

# Prostorno-vremenski singulariteti

---

**Paulišić, Mateo**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:738463>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Mateo Paulišić

Prostorno-vremenski singulariteti

Diplomski rad

Zagreb, 2016

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: Istraživački

**Mateo Paulišić**

Diplomski rad

**Prostorno-vremenski singulariteti**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2016

Hvala mentoru dr. sc. Ivici Smoliću na ogromnom strpljenju, trudu, savjetima i znanju koje mi je dao prilikom izrade ovog rada. Hvala mojoj obitelji koja mi je dala beskrajnu podršku i hvala Ani koja me neumorno slušala i podupirala.

## Sažetak

Već je prvo egzaktno rješenje Einsteinovih jednažbi pokazalo divergirajuće ponašanje metrike za neke vrijednosti svojih parametara. Iako je bilo potrebno nekoliko desetljeća da bi analiza pokazala koje su divergencije "prave" a koje samo artefakt koordinatnog sustava, naznaka singulariteta bila je prisutna. U ovom radu definiramo singularitete, na konkretnom primjeru pokazujemo kako dana definicija funkcionira i uvodimo veliku paletu alata kojima je moguće analizirati strukturu prostor-vremena bez ulaženja u detalje konkretnih rješenja. Konačno, prezentiramo, propitujemo i dokazujemo jedan od najvažnijih teorema o singularitetima (Hawking, Penrose 1970.) koji nam uz određena opravdanja daje indikacije da je i naše prostor-vrijeme singularno.

# Space-time singularities

## **Abstract**

The first ever exact solution of Einstein field equations already gave a glimpse of a phenomenon later to be called a singularity. In this work, we will present a carefully motivated definition of singularities, show how it can be used on one of the known exact solutions and then move on to enquiring how often singularities are among non-special space-times. We will introduce a plethora of tools for analyzing models of space-times, investigate their properties, and finally, put them to use in examining and proving one of the most important singularity theorems in the 20th century (Hawking, Penrose 1970). Along with physics-motivated arguments, this theorem will give us an argument to believe that our space-time is also singular.

## Notacija, oznake i pokrate

$A \cup B$	Unija skupova $A$ i $B$
$A \cap B$	Presjek skupova $A$ i $B$
$A \subset B$	$A$ je pravi podskup skupa $B$ ( $\forall x \in A : x \in B$ ali $\exists y \in B : y \notin A$ ).
$A \subseteq B$	$A$ je nepravi podskup skupa $B$ . ( $\forall x \in A : x \in B$ )
$A - B$	Komplement skupa $B$ u skupu $A$ : $(A - B) = \{x \in A : x \notin B\}$
$[a, b]$	Zatvoreni interval na krivulji ili dijelu skupa realnih brojeva
$\langle a, b \rangle$	Otvoreni interval na krivulji ili dijelu skupa realnih brojeva
$\text{int}S$	Unutrašnjost skupa $S$
$\partial S$	Rub skupa $S$
$\bar{S}$	Zatvarač skupa $S$ : $\bar{S} = \text{int}S \cup \partial S$
$I^+(p)$	Kronološka budućnost točke $p$
$I^-(p)$	Kronološka prošlost točke $p$
$J^+(p)$	Kauzalna budućnost točke $p$
$J^-(p)$	Kauzalna prošlost točke $p$
$p \ll q$	Postoji krivulja vremenskog tipa od točke $p$ do točke $q$
$p \leq q$	Postoji krivulja kauzalnog tipa od točke $p$ do točke $q$
$\nabla_T Z$	Kovarijantna derivacija vektora $Z$ u smjeru vektora $T$ ( $\nabla_T Z \equiv T^a \nabla_a Z^b$ )
$\nabla_T T = 0$	Jednadžba paralelnog transporta vektora $T$ , za kauzalni vektor $T$ ovo je jednadžba geodezika.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Singulariteti</b>	<b>4</b>
2.1	Divergencije zakrivljenosti . . . . .	4
2.2	Rupe u mnogostrukosti . . . . .	5
2.3	Proširenja prostor-vremena . . . . .	7
2.4	Definicija singulariteta . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Schwarzschildovo prostor-vrijeme je singularno</b>	<b>11</b>
3.1	Divergencije metrike i prve zamjene koordinata . . . . .	11
3.2	Maksimalno proširenje Schwarzschildovog prostor-vremena . . . . .	14
3.3	Geodezici u Schwarzschildovoj metrici . . . . .	17
3.4	Nepotpun geodezik u Schwarzschildovoj metrici . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Kauzalna struktura</b>	<b>23</b>
4.1	Svjetlosni stožac . . . . .	23
4.2	Prošlosti i budućnosti . . . . .	27
4.3	Granične krivulje . . . . .	30
4.4	Uvjeti kauzalnosti i njihova snaga . . . . .	32
4.5	Globalna hiperboličnost . . . . .	35
4.6	Domene ovisnosti i horizonti . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Energijski uvjeti</b>	<b>45</b>
5.1	Einsteinova jednačnja . . . . .	45
5.2	Slabi energijski uvjet i svjetlosni energijski uvjet . . . . .	45
5.3	Jaki energijski uvjet . . . . .	46
5.4	Narušenja energijskih uvjeta . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Kongruencije geodezika</b>	<b>48</b>
6.1	Kongruencija vremenskih geodezika . . . . .	48
6.1.1	Raychaudhurijeva jednačnja . . . . .	49
6.1.2	Interpretacija $\theta$ kao skalara ekspanzije . . . . .	50
6.2	Kongruencija svjetlosnih geodezika . . . . .	52
6.2.1	Raychaudhurijeva jednačnja za svjetlosne geodezike . . . . .	53
6.3	Tenzor rotacije i smicanja . . . . .	53
6.3.1	Frobeniusov teorem . . . . .	53
6.4	Teorem o fokusiranju . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Konjugirane točke</b>	<b>58</b>
7.1	Konjugirane točke na vremenskim geodezicima . . . . .	58
7.1.1	Ekstrinzična zakrivljenost hiperplohe . . . . .	61



7.2	Konjugirane točke na svjetlosnim geodezicima . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Varijacije krivulja</b>	<b>64</b>
8.1	Varijacije vremenskih geodezika . . . . .	64
8.2	Varijacije svjetlosnih geodezika . . . . .	67
8.3	Varijacije krivulja i kauzalna struktura . . . . .	72
<b>9</b>	<b>Teoremi o singularnosti</b>	<b>76</b>
9.1	Uvjet generičnosti . . . . .	76
9.2	Hawking, Penrose 1970. . . . .	78
<b>10</b>	<b>Zaključak</b>	<b>90</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Spinori i generičnost</b>	<b>92</b>
A.1	Spinori izranjaju iz simplektičkog linearnog prostora . . . . .	92
A.2	Hermitski spinori generiraju realne vektore . . . . .	94
A.3	Tenzori imaju svojstvene spinore . . . . .	94
A.3.1	Elektromagnetski tenzor . . . . .	94
A.3.2	Weylov tenzor . . . . .	95

# 1 Uvod

U općoj teoriji relativnosti već su prva egzaktna rješenja Einsteinovih jednadžbi iznjedrila neka polja koja pokazuju divergirajuće ponašanje, kako se neka od koordinata približava određenoj vrijednosti. Izvan opće teorije relativnosti singulariteti su nešto jednostavniji za razumijevanje, ili bolje rečeno, jednostavnije ih je pomesti pod tepih, poput divergencije potencijala točkastog naboja u mjestu gdje se naboj nalazi. Teorija daje razumne rezultate van tog područja, pa ta divergencija nije toliko problematična. Opća teorija relativnosti pak opisuje samo prostor-vrijeme, pa divergencije ukazuju na to da neke točke prostor-vremena nisu definirane. U toj situaciji nestaje komad pozornice na kojoj se fizika odigrava, pa se problemu singulariteta pristupa pozornije.

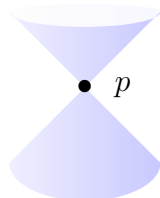
Rad ćemo započeti analizom pojavnosti singulariteta u teoriji i motivirati definiciju koju ćemo koristiti u kasnijim teoremima. Kroz nekoliko koraka, proći ćemo preko raznih načina na koji su znanstvenici pokušavali obuhvatiti pojam singulariteta, i stići do definicije koja generalizira ideju "rupe" u prostor-vremenu korištenjem krivulja koje, iako nemaju kraja, za neku vrijednost svog parametra iščezavaju. Nakon toga slijedi konkretan primjer, Schwarzschildovo prostor-vrijeme, prvo egzaktno rješenje Einsteinovih jednadžbi koje je iznjedrilo fenomen singulariteta i potaklo daljnja istraživanja. Konkretnim postupkom, gledanjem jednadžbi geodezika, pokazat ćemo da Schwarzschildovo prostor vrijeme zadovoljava prethodno uvedenu definiciju singulariteta. Geodezici su analogon ravnim linijama u proizvoljno zakrivljenom prostor-vremenu, i u našem slučaju, odgovaraju krivuljama koje u četiri dimenzije opisuju slobodno padajuće čestice. Možemo ih dobiti gledanjem jednadžbi gibanja čestica na koje ne djeluje sila, ili uvjetom da tangenti vektor krivulje nad svakom točkom krivulje ostane paralelan početno zadanom. Budući da možemo zamisliti kako neki geodezik opisuje fizikalnog promatrača, iščezavanje geodezika odgovarat će nestajanju promatrača iz postojanja. Nakon spoznaje da je Schwarzschildovo prostor-vrijeme singularno, nalazimo se u poziciji postaviti pitanje: "Koliko su singulariteti česti?".

Mogli bismo odgovor tražiti u sakupljanju svih egzaktnih rješenja Einsteinovih jednadžbi i pažljivom klasifikacijom dati argumente kada očekujemo da je neko prostor-vrijeme singularno. No takav nam postupak ne daje puno nade u odgovor na pitanje je li i naše prostor-vrijeme singularno? Koji uvjeti bi trebali biti zadovoljeni da neko potpuno općenito prostor-vrijeme razvije singularitet? Naime, egzaktna rješenja mahom su puna lijepih simetrija i idealnih situacija. Jesu li onda singulariteti samo artefakt nametnutih simetrija, koje su nam služile da bismo se uopće probili do nekog egzaktnog rješenja? Za primjer, postavimo se na trenutak u Newtonovsku teoriju gravitacije, i zamislimo savršeno sferno simetrično distribuiranu prašinu. Vremenska evolucija takvog sustava dovest će do divergencije gustoće materije u središtu, no već i mala perturbacija, poput male doze angularnog momenta, spriječit će da pomno

postavljena prašina kolabira u istu točku. Motivirani ovakvim primjerom, pitamo se kako opisati generičnu situaciju, prostor-vrijeme koje nije "posebno", nije nužno svuda simetrično ni lagano za računanje.

Tu u priču ulaze topološka razmatranja modela prostor-vremena i alati koje je prvenstveno razvijao Roger Penrose. U osnovi, radi se o naprednom promatranju svjetlosnih stožaca na postavljenom modelu prostor-vremena.

