

# Kooperativne evolucijske igre na mreži

---

Fumić, Petar

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:616812>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-07**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Petar Fumić

KOOPERATIVNE EVOLUCIJSKE IGRE NA MREŽI

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Petar Fumić**

Diplomski rad

**Kooperativne evolucijske igre na  
mreži**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc., Vinko Zlatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2017.



## Sažetak

Zadatak rada je nalaženja kritičnih parametara za uspjeh kooperacije. Razmatramo evolucijske igre na mrežama, konkretno, zarobljenu dilemu i igru javnog dobra. To je matematički zahtjevan problem koji općenito nije moguće riješiti analitički. Pokazat ćemo da postoji rješenje za proizvoljnu strukturu mreže ako smo u režimu slabe selekcije. Rješenje se bazira na koalescentnoj teoriji pomoću koje možemo izračunati prosječno vrijeme do susreta dva nasumična šetača na mreži. Naći ćemo vrijednosti kritičnih parametara za velik broj mreža te vidjeti kako struktura utječe na ishod različitih evolucionarnih igara. Također, pokazati ćemo da se analitički dobiveni rezultati dobro poklapaju s rezultatima dobivenim numeričkim simulacijama.

# Evolutionary Cooperative Games on Networks

## Abstract

The goal of this paper is finding the critical cooperation parameters. We are considering evolutionary games on networks, specifically, the prisoner's dilemma and the public goods game. Finding the critical parameters is mathematically non-trivial problem which is generally difficult to solve analytically. We will show that there exists a solution for an arbitrary network structure. The solution is based on the coalescent theory and uses it to calculate the average meeting time of two random walks on the network. We will find the values of the critical parameters for a large number of networks and analyze the effect of structural details on the outcome of different evolutionary games. Also, we will show that analytical and numerical solutions are a good match.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorija igara</b>	<b>2</b>
2.1	Pareto optimalnost . . . . .	3
2.2	Nashov ekvilibrij . . . . .	4
2.3	Dilema zatvorenika . . . . .	5
2.4	Igra javnog dobra . . . . .	6
<b>3</b>	<b>O kooperaciji</b>	<b>8</b>
3.1	Stohastičke reaktivne strategije . . . . .	10
3.2	Ekonomске igre i kooperacija . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Evolucijska teorija igara</b>	<b>15</b>
4.1	U aproksimaciji srednjeg polja . . . . .	16
4.2	Igre za dva igrača . . . . .	17
4.3	Zarobljenička dilema u srednjem polju . . . . .	19
4.4	O topologiji mreže . . . . .	19
4.5	Zatvorenička dilema na mreži . . . . .	21
4.6	Igra javnog dobra na mreži . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Uvjeti za uspjeh kooperacije</b>	<b>27</b>
5.1	Model na grafu . . . . .	27
5.2	Tranzicije . . . . .	28
5.3	Vjerojatnost fiksacije u slaboj selekciji . . . . .	28
5.4	Promijena pod slabom selekcijom . . . . .	31
5.5	Koalescirajući nasumični hod . . . . .	31
5.6	Rekurzivne relacije za vremena koalescencije . . . . .	33
5.7	U zatvoreničkoj dilemi . . . . .	34
5.8	Zatvorenička dilema s akumuliranim isplatama . . . . .	36
5.9	Igra javnog dobra . . . . .	37
5.10	Igra javnog dobra s više grupa . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Rezultati</b>	<b>40</b>
6.1	Za zatvoreničku dilemu . . . . .	44

6.2	Za igru javnog dobra . . . . .	46
6.3	Monte Carlo rezultati . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>50</b>



# 1 Uvod

Kako i zašto ljudi surađuju? To je centralno pitanje relativno novog istraživačkog područja kojemu se pristupa s različitih strana iz perspektive znanstvenika iz disciplina poput evolucijske biologije, psihologije, ekonomije te uključuje i doprinose pokojeg fizičara. Pitanje je zanimljivo zato što se čini da je kooperacija direktno povezana s evolucijskim uspjehom ljudi te je upravo ona ono što nas je izdvojilo od drugih životinja. Tendencija ka kooperaciji omogućila je našim društvima da dođu na visoku razinu kompleksnosti i omogućila proces ubrzanog tehnološkog napretka koji traje i danas.

*"Homo homini lupus est"* je poznata latinska izreka koja kaže da je čovjek čovjeku vuk. Nesretnom vuku ovdje se pripisuju predatorske i okrutne karakteristike. Thomas Hobbes je u svom djelu *Levijatan* iz 1651. prenio tu izreku u okvire državnštva. Hobbes je smatrao da je čovjek u svojem prirodnom stanju destruktivan i divlji te ga jedino snažni mehanizmi vlasti poput jake države čuvaju od vlastite prirode. Današnji eksperimenti o tendenciji kooperacije među ljudima, u odsutnosti društvenih pritisaka, ipak daju optimističniju sliku o čovjekovoj prirodi jer se pokazalo da su ljudi spremni surađivati u mnogim slučajevima čak i kada je cijena kooperacije visoka.

Tu u priču ulazi i teorija igara koja nam daje teorijski okvir za istraživanje kooperacije. Pokazalo se da postoji igra za dva igrača s binarnim izborom koja jako lijepo apstrahira "sukobe" u ljudskim odnosima zvana zarobljenička dilema te njen analog za grupne interakcije koji zovemo igra javnog dobra. Izbor se za igrače svodi na defekciju ili kooperaciju gdje defekcija predstavlja sebično ponašanje koje maksimizira vlastitu dobit dok kooperacije predstavlja altruističko ponašanje koje maksimizira dobit grupe. Daljnji razvoj područja je vodio u to da pređemo s proučavanja interakcija pojedinaca ili grupa na proučavanje populacija pomoću evolucijske teorije igara. Isprva su se razmatrale analitički zahvalne igre na beskonačnim populacijama no vrlo brzo nakon toga počele su se razmatrati i igre na određenim topologijama. Kompleksne strukture predstavljaju problem zato što u pravilu nije moguće koristiti većinu alata matematičke analize nego moramo pribjeći numeričkim simulacijama. U daljnjim poglavljima pokazati ćemo da je analitičko rješenje moguće ako postavimo neke specifične uvjete na sustav.

## 2 Teorija igara

Teorija igara proučava sukobe između racionalnih igrača koji se bore za vlastite interese[7]. Racionalnost ovdje podrazumijeva da svi igrači imaju u vidu sve moguće ishode igre te da ih mogu vrednovati. Interese igrača modeliramo s funkcijom korisnosti koja predstavlja mapiranje iz budućeg stanja svijeta koje je rezultat njihovih izbora u set realnih brojeva. Brojevi predstavljaju igračevo zadovoljstvo s danim ishodom. Složenost problema proizlazi iz toga što maksimiziranje igračeve funkcije korisnosti ne ovisi samo o njegovom izboru nego i o izborima drugih igrača koji sudjeluju u igri. Svaki racionalni igrač pokušava maksimizirati vlastitu korist u danoj situaciji. Glavna reprezentacija strateških interakcija u teoriji igara je s igrama u normalnoj formi (to znači da je igra zapisana u obliku  $n$ -dimenzionalne matrice gdje je  $n$  broj igrača). U tom prikazu igračeva korist ovisi samo o potezima igrača koji sudjeluju u igri. Može se pokazati da je ta reprezentacija općenita jer se stohastičke igre (još zvane i Bayesianske) mogu prikazati preko igara u normalnoj formi s većom matricom. Nadalje ćemo razmatrati igre za dva igrača koje možemo prikazati dvodimenzionalnim matricama poput igre sukoba spolova (engl. battle of the sexes).

$$\begin{array}{cc} & A & B \\ A & [2, 1 & 0, 0] \\ B & [0, 0 & 1, 2] \end{array}$$

Ovo je primjer igre za dva igrača u kojoj svaki igrač može birati između dva elementarna poteza ( $A$  i  $B$ ). Prvi igrač bira između jednog od dvaju redaka a drugi igrač između jednog od dvaju stupaca. Dobiti prvog i drugog igrača dane su sa prvim i drugim brojem u ćeliji. Problem ove igre je pitanje sinkronizacije. Igrači imaju priliku maksimizirati dobit sa suprotnim potezima, prvi igrač birajući strategiju  $A$ , drugi birajući strategiju  $B$ . Međutim ako odaberu različite poteze dolaze u situaciju u kojoj ne dobivaju ništa.

Igra u normalnoj formi sastoji se od elemenata  $(N, A, u)$  gdje vrijedi:

- $N$  je konačan set  $n$  igrača s indeksima  $i$ ;

- $A = A_1 \times \dots \times A_n$  gdje je  $A_i$  konačni set poteza dostupan igraču  $i$ . Svaki vektor  $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$  zove se profil poteza. Profil poteza je set koji sadrži po jedan

potez od svakog igrača.

$-u = (u_1, \dots, u_n)$  gdje je  $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija koristi za igrača  $i$ .

Funkcija koristi ovisi o profilu poteza. Na primjer, za igru sukoba spolova, ako oba igrača igraju potez  $A$ , za profil poteza  $a = (A, A)$  funkcija korisnosti prvog igrača bila bi  $u_1(a) = 2$ . Strategije su načini na koje igrač bira iz seta dostupnih poteza imajući na umu da ishod ovisi i o izborima njegovih suigrača. Jedna od mogućnosti je da igrač odabere jedan potez i odigra ga, to zovemo čistom strategijom. Ako to učini svaki igrač onda dobivamo profil čistih strategija dan s  $s = (a_1, \dots, a_n)$ . Druga mogućnost je da igrač bira jedan od dostupnih poteza prema nekoj distribuciji vjerojatnosti (miješana strategija). Distribuciju vjerojatnosti  $i$ -tog igrača označavamo s  $s_i$  gdje je  $s_i(a_i)$  vjerojatnost da će potez  $a_i$  biti odigran pod danom distribucijom. Set miješanih strategija  $s = (s_1, \dots, s_n)$  zovemo profil miješanih strategija.

Očekivana dobit igrača  $i$  za miješani strateški profil  $s$  je jednaka sumi vrijednosti funkcija koristi igrača  $i$  za sve moguće akcijske profile pomnožene s vjerojatnostima da će igrači odabrati poteze koji vode ka tome akcijskom profilu.

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a). \quad (2.1)$$

Na primjer, u sukobu spolova, uzmimo slučaj u kojem na početku oba igrača pridaju svakom potezu jednaku vjerojatnost izbora. Vjerojatnosti su onda dane sa  $s_1(A) = s_1(B) = s_2(A) = s_2(B) = 0.5$ . Očekivana dobit oba igrača u tom slučaju je

$$u_{1,2} = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.75.$$

Što je manje no da su oba odabrali igrati  $A$  ili  $B$ .

## 2.1 Pareto optimalnost

	$A$	$B$
$A$	$[1, 1$	$0, 1]$
$B$	$[1, 1$	$1, 1]$

Ovo je primjer igre u kojoj jedan strateški profil vodi u manju dobit za jednog igrača ne mijenjajući pri tome ishod drugog igrača. U teoriji igara možemo primi-

jeniti bilo koju pozitivnu afinu transformaciju na igračevu funkciju koristi. To znači da ne možemo direktno uspoređivati funkcije koristi različitih igrača ali možemo uspoređivati vrijednosti funkcije koristi jednog igrača za različite strateške profile što nam daje mogućnost rangiranja ishoda. Strateški profil  $s$  Pareto dominira profil  $s'$  ako su za svaki  $i \in N$ ,  $u_i(s) \geq u_i(s')$  i postoji neki  $j \in N$  za koji je  $u_j(s) > u_j(s')$ . U slučaju gore navedene igre strateški profil  $s = (A, A)$  dominira strateški profil  $s' = (A, B)$ . Pareto dominacija strateškog profila  $s$  prema  $s'$  kaže da barem jedan igrač može imati veću korist od profila  $s$  bez da je drugim igračima lošije. Strateški profil  $s$  je Pareto optimalan ako ne postoji strateški profil  $s' \in S$  koji dominira  $s$ . U gornjem slučaju postoje tri Pareto optimalna strateška profila. Svaka igra mora imati barem jedan Pareto optimum i barem jedan optimum u kojem svi igrači igraju čistu strategiju.

## 2.2 Nashov ekvilibrij

Promatramo problem izbora strategije iz perspektive jednog igrača. Ako igrač zna koje će strategije igrati drugi igrači onda mu nije teško naći optimalni potez. Strateški profil  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  je strateški profil cijele igre bez strategije igrača  $i$ . Ukupni strateški profil je  $s = (s_i, s_{-i})$ . Najbolji odgovor igrača  $i$  na strateški profil  $s_{-i}$  je miješana strategija  $s_i^* \in S_i$  takva da  $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$  za sve strategije  $s_i \in S_i$ . Osim u slučajevima kada je najbolji odgovor samo jedna čista strategija, broj najboljih odgovora je uvijek beskonačan. Ako se strategija  $s_i^*$  sastoji od dvije ili više akcija agent mora biti indiferentan među njima, inače bi trebao igrati jednu od njih kao čistu strategiju. Bilo koja mješavina te dvije akcije je također najbolji odgovor.

Koristimo koncept najboljeg odgovora kako bi definirali Nashov ekvilibrij, jedan od najvažnijih koncepata u teoriji igara. Kažemo da je strateški profil  $s = (s_1, \dots, s_n)$  Nashov ekvilibrij ako je  $s_i$  najbolji odgovor na  $s_{-i}$  za sve agente  $i$ .

$$\forall i, \forall s'_i \neq s_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

To znači da ni jedan igrač ne može očekivati veću dobit ako promijeni strategiju. Nashov ekvilibrij zovemo strogim ako imamo strogu nejednakost. Nashov teorem jamči postojanje barem jednog Nashovog ekvilibrija za bilo koju igru[7].

Analizirajući sukob spolova možemo vidjeti da postoje dva Nashova ekvilibrija za čiste strategije. Ni jedan igrač ne može računati na veću isplatu ako promijeni

strategiju. No ova igra ima još jedan ekvilibrij miješanih strategija koji je malo teže uočiti. Uzmimo da prvi igrač igra strategiju  $A$  s vjerojatnošću  $p$  a strategiju  $B$  s vjerojatnošću  $1 - p$ . U tom slučaju, kako bi imali Nashov ekvilibrij, drugi igrač mora imati istu očekivanu isplatu od svoja dva poteza kako bi bio indiferentan među njima. Kada bi se isplata razlikovala drugi igrač bi mogao igrati čistu strategiju koja mu donosi veću isplatu.

$$u_2(A) = u_2(B)$$

$$2 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = 0 \cdot p + 1 \cdot (1 - p)$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Kako bi drugi igrač imao istu očekivanu vrijednost isplate od obje strategije prvi igrač mora igrati potez  $A$  s vjerojatnošću  $\frac{1}{3}$  i potez  $B$  s vjerojatnošću  $\frac{2}{3}$ . Sada istu argumentaciju možemo primijeniti i na prvog igrača. S obzirom na to da igrač igra miješanu strategiju, mora biti indiferentan između ponuđenih akcija. Kako bi to vrijedilo drugi igrač također mora igrati  $A$  s vjerojatnošću  $\frac{2}{3}$  i  $B$  s vjerojatnošću  $\frac{1}{3}$ . U tom slučaju smo došli do Nashovog ekvilibrija, ni jedan igrač ne može očekivati bolju isplatu mijenjajući svoju strategiju. Očekivana isplata oba igrača u ovoj ravnoteži je

$$u_{1,2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Što znači da Nashovi ekvilibriji čistih strategija Pareto dominiraju miješanu ravnotežu.

### 2.3 Dilema zatvorenika

U dilemi zatvorenika igrači su dva člana bande koji su završili u zatvoru. Nemaju mogućnost međusobne komunikacije. Tužitelji nemaju dovoljno dokaza da ih optuže za zločin ali dovoljno da ih osude na račun manjeg prekršaja na godinu dana zatvora. Obojici je dana mogućnost nagodbe. Ako jedan igrač prihvati nagodbu biti će oslobođen a drugi igrač će dobiti tri godine zatvora. Međutim ako oba igrač priznaju oba dobivaju po dvije godine zatvora. Možemo to zapisati u formi matrice

$$\begin{array}{cc}
 & C & D \\
 C & [-1, -1 & -3, 0] \\
 D & [0, -3 & -2, -2]
 \end{array}$$

gdje  $C$  označava kooperativno ponašanje (u smislu suradnje s drugim igračem) a  $D$  defekciju (to jest uzimanje nagodbe). Bilo koja igra forme

$$\begin{array}{cc}
 & C & D \\
 C & [R & P] \\
 D & [T & S]
 \end{array}$$

je dilema zatvorenika ako zadovoljava uvjet  $T > R > P > S$ . U ovom slučaju vrijednosti isplate se čitaju malo drugačije. Kooperator koji igra protiv defektora dobiva isplatu  $P$  a defektor koji igra protiv kooperatora isplatu  $T$ . Uzajamna kooperacija daje za oba igrača isplatu  $R$  a defekcija  $S$ . Ako analiziramo ovu igru iz perspektive teorije igara možemo zaključiti da je uzajamna defekcija jedini Nashov ekvilibrij. Ni jedan igrač ne može biti uspješniji ako promijeni strategiju. Defekcija je najbolji odgovor na svaku strategiju.

