3.3.** *Formulacija u terminima naprezanja (2.22) dopušta formulaciju (2.24) kao relaksaciju. Preciznije,  $QF$  je kvazikonveksifikacija od  $F$  i vrijedi*

1. postoji barem jedno rješenje problema (2.24) u  $\Sigma(\Omega)$ ;
2. svaki minimizirajući niz za (2.22) (do na podniz) slabo konvergira u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  prema minimizatoru od (2.24);
3. za svaki minimizator  $\tau$  od (2.24) postoji minimizirajući niz za (2.22) koji slabo konvergira prema  $\tau$  u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  i vrijedi

$$\inf_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} F(\tau) dx = \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} QF(\tau) dx.$$

*Dokaz.* Dokaz se može naći u [3]. □

Nastavljamo slično kao u odjeljku 2.2. Definiramo  $G_\theta^0$  kao limes skupa  $G_\theta$  kad  $A' \rightarrow 0$  (u smislu Kuratowskog, dakle kao skup svih gomilišta nizova u skupovima  $G_\theta$  određenih s  $A'$ ) i skup dopustivih dizajna kao  $\mathcal{CD} = \{(\theta, A^*) \in L^\infty(\Omega; [0, 1]) \times \mathcal{M}_2^4 \mid A^* \in G_\theta^0 \text{ g.s. u } \Omega\}$ . Sada je

$$QF(\tau) = \min_{0 \leq \theta \leq 1} \min_{A^* \in G_\theta^0} ((A^*)^{-1} \tau \cdot \tau + l\theta).$$

Definiramo funkciju podatljivosti  $c(\theta, A^*) = \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau dx$ . Funkcional koji želimo minimizirati tada možemo zapisati kao

$$J^*(\theta, A^*) = c(\theta, A^*) + l \int_{\Omega} \theta dx,$$

pa zaključujemo da je relaksacijska formulacija (2.24) ekvivalentna

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*). \quad (2.25)$$

Kao direktnu posljedicu Korolara 1.6.13 dobivamo sljedeću lemu.

**Lema 2.3.4.** *Funkcija  $g(\theta, \tau)$  dana je sa*

$$g(\theta, \tau) = B^{-1} \tau \cdot \tau + \frac{\theta}{1 - \theta} g^*(\tau), \quad (2.26)$$

gdje je  $g^*(\tau)$  neprekidna, konveksna, homogena stupnja 2 i strogo pozitivna za  $\tau \neq 0$ . Stoga je funkcija  $g$  neprekidna s vrijednostima u  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  i strogo konveksna po obje varijable. Za svaki  $\tau \in \mathcal{M}_2^s$  postoji jedinstveni minimizator  $\theta_\tau$  za (2.23) dan sa

$$\theta_\tau = \max \left\{ 0, 1 - \sqrt{\frac{g^*(\tau)}{-l}} \right\}. \quad (2.27)$$

**Napomena 2.3.5.** *Funkcija gustoće  $\theta_\tau$  predstavlja udio šupljina u domeni  $\Omega$ . Primijetimo da, iako je za svaki minimizator  $\tau$   $\theta_\tau$  jedinstveno određena, nigdje nije dokazano da je  $\tau$  jedinstven, što znači da je moguće da postoji više od jedne optimalne funkcije gustoće za dani problem.*

**Napomena 2.3.6.** *Za svaki  $\theta_\tau$  prema Teoremu 1.6.15 postoji njoj pridruženi tenzor  $A^* \in \mathcal{CD}$ . Za par  $(\theta_\tau, A^*)$ , kažemo da je generalizirani optimalni dizajn.*

**Teorem 2.3.7.** *Postoji barem jedan generalizirani optimalni dizajn za (2.25). Štoviše, za svaki minimizirajući niz  $\chi_n \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  od (2.15) postoje podniz i limes  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  tako da  $\chi_n$  slabo-\* konvergira prema  $\theta$  u  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  i  $(\theta, A^*)$  je generalizirani optimalni dizajn.*

*Dokaz.* Egzistencija minimizatora  $\theta$  slijedi iz toga što postoji minimizator  $\sigma$  za (2.24). Neka je  $\chi_n$  niz u  $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  za 2.15 koji slabo-\* konvergira prema nekom  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ . Definiramo

$$A_{\chi_n} = \chi_n A + (1 - \chi_n) B$$

i neka je  $\tau \in \Sigma(\Omega)$  dopustivo naprežanje tako da je  $\tau = 0$  za  $\chi_n = 1$ . Tada je

$$B^{-1}\tau \cdot \tau = A_{\chi_n}^{-1}\tau \cdot \tau \geq \min_{\sigma \in \Sigma(\Omega)} A_{\chi_n}^{-1}\sigma \cdot \sigma$$

i minimum se postiže za jedinstveni  $\tau_n^A \in \Sigma(\Omega)$ . Zato je

$$\inf_{\chi} J(\chi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\Omega} A_{\chi_n}^{-1} \tau_n^A \cdot \tau_n^A dx + l \int_{\Omega} \chi_n dx \right\}.$$

Prema Teoremu 1.2.5 postoji H-konvergentan podniz od  $A_{\chi_n}$  čiji H-limes kad  $n \rightarrow \infty$  označimo s  $A_A^*$ . Posljedično  $\tau_n^A$  također slabo konvergira u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  kad  $n \rightarrow \infty$  prema nekom  $\tau^A$ . Prema Propoziciji 1.2.8 tada vrijedi

$$\int_{\Omega} A_{\chi_n}^{-1} \tau_n^A \cdot \tau_n^A dx \rightarrow \int_{\Omega} A_A^* \tau^A \cdot \tau^A,$$

odakle slijedi

$$\inf_{\chi} J(\chi) \geq \int_{\Omega} (A_A^*)^{-1} \tau^A \cdot \tau^A dx + l \int_{\Omega} \theta dx.$$

Iz činjenice da je gornji infimum konačan i pretpostavke  $A_A^* \leq B$  zaključujemo da je niz  $\tau^A$  omeđen u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  neovisno o  $A$ , pa postoji njegov slabo konvergentan podniz (i dalje indeksiran sa  $A$ ) u  $L^2(\Omega; \mathcal{M}_2^s)$  čiji slabi limes označimo s  $\tau$ .