Prostor-vrijeme doživljavamo kao skup točaka-događaja. Svjetlosni stožac je koncept razvijen prvotno za specijalnu teoriju relativnosti. Zamislimo li neku točku  $p$  u prostor-vremenu i prihvatimo li brzinu svjetlosti kao krajnju granicu brzine kojom je moguće putovati, tada postoji ograničeni komad prostor-vremena na koji je točka  $p$  mogla dati utjecaj. Isto tako, postoji ograničeni komad prostor-vremena od kuda je bilo moguće utjecati na točku  $p$ . Putanje čestica koje se kreću brzinom svjetlosti



Slika 1.1: Svjetlosni stožac točke  $p$  u  $(2+1)$  dimenzionalnom prostor-vremenu

tada opisuju granicu tog područja, pa zato i ime "svjetlosni stožac". Svjetlosne stošce moguće je definirati i za zakrivljena prostor-vremena, samo što će tada i oni moći biti zakrivljeni i nagibati se kako se pomiču po točkama. Prihvatanjem brzine svjetlosti kao granične brzine, definirali smo i poimanje kauzalnosti, naime, oni događaji  $q$  unutar ili na rubu svjetlosnog stošca neke točke  $p$  u kauzalnom su odnosu sa točkom  $p$ , bilo kao posljedice ili uzroci, zato se ovo područje istraživanja zove kauzalna struktura.

Dakle, odmaknut ćemo se od proučavanja konkretnih rješenja, rješavanja Einsteinovih jednadžbi, jednadžbi gibanja, i promatrati dani model prostor-vremena "iz daljine". Definirat ćemo razne alate vezane uz kauzalne odnose i gledati kakva je kauzalna struktura prostor vremena.

Nakon toga, pažnju usmjeravamo na promatranje krivulja na prostor-vremenu u odnosu na energijske uvjete koje smo nametnuli promatranom modelu. Ključan će biti koncept konjugiranih točaka na geodezicima. Konjugirane točke možemo zamišljati kao par točaka u kojem se infinitezimalno bliski geodezici presijecaju. Njihovo postojanje garantirat će nam da između takvog para točaka postoji krivulja duža od duljine geodezika između konjugiranog para. To će nam biti ključan alat u ukazivanju na kontradikcije u glavnim teoremima.

Uvjet da je prostor-vrijeme generično (ne-simetrično ili ne-specijalno) iskazat ćemo preko uvjeta na Riemannov tenzor, a motivacija za uvođenje takvog oblika uvjeta nalazi se u dodatku A. Konačno, imat ćemo sve alate potrebne za postavljanje pitanja o najopćenitijim uvjetima koje prostor-vrijeme mora zadovoljavati da bi bilo

singularno. U zadnjem poglavlju prezentirat ćemo dva teorema koja odgovaraju na takvo pitanje. Skoro pa špranca po kojoj teoremi o singularnosti funkcioniraju je:

1. Uvjet na energiju i generičnost
2. Uvjet na kauzalnu strukturu
3. Uvjet na ponašanje gravitacije.

⇒ pronalazak nepotpunog geodezika

Dokaze takvih teorema napraviti ćemo korištenjem alata iz kauzalne strukture i svojstva krivulja na prostor-vremenku. Naglasak će svakako biti na teoremu Hawking, Penrose 1970. koji nam uz neka fizikalna opravdanja daje indikacije da je upravo naš svemir singularan.

## 2 Singulariteti

U ovom poglavlju pokušat ćemo dati zadovoljavajuću definiciju singulariteta u teorijama prostor-vremena. Naime, trenutni konsenzus je kako ne postoji konačna definicija tog fenomena, već postoje definicije koje su dovoljno dobre, i to ovisno o načinu na kojem im se pristupa. U drugim teorijama, poput klasične elektrodinamike, pojam singulariteta vezan je uz neku veličinu koja divergira, npr. u elektromagnetskom polju u točki  $p$  je singularitet ako gustoća energije elektromagnetskog polja u točki  $p$  divergira. U kontekstu opće teorije relativnosti, za neka polja i u nekim točkama također nam se pojavljuju divergencije koje bismo htjeli prozvati singularitetima, no stvar je dublja i suptilnija; više ne možemo fiksirati pozadinu i prema njoj određivati koje veličine i gdje divergiraju, a s druge strane, zanimaju nas singulariteti samog prostor-vremena. U 4 koraka motivirat ćemo razne načine kojima bismo htjeli opisati singularitet, i na kraju dati definiciju koju ćemo koristiti u ovom radu.

### 2.1 Divergencije zakrivljenosti

Problem singulariteta jedan je od najranijih problema opće teorije relativnosti. Već je prvo egzaktno analitičko rješenje Einsteinovih jednadžbi (Schwarzschildovo prostor-vrijeme, 1916.) pokazalo divergenciju nekih članova metrike za dvije vrijednosti koordinate  $r = 0, 2M$ . U jedinicama gdje je ( $G = c = 1$ ) Schwarzschildovo rješenje glasi:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

Schwarzschildovo prostor-vrijeme detaljno ćemo analizirati u sljedećem poglavlju, no već na ovoj razini, ono nam daje prvu naznaku kako bismo mogli opipati singularitet:

#### 1. Divergencija članova metrike

Taj kriterij zasigurno nam daje naslutiti kako se sa prostor-vremenom događa nešto čudno. Ako nam metrika opisuje zakrivljenost prostor-vremena, tada njene divergencije opisuju "beskonačnu zakrivljenost" prostor-vremena. Ipak, naslućujemo nekoliko problema.

Prije svega, prostor-vrijeme je definirano kao  $(M, g_{ab})$ , par sačinjen od mnogostrukosti i metrike Lorentzovog tipa. Ovisno o modelu kojim baratamo, metrika ima određen uvjet neprekidnosti/derivabilnosti  $C^k$ , ( $k \geq 0$ ) za svaki  $p \in M$ . Ako u nekoj točki članovi metrike divergiraju, tada ta točka nije definirana u danom modelu prostor-vremena. Dakle prostor-vrijeme postoji bez te točke. Iz tog razloga postavlja se nedoumica; možemo li uopće reći postoji li singularitet, ako on ne postoji u prostor-vremenu? Kako bismo se držali intrinzičnih definicija, bolje je reći da je prostor-vrijeme singularno.

Drugi problem je koordinatna ovisnost članova metrike. Naime, divergencija nekog člana metrike nekada može biti uklonjena dovoljno dobrom promjenom koordinata. Jednostavan primjer je (1 + 2) dimenzionalno prostor-vrijeme Minkowskog zadano u cilindričnim koordinatama:

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2 \quad (2.2)$$

Član  $g_{\theta\theta} = r^2$ , pa je u inverznoj metrici  $g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$ , što divergira za  $r = 0$ , dok u je Kartezijevim koordinatama sve regularno. Jednak problem se javlja ako umjesto članova metrike promatramo članove Riemannovog tenzora. Zbog toga nam je motivacija opisati singularitet koordinatno neovisno.

## 2. Divergencija skalara zakrivljenosti

Moguće je definirati razne skalare pomoću tenzora koji opisuju zakrivljenost, uglavnom Riemannovog, Riccijevog i Weylovog tenzora, i tada njima karakterizirati prostor-vrijeme i njegovu zakrivljenost, primjerice  $R = R_a^a, R_{ab}R^{ab}, R_{abcd}R^{abcd}$ . Prednost ovakvog opisa je svakako invarijantnost na koordinatne transformacije. Ako uzduž neke krivulje neki od skalara zakrivljenosti postane neograničeno velik, tada je to veoma dobra indikacija singularnosti prostor vremena. No, ni ovaj kriterij nije bez problema. Iako je divergencija nekog od skalara zakrivljenosti dovoljan uvjet da bismo prostor-vrijeme prozvali singularnim, nije nužan. Naime, postoje rješenja Einsteinovih jednažbi koja opisuju ravne gravitacijske valove u vakuumu za koja skalari zakrivljenosti isčezavaju iako je Riemannov tenzor singularan [4].

## 3. Divergencija fizikalnih komponenti tenzora zakrivljenosti

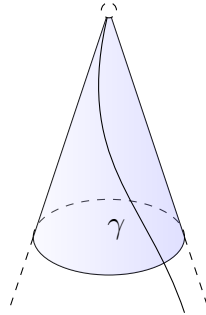
Neka je  $\gamma$  krivulja koja opisuje fizikalnog promatrača. Na tangentnom prostoru neke točke na  $\gamma$  uvodimo ortonormiranu tetradu  $e_i^a, i = 1, 2, 3, 4$ , pa ju paralelno propagiramo uzduž  $\gamma$ . Svaka točka na  $\gamma$  tada ima tangentni prostor sa ovom bazom. Fizikalne komponente tenzora zakrivljenosti tada su  $R_{(i)(j)(k)(l)} = R_{abcd}e_i^a e_j^b e_k^c e_l^d$ . Ako one divergiraju u takvoj bazi, možemo reći da je prostor-vrijeme singularno. No, ni ovime se nismo potpuno izvukli. Moguće je da fizikalne komponentne tenzora zakrivljenosti ne divergiraju kako prilazimo nekoj točki  $p \in \gamma$ , ali ipak nemaju krajnju vrijednost u  $p$ , već oscilatorno ponašanje. Nadalje, možda je točka  $p$  u beskonačnosti, i nijedna krivulja nikada ne stiže do tamo. Takva nam singularnost ima drukčiju težinu od singularnosti koja je na konačnoj udaljenosti.

## 2.2 Rupe u mnogostrukosti

Postoji još jedan problem koji nije riješen niti jednim od 3 navedena pokušaja. Uzmimo za primjer prostor-vrijeme Minkowskog u polarnim koordinatama

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi + dz^2 \quad (2.3)$$

iz njega izrežemo sve točke sa koordinatom  $\phi$  unutar  $0 < \phi < \phi_0 < \pi$ , te identificiramo  $(r, 0, z, t)$  sa  $(r, \phi_0, z, t)$ . Kao da smo izrezali jedan klin, pospajali strane i dobili nešto analogno stošcu. U novoj mnogostrukosti, sve točke osim  $r = 0$  naslijeđuju glatku metriku. Isključimo li i točku  $r = 0$  dobili smo svugdje ravno prostor-vrijeme ( $R_{abcd} = 0$ ) sa jednom patološkom odlikom zbog koje i ovo prostor-vrijeme želimo prozvati singularnim.



U stožastom prostor vremenu postojat će vremenska krivulja  $\gamma$  usmjerena ka  $r = 0$ . Promatrač koji bi realizirao takvu krivulju u jednom bi trenutku iščeznuo iz postojanja. U ovom primjeru ne možemo samo "vratiti" točku  $r = 0$  i nastaviti krivulju  $\gamma$ , naime, takvo vraćanje dovelo bi do kontradikcije. S jedne strane, prostor-vrijeme svugdje bi bilo ravno budući da nasljeđuje metriku početnog prostor-vremena, a s druge strane, računajući opseg neke kružnice na radijusu  $r$  dobili bi  $(2\pi - \phi_0)r \neq 2\pi r$ . Prema tome, dobili smo "rupu" u prostor-vremenu koju ne možemo zakrpati.

Isto tako, one točke u kojima zakrivljenost divergira, po bilo kojem od 3 spomenuta kriterija, moramo isključiti iz modela prostor-vremena. Mogli bismo zamisliti takve promatrače koji usmjereni prema tim točkama također iščeznu iz postojanja. Motivirani rupama i iščezavajućim promatračima dolazimo do nove ideje za definiranje singulariteta.