Dilemu zatvorenika možemo napisati u obliku igre donacije. To je pogodan oblik zato što ovisi samo o dva intuitivna parametra, benefitu  $b$  i cijeni  $c$ . Benefit predstavlja korist koju jedan igrač dobiva od kooperativnog ponašanja drugog a cijena predstavlja troškove udjeljivanja benefita.

$$\begin{array}{cc}
 & C & D \\
 C & [b - c & -c] \\
 D & [b & 0]
 \end{array}$$

## 2.4 Igra javnog dobra

Igra javnog dobra je poopćenje zarobljeničke dileme na grupne interakcije. Igrači su članovi grupe kojoj mogu dati svoje doprinose. Kooperaciju ovdje predstavlja davanje

određenog iznosa grupi (u ovoj verziji igre svi kooperatori imaju cijenu kooperacije 1). Dani iznos se množi faktorom  $r$  te se dijeli na sve članove grupe. Defektori ne plaćaju ništa a primaju dobit od kooperatora u grupi. Osnovne forme isplate u grupi su

$$\Pi_C = r \frac{N_C}{G} - 1 \quad (2.2)$$

za kooperatore te

$$\Pi_D = r \frac{N_C}{G} \quad (2.3)$$

za defektore.  $N_C$  je broj kooperatora a  $G$  je broj igrača u grupi. Igra se u pravilu ne zapisuje u obliku matrice zato što se radi o  $G$ -dimenzionalnoj matrici. Defekcija svih igrača je ponovno jedini Nashov ekvilibrij. Igrač koji igra kooperativnu strategiju u grupi ne može nikako imati veću isplatu od igrača koji igra defekciju, defekcija je najbolji odgovor na svaki potez suigrača.

### 3 O kooperaciji

Jedan od najbitnijih mehanizama evolucije je prirodna selekcija. Ona u sebi direktno podrazumijeva “opstanak najjačih”. Unatoč tomu možemo naći mnoge primjere kooperacije u prirodi. Geni surađuju u genomima, kromosomi u eukariotskim stanicama a stanice u organizmima. Životinje i ljudi također imaju razvijen smisao za kooperaciju. Kooperacijom definiramo svako ponašanje u kojem pojedinac plaća cijenu  $c$  kako bi drugi igrač dobio benefit  $b$  te vrijedi da je  $b > c$ . Defektori ne plaćaju cijenu kooperacije ali uživaju benefite što iz perspektive igrača koji maksimiziraju vlastitu dobit čini defektorsko ponašanje puno povoljnijim. Populacija koja se sastoji samo od kooperatora ima najveću srednju dobit, populacija koja se sastoji samo od defektora najmanju. Iz prošle sekcije vidjeli smo da je u dilemi zarobljenika defekcija Nashov ekvilibrij. Ni jedan igrač ne može računati na bolju isplatu ako promijeni strategiju. Situacija se mijenja ako imamo ponovljene interakcije među igračima što znači da se igra igra kroz nekoliko rundi. Može se pokazati da je suradnja optimalna strategija kada igrači ne znaju koliko rundi traje igra ili kada rundi ima beskonačno puno. Interakcije u stvarnosti su vrlo često takvoga tipa. One se vrlo rijetko događaju samo jednom s nepoznatim suigračima već su najčešće ponovljene i ne znamo koliko će se puta ponoviti. U takvom okruženju kooperacija je logičan potez.

Robert Axelrod je 1978. organizirao slavni turnir u kojem je pozvao entuzijaste u području teorije igara da predaju svoje strategije za igru dileme zavorenika s više rundi[9]. Svaka prijavljena strategija igrala je protiv svih drugih. Agregatno je pobijedila strategija Tit-For-Tat(TFT, u hrvatskom jeziku bi to preveli kao milo za drago, no u daljnjem tekstu koristit ćemo englesku kraticu). TFT je strategija koja u prvoj rundi uvijek surađuje a svaku slijedeću rundu oponaša strategiju koju je suparnik igrao u prethodnom potezu, na protivnikovu suradnju ona uzvraća suradnjom, na defekciju defekcijom. TFT ni u jednoj interakciji protiv drugih strategija nije ostvarila dobit veću od suparničke strategije ali je zato suma dobiti iz svih interakcija bila najviša. TFT ne pobjeđuje direktno druge strategije već u prosjeku dobiva od svake strategije više no što dobivaju druge strategije. Može se reći da je TFT vrlo dobra u induciranju suradnje u drugim strategijama.

Axelrod je iznio poznati primjer primjene TFT strategije u svojoj knjizi *Evolucija suradnje* iz 1984., mirni suživot zaraćenih strana na zapadnoj fronti prvog svjetskoga



rata. Ponašanje vojnika se moglo objasniti kao optimalno rješenje ponovljene zarobljeničke dileme, gdje su obje strane igrale TFT strategiju. Premda je vrhovna komanda obje strane strogo branila ikakav dogovoreni sporazum, te je za bilo kakav dokaz suradnje s protivnikom izricala visoke kazne, do kooperacije među zaraćenim stranama i neverbalnog dogovora dolazilo bi često. Artiljerije obje strane bi svakog dana u isto vrijeme bombardirale istu točku na kojoj su znali da ne nanose štetu protivniku, potvrđujući topovima svoje altruistične namjere. Nagrada uzajamne kooperacije, tj. neagresivnog ponašanja (ostanak na životu) je bila puno viša od nagrade uzajamne defekcije (koja uključuje konstantne oružane obračune te sigurne gubitke obje strane). U takvom sustavu pod TFT strategijom postajali su mehanizmi stabilizacije kooperacije, to jest recipročnost. Na protivničko bombardiranje borbenih linija uzvraćalo bi se istom mjerom. Za ubijenog vojnika izvodili bi se osvetnički napadi. Vrhovna komanda je bila uspješna u mobilizaciji vojnika i aktivnim sukobima samo u velikim dugoročnim borbama kada bi vojnici morali napustiti rovove i boriti se za život na otvorenome. No između bitaka nije postojalo načina da natjeraju vojnike da drže pritisak na protivničke bataljune. Takav sustav je potrajao sve do sredine 1916. kada je uveden prepad kao nova borbena strategija. U prepadima su manje borbene jedinice bile mobilizirane i poslone u napad na protivničke rovove. Nije postojala mogućnost glumljenja prepada i suradnja više nije bila moguća. Primjer rovovskih sukoba je zanimljiv i danas zato što implicira da društvo (ili centralni autoritet) ima mogućnost oblikovanja paradigme međuljudskih odnosa, efektivno mijenjajući vrstu igre koju svakodnevno igramo.

Postoji nekoliko mehanizama za koje se pretpostavlja da su imali ulogu u razvoju kooperacije a to su grupna selekcija, rodna selekcija, direktna i indirektna recipročnost te mrežna recipročnost[8]. Prvenstveno ćemo se baviti promatranjem uloge mrežne recipročnosti. Mrežna recipročnost znači da interakcije proizvoljnog para jedinki u populaciji nisu moguće, dozvoljene interakcije definirane su strukturom mreže. Kooperacija na mreži se može održati zato što grupe kooperatora mogu pobijediti grupe defektora. Igre na mreži se mogu relativno jednostavno proučavati simulacijama no analitičko rješavanje istih se pokazalo problematičnim zbog velikog broja mogućih konfiguracija sustava[16]. Ne postoji općenito rješenje ili algoritam u polinomnom vremenu za ovaj problem osim ako je  $P = NP$ . U simulacijama je nađeno jednostavno pravilo za uspjeh kooperacije u donacijskoj igri na rešetkama[11](tip

mreže s jednostavnom, ponavljajućom strukturom):

$$\frac{b}{c} > k. \quad (3.4)$$

Ova relacija nam kaže da omjer benefita i cijene mora biti veći od broja susjeda svake jedinice.

### 3.1 Stohastičke reaktivne strategije

TFT je strategija koja se prilagođava potezima svoga protivnika. Takvu strategiju zovemo reaktivnom strategijom[16]. Ako uzmemo da igračev izbor strategije ovisi samo o posljednjem potezu protivnika onda igračevu strategiju možemo opisati s tri parametra,  $s = (u, p, q)$ , gdje je  $u$  vjerojatnost suradnje u prvoj rundi (što  $1 - u$  čini vjerojatnošću defekcije),  $p$  vjerojatnost kooperacije u slučaju da je protivnik izabrao kooperaciju u prethodnoj rundi a  $q$  vjerojatnost kooperacije u slučaju da je u prethodnoj rundi protivnik izabrao defekciju. Ako njegov protivnik igra strategiju  $s' = (u', p', q')$  onda će u prvoj koraku surađivati s vjerojatnošću  $u_1 = u$  i  $u'_1 = u'$ . U sljedećem koraku vjerojatnost suradnje će biti

$$u_2 = pu' + q(1 - u')$$

$$u'_2 = p'u + q'(1 - u).$$

Evolucija tih vrijednosti dana je s rekurzivnim relacijama

$$u_{n+2} = vu_n + w,$$

$$u'_{n+2} = vu'_n + w',$$

gdje je

$$v = (p - q)(p' - q'),$$

$$w = pq' + q(1 - q'),$$

$$w' = p'q + q'(1 - q).$$

Proces u slučaju  $|p - q|, |p' - q'| < 1$  ide ka stacionarnim vrijednostima

$$\bar{u} = \frac{q + (p - q)q'}{1 - (p - q)(p' - q')}, \quad (3.5)$$

$$\bar{u}' = \frac{q' + (p' - q')q}{1 - (p - q)(p' - q')}. \quad (3.6)$$

Stacionarne vrijednosti ne ovise o početnoj vjerojatnosti izbora kooperacije, osim u slučaju TFT strategije. Očekivana dobit strategije  $s$  protiv  $s'$  iznosi

$$A(s, s') = R\bar{u}\bar{u}' + S\bar{u}(1 - \bar{u}') + T(1 - \bar{u})\bar{u}' + P(1 - \bar{u})(1 - \bar{u}'), \quad (3.7)$$

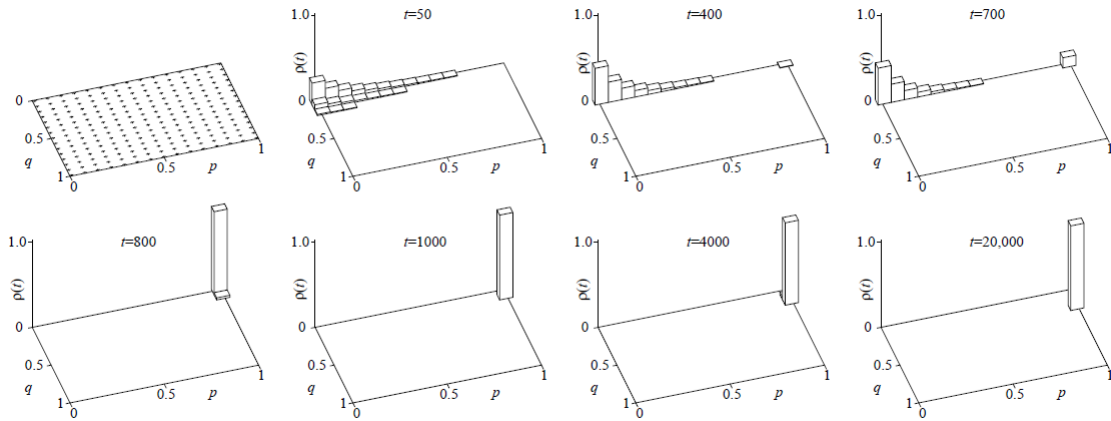
gdje su  $R, T, P$  i  $S$  parametri zatvoreničke dileme. Očekivana vrijednost dobiti strategije  $s$  kada igra protiv same sebe je

$$A(s, s) = P + (T + S - 2P)\bar{u} + (R - S - T + P)\bar{u}^2. \quad (3.8)$$

Funkcija je neanalitička za TFT strategiju zato što za  $p = p' = 1$  i  $q = q' = 0$   $\bar{u} \rightarrow \infty$ , dobiti ovise o početnim vjerojatnostima kooperacije. Postojanje šuma može destabilizirati dvije TFT strategije koje igraju jedna protiv druge. Ako u jednoj rundi jedna slučajno odigra defekciju one ulaze u režim beskonačne izmjene kooperacije i defekcije koji im smanjuje isplate. Kooperaciju, u slučaju postojanja šuma, može stabilizirati strategija GTFT (Generous Tit-For-Tat) koja ima vjerojatnost kooperacije i u slučaju protivničke defekcije s malom vjerojatnošću različitom od nule.

Razmatramo igru predloženu od strane Nowaka i Sigmunda (1992). Igru igra  $Q = 225$  strategija  $s_i(p_i, q_i)$  sa parametrima  $p_i = 0.01 + 0.07k_1$  i  $q_i = 0.01 + 0.07k_2$  gdje je  $k_1 = i \pmod{15}$  a  $k_2 = i - 15k_1$  za  $i = 0, 1, \dots, Q - 1$ . Strategije se kreću od  $(0.01, 0.01)$  što je aproksimacija defekcije do  $(0.99, 0.99)$  što je aproksimacija bezuvjetne kooperacije. U početku sve strategije imaju istu koncentraciju,  $\rho_{s_i}(0) = 1/Q$ . Daljna evolucija sustava je dan sa

$$\rho_{s_i}(t + 1) = \frac{\rho_{s_i}(t)E(s_i, t)}{\sum_{s_j} \rho_{s_j}(t)E(s_j, t)}, \quad (3.9)$$



Slika 3.1: Vremenska evolucija distribucije strategija u  $p - q$  ravni, visina stupca predstavlja koncentraciju dane strategije

gdje je ukupna isplata strategije  $s_i$

$$E(s_i, t) = \sum_{s_j} \rho_{s_j}(t) A[s_i(t), s_j(t)]. \quad (3.10)$$

Vrijednost  $A[s_i(t), s_j(t)]$  je dana s jednadžbom 3.7 gdje su koeficijenti  $T = 5$ ,  $R = 3, P = 1$  i  $S = 0$ .

Na slici 3.1 vidimo da u  $t = 0$  imamo ravnomjerne raspodjele svih strategija iz kojih, za  $t > 0$ , slijedi veliki porast defektorskih strategija blizu  $(0, 0)$  na račun svih ostalih strategija. Osim defektorskih strategija preživljava tek mala koncentracija TFT strategija u području  $(1, 0)$ . Preostali defektori imaju vrlo niske isplate jer nemaju više darežljivih donora a TFT protiv njih igra defekciju. TFT u interakcijama sa samom sobom ima vrlo visoku isplatu te u daljnjoj evoluciji sustava uspijeva potisnuti defektore, međutim konačno stanje je u GTFT strategiji koja je spremna katkada oprostiti defekciju te bolje stabilizira dobit.

### 3.2 Ekonomske igre i kooperacija

Ekonomske igre se baziraju na standardnim igrama iz teorije igara gdje igrači umjesto za apstraktne “isplate” igraju za novac. Eksperimenti se obično izvode u laboratorijima gdje su većinu testne populacije, do sada, sačinjavali studenti. Pojedinci su nasumično upareni i dobivaju fiksni iznos za sudjelovanje te bonus ovisno o uspjehu u igri. Posljednjih godina popularno je postalo vršenje ekonomskih eksperimenata preko interneta uz pomoć stranica poput Amazon Mechanical Turk. Mechanical Turk

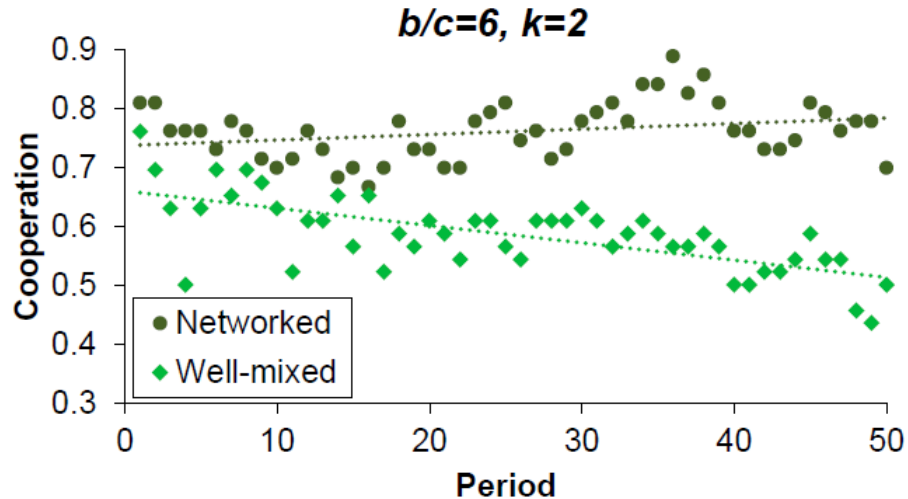
je stranica na kojoj se može zaposliti ljude za jednostavne i, u pravilu, nisko plaćene poslove. Istraživači tako mogu lakše organizirati eksperimente uz dodatnu prednost puno šire testne demografije. Rezultati eksperimenata izvršenih u laboratoriju i preko Mechanical Turka imaju dobro slaganje.

Koristeći eksperimente možemo dobiti bolji uvid u ljudske uzorke ponašanja[6]. Eksperimenti se provode u okruženjima gdje su igrači anonimni tako da ne postoji društveni pritisak koji bi nagnao igrača da se ponaša na određeni način.

Diktatorska igra je igra za dva igrača u kojoj jedan igrač dobiva određen iznos novca te bira koji će dio podijeliti sa drugim igračem. Ta igra se koristi za mjerenje darežljivosti pojedinca prema strancima. Kada bi igrači igrali optimalno kako bi maksimizirali novčanu dobit ne bi dali ništa novca drugom igraču. Pokazalo se da to nije način na koji ljudi djeluju. Prosječni iznos novca dan drugom igraču iznosio je 20%. U igri ultimatum gdje suigrač može odbiti ponudu u kojem slučaju ni jedan ni drugi igrač ne dobivaju novac ljudi obično dijele 50% iznosa sa suigračem.