Sada iz činjenice da za sve tenzore  $A, A'$  vrijedi

$$\|(\chi_n A + (1 - \chi_n)B) - (\chi_n A' + (1 - \chi_n)B)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq |A - A'|$$

i Propozicije 1.2.6 slijedi

$$\|A_A^* - A_{A'}^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq |A - A'|,$$

pa niz  $A_A^*$  uniformno konvergira prema nekom  $A^*$  kad pustimo  $A \rightarrow 0$ . Budući da je preslikavanje  $(A^*, \tau) \mapsto (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau$  konveksno, vrijedi

$$\liminf_{A \rightarrow 0} \int_{\Omega} (A^*)^{-1} \tau^A \cdot \tau^A dx \geq \int_{\Omega} A^{*-1} \tau \cdot \tau,$$

odakle slijedi

$$\inf_{\chi} J(\chi) \geq \int_{\Omega} A^{*-1} \tau \cdot \tau dx + l \int_{\Omega} \theta dx.$$

Prema Teoremu 1.5.8 je  $A_A^*(x) \in G_{\theta(x)}$  za gotovo sve  $x \in \Omega$ , pa iz definicije skupa  $G_\theta^0$  zaključujemo da je  $A^*(x) \in G_{\theta(x)}^0$  za gotovo sve  $x \in \Omega$ . Također je

$$g(\theta, \tau) = \lim_{A \rightarrow 0} g_A(\theta, \tau) = \min_{A^* \in G_\theta^0} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau,$$



pa konačno imamo

$$\inf_{\chi} J(\chi) \geq \int_{\Omega} g(\theta, \tau) dx + l \int_{\Omega} \theta dx \geq \int_{\Omega} \min_{0 \leq \theta \leq 1} (g(\theta, \tau) + l) dx \geq \int_{\Omega} QF(\tau) dx.$$

No, prema Teoremu 2.3.3  $\tau$  je minimizator od (2.24) pa gornje nejednakosti prelaze u jednakosti. Konačno, zbog stroge konveksnosti funkcije  $g(\theta, \tau)$  u varijabli  $\theta$ , zaključujemo da je  $\theta$  (definiran kao slabi limes niza  $\chi_n$ ) jedinstvena funkcija gustoće pridružena  $\tau$  kroz formulu (2.27).  $\square$

Kao i ranije, skup  $G_{\theta}^0$  možemo zamijeniti manjim skupom  $L_{\theta}^{0+}$  koji je dobiven uzimanjem limesa kad  $A \rightarrow 0$  skupa  $L_{\theta}^+$  i koji je dobro definiran i eksplicitno poznat prema Definiciji 1.6.14. Definiramo skup svih šupljikavih sekvencijalnih laminata sa

$$\mathcal{LD}^+ = \{(\theta, A^*) \in L^{\infty}(\Omega; [0, 1]) \times \mathcal{M}_2^4 \mid A^*(x) \in L_{\theta(x)}^{0+} \text{ g.s. u } \Omega\}$$

**Teorem 2.3.8.** *Za funkciju cilja (2.25) vrijedi*

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*) = \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{LD}^+} J^*(\theta, A^*).$$

*Preciznije, ako je  $(\theta, A^*)$  minimizator od  $J^*$  u  $\mathcal{CD}$  i  $\sigma$  pridruženi tenzor naprežanja, onda postoji šupljikavi sekvencijalni laminat  $\tilde{A}^*$  tako da je  $(\theta, \tilde{A}^*)$  minimizator od  $J^*$  u  $\mathcal{LD}^+$ ,  $\sigma$  je i njemu pridruženi tenzor naprežanja i vrijedi  $(A^*)^{-1}\sigma = (\tilde{A}^*)^{-1}\sigma$ .  $\tilde{A}^*$  može se izabrati kao sekvencijalni laminat ranga 2 sa smjerovima laminacije određenima svojstvenim vektorima od  $\sigma$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\sigma$  minimizator za (2.24). Dokazali smo da u skupu  $\mathcal{CD}$  tada postoji minimizator  $(\theta, A^*)$  za (2.25). Prema Teoremu 1.6.15 također postoji optimalni sekvencijalni laminat ranga 2 koji ima smjerove laminacije određene svojstvenim vektorima od  $\sigma$  i koji je šupljikav, pa se  $A^*$  može izabrati tako da je  $(\theta, A^*) \in \mathcal{LD}^+$ .

Ako je  $\sigma$  minimizator za  $c(\theta, A^*) = \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} A^{*-1}\tau \cdot \tau$ , onda kao u dokazu Teorema 2.2.4 zaključujemo da za svaki optimalni  $A^*$  vrijedi

$$(A^*)^{-1}\sigma = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\theta, \sigma),$$

odakle slijedi tražena jednakost.  $\square$

## Poglavlje 3

### Numerički rezultati

Sada posjedujemo sve sastojke potrebne za rješavanje problema optimizacije elastičnih struktura metodom homogenizacije. Navedimo još jednom ključne elemente postupka dobivene u prethodnim poglavljima.

Neka je zadana otvorena, ograničena domena  $\Omega$  u  $\mathbb{R}^2$  i izotropan, elastičan materijal propisanog volumena u  $\Omega$  s Hookeovim zakonom  $B$ ,

$$B = 2\mu I_4 + (\kappa - \mu) I_2 \otimes I_2,$$

pri čemu je  $\kappa$  ukupni modul elastičnosti materijala i  $\mu$  Laméova konstanta jednaka modulu smicanja materijala  $B$ .

Želimo naći optimalnu strukturu materijala  $B$  u  $\Omega$  tako da uz zadano opterećenje  $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  na rubu domene  $\partial\Omega$  funkcional

$$J^*(\theta, A^*) = c(\theta, A^*) + l \int_{\Omega} \theta dx$$

ima najmanju moguću vrijednost. Ovdje je  $\theta$  funkcija gustoće dijela domene  $\Omega$  u kojem se ne nalazi materijal  $B$ ,  $A^*$  efektivni Hookeov zakon optimalne konfiguracije i

$$c(\theta, A^*) = \min_{\tau \in \Sigma(\Omega)} \int_{\Omega} (A^*)^{-1} \tau \cdot \tau dx$$

funkcija podatljivosti strukture,  $\Sigma(\Omega)$  prostor dopustivih tenzora naprezanja u  $\Omega$ , dok  $l \in \mathbb{R}$  označava Lagrangeov multiplikator koji predstavlja uvjet na volumni udio materijala  $B$  u  $\Omega$ . Optimalnim dizajnom smatramo par  $(\theta, A^*)$ .