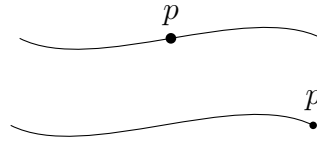
#### 4. Nepotpune krivulje

Ideja iza definicije singulariteta pomoću nepotpunih krivulja je da postoje takve krivulje, usmjerene prema singularitetu, koje "potroše" sve vrijednosti svog parametra prije nego ostvare beskonačnu duljinu, odnosno da postoje krivulje koje ne mogu biti proširene na proizvoljno velike vrijednosti svog parametra. Sada nam treba nekoliko formalnijih definicija.

**Definicija 1.** Točka  $p$  je **krajnja točka** krivulje  $\gamma : [a, b) \rightarrow M$  ako je  $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t) = p$

Ako govorimo o kauzalnim krivuljama, krajnja točka može se nalaziti u kauzalnoj budućnosti svake druge točke na krivulji, pa je onda to buduća krajnja točka, ili u kauzalnoj prošlosti svake druge točke na krivulji, pa je onda to prošlosna krajnja točka.

**Definicija 2.** Krivulja  $\gamma$  je **buduće (prošlosno) beskrajna** ako nema buduću (prošlosnu) krajnju točku. Krivulja  $\gamma$  je **beskrajna** ako nema ni buduću ni prošlosnu krajnju točku.



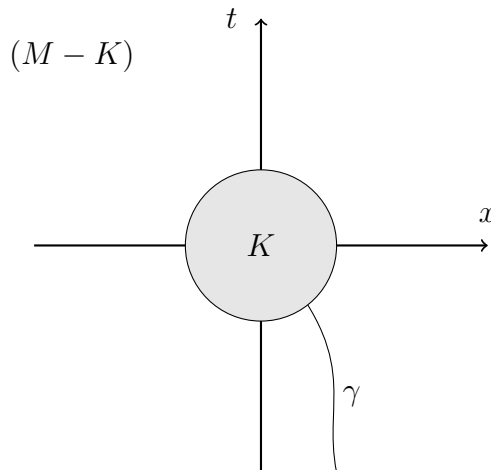
Slika 2.1: Krajnje točke krivulje. U prvom slučaju,  $\gamma$  je definirana do točke  $p$ . To što je krivulju moguće produžiti ne negira definiranu krajnju točku.

**Definicija 3. Polu-krivulja** je takva krivulja koja ima jednu krajnju točku (prošlosnu ili budućnosnu), a u suprotnom smjeru je beskrajna. Polu-krivulja je **potpuna** u odnosu na neki parametar ako je taj parametar neograničen.

Htjeli bismo opisati singularitet nepotpunom polu-krivuljom, reći da je prostor-vrijeme singularno ako ima nepotpunu krivulju beskrajnu u jednom smjeru. Tada bismo obuhvatili ideju singulariteta kao "rupe", bez obzira podrazumijeva li "rupa" divergenciju zakrivljenosti. Ostaje nam još za promotriti koje poteškoće donosi korištenje nepotpunih polu-krivulja za opis singularnog prostor-vremena, i kakve polu-krivulje su dobre za korištenje.

### 2.3 Proširenja prostor-vremena

Ako iz prostor-vremena Minkowskog  $(M, g_{ab})$  izrežemo kompaktnu kuglu  $K$  oko ishodišta, nova mnogostrukost  $(M - K)$  imat će nepotpune polu-krivulje.



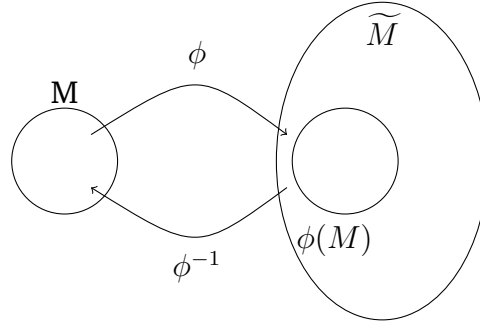
Slika 2.2: (1+1) dimenzionalno prostor-vrijeme Minkowskog bez kompaktne kugle oko ishodišta. Svaka polu-krivulja namjerena prema nedostajućem području je nepotpuna

Ovaj umjetan primjer dobro ocrta kako će nam polu-krivulje pomoći u opisu singulariteta ali ima jednu veliku manu. Kada bismo samo zalijepili natrag  $K$ , tada bi se prostor-vrijeme vratilo u svoj izvorni oblik u kojem nema nepotpunih polu-krivulja. Mi želimo opisati situacije u kojima se rupe ne mogu pokrpati, poput već



navedenog primjera stožastog singulariteta, ili situacije kada neki od skalara zakrivljenosti divergiraju. Sljedeća je definicija time motivirana, želimo baratati sa onim prostor-vremenima koja su već proširena toliko koliko je to moguće.

**Definicija 4.**  $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$  je **proširenje** prostor-vremena  $(M, g_{ab})$  ako i samo ako postoji difeomorfizam  $\phi : M \rightarrow \widetilde{M}$  takav da je  $\widetilde{g}_{ab}|_{\phi(M)} = (\phi^{-1})^* g_{ab}$ . Proširenje je **pravo** ako i samo ako je  $\phi(M)$  pravi podskup mnogostrukosti  $\widetilde{M}$ . ( $\phi(M) \subset \widetilde{M}$ )



Slika 2.3: Preslikavanje  $\phi$  uzima točke sa  $M$  i šalje ih u  $\widetilde{M}$ .  $(\phi^{-1})^*$  obavlja povlačenje metrike  $g_{ab}$  sa  $T_p^* M \times T_p^* M$  na  $T_{\phi(p)}^* \widetilde{M} \times T_{\phi(p)}^* \widetilde{M}$

Za prostor-vrijeme kažemo da je proširivo ako za njega postoji pravo proširenje. Za ilustraciju, pogledajmo sljedeći primjer: Neka je podmnogostrukost  $M \subset \mathbb{R}^2$  prekrivena koordinatama  $x, t$ , takvima da  $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$ . Neka je metrika  $g_{ab}$  na  $M$

$$ds_g^2 = -\frac{dt^2}{t^4} + dx^2$$

Ovu metriku možemo proširiti na cijeli  $\mathbb{R}^2$  pomoću preslikavanja koje točke sa koordinatama  $(x, t)$  preslikava u točke sa koordinatama  $(x, 1/t)$ . Definiramo nove koordinate  $x' = x, t' = 1/t$ . Prema tome

$$\begin{aligned} ((\phi^{-1})^* g)_{x'x'}(\phi(x, t)) &= 1 \\ ((\phi^{-1})^* g)_{t't'}(\phi(x, t)) &= -\frac{1}{t'^4} \end{aligned}$$

Nova metrika je tada

$$ds_{(\phi^{-1})^* g}^2 = -dt'^2/t'^4 + dx'^2 = -dt^2 + dx^2$$

Ovo predstavlja običnu metriku prostor-vremena Minkowskog koja je definirana na cijelom  $\mathbb{R}^2$ , i zadovoljava uvjet  $\widetilde{g}_{ab}|_{\phi(M)} = (\phi^{-1})^* g_{ab}$ . Važno je uočiti kako smo morali definirati dovoljno dobro preslikavanje  $\phi$ . Da je  $\phi$  bilo definirano samo kao inkluzija ( $\phi((x, t)) = (x, t)$ ) dobili bismo novu metriku koja bi bila jednaka staroj  $\widetilde{g}_{ab}|_M = g_{ab}$ , i proširenje na cijeli  $\mathbb{R}^2$  ne bi bilo moguće jer  $g_{tt} = -1/t^4$  divergira za  $t \rightarrow 0$ .

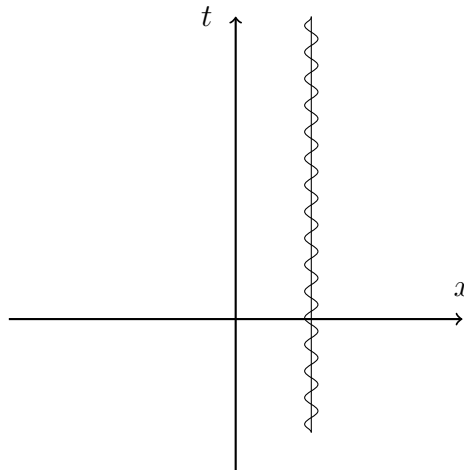
Kako bismo opisali singularitete polu-krivuljama a ujedno izbjegli nedorečenosti situacija u kojima one nabasaju na "rupu" koju je moguće jednostavno zakrpati, odnosno prostor-vrijeme proširiti, koristit ćemo samo ona prostor-vremena koja su proširena najviše koliko je to moguće.

**Definicija 5.** *Prostor-vrijeme je **maksimalno** u odnosu na dogovoreni uvjet neprekidnosti/derivabilnosti ako i samo ako za to prostor-vrijeme ne postoji proširenje*

Moguće je pokazati da svako prostor vrijeme može biti maksimalno prošireno, iako u slučaju Lorentzovih mnogostrukosti, proširenje nije nužno jedinstveno.

## 2.4 Definicija singulariteta

Sada znamo da ćemo baratati maksimalnim prostor vremenom, pa nam u naumu da singularno prostor-vrijeme opišemo nepotpunim polu-krivuljama još ostaje vidjeti kakve krivulje su dobar odabir. Ne možemo odabrati bilo kakvu krivulju, jer će nam i sasvim obična prostor-vremena postati singularna. Uzmimo za primjer prostor-vrijeme Minkowskog. Neka je  $\gamma$  geodezik sa početkom u točki  $p$ . Njegova je duljina beskonačna, no taj geodezik možemo opisati proizvoljno bliskom vremenskom krivuljom neograničenog ponašanja akceleracije, čija će duljina uvijek biti proizvoljno blizu 0.



Slika 2.4: Nagib vijugave krivulje po dijelovima je proizvoljno blizu nagibu svjetlosne krivulje. Kako je duljina svjetlosne krivulje 0, duljina vijugave krivulje proizvoljno je blizu 0. Upravo vijuge su područja neograničene akceleracije

Iz tog razloga ograničavamo razmatranje samo na krivulje ograničene akceleracije. U većini slučajeva, dovoljno je promatrati geodezike, koji su krivulje bez akceleracije. Postoji još samo jedna prepreka: R. Geroch [6] je dao primjer prostor-vremena u kojem su svi geodezici potpuni, no postoji vremenska krivulja ograničene akceleracije čija je vlastita duljina konačna. Takvu krivulju mogla bi ostvariti raketa uz konačno potrošenog goriva, i iščeznuti iz postojanja. Iz tog razloga nije sasvim opravdano koristiti samo geodezike za traženje singulariteta, već zahtijevati da, ako singulariteta nema, tada sve krivulje ograničene akceleracije imaju neograničenu vlastitu duljinu.

Općenitije od toga, umjesto da gledamo vlastitu duljinu (duljinu definiranu vlastitim vremenom) možemo za proizvoljnu krivulju definirati poopćenje afinog parametra: Neka je  $\gamma : [0, v_+) \rightarrow M, v_+ \leq \infty$ . Odaberimo ortonormiranu bazu  $e_i^a(0)$  za

tangentni prostor nad  $\gamma(0)$  i paralelno ju propagirajmo uzduž  $\gamma(v)$ . Tada nad svakom točkom  $\gamma(v)$  imamo definiranu bazu tangentnog prostora  $e_i^a(v)$ . Tangentni vektor krivulje  $V = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\gamma(v)}$  tada možemo pisati kao

$$V^a = \sum_{i=1}^4 X^i(v) e_i^a(v) \quad (2.4)$$

Definiramo poopćeni afini parametar

$$\lambda(v) = \int_0^v \left( \sum_{i=1}^4 (X^i(v'))^2 \right)^{(1/2)} dv' \quad (2.5)$$

Poopćena afina duljina je tada jednaka  $\lambda(v_+)$ .