U ponovljenoj igri javnog dobra svaki igrač počinje s određenom svotom te u svakoj rundi određuje koliko će doprinijeti javnom dobru. Izvršitelj eksperimenta udvostručuje doprinose i raspoređuje ih po cijeloj grupi. Ako se igra samo jednom primjećuje se veliki udio ljudi koji odlučuju kooperirati. Distribucija donacija je u pravilu bimodalna, ljudi doprinose sve ili ne daju ništa. U sljedećim rundama je u svim eksperimentima opaženo značajno slabljenje kooperativnog ponašanja. Ne postoji način da se kooperatori udruže u grupu samo s kooperatorima te većina igrača prelazi u defekciju. U studiji rađenoj u različitim državama svijeta primjećena je varijacija u inicijalnom postotku kooperatora ovisno o zemlji međutim u svim društvima udio kooperatora u narednim potezima pada[17]. Kako bi se povećao udio kooperatora moguće je uvesti mehanizam kažnjavanja u igru. Nakon svakog poteza igrači mogu vidjeti koliki su doprinos dali drugi igrači te mogu platiti kako bi smanjili doprinos od nekog od njih. U takvoj igri udio kooperatora je na puno višoj razini. Pokazalo se da i nagrađivanje ima mogućnost povećanja udijela kooperacije ali je kažnjavanje nešto efikasnije.

Postoji mnogo teoretskih radova koji razmatraju dilemu zatvorenika na mreži te predviđaju da mrežna recipročnost pojačava suradnju. Stariji eksperimentalni članci nisu uspjeli stabilizirati kooperaciju na mrežnim strukturama[12]. Međutim nađeno je da ti eksperimenti nisu zadovoljili uvjet da omjer  $b$  i  $c$  mora biti veći od prosječnog

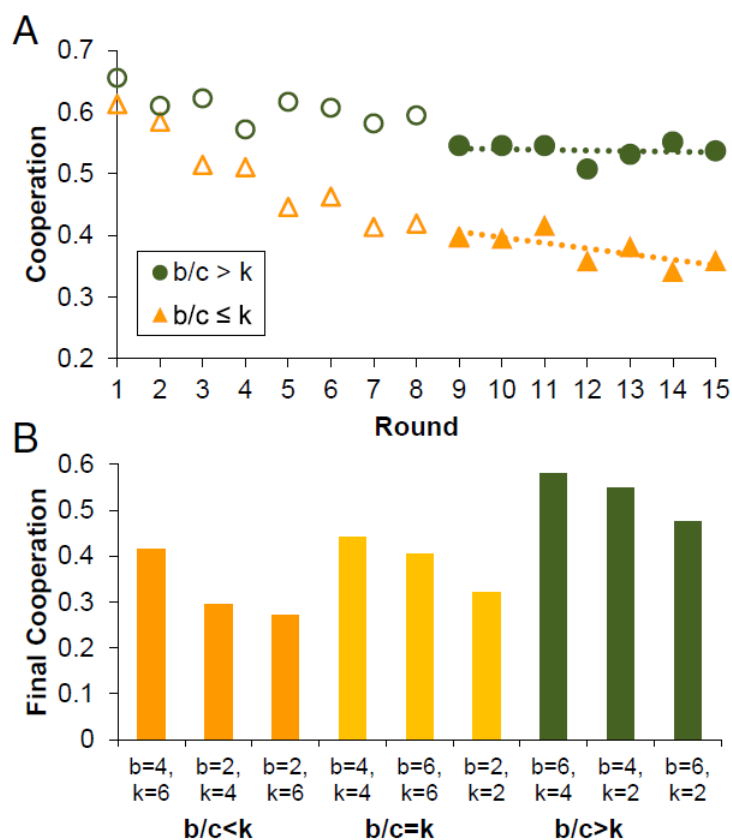


Slika 3.2: Udio kooperatora u ponovljenoj donacijskoj igri na mreži i u nasumičnim interakcijama u ovisnosti o broju rundi, mreža ima znatno veći udio kooperatora u kasnijim rundama

broja susjeda. Noviji eksperiment (slika 3.3) je uspio dobiti stabilnu kooperaciju na mreži kada je taj uvjet zadovoljen[13]. Također, pokazano je da dinamičke mreže, u kojima igrači mogu birati sa kime su povezani, imaju pozitivan učinak na stabilnost kooperacije[15] što je i teorijski potvrđeno[14].

Zanimljivo je primjetiti da sklonost prema kooperaciji ne dijele i naši evolucijski srodnici, čimpanze. U eksperimentima koje su istraživači radili pokušavajući vidjeti da li čimpanze iskazuju kooperativno ponašanje pokazalo se da čimpanze uopće ne pokazuju interes ka suradnji u igrama[8]. U eksperimentu u kojem su mogli birati između dobivanja nagrade te dobivanje iste nagrade ali i davanje nagrade drugoj čimpanzi bile su indiferentne prema izborima. Ni jedna nije češće birala opciju koja je nagrađivala drugu čimpanzu. Međutim eksperimenti na marmozetima su otkrili visoku razinu kooperacije. U njihovim populacijama za mlade se skrbe i drugi članovi grupe osim njihovih roditelja (što je slično ponašanju ljudi a istraživači pretpostavljaju da je to svojstvo snažno povezano s sklonošću ka kooperaciji).

Teorija igara kaže da racionalni igrači igraju tako da maksimiziraju svoju funkciju korisnosti ali nam ne govori što u tu funkciju ulazi, što ona predstavlja u stvarnosti. Novčane nagrade dobivene u ekonomskim igrama vjerojatno nisu jedini faktor koji doprinosi u ljudskim funkcijama korisnosti, nju nikada ne opažamo već samo igračeve poteze. Moramo biti oprezni kada povlačimo vezu između igračeve funkcije koristi i nagrade koju dana ekonomska igra nudi.



Slika 3.3: a) Udio kooperatora u ovisnosti o broju odigranih rundi, b) konačni udio kooperatora, u eksperimentima, za različite vrijednosti  $b/c$  parametra

## 4 Evolucijska teorija igara

Teorija igara proučava sukobe između racionalnih igrača. Racionalnost se pokazao kao problematičan koncept koji je teško definirati[2]. Minimalna definicija kaže da su racionalni igrači oni koji ne igraju strogo dominirane strategije što je negativna definicija. Savršena racionalnost također zanemaruje kognitivne sposobnosti igrača. Igrač u mnogim slučajevima nema mogućnost držanja i obrađivanja tolike količine podataka kako bi mogao doći do optimalne strategije. Induktivno zaključivanje, tj. metoda pokušaja i pogreške tada može biti od pomoći. Igrači testiraju strategije i modificiraju svoje sljedeće poteze ovisno o rezultatima. Model koji uzima u obzir igračevo stanje uma i njegovo iskustvo može objasniti zašto ljudi u mnogim situacijama svoje poteze biraju gotovo instiktivno. U slučaju životinja izbor strategije je često evolucijski uvjetovan, uspješne strategije se biraju prirodnim odabirom. Jedinke genetski dobivaju strategiju koju igraju cijeli život. Uspjeh dane strategije se mjeri s evolucijskom snagom koja utječe na uspjeh reprodukcije.

Evolucijska teorija igara(ETI) je proširenje klasične teorije na domenu ograničene

racionalnosti[4]. Ograničena racionalnost je povezana sa dinamikom sustava koja se u klasičnim sustavima nije razmatrala, odbacujemo savršenu racionalnost i postavljamo granice na kognitivne sposobnosti jedinke. U tom slučaju reakcije ovise o njezinim parametrima poput memorije i kapaciteta za planiranje. Razmatramo populacije koje igraju setove strategija s definiranim pravilima evolucije sustava. U takvim nas sustavima zanima dugoročno ponašanje jedinki i fenomeni poput fiksacija strategija i cikličnosti. U početku se ETI bazirao isključivo na tzv. aproksimaciji srednjeg polja koja pretpostavlja beskonačnu homogenu populaciju u kojoj se svaka jedinka s jednakom vjerojatnošću sreće s svakom drugom. Premda je to katkada dobra aproksimacija pokazalo se da postoje mnogi problemi u kojima je bitno uzeti u obzir i topologiju sustava. Razmatranje topologije se pokazalo problematičnim za analizu sa standardnim analitičkim tehnikama. Koristi se modeliranje bazirano na agentima (engl. agent based modeling) uz pomoć numeričkih simulacija te alternativne analitičke metode. Struktura mreže može imati vrlo velik utjecaj na ishod evolucijskih igara koje se njoj igraju.

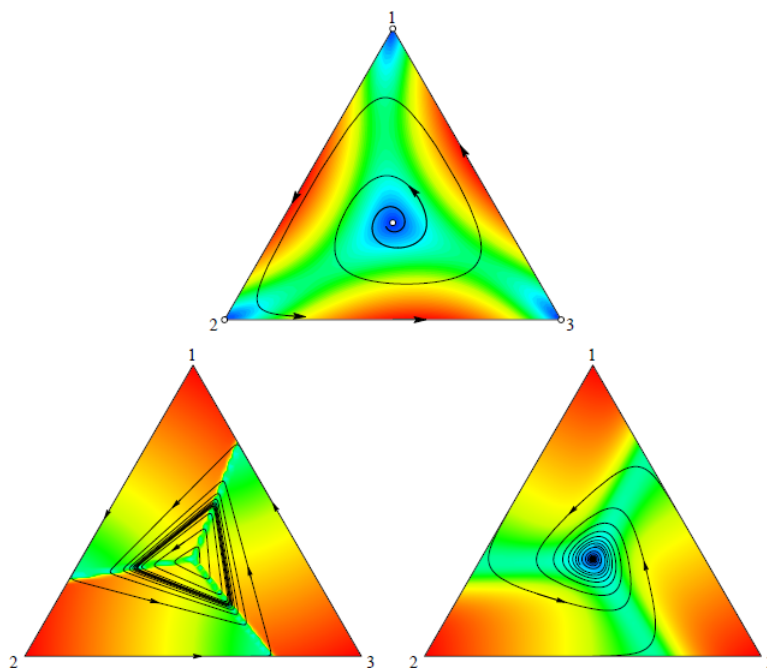
#### 4.1 U aproksimaciji srednjeg polja

Promatramo evoluciju beskonačne populacije u kojoj sve jedinke imaju jednaku vjerojatnost interakcije sa svim ostalima. Sve jedinke igraju jednu od  $n$  čistih strategija. Isplata strategije  $i$  u interakciji s strategijom  $j$  dana je s  $a_{ij}$  ( $A$  je matrica isplate). Udio populacije koji igra strategiju  $i$  označavamo s  $x_i$  a  $\vec{x}$  je  $n$ -dimenzionalni vektor koji definira udjele svih strategija u populaciji. Promatramo očekivanu isplatu strategije  $i$  u populaciji danu s  $f_i = \sum_{j=1}^n x_j a_{ij}$ . Ako je strategija uspješnija od srednje isplate svih strategija (dana s  $\phi = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ ) tada broj jedinki te strategije raste. Poznajući te vrijednosti dobivamo jednadžbu replikatora koja daje vremensku evoluciju strategija.

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(\vec{x}) - \phi(\vec{x})] \quad (4.11)$$

Jednadžba je definirana na simpleksu  $S_n$ , danom sa  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Unutrašnjost simpleksa je invarijantna prema matrici isplate, ako putanja počne u unutrašnjosti, ostati će u unutrašnjosti, može konvergirati prema rubu ali ga neće doseći. Također, svaka stranica simpleksa je invarijantna (na svakoj stranici simpleksa barem jedna strategija





Slika 4.4: Tri moguće putanje u prostoru tri strategije za igru škare-papir-kamen ovisno o parametrima, putanje predstavljaju (gore) fiksaciju u jednu od strategija, (dolje lijevo) stabilni ciklus te (dolje desno) fiksaciju u centar

iščezava). Ako neke strategije nema u populaciji neće se pojaviti. Jednadžba replikatora ne daje mogućnost rasta strategije čiji je inicijalni udio u populaciji jednak nuli, opisuje se režim u kojem nema mutacija (mutacija je definirana kao vjerojatnost da jedinka promijeni strategiju bez vanjskog utjecaja, omogućujući ponovno rađanje izumrlih strategija).

U slučaju kada imamo homogenu populaciju koja ima samo jednu strategiju zanima nas koncept evolucijski stabilne strategije (ESS). Kažemo da je strategija ESS ako mali uzorak druge strategije ne može ugroziti populaciju. Ako nam je ukupna populacija dana s  $\rho = (1 - \epsilon)\mathbf{p}^* + \epsilon\mathbf{p}$  i  $\mathbf{p}^*$  označava strategiju veličine populacije a  $\mathbf{p}$  neki mali udio mutanta  $\epsilon$  tada je  $\mathbf{p}^*$  ESS ako uvijek ima bolju isplatu od invazivne strategije,

$$f_{\mathbf{p}^*}(\vec{x}) > f_{\mathbf{p}}(\vec{x}). \quad (4.12)$$

## 4.2 Igre za dva igrača

Općenito, igru za dva igrača možemo zapisati u obliku matrice.

$$\begin{array}{cc}
 & A \quad B \\
 A & \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\
 B & \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Uzmimo da je  $x$  udio prve strategije u populaciji a  $1 - x$  udio druge. Očekivane isplate onda iznose

$$f_A = ax + b(1 - x) \quad (4.13)$$

$$f_B = cx + d(1 - x). \quad (4.14)$$

Uvrštavajući to u jednadžbu replikatora imamo

$$\dot{x} = x(1 - x)[(a - b - c + d)x + b - d]. \quad (4.15)$$

Ovisno o vrijednostima parametara možemo imati pet slučajeva.

(i)  $A$  dominira  $B$ . Ako je  $a \geq c$  i  $b \geq d$  te je barem jedna nejednakost stroga. Selekcija će uvijek favorizirati strategiju  $A$  koja je uvijek najbolji odgovor. Populacija ide ka fiksaciji u strategiju  $A$ ,  $x = 1$ .

(ii)  $B$  dominira  $A$ . Ako je  $a \leq c$  i  $b \leq d$  te je barem jedna nejednakost stroga. Populacija ide ka fiksaciji u  $B$ ,  $x = 0$ .

(iii)  $A$  i  $B$  su bistabilni. Vrijedi u slučaju kada je  $a > c$  i  $b < d$ . U ovom slučaju isplate su najveće kada igrači igraju iste strategije.  $A$  je najbolji odgovor na  $A$  a  $B$  je najbolji odgovor na  $B$ . Ishod evolucije sustava ovisi o početnim uvjetima. Postoji nestabilna ravnoteža za vrijednost  $x^* = (d - b)/(a - b - c + d)$ . Ako je  $x(0) < x^*$  sustav konvergira u  $B$ , ako je  $x(0) > x^*$  sustav konvergira u  $A$ .

(iv)  $A$  i  $B$  su u stabilnoj koegzistenciji. To vrijedi kada je  $a < c$  i  $b > d$ .  $A$  je najbolji odgovor na  $B$  i  $B$  je najbolji odgovor na  $A$ . Populacija konvergira ka stabilnoj ravnoteži u  $x^* = (d - b)/(a - b - c + d)$ .

(v)  $A$  i  $B$  su neutralni. Ako je  $a = c$  i  $b = d$  evolucija sustava neće mijenjati populaciju. Svaka kombinacija udjela  $A$  i  $B$  strategije je ravnotežna.

### 4.3 Zarobljenička dilema u srednjem polju

U konačnoj populaciji svaki igrač igra  $z$  rundi s nasumičnim igračima. Udio kooperatora označavamo sa  $\rho$  a udio defektora sa  $(1 - \rho)$ . Srednja isplata kooperatora i defektora dana je sa

$$U_C = Rz\rho + Sz(1 - \rho), \quad (4.16)$$

$$U_D = Tz\rho + Pz(1 - \rho), \quad (4.17)$$

a prosječna isplata dana je sa

$$\bar{U} = \rho U_C + (1 - \rho)U_D. \quad (4.18)$$

Koristeći jednadžbu replikatora dobivamo

$$\dot{\rho} = \rho(U_C - \bar{U}) = \rho(1 - \rho)(U_C - U_D). \quad (4.19)$$

$\rho$  teži u 0 kako  $t \rightarrow \infty$  s obzirom da je  $U_D > U_C$  ( $T > R, P > S$ ). U srednjem polju kooperacija ne može opstati. Zarobljenička dilema je analogna slučaju (ii) iz prethodnog dijela.

### 4.4 O topologiji mreže

Mreža, također znana kao graf u matematičkoj literaturi, je skup vrhova povezanih bridovima. Broj vrhova ćemo označavati s  $n$  a broj bridova s  $m$ . Najučestaliji način opisa strukture mreže je s matricom povezanosti  $\mathbf{A}$ . Element matrice povezanosti  $A_{ij} = 1$  ako postoji brid između  $i$ -tog i  $j$ -og vrha, ako brida nema  $A_{ij} = 0$ . Razmatrati ćemo samo neusmjerene mreže u kojima vrijedi da ako postoji brid između  $i$  i  $j$ , postoji i brid između  $j$  i  $i$ . Posljedica toga je da je  $\mathbf{A}$  simetrična matrica.