U Teoremu 2.2.1 dokazali smo da se za poznati generalizirani dizajn  $(\theta, A^*)$  optimalno naprežanje  $\sigma$  strukture određene s  $(\theta, A^*)$  može dobiti kao rješenje problema linearizirane elastičnosti

$$\begin{cases} \sigma = A^* e(u) & \text{u } \Omega, \\ -\operatorname{div} \sigma = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

za koji pomak  $u$  možemo numerički odrediti npr. metodom konačnih elemenata, te se rješenje  $\sigma$  jednostavno izračuna iz uvjeta  $\sigma = A^* e(u)$ .

S druge strane, za poznato optimalno naprežanje  $\sigma$  u  $\Sigma(\Omega)$ , u Lemi 2.3.4 dokazali smo da postoji optimalna funkcija gustoće  $\theta$  dana formulom

$$\theta = \max \left\{ 0, 1 - \sqrt{\frac{g^*(\sigma)}{-l}} \right\}, \quad (3.2)$$

gdje je

$$g^*(\sigma) = \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

i  $\sigma_1, \sigma_2$  su svojstvene vrijednosti od  $\sigma$ .

Također smo pokazali (Teorem 1.6.15) da se optimalni tenzor elastičnosti  $A^*$  može izabrati kao sekvencijalni laminat ranga 2 sa smjerovima laminacije određenima svojstvenim vektorima  $e_1, e_2$  od  $\sigma$  i koji je dan formulom

$$\theta[(A^*)^{-1} - B^{-1}]^{-1} = (1 - \theta) \sum_{i=1}^2 m_i f_B^c(e_i), \quad (3.3)$$

pri čemu je tenzor  $f_B^c(e_i)$  zadan za svaku simetričnu matricu  $\xi \in \mathcal{M}_2^s$  kvadratnom formom

$$f_B^c(e_i)\xi : \xi = B\xi : \xi - \frac{1}{\mu} |B\xi e_i|^2 + \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} ((B\xi)e_i \cdot e_i)^2 \quad (3.4)$$

i parametri laminacije  $m_1, m_2$  su određeni sa

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Numerički algoritam ima sljedeću strukturu:

1. zadati početnu konfiguraciju  $(\theta_0, A_0^*)$ , na primjer  $\theta_0 \equiv 0, A_0^* = B$  svuda u  $\Omega$ ;
2. do konvergenције,  $k \geq 0$ 
  - a) izračunati pomak  $u_k$  kao rješenje sustava linearizirane elastičnosti (3.1);
  - b) izračunati naprezanje  $\sigma_k = A_k^* e(u_k)$ ;
  - c) izračunati svojstvene vrijednosti  $\sigma_1^k, \sigma_2^k$  i vektore  $e_1^k, e_2^k$  naprezanja  $\sigma_k$ ;
  - d) izračunati sljedeću optimalnu gustoću  $\theta_{k+1}$  pomoću formule (3.2);
  - e) odrediti parametre laminacije  $m_1^k, m_2^k$  i matricu  $(m_1^k f_B^c(e_1^k) + m_2^k f_B^c(e_2^k))$  pomoću kvadratne forme (3.4) te joj odrediti inverz;
  - f) izračunati sljedeći optimalni Hookeov  $A_{k+1}^*$  iz formule (3.3) kao

$$A_{k+1}^* = \left[ B^{-1} + \frac{\theta_{k+1}}{1 - \theta_{k+1}} \left( m_1^k f_B^c(e_1^k) + m_2^k f_B^c(e_2^k) \right)^{-1} \right]^{-1}.$$

Opisani algoritam producira generalizirane dizajne, koji nisu nužno ostvarivi u praksi. Naime, kao što će pokazati primjeri, za velika područja domene algoritam će predvidjeti strukturu kojoj je karakteristična funkcija  $\chi \in \langle 0, 1 \rangle$ . Fizikalno takav rezultat možemo interpretirati kao zahtjev da se u materijalu  $B$  izbuši beskonačno mnogo beskonačno malih šupljina. Kako bismo od generaliziranog dizajna dobili klasični ili realni dizajn, provodimo postupak penalizacije na dobivenu optimalnu gustoću  $\theta_{opt}$ . Penalizacija se svodi na odabir funkcije koja izračunatu vrijednost gustoće u svakoj točki "gura" bliže vrijednosti 0 ili 1 kako bi se pročistila dobivena struktura. Ta se funkcija može odabrati na više načina, no u slijedećim primjerima korištena je funkcija

$$\theta_{pen} = \frac{1 - \cos(\pi\theta_{opt})}{2}.$$

Nakon što je opisanim algoritmom izračunata optimalna funkcija gustoće, provodi se još nekoliko iteracija u kojima se umjesto optimalne koristi penalizirana gustoća  $\theta_{pen}$ .

### 3.1 Numerički primjeri

U nastavku prikazujemo rezultate primjene opisanog algoritma na nekoliko odabranih primjera. Na svim slikama prikazane su vrijednosti konačne funkcije gustoće  $\theta$  u domeni  $\Omega$ : područja u kojima je  $\theta = 0$  označena su crnom bojom (na tim mjestima algoritam predviđa da se treba nalaziti materijal), dok su područja u kojima je  $\theta = 1$  označene bijelom bojom (to su područja praznina, odnosno bez materijala). Međuvrijednosti  $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$  označene su odgovarajućim nijansama sive.

Sustav linearizirane elastičnosti (3.1) rješavan je u programskom paketu FreeFem++ [9] metodom konačnih elemenata. Pomaci te pripadni tenzori deformacije i naprezanja izračunati su na prostoru P2 konačnih elemenata. Tenzori deformacije i naprezanja zatim su projicirani na prostor P0 konačnih elemenata, dok su sve ostale funkcije izračunate na istom prostoru. Za reprezentaciju svih tenzora korištena je Voigtova notacija, odnosno tenzori iz  $\mathcal{M}_2^s$  prikazani su kao vektori dimenzije 3, dok su tenzori u  $\mathcal{M}_2^t$  prikazani kao realne kvadratne matrice dimenzije 3.

**Napomena 3.1.1.** U [3], autor preporuča korištenje Q1 elemenata za rješavanje sustava elastičnosti, no ti elementi nisu implementirani u paketu FreeFem++. Ipak, dobiveni rezultati su usporedivi s onima u odjeljku 5.2.2 spomenute knjige.