Ako je  $\gamma$  geodezik, tada je njegova poopćena afina duljina upravo njegova afina duljina. Za proizvoljnu vremensku krivulju  $\gamma$ , poopćena afina duljina bit će neograničena samo ako je i vlastita duljina krivulje neograničena. Moguće je pokazati da jedini slučaj kada je poopćena afina duljina neograničena, a vlastita duljina ograničena, je kada krivulja doživljava neograničeno ponašanje akceleracije (poput vijuganja iz slike 2.4). Krivulja čija je poopćena afina duljina neograničena zove se **b-potpuna** krivulja. Prostor-vrijeme koje sadrži barem jednu b-nepotpunu krivulju zovemo b-nepotpuno.

Uz sva ova razmatranja, sada možemo dati dovoljno dobru definiciju singularnosti:

**Definicija 6.** *Prostor-vrijeme je **singularno** ako i samo ako je b-nepotpuno*

Važno je uočiti kako je prostor-vrijeme koje sadrži nepotpune geodezike istodobno i b-nepotpuno, dok nužno ne vrijedi obrat. Prostor-vrijeme koje sadrži barem jedan nepotpuni geodezik zovemo geodetski nepotpuno. U ovom radu prezentirat ćemo teoreme o singularitetima koji će se oslanjati na geodetsku nepotpunost, i time će zadovoljavati i definiciju 6.

### 3 Schwarzschildovo prostor-vrijeme je singularno

U ovom poglavlju proći ćemo kroz Schwarzschildovo rješenje i konkretno pokazati da je ono uz definiciju 6 singularno. Schwarzschildovo rješenje prvo je egzaktno rješenje Einsteinovih jednažbi. Jedinstveno je sferno simetrično rješenje za vakuum i njegova metrika glasi:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

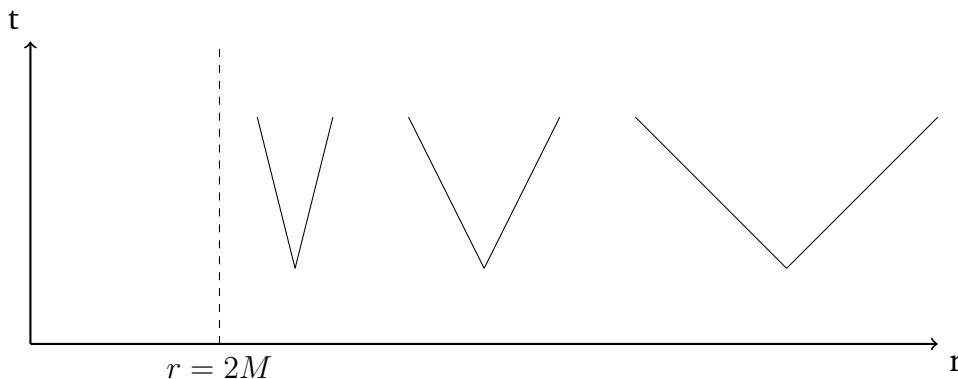
gdje  $M$  interpretiramo kao masu tijela izvan kojega promatramo sustav, što je identificirano usporedom sa Newtonovskom granicom. Navedena metrika veoma dobro opisuje ponašanje masivnih i bezmasenih tijela u blizini nekog astofizičkog objekta, poput zvijezde ili planeta i prošla je brojne eksperimentalne provjere od kojih su najistaknutije: precesija Merkura, gravitacijski crveni pomak i savijanje putanje svjetlosnih zraka.

#### 3.1 Divergencije metrike i prve zamjene koordinata

Već je iz jednažbe (3.1) vidljivo kako postoje dvije problematične vrijednosti radijusa;  $r = 0, r = 2M$ . Naime, prvi i drugi član u metrici divergiraju za te vrijednosti koordinate  $r$ . Zanima nas kako se prostor-vrijeme ponaša u njihovoj okolini. Za početak, promotrit ćemo područje oko  $r = 2M$ . Pogledamo ponašanje svjetlosnih stožaca, koji nam ujedno opisuju i kauzalnu strukturu Schwarzschildovog rješenja. Ostavimo li koordinate  $\theta, \phi$  konstantne, tada iz (3.1) možemo dobiti:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (3.2)$$

jednažbu koja u ovim koordinatama točno opisuje nagib svjetlosnih stožaca. Za  $r \rightarrow \infty$  nagib je  $\frac{dt}{dr} = \pm 1$ , što i očekujemo za područje ravnog prostora, no za  $r \rightarrow 2M$ , nagib divergira.



Čini se kao da svjetlosna zraka usmjerena prema  $r = 2M$  nikada tamo ne stiže, već samo asimptotski prilazi. Ipak, to je samo privid i rezultat odabira koordinatnog sustava, što možemo vidjeti ako napravimo zamjenu koordinata. Za početak uvodimo:

$$r^* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (3.3)$$

Time smo metriku doveli u sljedeći oblik:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) (-dt^2 + dr^{*2}) + [r(r^*)]^2 d\Omega^2 \quad (3.4)$$

Prednost ovakve zamjene je da se svjetlosni stošci sada ne sažimaju, odnosno, koordinata  $r^*$  rješava jednadžbu (3.2) pa je nagib svjetlosnih stožaca opisan preko:

$$t = \pm r^* + \text{const.} \quad (3.5)$$

Nadalje, članovi metrike ne divergiraju u  $r = 2M$ , no ta je ploha u novim koordinatama pomaknuta u beksonačnost  $r^*(2M) = -\infty$ . Sljedeći korak je uvesti koordinate koje su prilagođene na svjetlosne geodezike opisane koordinatama  $(t, r^*)$ .

$$\begin{aligned} v &= t + r^* \\ u &= t - r^* \end{aligned} \quad (3.6)$$

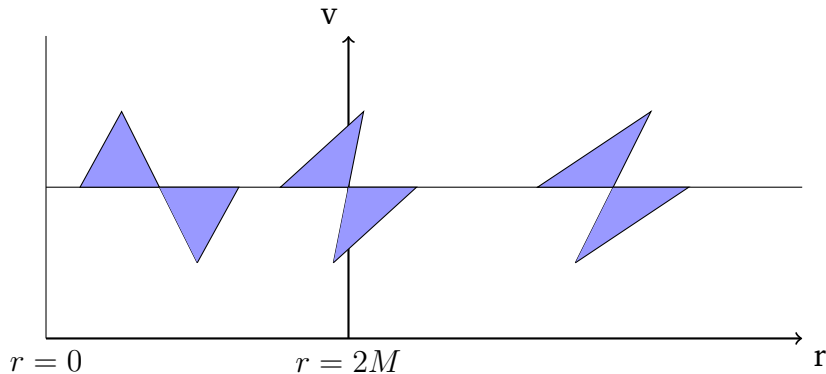
$v = \text{const.}$  tada predstavlja upadajuće svjetlosne geodezike, a  $u = \text{const.}$  predstavlja izlazeće svjetlosne geodezike. Vratimo li se sada originalnoj koordinati  $r$ , a koordinatu  $t$  zamijenimo novom koordinatom  $v$  metrika poprima oblik

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 d\Omega \quad (3.7)$$

Ovako odabrane koordinate  $(v, r, \theta, \phi)$  nazivaju se Eddington-Finklestein koordinate i imaju za nas dobra svojstva. Za početak, determinanta metrike je  $\det g = -r^4 \sin^2(\theta)$  koja je (ako privremeno zanemarimo ovisnost o  $\theta$ ) regularna u  $r = 2M$ . Drugo dobro svojstvo je da radijalni svjetlosni geodezici imaju oblik:

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{upadajući geodezici} \\ 2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & \text{izlazeći geodezici} \end{cases} \quad (3.8)$$

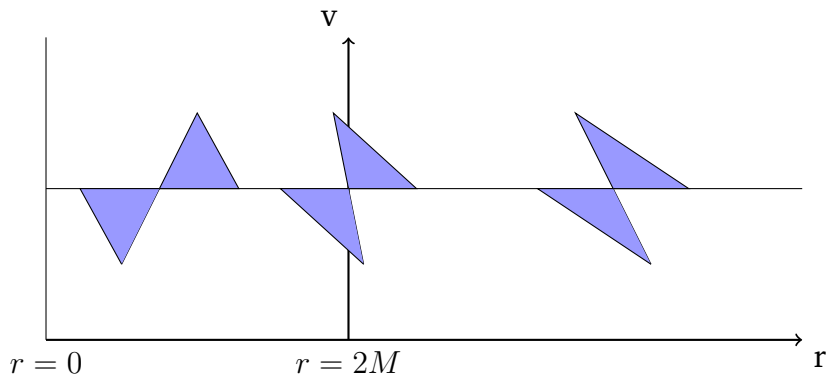
Slika 3.1: Svjetlosni stošci za Schwarzschildovo rješenje u  $(v, r)$  koordinatama)



Trenutno najvažnija stvar za uočiti je da u novim koordinatama svjetlosni geodezici bez problema prelaze preko  $r = 2M$ , odnosno divergencija za tu vrijednost radijusa u početnoj metrici na neki način nije fundamentalna. Nadalje, vidljivo je iz slike 3.1 kako se svjetlosni stošci počevši iz beskonačnosti, pa prema  $r = 0$  naginju prema lijevo, i nakon što prođu  $r = 2M$ , svi budućnosni smjerovi okrenuti su prema  $r = 0$ . Svaka čestica koja prođe  $r = 2M$  tada nužno mora nastaviti prema  $r = 0$ , i nikako se ne može vratiti u područje  $r > 2M$ . Ploha  $r = 2M$  zove se **horizont događaja**, a budući da ništa ne može izaći iz područja unutar horizonta događaja, to se područje zove **crna rupa**.

Sljedeća važna stvar koja se ovdje dogodila je da smo napipavanjem putanja buduće usmjerenih svjetlosnih geodezika na neki način proširili naše originalno prostor-vrijeme. Naime počeli smo sa dvije divergencije u metrici, koje bi bez daljnje analize ukazivale na to da  $r = 0$  i  $r = 2M$  nisu uključene u naše prostor-vrijeme. Adaptirali smo koordinate na svjetlosne geodezike i otkrili kako preko  $r = 2M$  možemo preći bez poteškoća. Upravo kako smo opisali u 1. poglavlju, našli smo koordinate u kojima se metrika bolje ponaša, i našli smo proširenje našeg prostor-vremena. Sada se postavlja pitanje; do kuda možemo tjerati tu igru? Na koje sve geodezike i kamo usmjerene možemo sjesti i opipavati okolinu? Koja je maksimalna verzija našeg prostor-vremena? Za odgovore na ova pitanja trebali bismo za početak sjesti na prošlosno usmjerene svjetlosne geodezike, što bi odgovaralo odabiru koordinata  $(u, r, \theta, \phi)$ . Tada bi analiza svjetlosnih stožaca tekla analogno kao i do sada, uz razliku da bismo u područje  $r < 2M$  mogli ući samo na prošlosnim geodezicima, odnosno, svaki budućnosno usmjeren geodezik napustio bi područje unutar  $r = 2M$ .