Stupanj vrha  $k_i$  nam govori koliko je bridova na njega spojeno. Za neusmjereni graf s  $n$  vrhova vrijedi

$$k_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}. \quad (4.20)$$

Svaki brid u neusmjerenim grafovima ima dva kraja te mreža s  $m$  spojnica ima  $2m$  krajeva. Broj bridova je također jednak zbroju stupnjeva vrhova

$$2m = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (4.21)$$

Srednji stupanj vrha možemo napisati kao  $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$  te kombinirajući s jednadžbom 4.21 dobivamo

$$c = \frac{2m}{n}. \quad (4.22)$$

Maksimalni broj bridova u jednostavnom grafu je  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ . Gustoća grafa,  $\rho$ , je udio bridova, od skupa svih mogućih, prisutan u grafu.

$$\rho = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{c}{n-1} \quad (4.23)$$

Za generiranje mreže koristit ćemo nasumične grafove. Nasumični graf je model mreže u kojemu dani set parametara ima fiksne vrijednosti a drugi su nasumični. Nasumične grafove definiramo kao distribuciju vjerojatnosti preko svih mogućih mreža. Koristit ćemo  $G(n, p)$  model (u literaturi poznat kao Erdos-Renyi model, u daljnjem tekstu  $ER$ ) u kojemu imamo zadani broj vrhova,  $n$ , te zadanu vjerojatnost stvaranja brida između dva vrha,  $p$ , za sve parove vrhova. U  $G(n, p)$  ansamblu mreža svaka se mreža pojavljuje s vjerojatnošću  $P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$ . Broj bridova u  $ER$  modelu može varirati. Vjerojatnost da dobijemo graf s  $m$  bridova iz ansambla je

$$P(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m} \quad (4.24)$$

što je binomna distribucija. Srednja vrijednost  $m$  je  $\langle m \rangle = \sum_{n=0}^{\binom{n}{2}} m P(m) = \binom{n}{2} p$ . Srednji stupanj je onda  $\langle k \rangle = \sum_{n=0}^{\binom{n}{2}} \frac{2m}{n} P(m) = \frac{2}{n} \binom{n}{2} p = (n-1)p$ . Vjerojatnost da je vrh spojen na točno  $k$  drugih je

$$p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (4.25)$$

što je također binomna distribucija.

$ER$  model za  $p = 0$  generira u potpunosti razdvojene vrhove bez bridova među njima. U drugoj krajnosti za  $p = 1$  generira kompletni graf. Između tih vrijednosti

imati ćemo nekoliko nepovezanih podgrafova koji, kako  $p$  raste, prelaze u jedan veliki graf. Nas će zanimati slučajevi u kojima je u generiranoj mreži moguće iz svakog vrha doći do svakog drugog. Takvu mrežu zovemo povezanom. Ako mreža nije povezana biti će ponovno generirana.

Za nasumične grafove distribucija stupnjeva  $f(k)$  određuje vjerojatnost nalaženja  $k$  susjeda za neki vrh. U slučaju rešetki svi vrhovi imaju isti stupanj,  $f(k) = \delta(k - k_0)$ . Za scale-free grafove, po definiciji, vrijedi  $f(k) \propto k^{-\gamma}$  gdje je  $\gamma$  uobičajeno  $2 < \gamma < 3$ . Mrežne strukture se često klasificiraju njihovom distribucijom stupnjeva.

Rešetke, kod kojih je stupanj vrha isti za svaki vrh, su vrlo često korištene u numeričkim modelima zbog jednostavnosti strukture. Pokazalo se da se velika klasa fenomena na mrežama može sasvim dobro analizirati na rešetkama. Razlog tomu je to što je rešetka najjednostavniji oblik mreže koji nam omogućava da uzmemo u obzir da jedinice imaju konačni broj veza i da su interakcije strukturirane. Ako na rešetku postavimo periodičke rubne uvjete tada procese koji se na njoj odvijaju možemo analizirati i pomoću matematičkih alata teorije čvrstog stanja.

Ako u rešetci prespojimo neki mali udio bridova (definiran s vjerojatnosti prespajanja,  $q$ ) na nasumične vrhove dobit ćemo small-world mrežu. Ona ima svojstvo da je prosječna udaljenost između nasumičnih vrhova puno manja nego u rešetci. To je svojstvo koje imaju mnoge društvene mreže. Što je  $q$  manji, mreža će biti sličnija rešetci a kako  $q \rightarrow 1$  idemo ka nasumičnoj mreži.

Za mnoge empirijski istraživane mreže bilo je nađeno puno više vrhova s visokim stupnjem no što je predviđeno s small-world mrežom. Barabasi i Albert su predložili novi model koji generira mrežnu strukturu s traženim svojstvima, tzv. scale-free mrežama. Predložili su pravilo rasta iz inicijalnog stanja koje daje vjerojatnost da se  $m$  bridova novog vrha poveže s drugima s vjerojatnosti

$$P(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (4.26)$$

To znači da će postojeći vrhovi velikog stupnja imati veću šansu stjecanja novih bridova nego slabo povezani vrhovi.

## 4.5 Zatvorenička dilema na mreži

Razmatrati ćemo jednostavniju verziju dileme zatvorenika danu s

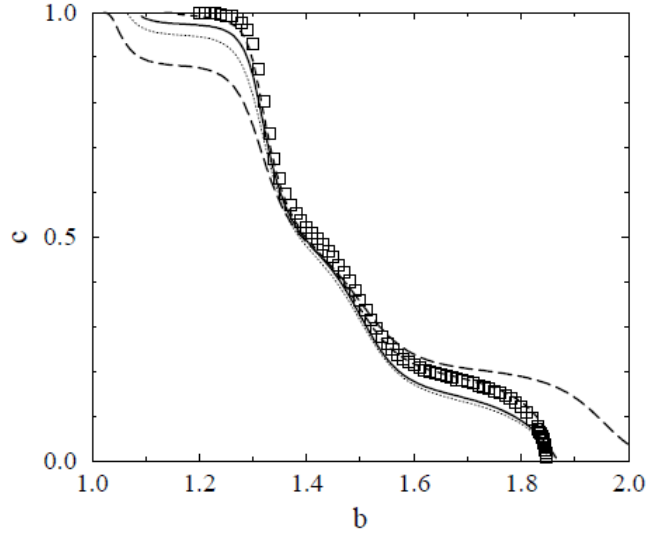
$$\begin{array}{cc}
& C & D \\
C & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D & \begin{bmatrix} b & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

koja ovisi samo o jednom parametru  $b$ [5]. Premda postoje analitička rješenja s generaliziranim tehnikama srednjeg polja, zadržati ćemo se na razmatranju rezultata dobivenih numeričkim simulacijama. Igra se igra na rešetki s periodičkim rubnim uvjetima. Periodički rubni uvjeti znače da jedinke na suprotnim krajevima rešetke igraju jedna protiv druge, dajući nam aproksimaciju beskonačnog sustava. Strategije se mijenjaju nasumičnom sekvencijalnom imitacijom. Prije nego što počne evolucija sustava strategije su nasumično raspoređene po mreži. U svakom koraku bira se nasumični igrač,  $x$ , te njegov nasumični susjed,  $y$ , računa se njihova isplata u interakciji sa svim susjedima  $U_x$  i  $U_y$  te konačno igrač  $x$  imitira strategiju  $y$  sa vjerojatnosti

$$P(s_x \rightarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[(U_x - U_y)/K]}. \quad (4.27)$$

$K$  predstavlja efekt šuma. Kada je  $K = 0$  igrač  $x$  imitira strategiju samo ako je  $U_y > U_x$ , nema nasumičnosti u imitaciji strategija. Kada  $K \rightarrow \infty$  onda  $P(s_x \rightarrow s_y) \rightarrow \frac{1}{2}$ , to je neutralni tok, promijena strategija više ne ovisi o isplatama. Promatrat ćemo evoluciju sustava za  $K < 1$  kada uspješne strategije imaju veću šansu da budu imitirane ali nije isključeno ni da će doći do imitacije strategije s manjom isplatom. Određujemo frakciju kooperatora  $\rho$  u stacionarnom stanju u ovisnosti o parametru  $b$ .

Kooperacija je stabilna ako  $b$  ne prijeđe kritičnu točku  $b_{c1}$ . Defektori nemogu opstati za  $b < b_{c1}$ . Također defekcija u potpunosti dominira za  $b > b_{c2}$ . Za vrijednosti  $b > b_{c1}$  samostalni defektori mogu opstati u moru kooperatora. Kada neki od defektorovih kooperatorskih susjeda preuzme njegovu strategiju oba imaju nižu isplatu i jedan od njih se vraća nazad na kooperaciju. Tim procesom samostalni defektori mogu se kretati nasumičnim hodom po rešetci. Ako se dva takva šetača sudare jedan će biti uništen. Također postoji mogućnost da se jedan šetač spontano podijeli na dva. Analogno ponašanje kod kooperatora postoji za vrijednosti  $b$  blizu  $b_{c2}$ . Oni tvore otočiće s istim svojstvima. U takvim sustavima imamo neravnotežne fazne prijelaze. Mnogi sustavi s skalarnim parametrom uređenja i kratkodosežnim interak-



Slika 4.5: Udio kooperatora u ovisnosti o parametru  $b$ , numeričke simulacije su prikazane kvadratičima, crtkano je račun za generalizirane tehnike srednjeg polja

cijama imaju takav prijelaz.

U blizini kritičnih točaka, udio manjinske strategije,  $\rho$ , ima ulogu parametra uređenja. Kako  $N \rightarrow \infty$  iščezava kao

$$\rho \propto |b_{cr} - b|^\beta \quad (4.28)$$

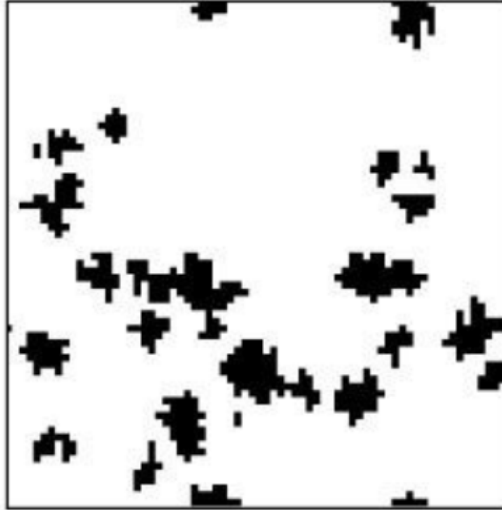
gdje je  $\beta = 0.583$  u dvije dimenzije. To je kontinuirani fazni prijelaz. Kako se  $\rho$  smanjuje približavanjem prema kritičnoj točki izraz za korelacijsku dužinu postaje

$$\xi \propto |b_{cr} - b|^{-\nu_\perp} \quad (4.29)$$

i vrijeme relaksacije

$$\tau \propto |b_{cr} - b|^{-\nu_\parallel}. \quad (4.30)$$

Za dvodimenzionalne sustave vrijednosti konstanti su  $\nu_\perp = 0.733$  i  $\nu_\parallel = 1.295$ . Kako se približavamo točki prijelaza korelacijska dužina i vrijeme relaksacije sustava mogu postati vrlo veliki. Kako bi mogli precizno odrediti konačne udjele strategija moramo imati velike dimenzije sustava,  $L \gg \xi$  i dugačka vremena trajanja simulacije,  $t \gg \tau$ . Numerički računi blizu faznih prijelaza često zahtijevaju vrlo snažna računala kako bi dobili zadovoljavajuću preciznost rezultata u razumnom vremenskom roku.



Slika 4.6: Za visoke vrijednosti parametra  $b$ , defekcija (bijeli kvadratići) je uspješnija od kooperacije (crni kvadratići), kooperatori uspjevaju opstati formacijom klastera

#### 4.6 Igra javnog dobra na mreži

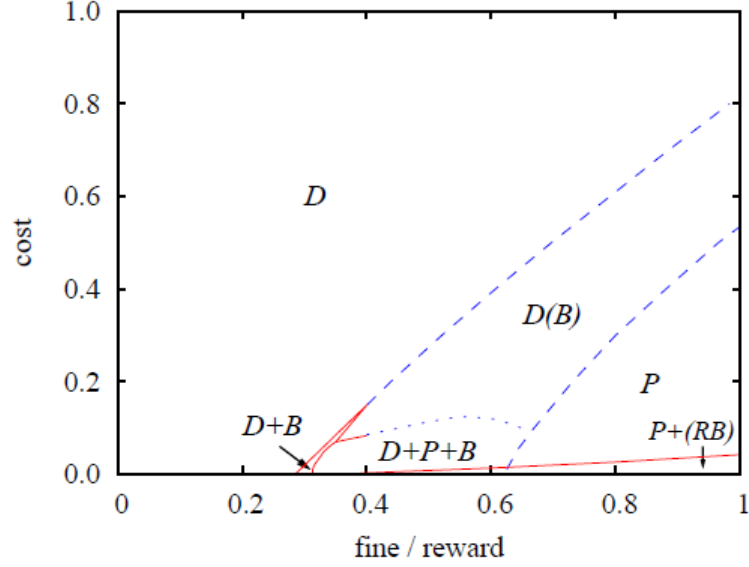
Igru razmatramo s numeričkim simulacijama a koristit ćemo nasumičnu sekvencijalnu imitaciju, kao i u zatvoreničkoj dilemi, te kvadratnu rešetku s periodičkim rubnim uvjetima. Isplate se računaju nešto drugačije. Grupe su podijeljene tako da svaki igrač tvori grupu sa svojim prvim susjedima. Svaki igrač pripada u pet grupa, grupu kojoj on čini središte te susjedne četiri. Ukupna isplata igrača je suma isplata u svim grupama te ne ovisi samo o prvim susjedima već i o drugim.

Promatrat ćemo sustav za vrijednost šuma  $K = 0.5$ . Defekcija tada dominira za vrijednosti  $r < 3.74$  nakon koje se javlja miješano stanje kooperatora i defektora. Za vrijednosti  $r > 5.49$  kooperacija uspjeva u potpunosti potisnuti defekciju. Opis faznih prijelaza je sličan kao u zarobljeničkoj dilemi.

Igra javnog dobra je pogodna za provjeru različitih varijanti kooperativnih i defektorskih strategija, npr. kooperaciju s kažnjavanjem defektora, nagrađivanjem kooperatora ili strategiju koja kombinira te dvije[10]. Isplate „nagrađivača”  $R$  uključuju cijenu nagrađivanja za svakog kooperatora u grupi  $\gamma$  te nagrade od strategija koje daju nagrade za kooperaciju  $\beta$ . Isplate „kažnjavača”  $P$  uključuju cijenu kažnjavanja defektora u grupi  $\gamma$  te nagrade  $\beta$ . Strategija  $B$  kombinira kažnjavanje i nagrađivanje. Cijena koju svi kooperatori plaćaju je jednaka 1. Iznosi isplata za grupe su

$$\Pi_D^g = r(N_P + N_R + N_B)/G - \beta(N_P + N_B)/(G - 1),$$





Slika 4.7: Fazni dijagram za  $r = 2.5$

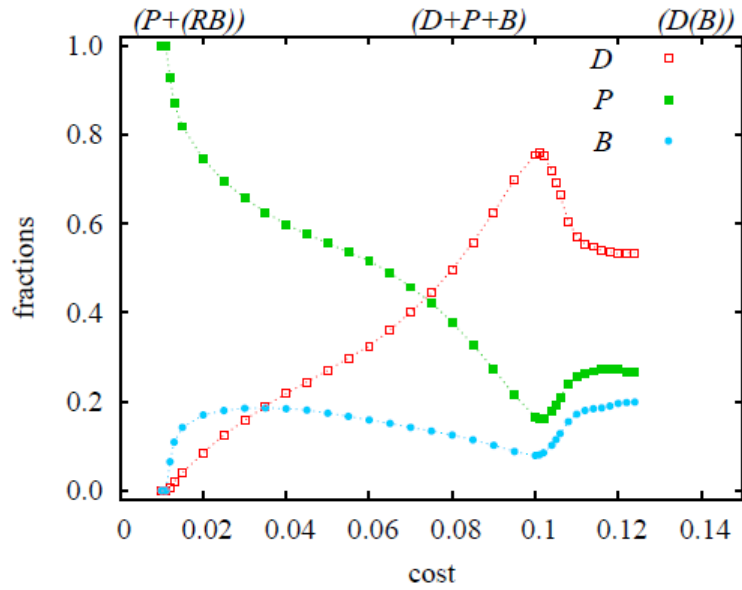
$$\Pi_P^g = r(N_P + N_R + N_B)/G - 1 - \gamma N_D/(G - 1) + \beta(N_R + N_B)/(G - 1),$$

$$\Pi_R^g = r(N_P + N_R + N_B)/G - 1 - \gamma(N_P + N_R + N_B)/(G - 1) + \beta(N_R + N_B)/(G - 1),$$

$$\Pi_B^g = r(N_P + N_R + N_B)/G - 1 - \gamma + \beta(N_R + N_B)/(G - 1),$$

gdje je  $N_{s_x}$  broj igrača u grupi sa strategijom  $s_x$  a  $G$  je veličina grupe. Gledat ćemo  $\beta - \gamma$  fazni dijagram uz konstantni  $r$ .

Za  $r = 2.5$  na slici 4.7 možemo vidjeti da većinom dijagrama dominira čista  $D$  faza a postoji i domena dominacije  $P$ . Posebno je zanimljiva domena ciklične dominacije u kojoj su  $D$ ,  $P$  i  $B$  strategije zaključane u škare-papir-kamen igri gdje svaka strategija dominira jednu i gubi od druge. Fazni prijelaz u  $D(B)$  se može dogoditi na dva načina, ovisno o vrijednosti parametra  $\beta$ . Za niže vrijednosti fazni prijelaz je kontinuiran, udio strategije  $P \rightarrow 0$  kako se približavamo granici faza. Za više vrijednosti (slika 4.8) udio svih strategija je veći od nule, amplitude oscilacija se povećavaju sve dok se u točki prijelaza ne dobijemo uniformnu apsorbirajuću fazu. To je primjer diskontinuiranog faznog prijelaza.  $D(B)$  faza označava da konačna strategija može



Slika 4.8: Prijelaz iz faze ciklične dominacije u čistu  $D(B)$  fazu za  $\beta = 0.55$

biti ili čista  $D$  ili čista  $B$  faza. Divergencija amplitude oscilacija nije efekt konačne veličine sustava. Fluktuacije u stacionarnom stanju mjerimo sa

$$\chi = \frac{L^2}{M} \sum_{t_i=1}^M \langle (\rho_D(t_i) - \bar{\rho}_D)^2 \rangle, \quad (4.31)$$

iznosi mjere fluktuacija za različite dimenzije sustava se podudaraju.