Navedimo najprije nekoliko tehničkih napomena. Za početak ističemo da je u prva tri primjera Lagrangeov multiplikator  $l$  bio fiksiran. Optimalna gustoća  $\theta$  zadana formulom (3.2) ovisi samo o vrijednostima tenzora naprezanja  $\sigma$  u danoj točki i multiplikatoru  $l$ , pa izbor vrijednosti  $l$  uvelike utječe na konačno rješenje problema optimalnog dizajna. Konkretno, što je  $l$  veći, to su vrijednosti gustoće  $\theta$  manje, pa je manji i ukupni volumen šupljina u dobivenoj strukturi.

Međutim, fiksiranje multiplikatora  $l$  baš i ne odgovara problemu kojim smo se bavili u prošlim poglavljima, gdje smo pretpostavljali da je zadan volumni udio materijala (ili šupljina) unutar domene. Taj problem u četvrtom je primjeru riješen tako da je u svakom koraku algoritma jednostavnim iteracijama rješavan sustav

$$\begin{cases} \theta = \max \left\{ 0, 1 - \sqrt{\frac{g^*(\sigma)}{-l}} \right\}, \\ \int_{\Omega} \theta(x) dx = \Theta, \end{cases} \quad (3.5)$$

gdje je  $\sigma$  optimalno naprezanje izračunato u trenutnom koraku algoritma i  $\Theta \in \mathbb{R}$  zadani uvjet na ukupni volumen šupljina u  $\Omega$ . Iteracije se provode sve dok  $\theta$  ne zadovolji propisani uvjet.

**Napomena 3.1.2.** Alternativno, ako je propisan uvjet  $\Theta$  na ukupni volumni udio materijala u domeni  $\Omega$ , vrijedi

$$\int_{\Omega} (1 - \theta(x)) dx = |\Omega| - \int_{\Omega} \theta(x) dx = \Theta,$$

pa druga jednadžba u sustavu (3.5) glasi

$$\int_{\Omega} \theta(x) dx = |\Omega| - \Theta.$$

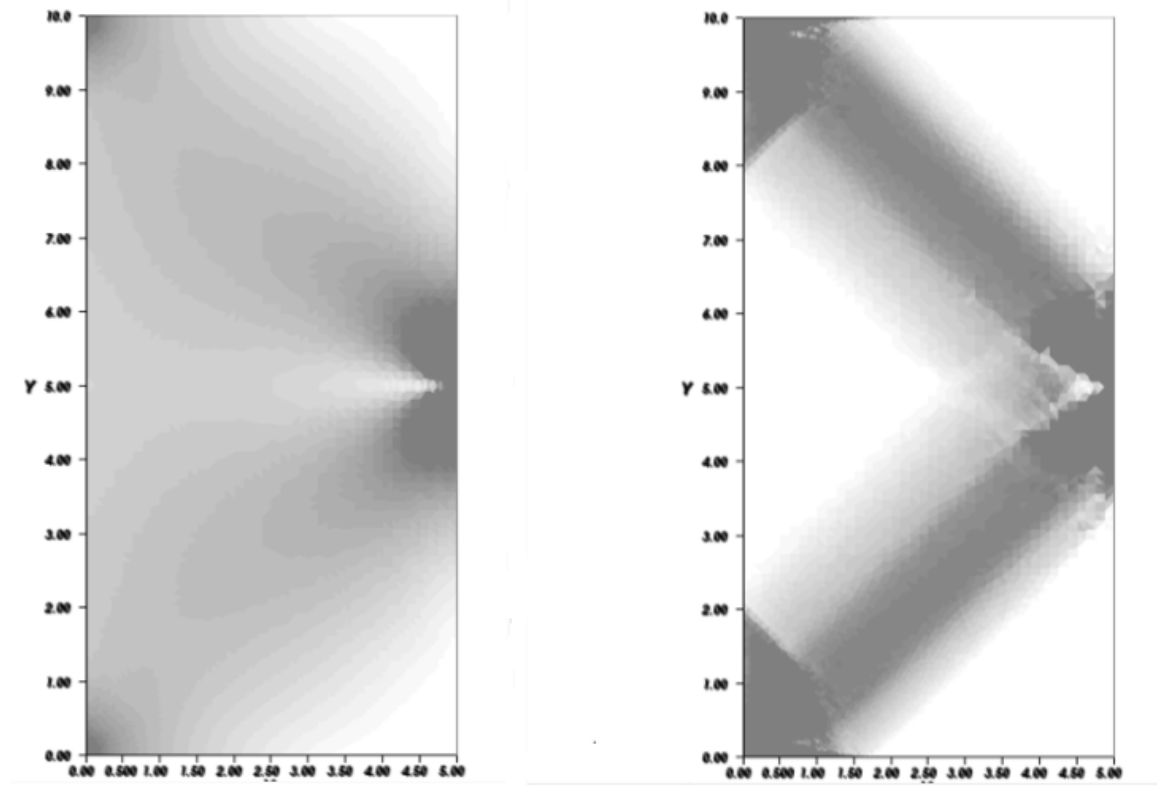
Nadalje, budući da se pri računanju tenzora elastičnosti  $A^*$  koristi izraz  $\theta/(1 - \theta)$ , treba pripaziti da se vrijednost  $\theta$  ne približi previše jedinici. U ovim primjerima zadan je uvjet  $\theta \leq (1 - \epsilon)$  uz  $\epsilon = 10^{-3}$ . Također je potrebno osigurati da tenzor  $A^*$  ne postane singularan. Najprije uočimo da ako je neki od parametara  $m_1, m_2$  jednak nuli, dobiveni tenzor elastičnosti bit će samo jednostavan laminat, te stoga ne može biti optimalan. Zato je također postavljen uvjet  $m_1, m_2 \geq \epsilon$ . No, može se pokazati (Teorem 2.3.44 u [3] ili detaljnije u [4]) da ovakav postupak uvijek rezultira degeneriranim tenzorom  $A^*$ , u smislu da u zapisu u bazi svojstvenih vektora naprezanja  $\sigma$  vrijedi  $A_{1212}^* = 0$  i  $(A_{1212}^*)^{-1} = +\infty$ , te je stoga potrebno provesti neku vrstu regularizacije  $A^*$ . U ovim primjerima je na dijagonalu matrica  $A^*$  i  $\left[ m_1 f_B^c(e_1) + m_2 (f_B^c(e_2)) \right]^{-1}$  u svakom koraku jednostavno dodan član veličine  $\epsilon$ .

Opisani algoritam je neosjetljiv na profinjenje mreže. Na slici 3.6 prikazani su generalizirani dizajni dobiveni u trećem primjeru na mrežama od otprilike 5 000 i 20 000 elemenata. Također, kao što je spomenuto u Napomeni 2.2.7, algoritam producira identične optimalne strukture za različite inicijalizacije početne strukture  $(\theta_0, A_0^*)$ .