Slika 3.2: Svjetlosni stošci za Schwarzschildovo rješenje u  $(u, r)$  koordinatama)



Konačno, trebali bismo pogledati i prostorne geodezike, i tako bismo otkrili još jedno područje prostor-vremena. Postoje koordinate koje opisuju maksimalno prošireno Schwarzschildovo prostor-vrijeme, i zovu se Kruskal-Szekeresove koordinate.

### 3.2 Maksimalno proširenje Schwarzschildovog prostor-vremena

Prije nego se upustimo definiranje Kruskal-Szekeresovih koordinata, pogledajmo još što se događa u  $r = 0$ . Metrika već u originalnom obliku (3.1) za tu vrijednost divergira. Motivirani prethodnim konstrukcijama, mogli bismo pretpostaviti da postoji dovoljno pametna promjena koordinata, koja će nam ipak ukazati na to da se u  $r = 0$  ne događa ništa pretjerano problematično, pa ćemo i preko te vrijednosti moći proširiti naše prostor-vrijeme. To ipak nije tako. Naime, iako su komponente metrike veličine koje su ovisne o koordinatnom sustavu, pa se njegovom promjenom nekada možemo izvući iz problema, kao u 2. koraku motiviranja definicije singulariteta iz prvog poglavlja, možemo pogledati veličine koje su invarijantne na promjenu koordinatnog sustava. Konkretno, za Schwarzschildovu metriku zanimljiv nam je Krestschmannov skalar:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (3.9)$$

Ta veličina veoma brzo divergira kako se  $r$  približava nuli i neovisna je o koordinatnom sustavu. Po tome je divergencija u  $r = 0$  fundamentalnija od divergencije u  $r = 2M$ . Ne postoji dovoljno pametna koordinatna transformacija ni geodezik na koji možemo sjesti i opipavati okolinu, a da bi izbjegli divergenciju u  $r = 0$ . Iz tog razloga  $r = 0$  ne može biti dio našeg maksimalnog prostor vremena, za svako proširenje, ta točka morat će ostati "vani". Prema tome, Kruskal-Szekeres koordinate morat će isključivati tu točku. Sada smo dobili prvu pravu naznaku da je Schwarzschildovo rješenje singularno, ali namjera nam je to eksplicitno pokazati koristeći definiciju 6.

Krenimo dalje prema definiranju Kruskal-Szekeresovih koordinata, koje će opisivati maksimalno prošireno Schwarzschildovo prostor-vrijeme. Umjesto  $(t, r)$  iskoristimo već definirane  $(v, u)$ . Tada metrika poprima oblik

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) (dvdu + dudv) + r^2 d\Omega \quad (3.10)$$

Mana ovog odabira je da se ploha  $r = 2M$  ponovo nalazi u  $\infty$ , što je vidljivo iz definicija (3.5) i (3.6). To rješavamo novom zamjenom, koja će "beskonačnosti učiniti konačnima".

$$\begin{aligned} v' &= e^{v/4M} \\ u' &= -e^{-u/4M} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Metrika u ovim koordinatama glasi

$$ds^2 = -\frac{15G^3M^3}{r} e^{-r/2M} (dv'du' + du'dv') + r^2 d\Omega \quad (3.12)$$

Iako je ovakav oblik metrike savršeno regularan za  $r = 2M$  i sve točke izvan i unutar horizonta do  $r = 0$ ,  $(v, u)$  su svjetlosne koordinate u smislu da su tangentni vektori  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  svjetlosnog tipa. Želja nam je imati koordinatni sustav u kojem je jedna od

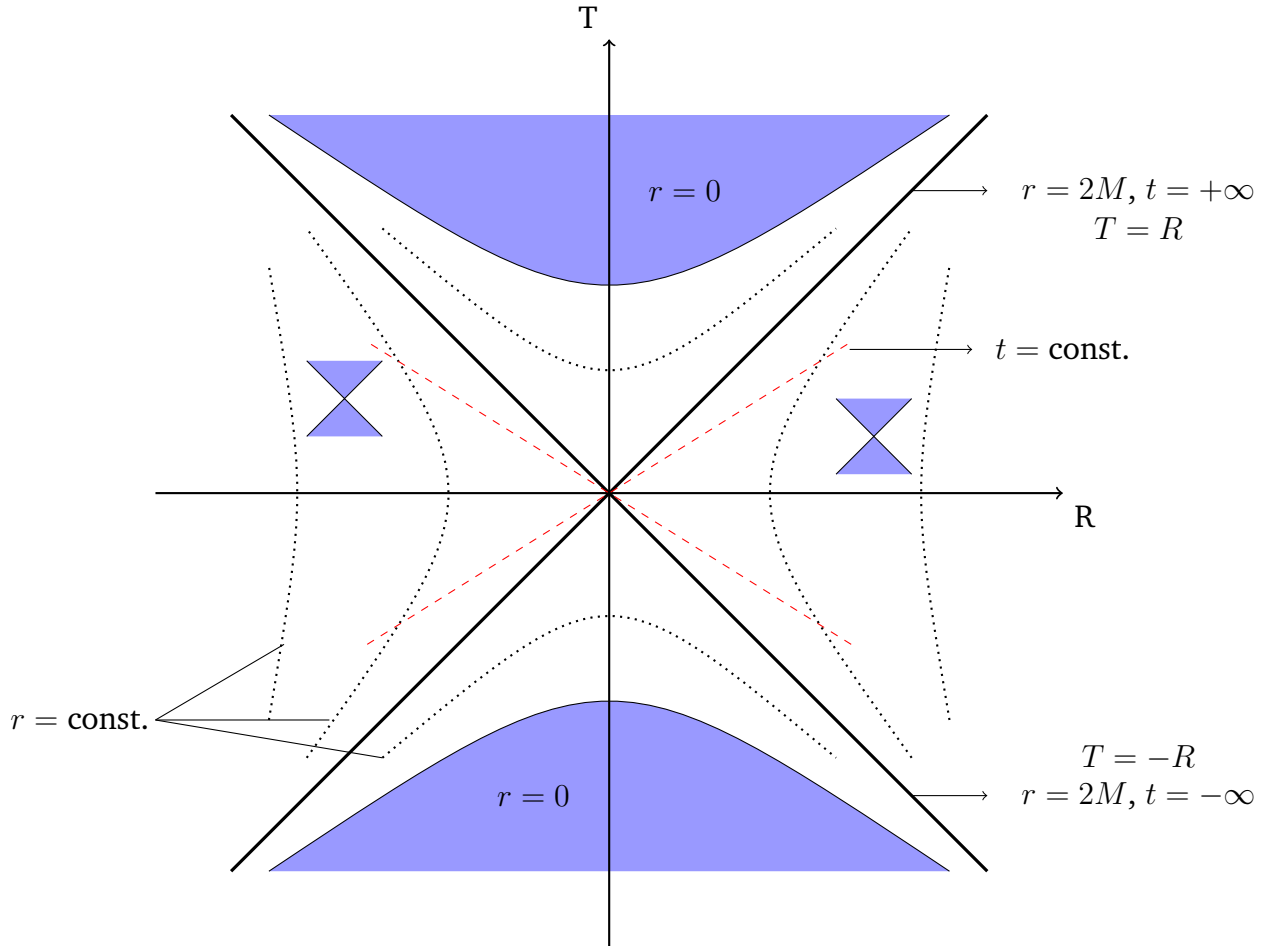
koordinata vremenskog tipa, a ostale prostornog tipa. Prema tome, pravimo još i zadnju zamjenu koordinata:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ R &= \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

i dolazimo do konačnog oblika metrike u Kruskal-Szekeresovim koordinatama  $(T, R, \theta, \phi)$ :

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2gM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (3.14)$$

gdje zbog jednostavnosti u kutnom dijelu pišemo  $r$  definiran implicitno preko  $T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}$ .



Slika 3.3: Kruskalov dijagram - maksimalno prošireno Schwarzschildovo rješenje u Kruskal-Szekeresovim koordinatama uz potisnute  $\theta$  i  $\phi$

Kruskal-Szekeresove koordinate imaju nekoliko iznimno dobrih svojstava koje možemo izravno vidjeti iz slike 3.2:

- $T = \pm R + \text{const.}$  opisuju svjetlosne krivulje svugdje pod istim nagibom kao u ravnom prostoru (svjetlosni stošci svugdje su jednakog nagiba)

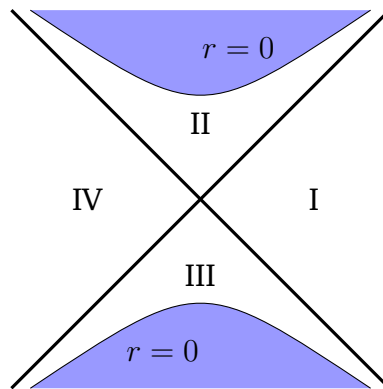


- Horizont događaja  $r = 2M$  je na konačnoj udaljenosti  $T = \pm R$
- plohe konstantnog  $r$  (crne točkaste linije) opisuju hiperbole u  $R - T$  ravnini  $T^2 - R^2 = \text{const.}$
- plohe konstantnog  $t$  (crvene isprekidane linije) su ravne linije kroz ishodište u  $R - T$  ravnini  $\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right)$

Koordinate  $(T, R)$  mogu poprimiti sve vrijednosti uz ograničenje da nikada ne pređu preko  $r = 0$ , pa su one definirane za

$$\begin{aligned} -\infty &\leq R \leq \infty \\ T^2 &< R^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Za bolje razumijevanje Kruskalov dijagram podijelit ćemo u područja:



Slika 3.4: Kruskalov dijagram podijeljen u 4 područja

- (I)  $r > 2M$ , područje dobro definirano u početnim koordinatama
- (II) Crna rupa, područje unutar horizonta događaja koje smo otkrili promatranjem budućosnih svjetlosnih geodezika
- (III) Vremenski obratna slika crne rupe, bijela rupa, područje iz kojega sve izlazi, područje koje bismo otkrili promatranjem prošlosnih svjetlosnih geodezika
- (IV) Zrcalna slika područja (I), područje kojemu je nemoguće pristupiti kauzalnim putanjama i koje se otkriva prilagođavanjem koordinata na prostorne geodezike.

U Kruskal-Szekeresovim koordinatama konačno imamo maksimalnu verziju Schwarzschildovog rješenja. Međutim, i dalje je pristupa jedna "nedostajuća" točka,  $r = 0$ . Već iz pogleda na Kruskalov dijagram možemo naslutiti da se ona nalazi na konačnoj udaljenosti od bilo koje druge točke unutar prostor-vremena. Kada bi neka čestica stigla do  $r = 0$ , nestala bi iz postojanja, jer tamo nije definirano prostor-vrijeme. To je točka koja je, zbog već navedenih razloga, isključena iz našeg prostor-vremena.

Ovakve su "točke", "rupe", "nedostajuća područja" upravo ono zbog čega prostor-vrijeme zovemo singularnim. Kako bi zadovoljili definiciju 6 koristit ćemo geodezike u maksimalno proširenom Schwarzschildovom prostor-vremenu. Pokazat ćemo da se  $r = 0$  nalazi na konačnoj udaljenosti od bilo koje druge točke, mjereno vlastitim vremenom ili afinim parametrom geodezika, odnosno da neki geodezik usmjeren prema  $r = 0$  prije neke vrijednosti svog afinog parametra "mora stati".