## 5 Uvjeti za uspjeh kooperacije

Izvest ćemo uvjete za uspjeh kooperacije u slučaju slabe selekcije na mreži za zarobljeničku dilemu i igru javnog dobra[1]. Slaba selekcija znači da razmatrana igra i pripadne strategije igrača imaju mali utjecaj na evoluciju sustava. Igre možemo promatrati kao perturbaciju na neutralni model u kojem je reproduktivna jakost strategija jednaka. Zanimati će nas vrijeme koalescencije dva vrha (očekivano vrijeme susreta nasumičnog hoda sa ta dva vrha). U ovom slučaju promatramo negativno vrijeme, tj. vrijeme prije kojeg su ta dva vrha imali zajedničkog pretka. Izvod i rezultati vezani za zarobljeničku dilemu su reprodukcija članka Allen et al.[1] a izvod i rezultati za igru javnog dobra su sasvim novi.

### 5.1 Model na grafu

Strukturu populacije prikazujemo pomoću mreže  $G$ . Mreža se sastoji od jedne velike spojene komponente bez otoka. Bridovi između vrhova  $\omega_{ij}$ ,  $i, j \in G$  mogu imati težine. Definiramo težinski stupanj vrha  $i$  kao  $\omega_i = \sum_{j \in G} \omega_{ij}$ . Suma stupnjeva svih vrhova  $W$  dana je s:

$$W = \sum_{i \in G} \omega_i. \quad (5.32)$$

Koristit ćemo koncept nasumičnog hoda na mreži. Vjerojatnosti prijelaza s  $i$  na  $j$  proporcionalne su težinama bridova,  $p_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\omega_i}$ . Vjerojatnost da hod od  $n$  koraka iz  $i$  završi u  $j$  dana je s  $p_{ij}^{(n)}$ . Postoji jedinstvena stacionarna distribucija za nasumični hod na mreži u kojoj je vjerojatnost da hod završi na vrhu  $i$  jednaka  $\pi_i = \frac{\omega_i}{W}$ . Za svaki  $i, j \in G$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ . Nasumični hod ima svojstvo reverzibilnosti, za svaki  $i, j \in G$ ,  $\pi_i p_{ij}^{(n)} = \pi_j p_{ji}^{(n)}$ . Za proizvoljnu funkciju  $g_i$  na  $G$  definiramo

$$g_i^{(n)} = \sum_{j \in G} p_{ij}^{(n)} g_j. \quad (5.33)$$

Stanje procesa prikazujemo s binarnim vektorom  $s = (s_i)_{i \in G} \in \{0, 1\}^G$ , gdje 0 i 1 pripadaju dvjema evolucijskim strategijama koje razmatramo a  $s_i \in \{0, 1\}^G$  označava tip vrha  $i$ . Strategije ćemo označavati s  $A$  i  $B$ . Evoluciju sustava opisujemo kao Markovljev lanac (evolucija sustava ne ovisi o prošlim stanjima, već samo o trenutnom stanju sustava). Reproductivna stopa vrha  $i$  u stanju  $s$  u režimu slabe selekcije

dana je s  $F_i(s) = 1 + \delta f_i(s)$  gdje je snaga selekcije dana s  $\delta$ . Isplatu vrha  $i$  u stanju  $s$  označavamo s  $f_i(s)$ . Isplata vrha u režimu slabe selekcije ima manji utjecaj na evoluciju sustava kada je  $\delta$  malen, kada  $\delta \rightarrow 0$  svodi se na neutralni tok.

## 5.2 Tranzicije

Promjene stanja u evolucijskom Markovljevom lancu događaju se uz neki od mehanizama evolucije sustava. Razmatrati ćemo vremenski kontinuiranu verziju Death-Birth procesa (engl. smrt-rođenje, u daljnjem tekstu *DB*). Zamijene u *DB* procesu se događaju kao Poissonovi procesi sa stopama ovisnima o stanju  $s$ . *DB* proces je definiran uz stope promijene

$$\text{Stopa}[i \rightarrow j](s) = \frac{\omega_{ij} F_i(s)}{\sum_{k \in G} \omega_{kj} F_k(s)}. \quad (5.34)$$

Svaki vrh se mijenja s prosječnom stopom 1. U *DB* procesima jedna nasumična jedinka je odabrana za umiranje a okolne jedinice se natječu da na njeno mjesto rašire svoju strategiju. Što je reproduktivna stopa vrha  $i$  veća, veća je i šansa da će raširiti svoju strategiju. Ako se događaj zamjene  $i \rightarrow j$  dogodi u stanju  $s$  i  $s_j \neq s_i$ , onda sustav prelazi u novo stanje  $s'$  definirano s  $s'_j = s_i$  i  $s'_k = s_k$  za sve  $k \neq j$ . U slučaju da je  $s_j = s_i$  nema promijene stanja sustava.

## 5.3 Vjerojatnost fiksacije u slaboj selekciji

Evolucijski Markovljev lanac ima dva apsorbirajuća stanja, stanje 1 u kojem su svi  $s_i = 1$  te stanje 0 u kojem su svi  $s_i = 0$  za sve  $i \in G$ . Ta stanja su analogna fiksaciji strategija  $A$  i  $B$ . Sva druga stanja su tranzijentna (nisu trajna, ne mogu biti riješenja sustava kada  $t \rightarrow \infty$ ). Počevši s bilo kojim stanjem, evolucija sustava nužno završava s apsorpcijom u jednu od dvije strategije. Vjerojatnost fiksacije strategije  $A$  iz stanja  $s_0 \in \{0, 1\}^G$  označavamo s  $\rho_{s_0}$  što predstavlja vjerojatnost da iz inicijalnog stanja  $s_0$  sustav završi apsorbiran u stanju 1. Proučavat ćemo vjerojatnosti fiksacije u slaboj selekciji, u prvom redu u  $\delta$  kako  $\delta \rightarrow 0^+$ .

Promatramo stupanjski otežanu učestalost tipa  $A$ :

$$\hat{s} = \sum_{i \in G} \pi_i s_i.$$

Stupanjski otežanu učestalost u vremenu  $t$  prikazujemo s nasumičnom varijablom

$$\hat{S}(t) = \sum_{i \in G} \pi_i S_i(t). \quad (5.35)$$

$\hat{S}(t)$  je martingal (očekivana vrijedost varijable u sljedećem koraku jednaka je vrijednosti varijable trenutačno) za neutralni proces ( $\delta = 0$ ) a slaba selekcija predstavlja perturbaciju na Martingale. Težina  $\pi_i$  vrha  $i$  može biti interpretirana kao njegoa reproduktivna jakost.

Razmotrimo evolucijski Markovljev lanac u proizvoljnom početnom stanju  $S(0) = s_0 \in \{0, 1\}^G$ . Koristeći osnovni teorem stohastičkog računa očekivana stupanjski otežana učestalost  $E_{s_0}[\hat{S}(T)]$  u vremenu  $T > 0$  zadovoljava

$$E_{s_0}[\hat{S}(T)] = \hat{s}_0 + \int_0^T \frac{d}{dt} E_{s_0}[\hat{S}(t)] dt. \quad (5.36)$$

Kada  $T \rightarrow \infty$ , očekivana stupanjski otežana učestalost stanja 1 postaje jednaka vjerojatnosti fiksacije, imamo

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} E_{s_0}[\hat{S}(t)] dt. \quad (5.37)$$

Definiramo funkciju stanja  $D(s)$  koja daje očekivanu stopu promijene stupanjski otežane učestalosti tipa  $A$  iz stanja  $s$ .  $D(s)$  je definirana sa relacijom

$$E[\hat{S}(t + \epsilon) - \hat{S}(t) | \hat{S}(t) = s] = D(s)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.38)$$

dok  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Uz supstituciju dobivamo

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \int_0^{\infty} E_{s_0}[D(S(t))] dt \quad (5.39)$$

U slučaju  $\delta = 0$  imamo neutralni tok (nema selekcije). Neutralni tok označavamo s  $^o$ . Pod DB pravilima evolucije  $D^o(s) = 0$  za sve  $s \in \{0, 1\}^G$  što znači da je  $\hat{S}(t)$  Martingale za neutralni tok. U tom slučaju  $\rho_{s_0}^o = \hat{s}_0$ . Vjerojatnost fiksacije strategije  $A$  jednaka je početnoj stupanjski otežanoj učestalosti. Vjerojatnost da jedna jedinka na vrhu  $i$  fiksira cijelu populaciju u svoj tip jednaka je  $\pi_i$ .

U slučaju slabe selekcije možemo napisati

$$D(s) = \delta D'(s) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.40)$$

$$E_{s_0}[D(S(t))] = \sum_s P_{s_0}[S(t) = s]D(s) \quad (5.41)$$

$$= \delta \sum_s P_{s_0}^o[S(t) = s]D'(s) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (5.42)$$

$$= \delta E_{s_0}^o[D'(S(t))] + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.43)$$

uz zamijenu dobivamo

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \delta \int_0^\infty E_{s_0}^o[D'(S(t))]dt + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.44)$$

Za proizvoljnu funkciju stanja  $g(s)$  i početno stanje  $s_0$  definiramo

$$\langle g \rangle_{s_0}^o = \int_0^\infty E_{s_0}^o[g(S(t))]dt. \quad (5.45)$$

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \delta \langle D' \rangle_{s_0}^o + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.46)$$

Posebno nas zanima slučaj kada se jedinka jedne strategije nađe u populaciji druge strategije. Razmatramo stanja  $s_0$  s jednim vrhom tipa 1 i svim ostalim vrhovima tipa 0.  $u$  je distribucija vjerojatnosti preko stanja koja daje vjerojatnost  $1/N$  svim stanjima  $s$  s samo jednim vrhom tipa 1 i vjerojatnost 0 svim drugim stanjima. S  $u$  označavamo očekivanu vrijednost veličine kada inicijalno stanje evolucijskog Markovljevog lanca pripada toj distribuciji. Vjerojatnost fiksacije  $\rho_A = \rho_u$  je vjerojatnost da je strategija  $A$  fiksirana kada sustav počinje evoluciju s jednim vrhom tipa  $A$ . Kada promatramo distribuciju vjerojatnosti  $u$  onda pišemo

$$\rho_A = \frac{1}{N} + \delta \langle D' \rangle_u^o + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.47)$$

## 5.4 Promijena pod slabom selekcijom

Zanima nas kako izgleda  $D(s)$  u DB procesima sa slabom selekcijom. Ako se dogodi promijena  $i \rightarrow j$  onda je ukupna promijena u  $\hat{s}$  jednaka  $\pi_j(s_i - s_j)$ . Očekivana stopa promijene je dana s

$$D(s) = \sum_{j \in G} \pi_j(-s_j + \sum_{i \in G} s_i \frac{\omega_{ij} F_i(s)}{\sum_{k \in G} \omega_{kj} F_k(s)}) \quad (5.48)$$

$$= \sum_{i \in G} s_i(-\pi_i + \sum_{j \in G} \pi_j \frac{\omega_{ij} F_i(s)}{\sum_{k \in G} \omega_{kj} F_k(s)}) \quad (5.49)$$

$$= \delta \sum_{i \in G} s_i(\pi_i f_i(s) - \pi_i \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} f_k(s)) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (5.50)$$

$$= \delta \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s)) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.51)$$

Tražimo derivaciju funkcije

$$D'(s) = \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s)). \quad (5.52)$$

Promijena učestalosti strategija ovisi o nadmetanju drugih susjeda.

## 5.5 Koalescirajući nasumični hod

Koalescirajući nasumični hod (skraćeno CRW) je skup nasumičnih hodova na  $G$  koji se kreću neovisno do trenutka susreta dva hoda, kada se ta dva kreću zajedno. Koalescentna teorija je prvotno osmišljena u kontekstu biologije i korištena za razumijevanje genetskih varijacija u današnjoj populaciji i njihovog porijekla od zajedničkog pretka. Nas će zanimati kako dva nasumično odabrana vrha koalesciraju do svog prvog zajedničkog pretka. Razmatramo koalescenciju u kontinuiranoj i diskretnoj vremenskoj verziji s dva šetača.

U kontinuiranoj verziji razmatramo par šetača  $(X(t), Y(t))_{t \geq 0}$  s proizvoljnim početnim vrhovima  $X(0) = i$  i  $Y(0) = j$ . Svaki se kreće Poissonovom stopom 1 koja je analogna brzini zamijene vrhova u BD procesu.  $X(t)$  i  $Y(t)$  se kreću neovisno do vremena prve koalescencije koje označavamo s  $T_{coal}$ . Nakon tog vremena šetači se kreću zajedno.

Vjerojatnosti i očekivane vrijednosti u kontinuiranom vremenu označavati ćemo sa  $P_{(i,j)}^{CRW}$  i  $E_{(i,j)}^{CRW}$ .

U diskretnoj verziji razmatramo par šetača  $(X(t), Y(t))_{t=0}^{\infty}$ , s proizvoljnim početnim vrhovima. U svakom vremenskom periodu biramo nasumično jednog od šetača koji radi jedan korak sve dok  $X(t) = Y(t)$  nakon čega oba rade isti korak. Vjerojatnosti i očekivane vrijednosti različitih veličina u diskretnom vremenu označavamo sa  $\tilde{P}_{(i,j)}^{CRW}$  i  $\tilde{E}_{(i,j)}^{CRW}$ .

Postoji razlika u vremenskim skalama između ta dva procesa. U kontinuiranom CRW se u prosjeku događaju dva koraka u jedinici vremena dok se u diskretnoj verziji događa jedan.

Označit ćemo očekivano vrijeme koalescencije  $i$ -tog i  $j$ -tog vrha u diskretnom vremenu kao  $\tau_{ij} = \tilde{E}_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal}]$ . U kontinuiranoj verziji imamo dodatni faktor 2 pa imamo  $\tau_{ij} = 2E_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal}]$ .

Uzmimo da su  $i$  i  $j$  dvije čestice na kraju  $n$ -koračnog nasumičnog hoda koji je počeo iz stacionarne distribucije. Ako uzmemo vrijednost  $\tau_{ij}$  preko svih mogućih putova dobivamo veličinu  $\tau^{(n)}$

$$\tau^{(n)} = \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} \tau_{ij}. \quad (5.53)$$

Koalescirajući nasumični hod analogan je našem modelu bez selekcije ( $\delta = 0$ ). Možemo napisati, za bilo koje inicijalno stanje  $s_0$  i bilo koji par strategija  $x, y \in \{0, 1\}$ ,

$$P_{s_0}^o[s_i(t) = x, s_j(t) = y] = P_{(i,j)}^{CRW}[(s_0)_{X(t)} = x, (s_0)_{Y(t)} = y]. \quad (5.54)$$

Vrhovi  $i$  i  $j$  imaju istu strategiju kao njihovi predci u početnom stanju.

U početnom stanju  $s_0$  jedan vrh  $k$  ima strategiju 1 a svi drugi strategiju 0:  $(s_0)_k = 1$  i  $(s_0)_l = 0$  za sve  $l \neq k$ . Promatramo vrijednost nasumične varijable  $S_i(t)S_j(t)$  koja je jednaka 1 ako oba vrha imaju strategiju 1 u vremenu  $t$  a inače 0. Primijenjujući prethodnu relaciju dobivamo

$$E_{s_0}^o[S_i(t)S_j(t)] = P_{(i,j)}^{CRW}[X(t) = Y(t) = k] \quad (5.55)$$

$$= P_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal} < t, X(t) = k]. \quad (5.56)$$



Vrhovi  $i$  i  $j$  imaju strategiju 1 samo ako su potomci originalnog vrha  $k$  koji ima tu strategiju.

Ako razmatramo početno stanje dobiveno iz distribucije  $u$  imamo

$$\begin{aligned} E_u^o[S_i(t)S_j(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{k \in G} P_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal} < t, X(t) = k] \\ &= \frac{1}{N} P_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal} < t] \end{aligned} \quad (5.57)$$

iz zakona totalne vjerojatnosti, zato što smo sumirali po svim mogućim vrijednostima  $X(t)$ .

Tražimo vremenski usrednjenu vrijednost te varijable:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{N} - s_i s_j \right\rangle_u^o &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{N} - E_u^o[S_i(t)S_j(t)] \right) dt \\ &= \frac{1}{N} \int_0^\infty (1 - P_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal} < t]) dt \\ &= \frac{1}{N} E_{(i,j)}^{CRW}[T_{coal}] \\ &= \frac{\tau_{ij}}{2N}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Za proizvoljni vrhove  $i, j, k, l$  onda vrijedi

$$\langle s_i s_j - s_k s_l \rangle = \frac{\tau_{kl} - \tau_{ij}}{2N} \quad (5.59)$$

Kada imamo  $n_1, n_2 > 0$  vrijedi

$$\left\langle \sum_{i \in G} \pi_i s_i (s_i^{(n_1)} - s_i^{(n_2)}) \right\rangle_u^o = \frac{\tau^{(n_2)} - \tau^{(n_1)}}{2N}. \quad (5.60)$$

## 5.6 Rekurzivne relacije za vremena koalescencije

Vremena koalescencije  $\tau_{ij}$  zadovoljavaju sljedeće relacije

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \in G} (p_{ik} \tau_{jk} + p_{jk} \tau_{ik}) & i \neq j. \end{cases} \quad (5.61)$$

To je sustav od  $\binom{N}{2}$  linearnih jednadžbi. S obzirom da je  $G$  u potpunosti povezan znači da postoji jedinstveno rješenje sustava jednadžbi. Rješenja jednadžbi se mogu naći u polinomnom vremenu.