Prvi primjer je *kratka konzola*: domena  $\Omega$  je pravokutnik dimenzija  $10 \times 5$ , s opterećenjem  $f$  zadanim na malom dijelu sredine desne stranice pravokutnika koje djeluje prema dolje iznosa 1, te je lijevi rub fiksiran, odnosno zadano je  $u(0, y) = 0$ . Za materijal  $B$  odabrane su vrijednosti koeficijenata  $\lambda = \mu = 1$  te je vrijednost Lagrangeovog multiplikatora fiksirana na  $l = -4 \times 10^{-6}$ . Početni podaci su  $\theta_0 \equiv 0$  i  $A = B$  svuda u  $\Omega$ . Na slici 3.1 prikazane su strukture dobivene nakon 1 i 5 iteracija, dok su na slici 3.2 rezultati nakon 20 i 100 iteracija. Primijetimo da je već nakon 5 iteracija oblik strukture prilično jasan. Na slici 3.3 je usporedba generaliziranog dizajna dobivenog nakon 100 iteracija te klasičnog dizajna dobivenog penalizacijom.

Drugi primjer je *srednje duga konzola*. Domena je sada pravokutnik dimenzija  $20 \times 10$ , dok su ostali parametri zadržani kao u prethodnom primjeru. Na slici 3.4 nalaze se rezultati nakon 1, 5, 20 i 100 iteracija. Ponovno vidimo da dizajn dobiven nakon 5 iteracija ne odudara previše od onog dobivenog nakon 100 iteracija. Usporedba sa penaliziranim dizajnom dana je na slici 3.5.

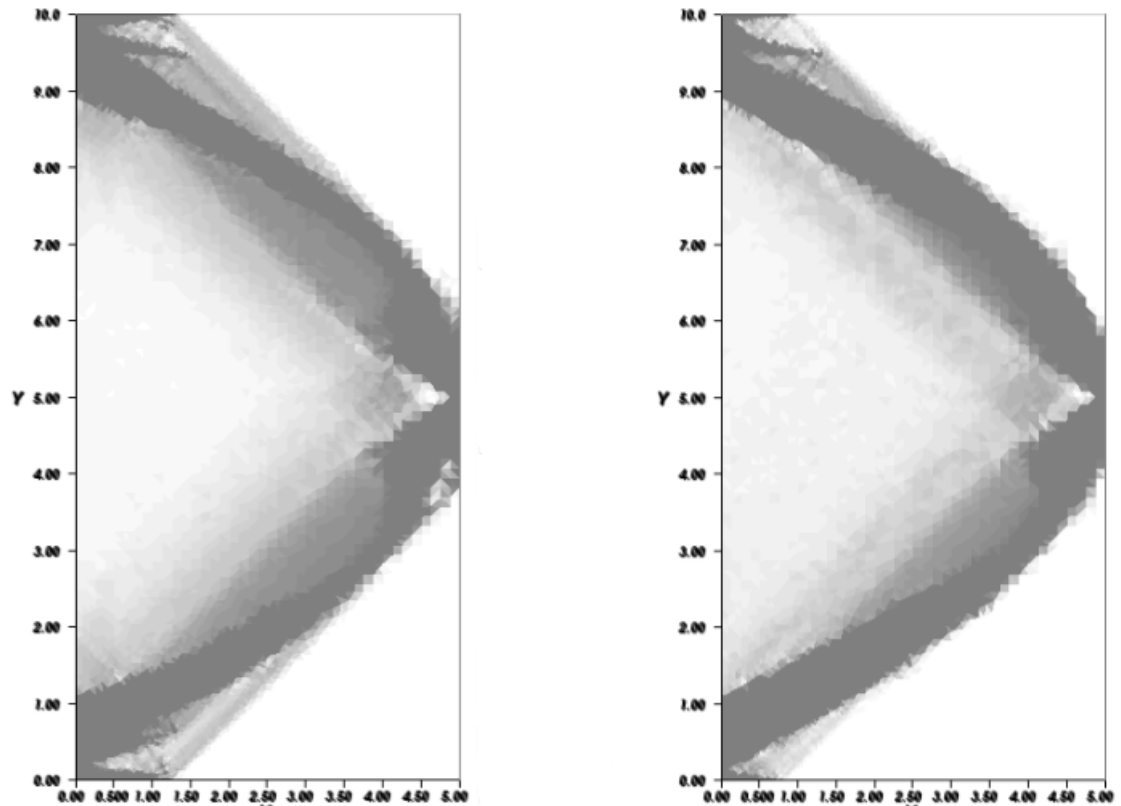
Iz ova dva primjera vidljiva je ovisnost rješenja o izboru domene - producirani dizajn za kratku i srednje dugu konzolu potpuno je različit, iako su svi parametri osim domene zadani jednako. To je, jasno, i očekivano, iako nije idealno s obzirom na to da je moguće da postoji bolji dizajn na malo drugačijoj domeni. Ipak, uz pažljiv odabir domene takvi bi se problemi trebali moći izbjeći.



Slika 3.1: Struktura kratke konzole nakon 1 (lijevo) i 5 (desno) iteracija

Treći primjer je *dvodimenzionalni most*. Domena je i opet pravokutnik dimenzija  $20 \times 10$ , ali opterećenje je sada zadano na sredini donjeg ruba, dok je struktura fiksirana samo u donja dva kuta. Dobiveni generalizirani dizajni dobiveni nakon 1, 5, 20 i 100 iteracija prikazani su na slici 3.7. U ovom primjeru ipak vidimo znatno poboljšanje dizajna u odnosu na petu i stotu iteraciju. Klasični dizajn dobiven penalizacijom nalazi se na slici 3.8. Vidimo da ovdje penalizacijom nismo dobili gotovo nikakvo poboljšanje u odnosu na generalizirani dizajn, odnosno da je izračunata struktura već vrlo blizu klasičnom dizajnu.