### 3.3 Geodezici u Schwarzschildovoj metrici

Kako bismo promotriili konkretne geodezike usmjerene ka singularitetu, trebaju nam eksplicitna rješenja geodetske jednadžbe. Umjesto direktnog rješavanja geodetske jednadžbe, iskoristit ćemo činjenicu da promatrani sustav ima sfernu simetriju i simetriju na vremenske translacije, odnosno, da za promatrano prostor-vrijeme znamo 4 Killingova vektora. Za Killingov vektor vrijedi

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{const.}$$

za  $\lambda$  afini parametar geodezika, u odabranom koordinatnom sustavu  $\{x^\mu\} = t, r, \theta, \phi$ . Za geodezike postoji još jedna konstanta

$$e = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \begin{cases} -1 & \text{prostorni geodezici} \\ 0 & \text{svjetlosni geodezici} \\ 1 & \text{vremenski geodezici} \end{cases} \quad (3.16)$$

3 Killingova vektora odnose se na sačuvanje iznosa i smjera angularnog momenta, odnosno simetrije na prostorne rotacije u sustavu. U kartezijevom sustavu odgovarali bi sačuvanju angularnog momenta u  $x, y, z$  smjeru, a u sfernom sustavu očuvanju apsolutne veličine angularnog momenta i njegovog smjera u  $\theta, \phi$ . Ako geodezike promatramo tako da zadamo  $\theta = \pi/2$ , iskoristili smo činjenicu da je u sustavu sačuvan smjer angularnog momenta, "izgubili" smo dva Killingova vektora, ona koja generiraju sačuvanje smjera, no nismo izgubili na općenitosti. Naime, iako se sada geodezici nalaze u ekvatorijalnoj ravnini, rotacijom sustava možemo ih promatrati kao u nekoj drugoj ravnini. Ostaju nam Killingovi vektori koji generiraju sačuvanje energije:

$$K^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.17)$$

i iznosa angularnog momenta;

$$R^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.18)$$

Iskoristimo metriku za spuštanje njihovih indeksa i dobijamo:

$$K_\mu = \left( - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right), 0, 0, 0 \right) \quad (3.19)$$

$$R_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta) = (0, 0, 0, r^2) \quad (3.20)$$

jer smo odabrali  $\theta = \pi/2$ . Prema tome, dvije sačuvane veličine, energija i iznos angularnog momenta su:

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (3.21)$$

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (3.22)$$

Za masivne čestice ovo su gustoća energije po jediničnoj masi i gustoća angularnog momenta po jediničnoj masi. Raspišemo li (3.16) i uvrstimo (3.21) dolazimo do jednadžbe:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -e \quad (3.23)$$

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + e\right) = 0 \quad (3.24)$$

ili pojednostavljeno, dobili smo jednostavnu jednadžbu za  $r(\lambda)$ .

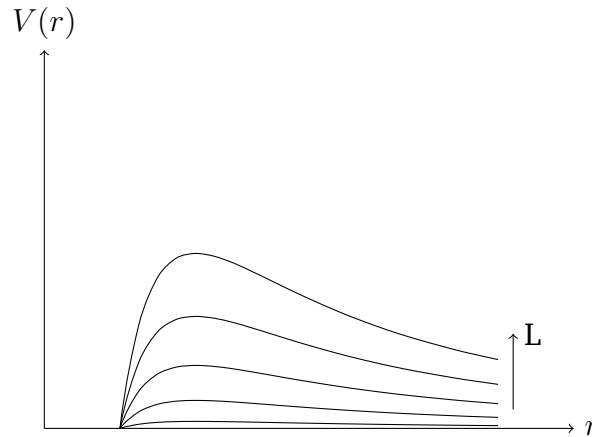
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} E^2 \quad (3.25)$$

gdje je potencijal

$$V(r) = \frac{1}{2} e - e \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} \quad (3.26)$$

uz  $e$  definiran preko (3.16).

Za svjetlosne geodezike ( $e = 0$ ) postoji samo jedna ekstremalna točka potencijala koja definira nestabilnu cirkularnu orbitu,  $r_c = 3M$ .

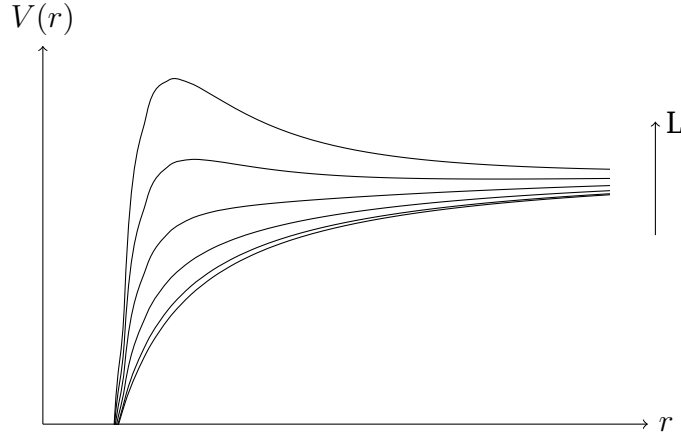


Slika 3.5: Oblik potencijala (3.26) za bezmasene čestice. Vidljivo je kako za svaku vrijednost  $L$  postoji samo jedna točka cirkularne orbite

Za vremenske geodezike ( $e = 1$ ) postoje dvije takve vrijednosti. Iz traženja točaka za ekstremalne vrijednosti potencijala dobijamo

$$r_{min} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M}$$

U granici  $L \rightarrow \infty$  dvije točke cirkularnih orbita su  $(\frac{L^2}{M}, 3M)$ . Determinanta isčezava za  $L = \sqrt{12}M$  i za manji  $L$  ne postoji stabilna cirkularna orbita. Između točaka cirkularnih orbita geodezik se nalazi u stabilnoj orbiti promjenjivog radijusa.



Slika 3.6: Oblik potencijala (3.26) za masivne čestice. Za dovoljno veliki  $L$  postoje dvije točke cirkularne orbite

### 3.4 Nepotpun geodezik u Schwarzschildovoj metrici

Sada smo u mogućnosti usmjeriti pažnju na konkretne geodezike usmjerene prema singularitetu. Krenimo tako da pogledamo jedan buduće beskrajni vremenski geodezik  $\gamma$ . Duljinu vremenskog geodezika  $\tau(r)$  možemo dobiti iz jednadžbe (3.25). Afini parametar je za vremenski geodezik vlastito vrijeme, prema tome

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} E^2 \quad (3.27)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{E^2 - 2V(r)} \quad (3.28)$$

$$\tau(r) = \pm \int_{r_0}^r \sqrt{E^2 - 2V(r)}^{-1} dr \quad (3.29)$$

Za neki geodezik u Schwarzschildovom prostor-vremenu moguća su tri slučaja: početna točka geodezika se nalazi u području (I) (izvan crne rupe), na horizontu, ili u području (II) (unutar horizonta). Ako je početna točka u nekim od ostalih područja, simetrijama sustava ti su slučajevi ekvivalentni navedenima.

1. Početna točka geodezika nalazi se u području (I):

Tada su moguća četiri raspleta.

- (i) Energija čestice jednaka je maksimumu potencijala, što daje nestabilnu cirkularnu orbitu. Geodezik je tada buduće beskrajan.

- (ii) Energija čestice je takva da geodezik oscilira između dvije vrijednosti radijusa, što ponovo dalje beskrajnu duljinu
- (iii) Energija čestice veća je od svake potencijalne barijere i geodezik je usmjeren tako da  $r \rightarrow \infty$ , što daje beskrajnu duljinu geodezika.
- (iv) Energija čestice veća je od svake potencijalne barijere i geodezik je usmjeren prema  $r = 0$ . Tada geodezik sigurno dolazi do horizonta.

Već smo kroz konstrukciju maksimalno proširenog Schwarzschildovog rješenja vidjeli da svjetlosni geodezici prolaze preko horizonta, a sada to možemo eksplicitno pokazati i za vremenske geodezike.

**Lema 1.** *Vlastito vrijeme radijalno slobodno padajuće čestice u Schwarzschildovom prostor-vremenu od točke s radijusom  $R$  do točke s radijusom  $r$  je*

$$\Delta\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left(2\left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right)$$

*Dokaz:* Iz jednadžbe (3.25) možemo dobiti  $\frac{dr}{d\tau} = -\left(E^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}$ . Predznak je negativan jer promatramo česticu koja pada prema središtu. Neka je čestica u  $R$  ispuštena iz mirovanja. Tada vrijedi  $\left(E^2 - 1 + \frac{2M}{R}\right)^{1/2} = 0$ , odnosno  $E^2 = 1 - \frac{2M}{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= -\left(1 - \frac{2M}{R} - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \\ d\tau &= -\frac{1}{\sqrt{2M}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^{(1/2)} \\ \Delta\tau &= \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left(2\left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

□

Iz jednadžbe za vlastito vrijeme vidimo kako je ono konačno kada  $r \rightarrow 2M$ , pa geodezik ima produljenje nakon  $r = 2M$ . Prema tome, geodezik iz raspleta (iv) ulazi u područje unutar horizonta događaja.

2. Početna točka geodezika nalazi se u području (II), unutar horizonta događaja

Za ovaj slučaj ponašanje geodezika opisuje sljedeća lema:

**Lema 2.** *Bilo koja materijalna čestica nakon prelaska horizonta događaja u Schwarzschildovom prostor-vremenu mora nastaviti prema  $r = 0$ .*

*Dokaz:* U Eddington - Finkelsteinovim koordinatama  $(v, r, \theta, \phi)$  za materijalnu česticu vrijedi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2drdv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) < 0 \quad (3.31)$$

$$2drdv < \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.32)$$

Budući da je desna strana uvijek negativna za  $r < 2m$

$$2drdv < 0 \quad (3.33)$$

$v = \text{const.}$  opisuje svjetlosne geodezike u  $(t, r^*)$  ravnini, pa za fizikalne promatrače mora vrijediti  $dv > 0$  (nagib geodezika fizikalnog promatrača ne može biti manji od nagiba svjetlosnog geodezika). Prema tome, za područje  $r < 2M$  sigurno vrijedi  $dr < 0$ , pa svaka materijalna čestica u tom području mora nastaviti prema  $r = 0$ .  $\square$

### 3. Početna točka geodezika nalazi se na horizontu događaja

Horizont događaja je ploha svjetlosnog tipa. Budući da mi promatramo vremenske geodezike, za bilo koji  $\tau > 0$ ,  $\gamma(\tau)$  ući će ili u područje (I) ili u područje (II), pa se ovaj slučaj svodi na slučaj 1. ili 2.