## 5.7 U zatvoreničkoj dilemi

Isplatu vrha  $i$  u stanju  $s$  označavamo s  $f_i(s)$ . Promatrajući općenitu igru s dvije strategije

$$\begin{array}{cc} & A & B \\ A & \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

i označavajući s 1 strategiju  $A$  i s 0 strategiju  $B$  imamo

$$f_i(s) = as_i s_i^{(1)} + bs_i(1 - s_i^{(1)}) + c(1 - s_i)s_i^{(1)} + d(1 - s_i)(1 - s_i^{(1)}). \quad (5.62)$$

Isplata od susjeda se normalizira sa težinom vrha. Za igru donacije imamo

$$\begin{array}{cc} & C & D \\ C & \begin{bmatrix} b - c & -c \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} b & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

što daje jednostavnu formu funkcije isplate

$$f_i(s) = -cs_i + b \sum_{j \in G} p_{ij} s_j. \quad (5.63)$$

Koristeći jednadžbu 5.52 imamo:

$$\begin{aligned}
D'(s) &= \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s)) \\
&= \sum_{i \in G} \pi_i s_i (-c s_i + b \sum_{j \in G} p_{ij} s_j + c \sum_{j \in G} s_j p_{ij}^{(2)} - b \sum_{k, j \in G} p_{ik}^{(2)} p_{ij} s_j) \\
&= \sum_{i \in G} \pi_i s_i (-c(s_i^{(0)} - s_i^{(2)}) + b(s_i^{(1)} - s_i^{(3)}))
\end{aligned}$$

uvrštavajući to u izraz za vjerojatnost fiksacije dobivamo

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \delta \sum_{i \in G} \pi_i (-c \langle s_i(s_i^{(0)} - s_i^{(2)}) \rangle_u^o + b \langle s_i(s_i^{(1)} - s_i^{(3)}) \rangle_u^o) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.64)$$

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} (-c (\sum_{i, j \in G} \pi_i p_{ij}^{(2)} \tau_{ij} - \sum_{i, j \in G} \pi_i \tau_{ii}) + b (\sum_{i, j \in G} \pi_i p_{ij}^{(3)} \tau_{ij} - \sum_{i, j \in G} \pi_i p_{ij}^{(1)} \tau_{ij})) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} (-c \tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)})) + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (5.65)$$

Kooperacija je uspješnija od neutralne vjerojatnosti fiksacije kada je  $\rho_C > 1/N$  ako vrijedi

$$-c \tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)}) > 0. \quad (5.66)$$

To možemo napisati i kao uvjet za uspjeh kooperacije u ovisnosti o parametrima  $b$  i  $c$  kao

$$\left(\frac{b}{c}\right)^* = \frac{\tau^{(2)}}{\tau^{(3)} - \tau^{(1)}}. \quad (5.67)$$

$\tau_{ij}$  su očekivana vremena tokom kojih su vrhovi  $i$  i  $j$  različitog tipa. Ako uzmemo da je vrijeme do fiksacije  $T$  onda je  $T - \tau_{ij}$  vrijeme tokom kojeg vrh  $i$  i  $j$  imaju isti tip. Za zarobljeničku dilemu  $\tau^{(n)}$  je očekivano vrijeme koalescencije između dva kraja  $n$ -koračnog hoda. Uvjet iz jednadžbe možemo napisati na alternativni način kao

$$-c(T - \tau^{(0)}) + b(T - \tau^{(1)}) > -c(T - \tau^{(2)}) + b(T - \tau^{(3)}). \quad (5.68)$$

Ova jednadžba nam kaže da dobit kooperatora mora biti veća od dobiti nasumičnog susjeda udaljenog dva koraka. Oni se natječu za mogućnost reprodukcije na položaj susjeda udaljenog jedan korak. Prvi član je cijena kooperacije koju kooperator plaća cijelo vrijeme  $T$  zato što je vrijeme koalescencije sa samim sobom,  $\tau^{(0)}$ , jednako 0. Drugi član je prosječni benefit koji kooperator dobija od svojih prvih susjeda, dobiva ga tokom  $(T - \tau^{(1)})$  vremena u kojem je susjed također kooperator. Druga dva člana opisuju dobit susjeda udaljenog dva koraka. On plaća cijenu kooperacije tokom vremena  $(T - \tau^{(2)})$  i dobiva benefit od svojih kooperatorskih prvih susjeda koji su udaljeni tri koraka od početnog kooperatora  $(T - \tau^{(3)})$ .

## 5.8 Zatvorenička dilema s akumuliranim isplatama

Isplata vrha  $i$  u ovom slučaju je zbroj doprinosa svih susjeda bez normalizacije. Isplate za vrh su dane s

$$\begin{aligned} f_i(s) &= w_i(-cs_i + bs_i^{(1)}) \\ &= W\pi_i(-cs_i + bs_i^{(1)}). \end{aligned} \tag{5.69}$$

Koristeći jednadžbu 5.52 imamo

$$\begin{aligned} D'(s) &= \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s)) \\ &= W \sum_{i \in G} \pi_i s_i [\pi_i (-cs_i + bs_i^{(1)}) - \sum_{j \in G} p_{ij}^{(2)} \pi_j (-cs_j + bs_j^{(1)})] \\ &= W [-c (\sum_{i \in G} \pi_i^2 s_i^2 - \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(2)} \pi_j s_i s_j) + b (\sum_{i \in G} \pi_i^2 s_i s_i^{(1)} - \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(2)} \pi_j s_i s_j^{(1)})] \\ &= W [-c \sum_{i,j \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} (s_i^2 - s_i s_j) + b \sum_{i,j,k \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} p_{ik} (s_i s_k - s_j s_k)]. \end{aligned}$$

Te uvrštavajući u jednadžbu za vjerojatnost fiksacije imamo

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \frac{\delta W}{2N} \left( -c \sum_{i,j \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} \tau_{ij} + b \sum_{i,j,k \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} p_{ik} (\tau_{jk} - \tau_{ik}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.70)$$

Uvjet za uspjeh kooperacije je onda

$$\left(\frac{b}{c}\right)^* = \frac{\sum_{i,j \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} \tau_{ij}}{\sum_{i,j,k \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} p_{ik} (\tau_{jk} - \tau_{ik})}. \quad (5.71)$$

## 5.9 Igra javnog dobra

U igri javnog dobra isplate kooperatora u grupi su dane s

$$\Pi_C = r \frac{N_C}{G} - 1 \quad (5.72)$$

a defektora s

$$\Pi_D = r \frac{N_C}{G}. \quad (5.73)$$

Svaki igrač je centar jedne grupe sa svojim susjedima. Isplate za jednu grupu na mreži možemo pisati kao

$$f_i(s) = \frac{r}{G_i} (s_i + \sum_j a_{ij} s_j) - s_i \quad (5.74)$$

gdje je  $a$  matrica povezanosti mreže.

$$\begin{aligned} D'(s) &= \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s)) \\ &= \sum_{i \in G} \pi_i s_i \left( \frac{r}{G_i} (s_i + \sum_{j \in G} a_{ij} s_j) - s_i - \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} \left( \frac{r}{G_k} (s_k + \sum_{j \in G} a_{kj} s_j) - s_k \right) \right) \\ &= \sum_{i \in G} \pi_i \left( \frac{r}{G_i} s_i s_i + \frac{r}{G_i} \sum_{j \in G} a_{ij} s_i s_j - s_i s_j - \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} \frac{r}{G_k} s_i s_k - \sum_{k,j \in G} p_{ik}^{(2)} \frac{r}{G_k} a_{kj} s_i s_j + \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} s_i s_k \right) \end{aligned}$$

Vjerojatnost fiksacije je onda

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \sum_{i \in G} \pi_i \left( -\frac{r}{G_i} \sum_{j \in G} a_{ij} \tau_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} \frac{r}{G_k} \tau_{ik} + \sum_{k, j \in G} p_{ik}^{(2)} \frac{r}{G_k} a_{kj} \tau_{ij} - \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} \tau_{ik} \right) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.75)$$

A kritični  $r$  iznosi

$$r^* = \frac{\sum_{i, k \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \tau_{ik}}{-\sum_{i, j \in G} \frac{1}{G_i} \pi_i a_{ij} \tau_{ij} + \sum_{i, k \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \frac{1}{G_k} \tau_{ik} + \sum_{i, k, j \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \frac{1}{G_k} a_{kj} \tau_{ij}}. \quad (5.76)$$

Također ćemo razmatrati verziju igre javnog dobra u kojem je svaki igrač u grupi samo sa jednim nasumičnim susjedom. U tom slučaju isplata je dana sa funkcijom analognom izrazu (5.39) gdje je matrica  $a$  povezanosti mreže zamijenjena matricom  $a^*$  koja govori s kojim je susjedom igrač u grupi.

$$f_i(s) = \frac{r}{G_i} (s_i + \sum_j a_{ij}^* s_j) - s_i \quad (5.77)$$

### 5.10 Igra javnog dobra s više grupa

Ako je igrač član grupe koje je sam centar ali i susjednih grupa i dobiva isplatu za sve grupe u kojima se nalazi imamo

$$f_i(s) = \frac{r}{G_i} (s_i + \sum_j a_{ij} s_j) + \sum_j \frac{a_{ij} r}{G_j} (s_j + \sum_k a_{jk} s_k) - G_i s_i. \quad (5.78)$$

U tom slučaju vrijednost funkcije isplate ne ovisi samo o prvim susjedima već i o drugim. Cijena koju kooperatori plaćaju ovisi o broju grupa kojih je član.

$$D'(s) = \sum_{i \in G} \pi_i s_i (f_i^{(0)}(s) - f_i^{(2)}(s))$$

$$= \sum_{i \in G} \pi_i \left( \frac{r}{G_i} (s_i s_i + \sum_{j \in G} a_{ij} s_i s_j) + \sum_{j \in G} \frac{a_{ij} r}{G_j} (s_i s_j + \sum_{k \in G} a_{jk} s_i s_k) - G_i s_i s_i - \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l \in G} p_{il}^{(2)} \left( \frac{r}{G_l} (s_i s_l + \sum_{j \in G} a_{lj} s_i s_j) - \sum_{j, l \in G} \frac{a_{lj} r}{G_j} (s_i s_j + \sum_{k \in G} a_{jk} s_i s_k) + \sum_{l \in G} p_{il}^{(2)} G_l s_i s_l \right) \\
\rho_C &= \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \sum_{i \in G} \pi_i \left( -\frac{r}{G_i} \sum_{j \in G} a_{ij} \tau_{ij} - \sum_{j \in G} \frac{a_{ij} r}{G_j} (\tau_{ij} + \sum_{k \in G} a_{jk} \tau_{ik}) + \right. \\
& \left. + \sum_{l \in G} p_{il}^{(2)} \left( \frac{r}{G_l} (\tau_{il} + \sum_{j \in G} a_{lj} \tau_{ij}) + \sum_{j, l \in G} \frac{a_{lj} r}{G_j} (\tau_{ij} + \sum_{k \in G} a_{jk} \tau_{ik}) - \sum_{l \in G} p_{il}^{(2)} G_l \tau_{il} \right) \right) \quad (5.79)
\end{aligned}$$

Konačno izraz za kritični  $r^*$  je

$$r^* = \frac{num}{denom}. \quad (5.80)$$

$$num = \sum_{i, l} \pi_i p_{il}^{(2)} G_l \tau_{il}$$

$$\begin{aligned}
denom &= \sum_i \pi_i \left( -\frac{1}{G_i} \sum_{j \in G} a_{ij} \tau_{ij} - \sum_{j \in G} \frac{a_{ij}}{G_j} (\tau_{ij} + \sum_{k \in G} a_{jk} \tau_{ik}) + \right. \\
& \left. + \sum_{l \in G} p_{il}^{(2)} \left( \frac{1}{G_l} (\tau_{il} + \sum_{j \in G} a_{lj} \tau_{ij}) + \sum_{j, l \in G} \frac{a_{lj}}{G_j} (\tau_{ij} + \sum_{k \in G} a_{jk} \tau_{ik}) \right) \right)
\end{aligned}$$

## 6 Rezultati

Na slici 6.9 vidimo vrijednosti  $(\frac{b}{c})^*$  i  $r^*$  za sve grafove veličine četiri. Kritične vrijednosti parametara jako ovise o strukturi mreže.  $(\frac{b}{c})^*$  je pozitivan i manji od beskonačno samo za jedan graf. Dva grafa daju beskonačnu vrijednost kritičnog parametra a za tri je parametar manji od nule.  $r^*$  je s druge strane pozitivan i manji od beskonačnosti za pet grafova te jednak beskonačnosti za kompletni graf. Usporedimo jednadžbe za  $(\frac{b}{c})^*$  s normaliziranim isplatama i  $r^*$  za slučaj kada igrač pripada samo jednoj grupi.

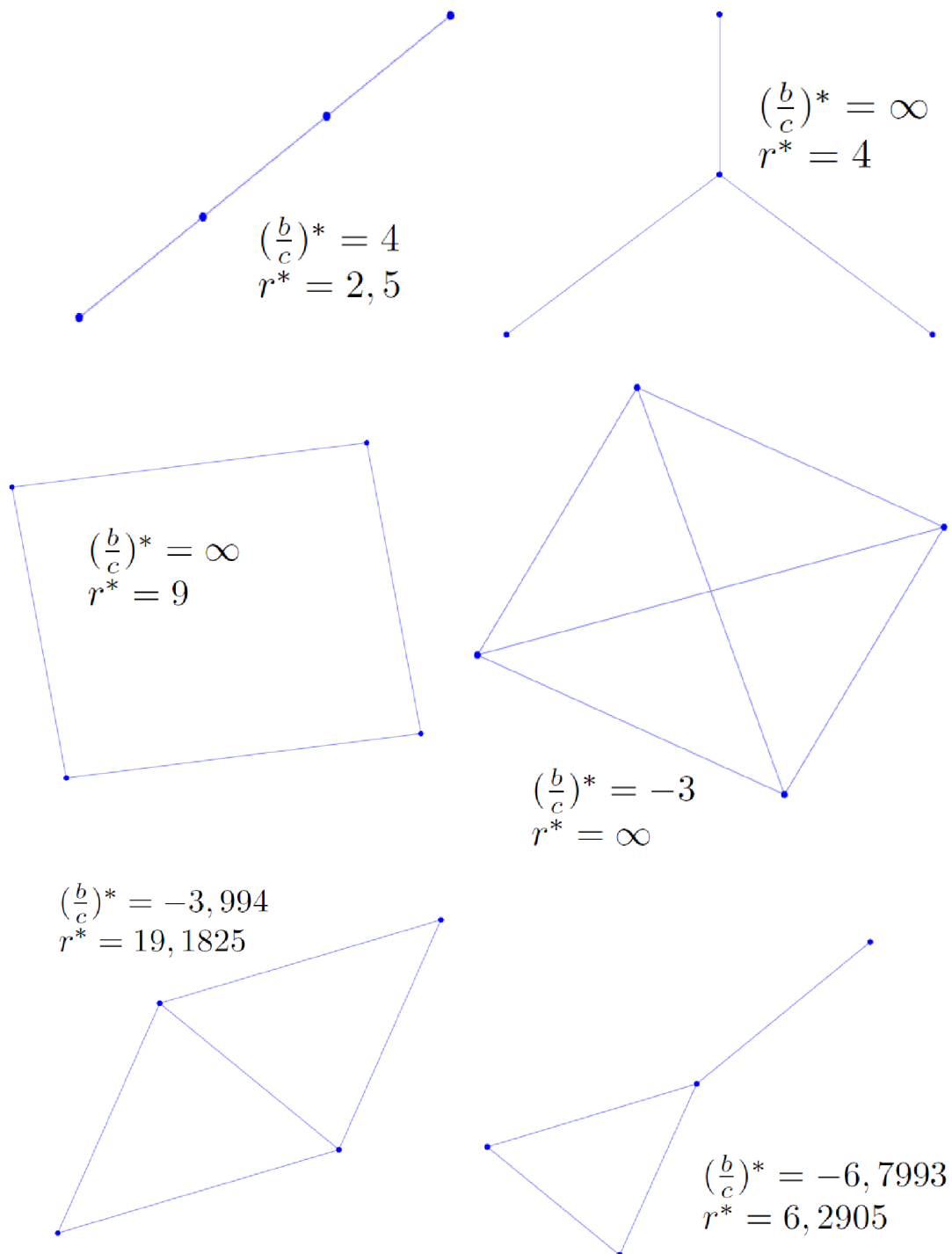
$$\left(\frac{b}{c}\right)^* = \frac{\sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(2)} \tau_{ij}}{\sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(3)} \tau_{ij} - \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(1)} \tau_{ij}} = \frac{\tau^{(2)}}{\tau^{(3)} - \tau^{(1)}}$$

$$r^* = \frac{\sum_{i,k \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \tau_{ik}}{-\sum_{i,j \in G} \frac{1}{G_i} \pi_i a_{ij} \tau_{ij} + \sum_{i,k \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \frac{1}{G_k} \tau_{ik} + \sum_{i,k,j \in G} \pi_i p_{ik}^{(2)} \frac{1}{G_k} a_{kj} \tau_{ij}}$$