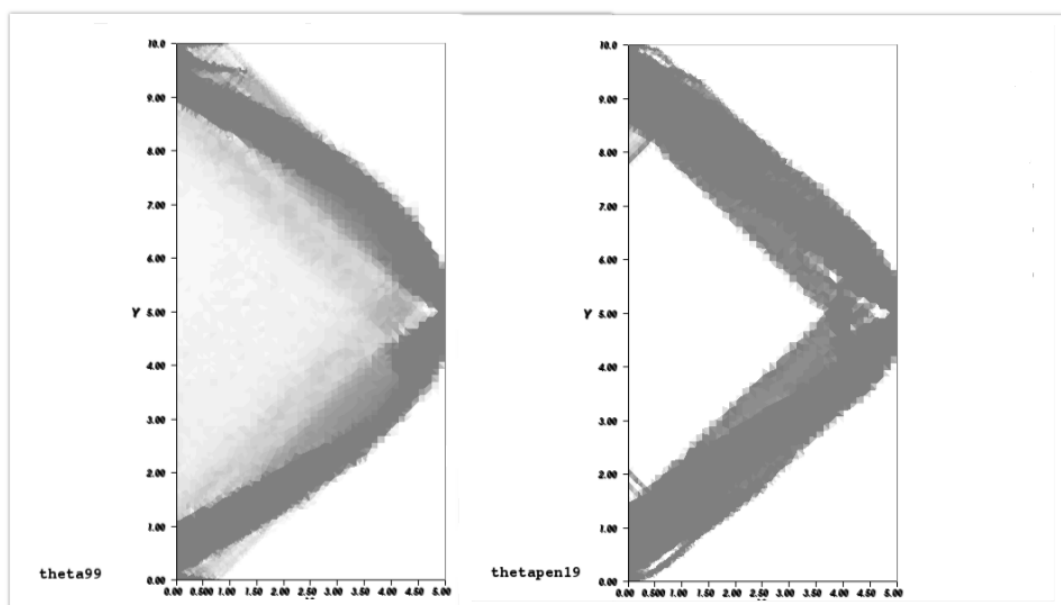
Četvrti primjer je ponovno dvodimenzionalni most, sa istim parametrima kao u prethodnom primjeru, ali ovog puta sa zadanim ukupnim volumenom materijala u konačnoj strukturi u iznosu 40% i 60% volumena domene. Uvjet je ostvaren pomoću ranije opisanog iterativnog procesa za računanje optimalnog Lagrangeovog multiplikatora  $l$  u pojedinom koraku algoritma. U svakoj iteraciji  $l$  je prema potrebi pomnožen ili podijeljen faktorom 2. Željeni ukupni volumen gustoće  $\theta$  postignut je u svakom koraku u otprilike 5 iteracija, što



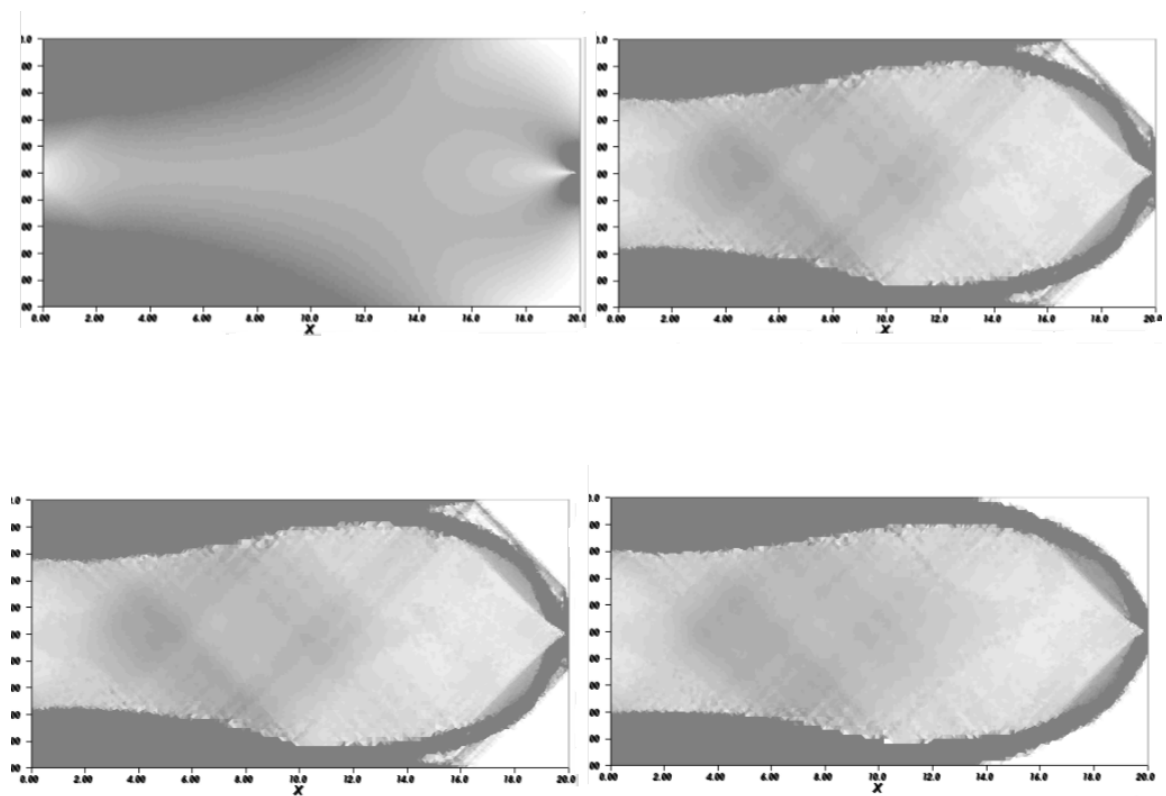
Slika 3.2: Struktura kratke konzole nakon 20 (lijevo) i 100 (desno) iteracija

znači da je utjecaj uvođenja ovakvog procesa na numeričku izvedbu algoritma zanemariv. Dobivene optimalne strukture nakon 100 iteracija prikazane su na slici 3.9.