Sada znamo da će čestica sa dovoljnom energijom, usmjerena prema  $r = 0$  sigurno preći horizont događaja i tada nužno nastaviti prema  $r = 0$ , i u mogućnosti smo pokazati da vrijedi sljedeći rezultat:

**Lema 3.** *Beskrajni vremenski geodezik  $\gamma(\tau)$  radijalno padajućeg promatrača u Schwarzschildovom prostor-vremenu, uz dovoljno veliku energiju je nepotpun.*

*Dokaz:* Iz prethodnih razmatranja znamo da će, uz dovoljno veliku energiju, geodezik prijeći preko potencijalne barijere i ući u područje horizonta. Bez gubitka općenitosti tada možemo definirati njegovu početnu točku unutar područja  $r < 2M$ . Da bi dokazali da je geodezik nepotpun, moramo pokazati kako je njegova duljina ograničena odozgo. Iz normiranja vektora brzine  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$  slijedi

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -1 \quad (3.34)$$

Za  $r < 2M$  svi članovi osim  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$  su pozitivni, pa slijedi

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 < -1 \quad (3.35)$$

$$\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 1 \quad (3.36)$$

$$(dr)^2 > \left(\frac{2M}{r} - 1\right) (d\tau)^2 \quad (3.37)$$

Iz leme 2 znamo da je  $dr < 0$ , pa pri uzimanju korijena iz (3.37) odabiremo takav predznak da vrijedi:

$$dr < -\sqrt{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)} d\tau \quad (3.38)$$

$$d\tau < -\sqrt{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1}} dr \quad (3.39)$$

Najveća duljina koju geodezik može imati tada je

$$\tau_{max} = - \int_{r=2M}^{r=0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)}} dr = 2M \frac{\pi}{2} = \pi M \quad (3.40)$$

što pokazuje da je nepotpun. □

**Korolar 1.** *Maksimalno prošireno Schwarzschildovo prostor vrijeme je singularno.*

*Dokaz:* Budući da je nepotpuni geodezik također i b-nepotpun, postojanje nepotpunog geodezika dokazano u lemi 3 pokazuje da je Schwarzschildovo prostor-vrijeme b-nepotpuno, i po definiciji 6, ono je singularno. □

## 4 Kauzalna struktura

**Definicija 7.** *Prostor-vrijeme* je vremenski orijentabilna povezana Hausdorfova  $C^\infty$  mnogostrukost  $(M, g)$  sa prebrojivom bazom, dimenzije  $m \geq 2$ , sa Lorentzovom metrikom  $g$  signature  $(-, +, \dots, +)$

$TM$  označava prostor svih tangentskih vektora na mnogostrukosti  $M$ . Vektorsko polje  $X \in TM$  može biti:

- Prostornog tipa ("space-like"), ako je  $g(X(p), X(p)) > 0, \forall p \in M$
- Vremenskog tipa ("time-like"), ako je  $g(X(p), X(p)) < 0, \forall p \in M$
- Svjetlosnog tipa ("lightlike"), ako je  $g(X(p), X(p)) = 0, \forall p \in M$

Vektorsko polje vremenskog ili svjetlosnog tipa zovemo kauzalno. Mnogostrukost  $M$  je **vremenski orijentabilna** ako pridružena metrika dopušta postojanje nekog vektorskog polja  $X$  kauzalnog tipa. Tada su svi vektori  $v \in T_p M$  koji nisu prostornog tipa, podijeljeni u dvije klase, budućnosni ( $g(X(p), v) < 0$ ) i prošlosni ( $g(X(p), v) > 0$ ). Moguća su dva izbora vremenske orijentacije, korištenjem vektorskog polja  $X$ , ili  $-X$ . Ukoliko  $(M, g)$  nije vremenski orijentabilna, moguće je konstruirati dvostruki prekrivač  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  koji jest vremenski orijentabilan, i tada njega koristiti za model prostor-vremena. Dvostruki prekrivač je moguće definirati kao skup svih parova  $(p, \alpha)$ , gdje je  $p \in M$ , a  $\alpha$  je jedna od moguće dvije orijentacije vremena u  $p$ , sa projekcijom  $\pi : (p, \alpha) \rightarrow p$ . Ako se  $\tilde{M}$  sastoji od dvije nepovezane komponente, tada je  $M$  vremenski orijentabilna mnogostrukost. Ako je  $\tilde{M}$  povezana, tada  $M$  nije vremenski orijentabilna, ali  $\tilde{M}$  jest.

**Definicija 8.** *Krivulja na mnogostrukosti* je neprekidno preslikavanje  $\gamma : I \rightarrow M$  gdje je  $I \subseteq \mathbb{R}$

Krivulje na mnogostrukosti također je moguće klasificirati; ako je u svakoj točki krivulje njen tangentski vektor vremenskog tipa, tada je i krivulja vremenskog tipa, i analogno za prostorni i svjetlosni tip. Kauzalna krivulja je krivulja ili svjetlosnog ili vremenskog tipa. Krivulja  $\gamma : I \rightarrow M$  je budućnosnog tipa ako je za svaku točku krivulje njen tangentski vektor budućnosnog tipa, i analogno za prošlosni tip.

### 4.1 Svjetlosni stožac

U uvodu smo opisno definirali svjetlosni stožac, a sada slijedi i formalna definicija, pa po tome možda i najvažniji teorem u području kauzalne strukture. Za njegov iskaz i dokaz potrebno je definirati eksponencijalno preslikavanje

**Definicija 9.** *Eksponencijalno preslikavanje*  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  je definirano na sljedeći način: za dani  $v \in T_p M$ , neka je  $c_v(t)$  jedinstveni geodezik u  $M$  sa  $c_v(0) = p$  i



$c'_v(0) = v$ . Tada je  $\exp_p(v) \equiv c_v(1)$ . Neka je  $v_1, v_2, \dots, v_n$  baza za  $T_pM$ . Za dovoljno mali  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , preslikavanje

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n \rightarrow \exp_p(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n)$$

je difeomorfizam okoline ishodišta od  $T_pM$  na okolinu  $U(p) \in M$ . Drugim riječima, točki  $\exp_p(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n)$  možemo zadati koordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , što definira koordinatnu kartu za  $M$ , koju zovemo normalne koordinate u  $p$  za  $U(p)$ .

**Definicija 10.** Okolinu  $U(p)$  oko točke  $p$  zovemo **normalna okolina** ako su na njoj zadane normalne koordinate. Okolina  $U(p)$  je **konveksna okolina** ako je svake dvije točke  $p, q \in U$  moguće spojiti dijelom geodezika potpuno sadržanim u  $U$ .

**Teorem 1.** Neka je  $U$  normalna i konveksna okolina točke  $p \in M$ . One točke unutar  $U$  do kojih je od točke  $p$  moguće doći krivuljama vremenskog ili svjetlosnog tipa sadržanima u  $U$ , su oblika  $\exp_p v, v \in T_pM$  uz uvjet da je  $g(v, v) < 0$  za krivulje vremenskog tipa, odnosno  $g(v, v) = 0$  za krivulje svjetlosnog tipa.

Slikovitije prikazano, sadržaj ovog teorema govori da ako odaberemo točku  $p \in M$ , tada za nju postoji jedinstven geodezik  $\gamma_v(t)$ , takav da  $\gamma_v(0) = p$  i sa početnim tangentnim vektorom  $\gamma'_v(0) = v, v \in T_pM$ . Eksponencijalno preslikavanje  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$  je takvo da iz početne točke  $p$  odabere tangentni vektor, i pridruži mu točku u  $M$  takvu da je ona na geodeziku  $\gamma_v$ , i udaljena za jedinično vrijeme od točke  $p$ . Odabirom svih onih vektora iz teorema 1 eksponencijalnim preslikavanjem definiramo onaj dio mnogostrukosti do kojega je iz  $p$  moguće doći svjetlosnim signalom ili materijalnom česticom. Drugim riječima, svjetlosni geodezici čine granicu područja unutar  $U$  koje je moguće dostići od  $p$  krivuljama vremenskog i svjetlosnog tipa. Sljedeća je lema korisna u dokazivanju teorema 1.

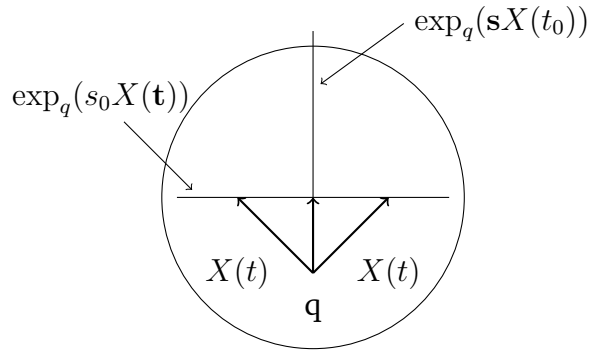
**Lema 4.** Unutar  $U$ , geodezici vremenskog tipa kroz točku  $q$  su ortogonalni na 3-hiperplohu konstantne  $\sigma$  ( $\sigma < 0$ ), gdje je vrijednost  $\sigma$  u točki  $p$ ,  $\sigma(p) = g(\exp_q^{-1} p, \exp_q^{-1} p)$ .

*Dokaz* Pokazat ćemo da vektori koji predstavljaju udaljenost točaka između dva geodezika na jednakim razmacima po geodezicima ostaju ortogonalni ako su ortogonalni bili i na početku. Ograničimo se na dvije dimenzije  $(s, t)$ . Neka je  $X(t)$  krivulja u  $T_qM$ , tako da je  $g(X(t), X(t)) = -1$  (odnosno da je vektorsko polje  $X(t)$  vremenskog tipa). Moramo pokazati da su odgovarajuće krivulje  $\lambda(t) = \exp_q(s_0X(t))$ , ( $s_0 = konst.$ ) ondje gdje su definirane unutar  $U$ , ortogonalne na geodezike vremenskog tipa  $\gamma(s) = \exp_q(sX(t_0))$ ,  $t_0 = konst.$  U terminima 2-plohe  $\alpha(s, t) = \exp_q(sX(t))$ , moramo dokazati da je

$$g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$

Dokazat ćemo da je prethodni izraz neovisan o  $s$ , i vidjeti da to implicira da je jednak nuli.

$$\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}\right)$$



Slika 4.1: Ako vektorsko polje držimo pod konstantnim parametrom dobit ćemo vektor  $X(t_0)$ .  $\exp_q(sX(t_0))$  definira vremenski geodezik. Za  $s = 1$  točka eksponencijalnog preslikavanja nalazi jedinično vrijeme nakon točke  $q$ , a za ostale vrijednosti parametra  $s$ , točke eksponencijalnog preslikavanja nalaze na drugim vrijednostima vremena nakon točke  $q$ . Analogno za konstantan parametar  $s$ ,  $\exp_q(s_0\mathbf{X}(t))$  definira prostornu krivulju.