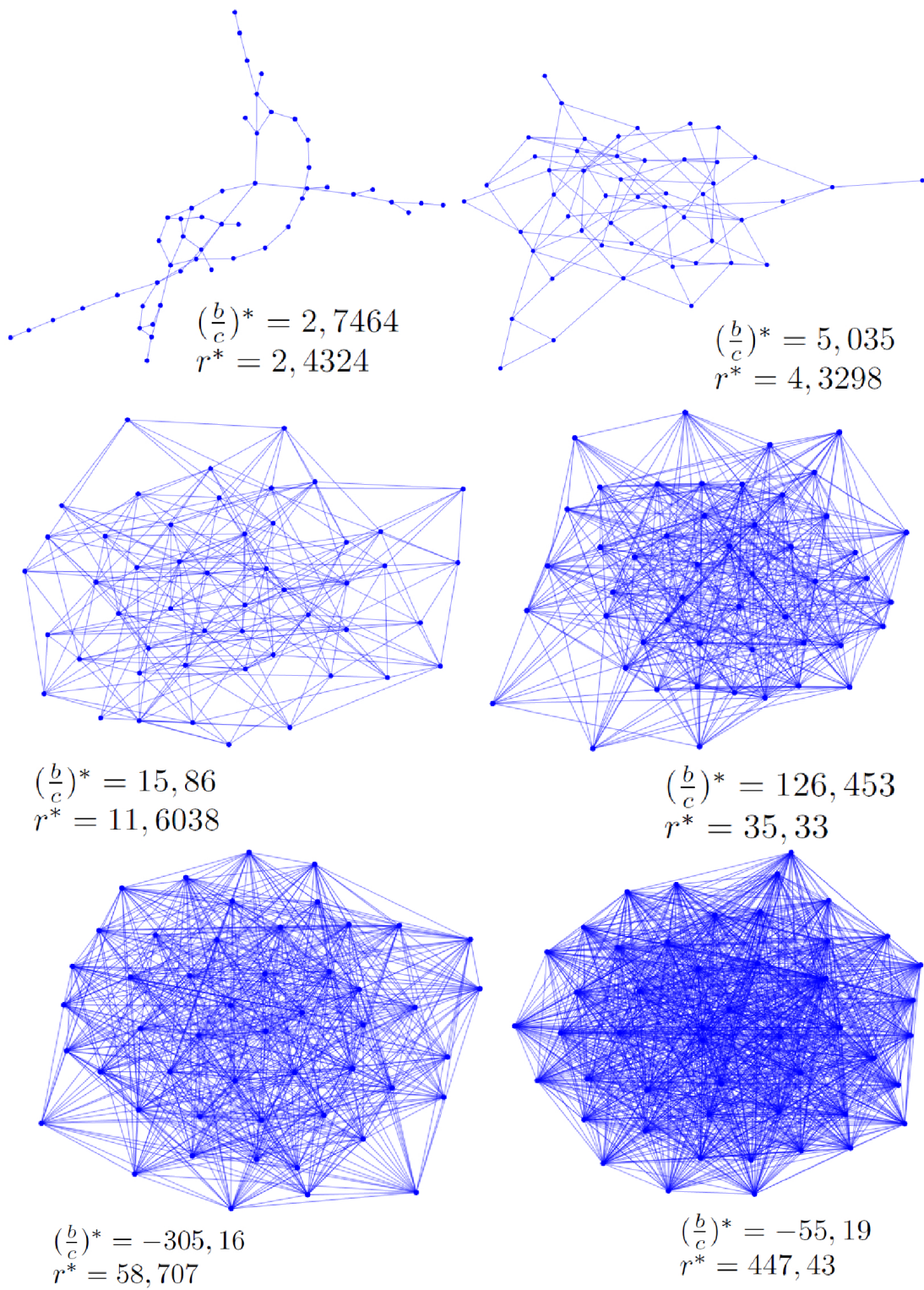
Nazivnik u igri javnog dobra je veći od nule ako vrijedi  $\tau^{(3)} > \tau^{(1)}$ . Taj uvjet kaže da očekivano vrijeme koalescencije trokoračnog hoda mora biti veće od vremena koalescencije jednokoračnog hoda. To znači da je benefit koji inicijalni kooperator dobije od svojih susjeda veći od benefita koji njegov nasumični susjed, udaljen dva koraka, dobije od svojih prvih susjeda. Ako je  $\tau^{(1)} \geq \tau^{(3)}$  kooperacija nije moguća ni za koju kombinaciju parametara  $b, c > 0$ . To znači da će isplata susjeda udaljenog dva koraka uvijek biti veća od isplate kooperatora. U igri javnog dobra imamo tri člana u nazivniku. Dva člana opisuju dobiti od susjednih kooperatora za inicijalnog kooperatora te njegovoga dvokoračnog susjeda. No javlja se jedan član kojeg nema u zarobljeničkoj dilemi. On je posljedica toga što kooperator, osim što plaća cijenu kooperacije, kroz grupu dobiva dobit nazad, tako reći, samointerakcijom. Defektor ne uplaćuje ništa u grupu ali zato ni ne dobiva, potencijalno puno veću isplatu nazad. Član samointerakcije je zaslužan za to da je kooperacija u igri javnog dobra moguća za puno veći broj mreža. Vidjet ćemo da općenito vrijedi da je favoriziranje kooperacije moguće za sve grafove osim kompletnog grafa, kada nazivnik ide u nulu.

Izračun vremena koalescencije predstavlja numerički problem s obzirom na to je potrebno riješiti sustav  $\binom{N}{2}$  linearnih jednadžbi što znači da broj jednadžbi raste jako s veličinom sustava. Gausijanska eliminacija za takav sustav treba  $\mathcal{O}(N^6)$  koraka kako bi došla do rješenja. Za nalaženja vrijednosti smo koristili funkciju programa Matlab *linsolve*. Na prosječnim hardverskim konfiguracijama nalaženje vremena ko-

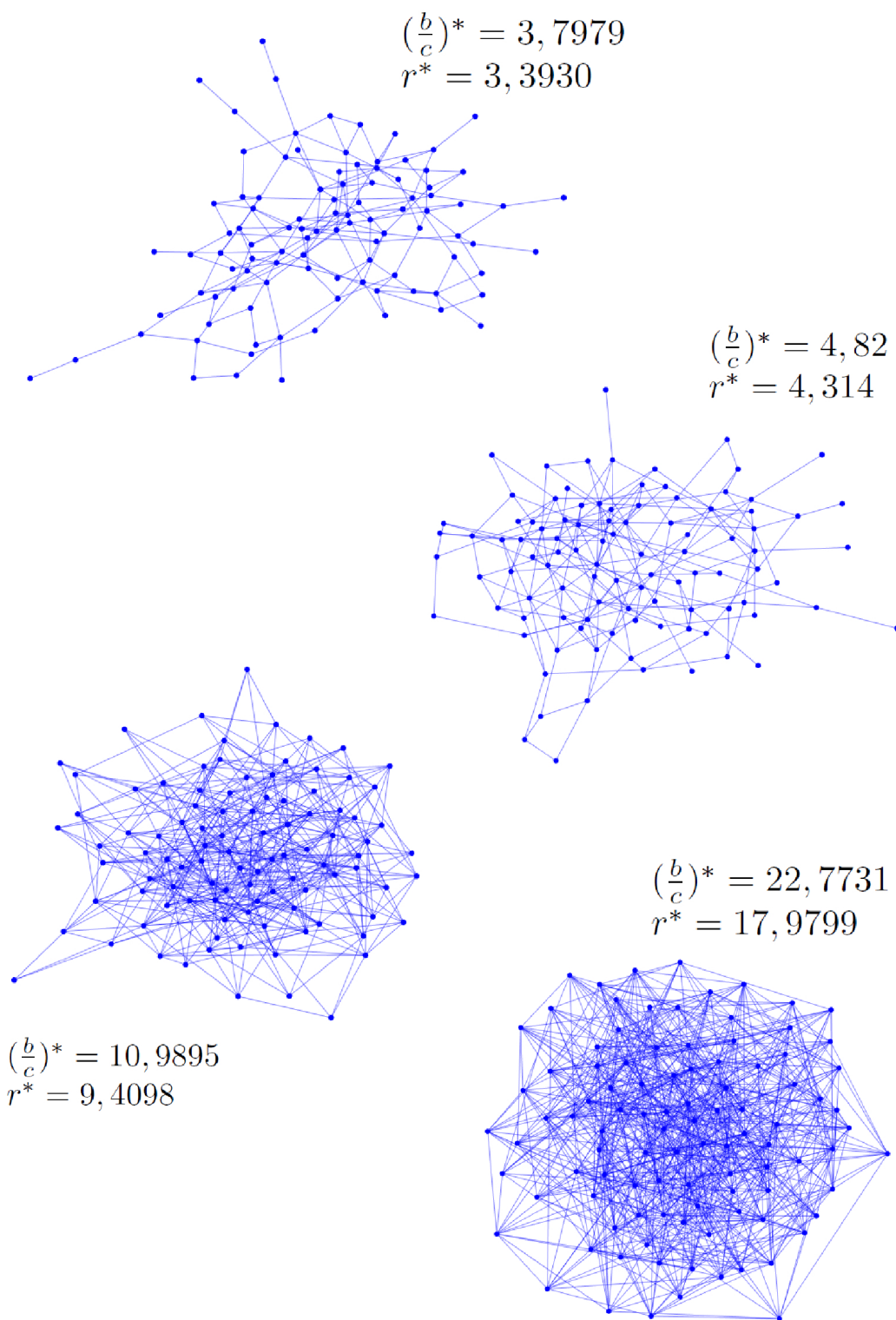




Slika 6.9:  $\left(\frac{b}{c}\right)^*$  i  $r^*$  za sve grafove veličine četiri



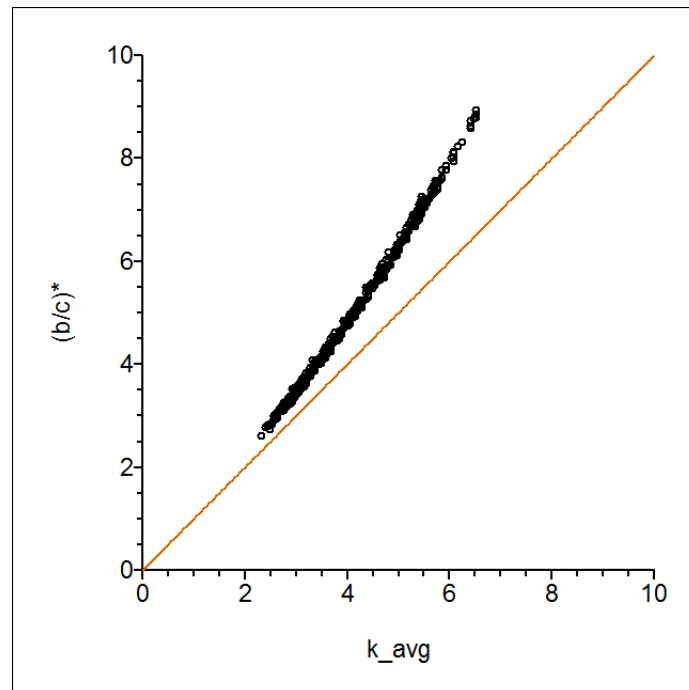
Slika 6.10: Mreže s  $N = 50$  vrhova i njihove vrijednosti  $(\frac{b}{c})^*$  i  $r^*$



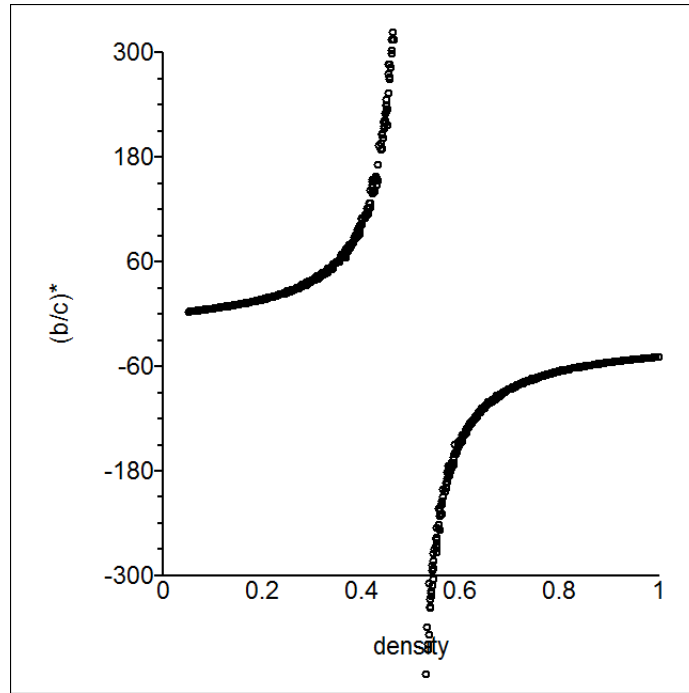
Slika 6.11: Mreže s  $N = 100$  i njihovi  $\left(\frac{b}{c}\right)^*$  i  $r^*$

alescencije, koristeći *linsolve*, za sustave s  $N > 100$  postaje vrlo sporo, a za sustave s  $N > 150$  nemoguće (vjerojatno zato što matrica zauzima previše prostora u memoriji). Većina proračuna je zato rađena na mrežama s brojem vrhova  $N \leq 60$  kako bi mogli dobiti rješenja za veći broj mreža u razumnom vremenu.

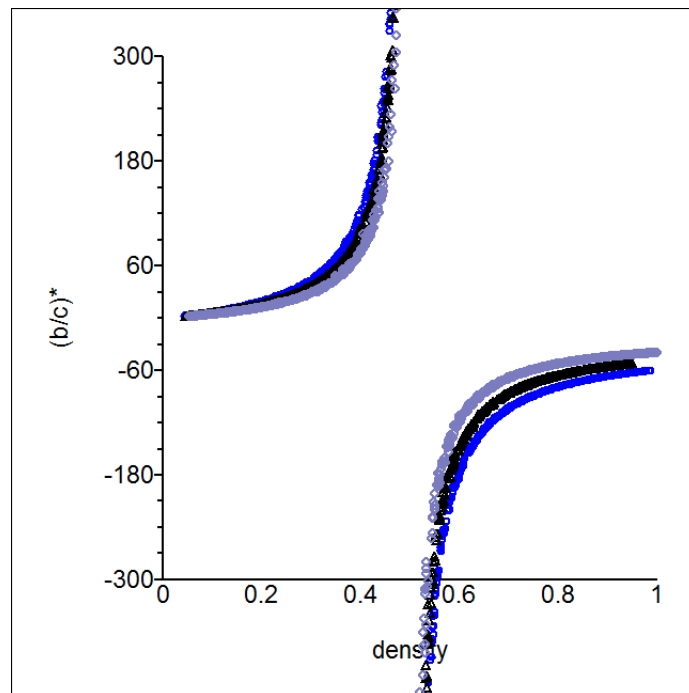
## 6.1 Za zatvoreničku dilemu



Slika 6.12: Vrijednosti  $(b/c)^*$  za niske vrijednosti  $k$  te pravac  $\frac{b}{c} = k$  za zatvoreničku dilemu

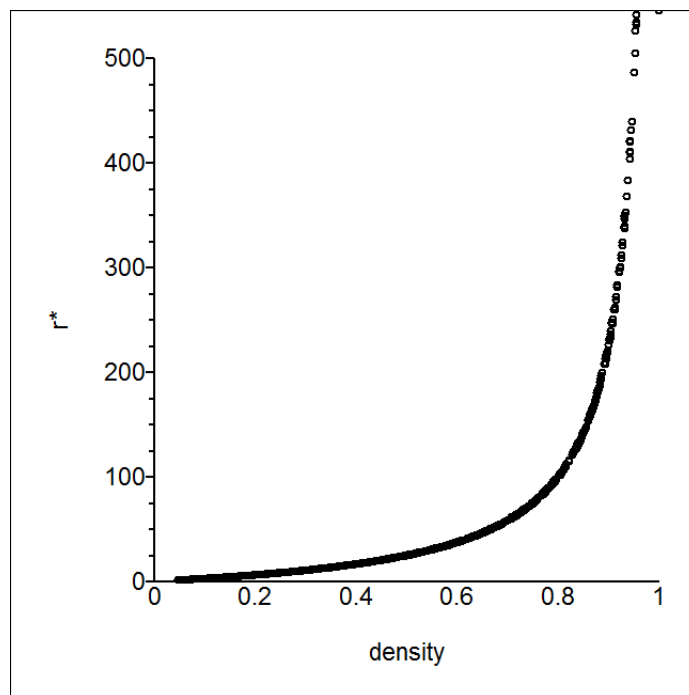


Slika 6.14: Ovisnost kritičnog faktora o gustoći mreže za zatvoreničku dilemu s akumuliranim isplata za  $N = 50$



Slika 6.13: Ovisnost kritičnog faktora o gustoći mreže za zatvoreničku dilemu za  $N_1 = 40$  (ljubičasta),  $N_2 = 50$  (crna) i  $N_3 = 60$  (plava)

Mreže su generirane Erdos-Renyi modelom. Generirane mreže se moraju sastojati od jedne velike komponente kojoj pripadaju svi vrhovi. Promatrane mreže su generirane varirajući  $p$  (vjerojatnost povezivanja dva vrha) od 0.04 do 1 za  $N_1 = 40$ ,  $N_2 = 50$  i



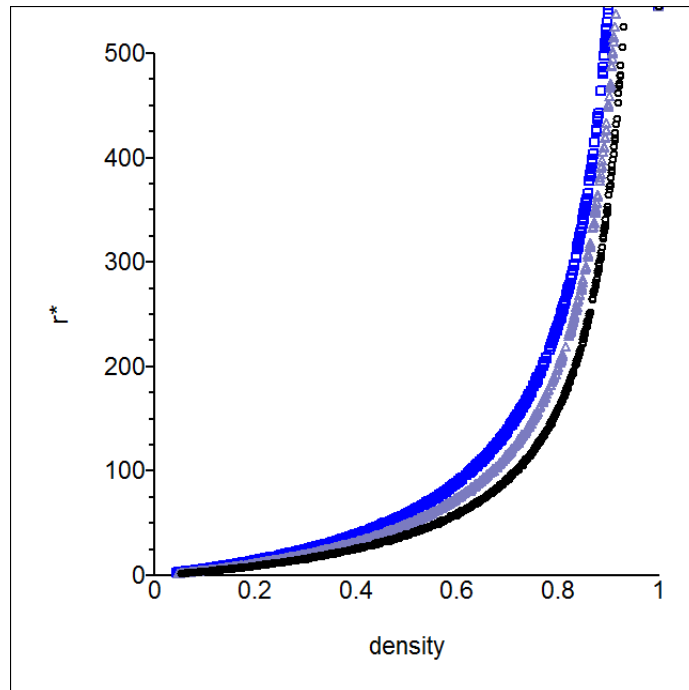
Slika 6.15: Ovisnost kritičnog faktora o gustoći mreže za igru javnog dobra s jednom grupom

$N_3 = 60$ . Kako bi mogli uspoređivati vrijednosti kritičnih faktora za različite brojeve vrhova koristimo gustoću bridova kao mjeru broja bridova,  $\rho = 2m/n(n-1)$ .