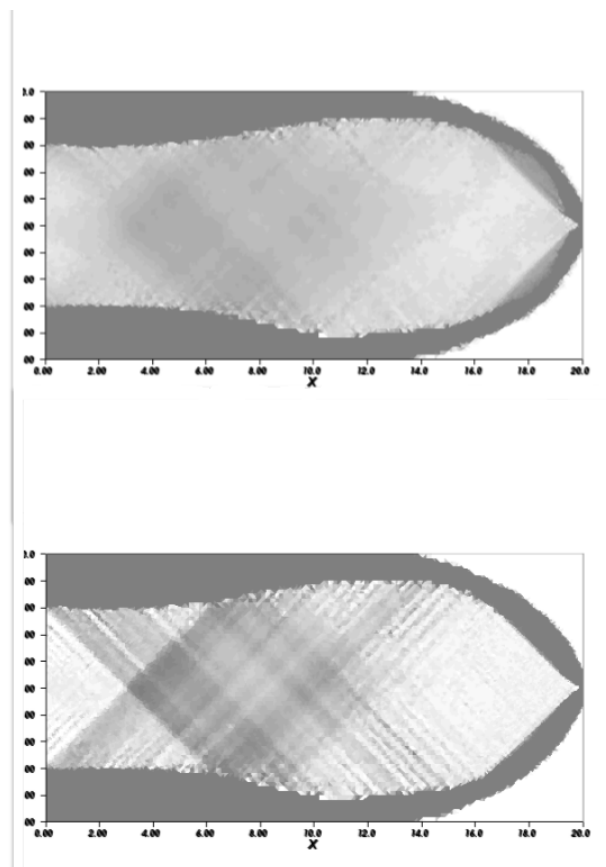




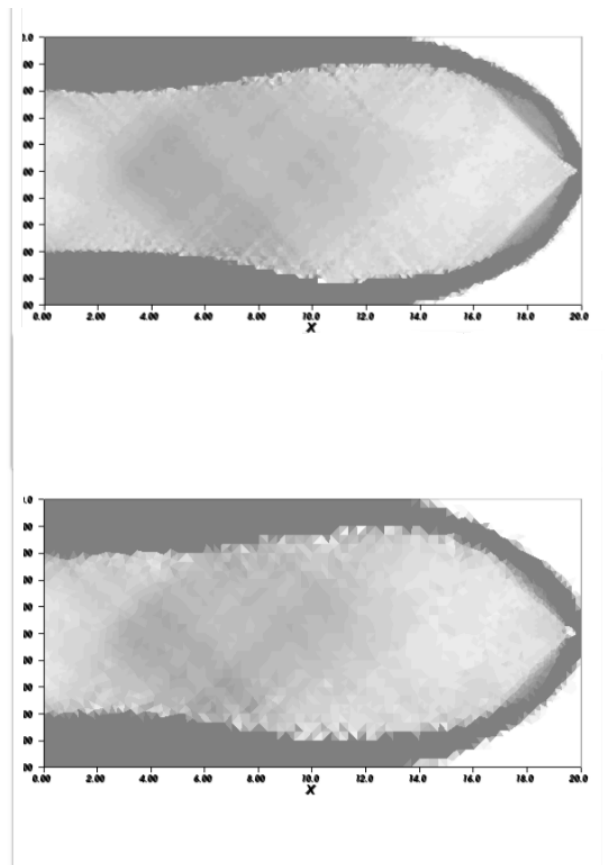
Slika 3.3: Usporedba generaliziranog i penaliziranog dizajna za kratku konzolu



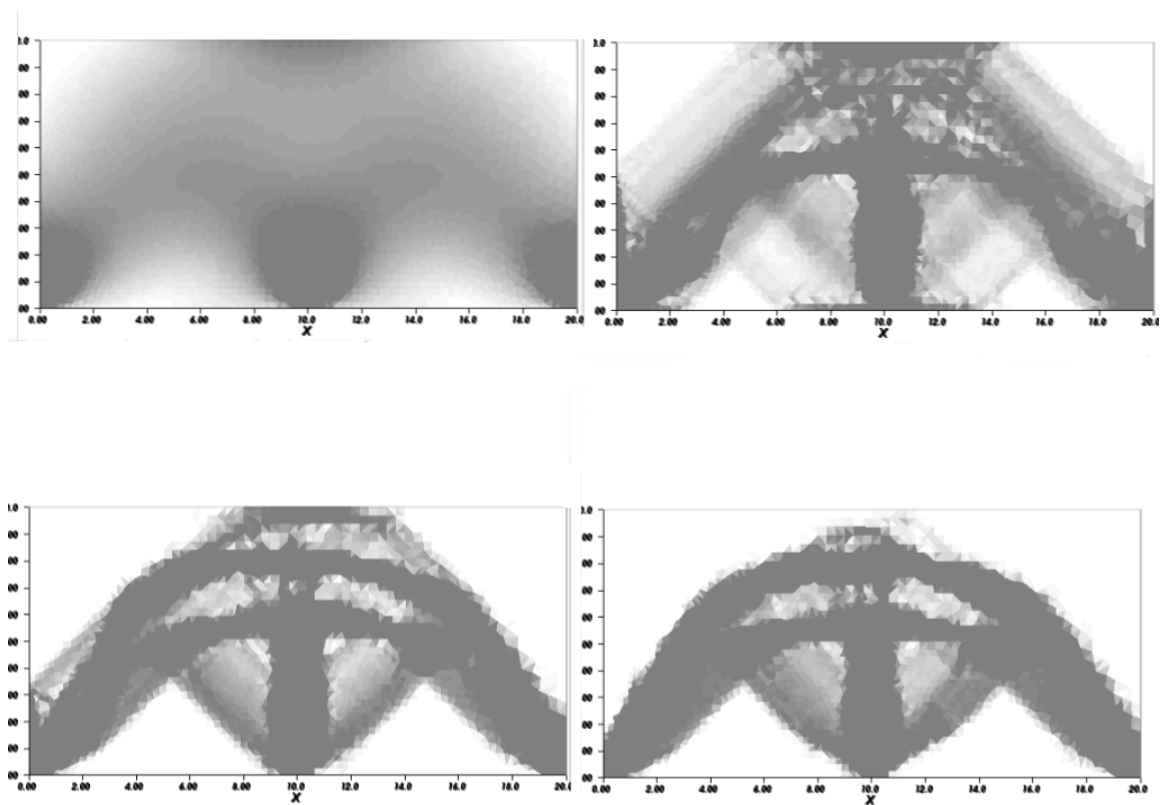
Slika 3.4: Struktura srednje duge konzole nakon 1 (lijevo gore), 5 (desno gore), 20 (lijevo dolje) i 100 (desno dolje) iteracija