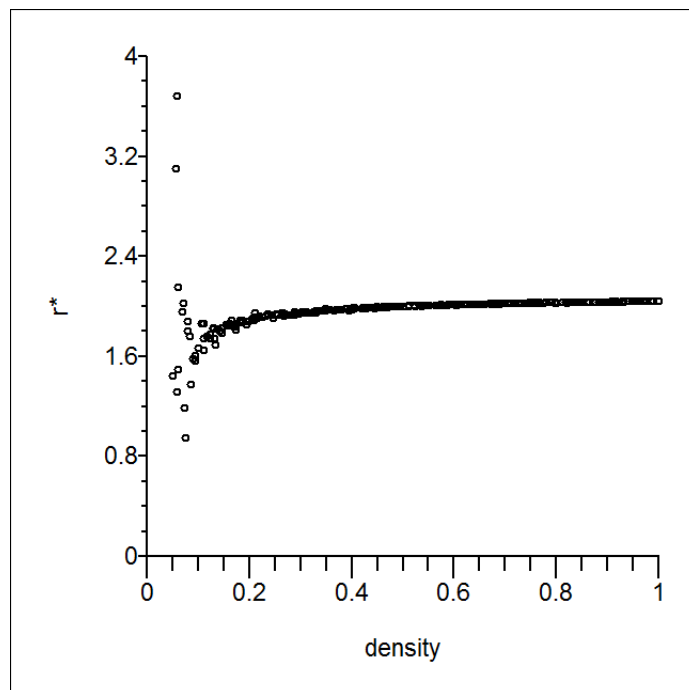
U zatvoreničkoj dilemi ovisnost  $(\frac{b}{c})^*$  o  $k$  za vrijednosti  $k \ll N$  je blizu  $(\frac{b}{c}) = k$  no s porastom gustoće bridova se odvaja od pravila. Može se pokazati da  $(\frac{b}{c})^*$  ne može imati vrijednosti između  $-1$  i  $1$ [1]. Međutim, kako gustoća bridova,  $\rho$ , raste tako dolazi i do naglog porasta kritičnog faktora sve do točke u kojoj favoriziranje kooperacije nije moguće ni za koju kombinaciju parametara  $b$  i  $c$ . Nakon te točke dolazimo u domenu negativnog  $(\frac{b}{c})^*$  u kojoj je kooperacija moguća samo ako je neki od parametara suprotnoga predznaka (npr.  $b < 0$ , što je ekvivalentno kazni). Prijelaz  $(\frac{b}{c})^*$  iz velikih pozitivnih vrijednosti u velike negativne se događa u  $\rho = 0.5$  neovisno o promatranom broju vrhova. Kako  $\rho \rightarrow 1$  tako vrijednost kritičnog faktora ide prema malim negativnim vrijednostima. Varijanta zarobljeničke dileme s akumuliranim isplatama daje kvalitativno iste rezultate.

## 6.2 Za igru javnog dobra

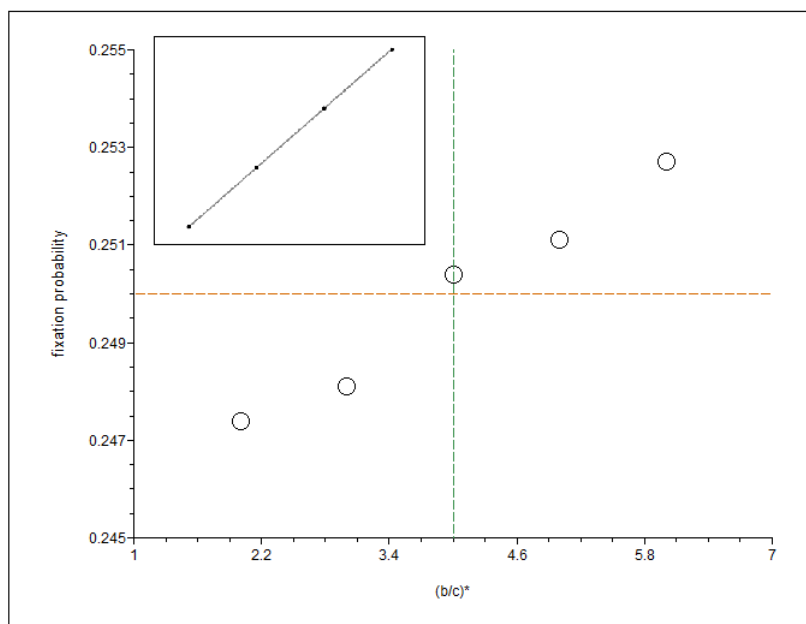
U slučaju igre javnog dobra vidimo da ovisnost  $r^*$  o  $\rho$  izgleda dosta drukčije od ovisnosti parametara u zarobljeničkoj dilemi. Stabiliziranje kooperacije je moguće za puno širi spektar vrijednosti  $\rho$  zahvaljujući članu samointerakcije. Kritični parametar



Slika 6.16: Ovisnost kritičnog faktora o gustoći mreže za igru javnog dobra s više grupa za  $N_1 = 40$ (crna),  $N_2 = 50$ (ljubičasta) i  $N_3 = 60$ (plava)



Slika 6.17: Ovisnost  $r^*$  o gustoći mreže u igri javnog dobra gdje je svaki igrač u grupi samo sa jednim nasumičnim susjedom



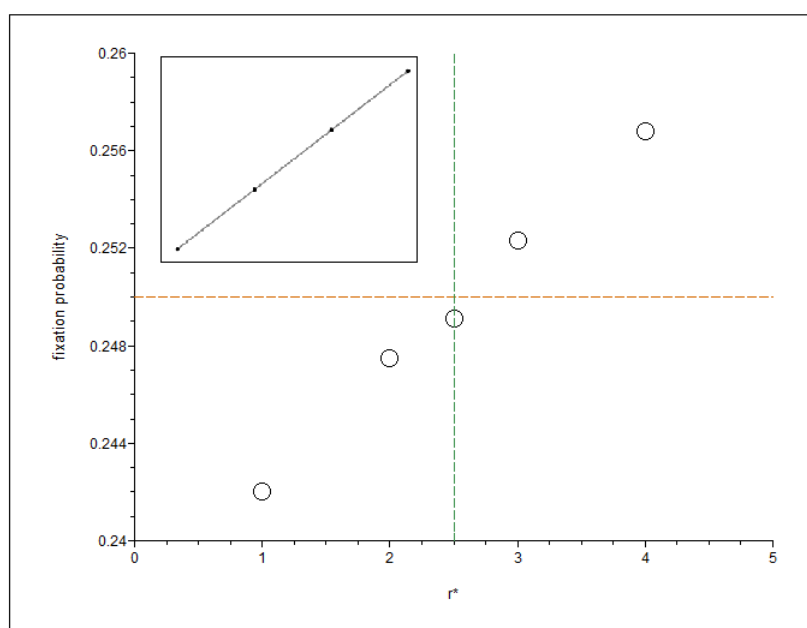
Slika 6.18: Ovisnost vjerojatnosti fiksacije o  $(b/c)^*$  u zatvoreničkoj dilemi u simulacijama za graf na slici ( $N = 4$ ), egzaktni račun predviđa da je kooperacija favorizirana za  $(b/c)^* > 4$

ide u beskonačnost tek kako  $\rho \rightarrow 1$ . Vrijednosti  $r^*$  za varijante igre gdje je igrač član jedne ili više grupa su kvalitativno iste. Za varijantnu igre u kojoj je svaki igrač član grupe samo s jednim nasumičnim susjedom vrijednost  $r^*$  je približno 2 osim za niže vrijednosti  $\rho$  u kojem području vrijednosti  $r^*$  više variraju.

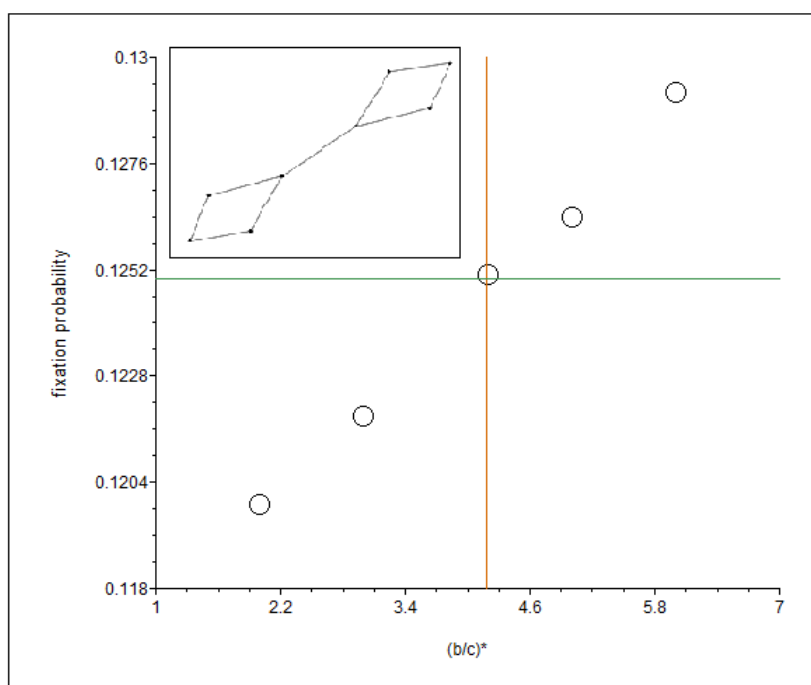
### 6.3 Monte Carlo rezultati

Kako bi provjerili rezultate napraviti ćemo simulacije Monte Carlo metodom. U svakom koraku jedan nasumični vrh je odabran za umiranje te se susjedi natječu za širenje svoje strategije na njegovo mjesto (BD proces). Za svaku mrežu koju testiramo radit ćemo  $10^6$  iteracija igre. Svaka simulacija počinje s jednim nasumično odabranim vrhom koji je kooperator. Simulacija završava nakon što je dosegnuto apsorbirajuće stanje. Vjerojatnost fiksacije računamo dijeleći broj simulacija koje završe u apsorbirajućem stanju svih kooperatora s ukupnim brojem simulacija. Snaga selekcije je  $\delta = 0.03$ . Simulacije su napravljene za zarobljeničku dilemu te za igru javnog dobra s više grupa.

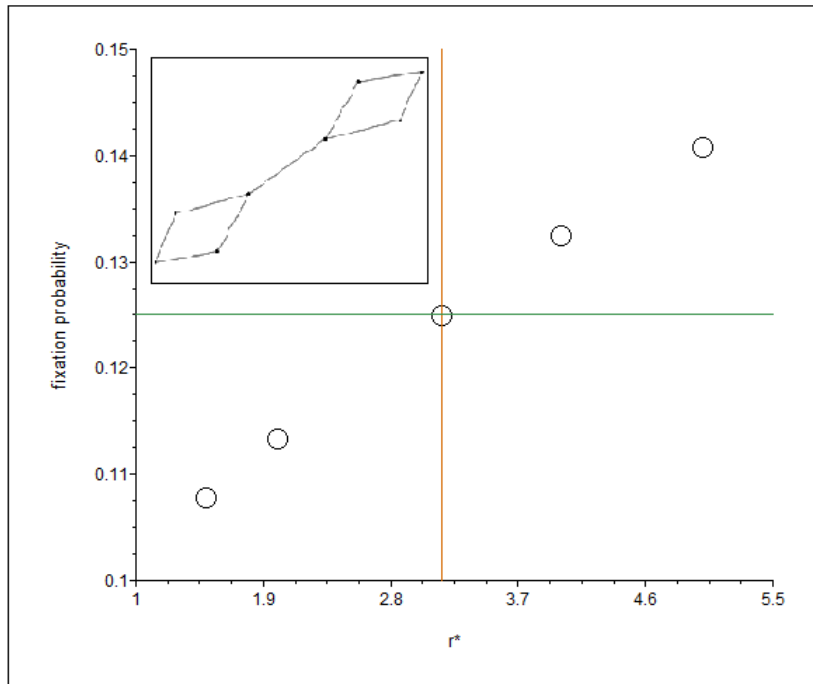




Slika 6.19: Ovisnost vjerojatnosti fiksacije o  $r^*$  u igri javnog dobra u simulacijama za graf na slici ( $N = 4$ ), egzakti račun predviđa da je kooperacija favorizirana za  $r^* > 2,5$



Slika 6.20: Ovisnost vjerojatnosti fiksacije o  $(b/c)^*$  u zatvoreničkoj dilemi u simulacijama za graf na slici ( $N = 8$ ), egzakti račun predviđa da je kooperacija favorizirana za  $(b/c)^* > 4,1889$



Slika 6.21: Ovisnost vjerojatnosti fiksacije o  $r^*$  u igri javnog dobra u simulacijama za graf na slici ( $N = 8$ ), egzaktni račun predviđa da je kooperacija favorizirana za  $r^* > 3,1563$

## 7 Zaključak

Proučavali smo evolucijske igre na mreži te vjerojatnosti fiksacije jednog kooperatora u populaciji defektora za slučaj zatvoreničke dileme i igre javnog dobra. Prvo smo napravili pregled područja počevši od igara za dva igrača u teoriji igara a zatim smo u evolucionarnoj teoriji igara uveli model za račun u srednjem polju. Nakon toga smo pokazali neke od načina evolucije igara na mrežama. Izveli smo egzaktnu formulu u režimu slabe selekcije za vrijednosti kritičnih parametara za koje je kooperacija favorizirana te smo ih izračunali za velik broj mreža. U slučaju obje igre, pronašli smo da parametri jako ovise o strukturi mreže, najviše o gustoći bridova. Za zarobljeničku dilemu kooperacija ne može biti favorizirana nakon određene gustoće dok je u igri javnog dobra favoriziranje kooperacije moguće sve do  $\rho = 1$ .

## Literatura

- [1] Allen et al. Evolutionary dynamics on any population structure. *Nature*, 544(7649):227-230
- [2] Gyorgy Szabo, Gabor Fath. Evolutionary games on graphs. arXiv:cond-mat/0607344v3
- [3] Matjaž Perc, Attila Szolnoki. Coevolutionary games - a mini review. arXiv:0910.0826v1
- [4] Nowak, Martin A. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Belknap Press of Harvard Univ. Press, 2006.
- [5] Gyorgy Szabo, Csaba Toke. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. arXiv:cond-mat\9710096v1
- [6] Perc et al. Statistical physics of human cooperation. *Physics Reports* 687(2017)1-51
- [7] Leyton-Brown, Kevin, and Yoav Shoham. *Essentials of Game Theory: a Concise, Multidisciplinary Introduction*. Morgan & Claypool Publishers, 2010.
- [8] Nowak, M. A, and Sarah Coakley. *Evolution, Games, and God the Principle of Cooperation*. Harvard University Press, 2013.
- [9] Axelrod, Robert. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, 2006.
- [10] Attila Szolnoki, Matjaž Perc. Correlation of positive and negative reciprocity fails to confer and evolutionary advantage: Phase transitions to elementary strategies. arXiv:1310.5139v1
- [11] Ohtsuki, Hisashi, et al. "A Simple Rule for the Evolution of Cooperation on Graphs and Social Networks." *Nature*, vol. 441, no. 7092, 2006, pp. 502–505., doi:10.1038/nature04605
- [12] Grujić, Jelena, et al. "Social Experiments in the Mesoscale: Humans Playing a Spatial Prisoner's Dilemma." *PLoS ONE*, vol. 5, no. 11, Dec. 2010, doi:10.1371/journal.pone.0013749

- [13] Rand, David. “Static Network Structure Can Stabilize Human Cooperation.” Proceedings of the National Academy of Sciences, [www.academia.edu/14959629/Static\\_network\\_structure\\_can\\_stabilize\\_human\\_cooperation](http://www.academia.edu/14959629/Static_network_structure_can_stabilize_human_cooperation).
- [14] Santos et al. Cooperation prevails when individuals adjust their social ties. Doi: 10.1371/journal.pcbi.0020140
- [15] Rand, D. G., et al. “Dynamic Social Networks Promote Cooperation in Experiments with Humans.” Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 108, no. 48, 2011, pp. 19193–19198., doi:10.1073/pnas.1108243108
- [16] Adami C, et al. Evolutionary game theory using agent-based methods. Phys Life Rev (2016), <http://dx.doi.org/10.1016/j.plrev.2016.08.015>
- [17] Herrmann, B., Thoni, C., & Gächter, S. (2008). Antisocial Punishment Across Societies. Science, 319(5868), 1362-1367. doi:10.1126/science.1153808