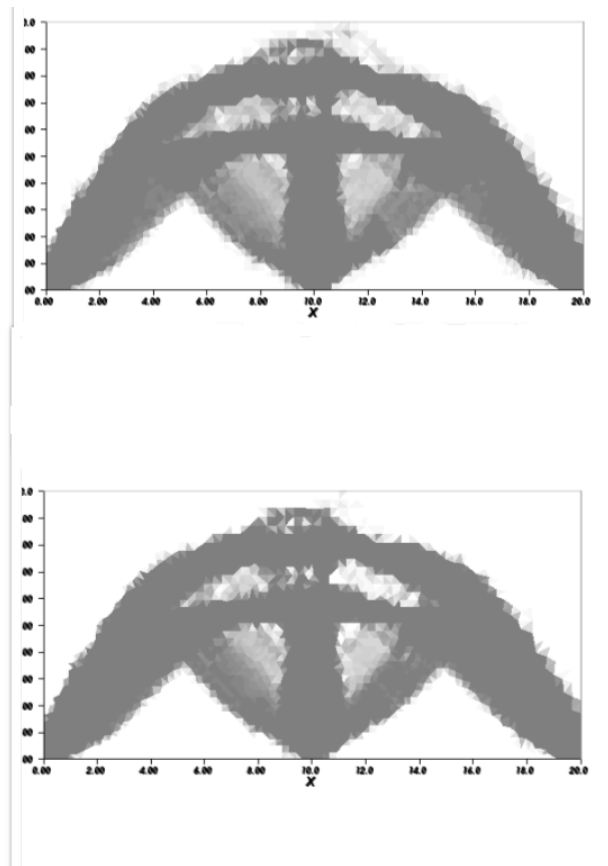
Slika 3.5: Usporedba generaliziranog i penaliziranog dizajna za srednje dugu konzolu



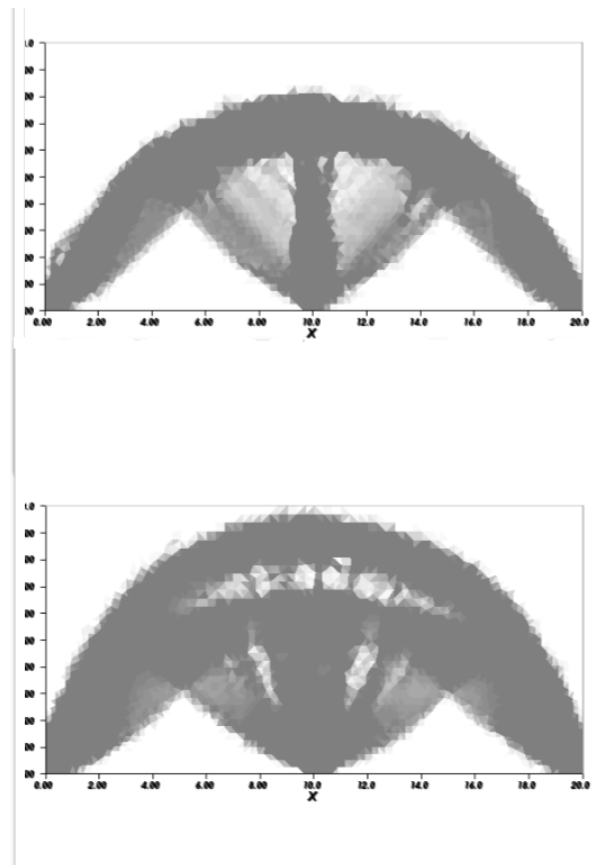
Slika 3.6: Usporedba generaliziranog dizajna za srednje dugu konzolu na mreži od 20 000 elemenata (gore) i 5 000 elemenata (dolje)



Slika 3.7: Generalizirani dizajn za most nakon 1 (lijevo gore), 5 (desno gore), 20 (lijevo dolje) i 100 (desno dolje) iteracija



Slika 3.8: Usporedba generaliziranog i penaliziranog dizajna za most



Slika 3.9: Usporedba generaliziranih dizajna za most sa zadanim ukupnim volumenom materijala od 40% (gore) i 60% (dolje) volumena domene

# Bibliografija

- [1] Robert A Adams i John JF Fournier, *Sobolev spaces*, sv. 140, Academic press, 2003.
- [2] Grégoire ALLAIRE, Sylvie AUBRY i François JOUVE, *Shape optimization with general objective functions using partial relaxation*, Topology optimization of structures and composite continua, GIN Rozvany and N. Olhoff eds (2000), 239–249.
- [3] Grégoire Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, sv. 146, Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Grégoire Allaire i Sylvie Aubry, *On optimal microstructures for a plane shape optimization problem*, Structural and Multidisciplinary Optimization **17** (1999), br. 2, 86–94.
- [5] Marco Avellaneda, *Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites*, SIAM Journal on Applied Mathematics **47** (1987), br. 6, 1216–1228.
- [6] Andrej V Cherkaev i Robert Kohn, *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, sv. 31, Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Sergio Conti, *Quasiconvex functions incorporating volumetric constraints are rank-one convex*, Journal de mathématiques pures et appliquées **90** (2008), br. 1, 15–30.
- [8] Harvey J Greenberg i William P Pierskalla, *A review of quasi-convex functions*, Operations Research **19** (1971), br. 7, 1553–1570.
- [9] Frédéric Hecht, *New development in FreeFem++*, Journal of numerical mathematics **20** (2012), br. 3-4, 251–266.
- [10] Charles B Morrey, *Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, Pacific journal of mathematics **2** (1952), br. 1, 25–53.
- [11] Sergio Spagnolo, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze **22** (1968), br. 4, 571–597.



# Sažetak

U ovom radu iznesen je kratki pregled primjene metode homogenizacije na problem topološke optimizacije dvodimenzionalne elastične strukture načinjene od izotropnog elastičnog materijala. Najprije je uveden pojam H-konvergenције na kojem je temeljena metoda homogenizacije.

Izvedeni su uvjeti optimalnosti takve strukture, takozvane Hashin-Shtrikmanove ocjene, te je dokazano da se struktura maksimalne krutosti postiže sekvencijalnim laminatom ranga 2 za čije su određivanje izvedene eksplicitne formule.

Konačno je implementiran algoritam kojim su izračunate optimalne strukture u odabranim primjerima.

# Summary

In this thesis we present a short summary of the homogenization method and its application to problems of shape optimization in the elasticity setting in two dimensions when the domain is filled with an isotropic elastic medium. First we introduce the notion of H-convergence on which the method of homogenization is based.

Next, the optimality conditions for such a structure, namely Hashin-Shtrikman energy bounds, are computed and it is proved that an optimal shape in terms of compliance could be achieved by a rank-2 sequential laminate for which the effective properties are then explicitly determined.

Finally, a numerical algorithm is developed and applied to computing the optimal shape of a structure in a few select examples.

# Životopis

Nela Ševerdija rođena je 11. lipnja 1990. godine u Zagrebu. U Zagrebu je pohađala i Osnovnu školu Julija Klovića te zatim V. gimnaziju. Nakon završetka srednje škole, školovanje nastavlja na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu gdje 2014. godine završava preddiplomski studij te iste godine upisuje diplomski studij Primijenjene matematike.