Prvi član na desnoj strani jednadžbe je nula, zato što je  $\frac{\partial}{\partial s}$  jedinični tangenti vektor geodezicima vremenskog tipa iz  $q$ . Iz definicije Liejeve derivacije, a budući da su  $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$  koordinatna polja slijedi:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} g \left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = g \left( \frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right) = 0$$

Prema tome,  $g(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t})$  je neovisan o  $s$ . Zbog te proizvoljnosti slobodni smo napraviti odabir  $s = 0$ . No uz odabir  $s = 0$ ,  $(\frac{\partial}{\partial t})_\alpha = 0$ . Time smo dokazali da je  $g(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}) = 0$ , odnosno, da su geodezici iz točke  $q$  uvijek okomiti na hiperplohu konstantne  $\sigma(p) = g(\exp_q^{-1} p, \exp_q^{-1} p)$ .  $\square$

*Dokaz teorema 1:* Neka je  $C_q$  skup svih vektora vremenskog tipa u  $q$ . Oni čine unutrašnjost stošca u  $T_q$ , sa čvorištem u ishodištu. Neka je  $\gamma(t)$  krivulja vremenskog tipa u  $U$  od  $q$  do  $p$ , i neka je  $\bar{\gamma}(t)$  po dijelovima  $C^2$  krivulja u  $T_q$  definirana kao  $\bar{\gamma}(t) = \exp_q^{-1}(\gamma(t))$ . Identifikacijom tangentskog prostora nad  $T_q$  sa samim  $T_q$ , dobijamo

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_q = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\bar{\gamma}|_q}$$

, što povlači da je u točki  $q$   $(\frac{\partial}{\partial t})_{\bar{\gamma}}$  vremenskog tipa. Prema tome, krivulja  $\bar{\gamma}(t)$  ulazi u  $C_q$ . No  $\exp(C_q)$  se nalazi u području unutar  $U$  na kojem je prethodno definirana  $\sigma$  negativna, i po prethodnoj lemi, plohe sa konstantnom  $\sigma$  su prostornog tipa (ekvivalentno tvrdnji da su geodezici ne-prostornog tipa uvijek okomiti na tu plohu). To znači da  $\sigma$  mora jednoliko padati uz  $\gamma(t)$ , budući da  $(\frac{\partial}{\partial t})_{\bar{\gamma}}$  zbog toga što je vremenskog tipa, nikada ne može biti tangentan na plohu konstantne  $\sigma$ , a i zbog toga što u

svakoj mogućoj nediferencijabilnoj točki krivulje  $\gamma$  njeni tangenti vektori su u smjeru iste polovice svjetlosnog stošca. Prema tome,  $p \in \exp_q(C_q)$ , i time je dokazan teorem za krivulje vremenskog tipa. Krivulje svjetlosnog tipa su isto uključene u ovu tvrdnju, (i proizvoljna kauzalna krivulja  $\gamma(t)$  ostaje unutar  $\exp_q(\overline{C_q})$ ) jer možemo napraviti malu promjenu na  $\gamma(t)$  koja će je pretvoriti u krivulju vremenskog tipa.  $\square$

**Korolar 2.** *Ako je  $q$  i  $p$  moguće spojiti kauzalnom krivuljom koja nije vremenskog tipa, tada je ta krivulja svjetlosni geodezik.*

Geodezici, krivulje dobivene paralelnim transportom vlastitog tangentnog vektora, najdulje su moguće krivulje u nekoj normalnoj konveksnoj okolini, što je tvrdnja o lokalnim svojstvima geodezika. Globalno, ovaj rezultat ne mora vrijediti, a to ćemo pomnije istražiti u poglavlju o konjugiranim točkama

**Propozicija 1.** *Neka su  $q$  i  $p$  sadržane u konveksnoj normalnoj okolini  $U$ . Tada, ako je  $q$  i  $p$  moguće spojiti krivuljom kauzalnog tipa, najduža takva krivulja je jedinstveni geodezik sadržan u  $U$  od  $q$  do  $p$ .*

**Lema 5.** *Duljina geodezika  $\rho(q, p)$  je neprekidna funkcija na  $U \times U$ .*

U konveksnoj normalnoj okolini postoji jedinstveni geodezik od točke  $\gamma(0) = q$  do točke  $\gamma(1) = p$ . Budući da taj geodezik glatko ovisi o svojim krajnjim točkama, možemo definirati funkciju derivabilnu na  $U \times U$ .

$$\sigma(q, p) = \int_0^1 g \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{\gamma}, \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{\gamma} \right) dt$$

Prema tome,  $\rho(q, p)$  bit će neprekidna funkcija, budući da je  $\rho(q, p) = [-\sigma(q, p)]^{1/2}$  ako je  $\sigma < 0$ , a nula inače.  $\square$

*Dokaz propozicije 1:* Potrebno je pokazati tvrdnju za krivulje vremenskog tipa, budući da je za svjetlosne krivulje moguć jedino svjetlosni geodezik. Neka je  $\alpha(s, t) = \exp_q(sX(t))$  2-ploha kao u lemi 4, gdje je  $g(X(t), X(t)) = -1$ . Ako je  $\lambda(t)$  krivulja vremenskog tipa od  $q$  do  $p$  sadržana u  $U$ , možemo je zapisati kao  $\lambda(t) = \alpha(f(t), t)$ . Tada će vrijediti

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\lambda} = f'(t) \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_{\alpha} + \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\alpha} \quad (4.1)$$

(Parametar  $t$  nas vodi po prostornom dijelu plohe, a budući da je  $\lambda$  vremenska krivulja, na svakoj plohi odabiremo jedan parametar  $t$  za realizaciju takve krivulje, pa parametar  $s$  zabilježavamo kao kao  $f(t)$ .)

Po rezultatu leme 4 znamo da su dva vektora na desnoj strani prethodne jednadžbe ortogonalna. Također znamo da vrijedi

$$g \left( \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_{\alpha}, \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_{\alpha} \right) = -1$$

(Napomena:  $(\frac{\partial}{\partial s})_\alpha$  je vremenskog tipa, što je pojašnjeno slikom 4.1) pa vrijedi

$$g\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda\right) = -(f'(t))^2 + g\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\alpha, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\alpha\right) \geq -(f'(t))^2 \quad (4.2)$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je  $(\frac{\partial}{\partial t})_\alpha = 0$  što vrijedi samo ako je  $\lambda$  geodezik (ako je  $(\frac{\partial}{\partial t})_\alpha = 0$  tada krivulja konstruirana eksponencijalnim preslikavanjem prati samo jedan parametar, i to onaj koji daje vremenski geodezik). Duljina krivulje  $\lambda$  tada je:

$$L(\lambda, q, p) \leq \int_q^p f'(t) dt = \rho(q, p) \quad (4.3)$$

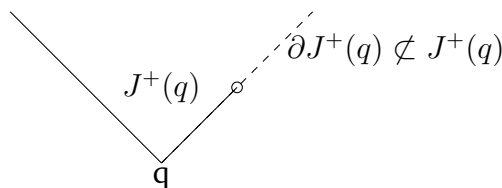
Gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\lambda$  jedinstveni geodezik u  $U$  od  $q$  do  $p$ , što dokazuje da je geodezika lokalno krivulja maksimalne duljine.  $\square$

## 4.2 Prošlosti i budućnosti

Za točku  $p \in M$  možemo definirati:

- Kronološka budućnost:  $I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}$
- Kronološka prošlost:  $I^-(p) = \{q \in M : q \ll p\}$
- Kauzalna budućnost:  $J^+ = \{q \in M : p \leq q\}$
- Kauzalna prošlost:  $J^-(p) = \{q \in M : q \leq p\}$

gdje  $p \ll q$  (odnosno  $p \leq q$ ) znači da je moguće konstruirati neprekidnu krivulju vremenskog (odnosno kauzalnog) tipa od  $p$  prema  $q$ .  $I^+(p)$  i  $I^-(p)$  su otvoreni skupovi u  $M$ . Oko točke  $q$  moguće je odabrati otvorenu okolinu  $U$ , do čijih je točaka je moguće stići budućnosnom vremenskom krivuljom iz točke  $q$ . Važno je uočiti kako sama točka  $p$  nije dio svoje kronološke budućnosti, osim ako ne postoji neka zatvorena vremenska krivulja. Kauzalnu budućnost točke  $p$  definiramo tako da obuhvaća samu točku  $p$ . Kauzalna budućnost (prošlost) nije nužno ni otvoren ni zatvoren skup, jer je prilikom proizvodnje modela prostor-vremena moguće odrezati komad mnogostrukosti koji bi u jednostavnoj situaciji pripadao rubu kauzalne budućnosti (prošlosti).



Slika 4.2: U ovom je primjeru jedna točka izrezana iz mnogostrukosti, pa kauzalna budućnost nije nužno zatvoren skup

Definicije prošlosti i budućnosti točaka jednostavno je poopćiti i na cijele skupove:  $I^+(S) = \{q \in M : p \ll q; p \in S\}$ . Za budućnost skupa  $S$  unutar nekog skupa  $U$  pišemo  $I^+(S, U)$ , i analogno za prošlost.

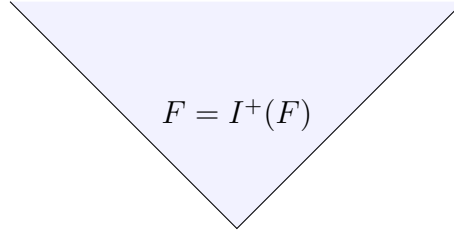
**Definicija 11.** *Budući **horizmos** skupa  $S$  sadržan u skupu  $U$  zovemo skup*

$$E^+(S, U) = J^+(S, U) - I^+(S, U)$$

U prostor-vremenu Minkowskog  $E^+(S) = \partial J^+(S)$ , no općenito to ne vrijedi, kao u primjeru na slici 4.2.

**Definicija 12.** *Otvoreni podskup  $F$  prostor-vremena  $(M, g)$  čini **budućnosni skup** ako  $I^+(F) \subset F$ , analogno  $P$  čini **prošlosni skup** ako  $I^-(P) \subset P$ .*

Kada bismo dozvolili postojanje zatvorenih vremenskih krivulja, tada bi definicija budućnosnog, odnosno prošlosnog skupa mogla glasiti i  $I^+(F) \subseteq F$ .



Slika 4.3: Najjednostavniji primjer budućnosnog skupa je kronološka budućnost nekog skupa.

**Propozicija 2.** *Ako je  $F$  budućnosni skup, onda je  $\bar{F} = \{x \in M : I^+(x) \subseteq F\}$ . Ako je  $P$  prošlosni skup, onda je  $\bar{P} = \{x \in M : I^-(x) \subseteq P\}$*

*Dokaz:* Pretpostavimo kako je  $I^+(x) \in F$ . Uzmimo  $\{q_n\} \subseteq I^+(x)$  tako da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$  budući da je  $\{q_n\} \subseteq F$  vrijedi da je  $x \in \bar{F}$ . Obrnuto, pretpostavimo da je  $x \in \bar{F}$ . Odaberemo bilo koji  $z \in I^+(x)$ . Tada je  $x \in I^-(z)$ , a  $I^-(z)$  je otvoreni skup. Budući da je  $x \in \bar{F}$ , postoji takav  $y \in I^-(z) \cap F$ . To znači da je  $y \in F$ , a odabir  $y \ll z$  implicira da je  $z \in F$ , budući da je  $F$  budućnosni skup, što znači da je  $I^+(x) \subseteq F$ .  $\square$

**Korolar 3.** *Ako je  $F$  budućnosni skup, a  $P$  prošlosni skup, tada vrijedi:*

- $\partial F = \{x \in M : x \notin F, I^+(x) \subseteq F\}$
- $\partial P = \{x \in M : x \notin P, I^-(x) \subseteq P\}$

**Definicija 13.** *Skup  $F$  zove se akronalni skup ako je  $I^+(F) \cap F = \emptyset$*

Drugim riječima, u akronalnom skupu  $F$  ne postoje dvije točke koje je moguće spojiti krivuljom vremenskog tipa.

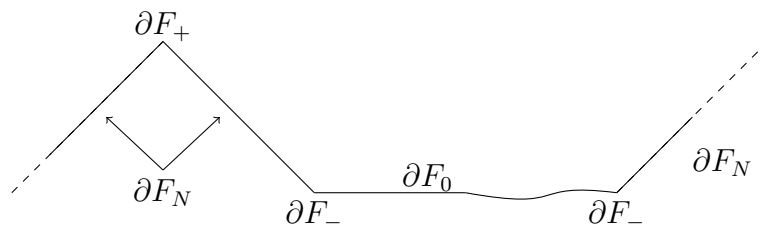
**Propozicija 3.** Neka je  $M$  četverodimenzionalni model prostor-vremena. Ako je  $F$  budućnosni skup, tada je  $\partial F$  zatvorena, uronjena i akronalna  $C^{1-}$  trodimenzionalna podmnogostrukost unutar  $M$

Preslikavanje  $\phi$  je  $C^{1-}$ , ako su koordinate od  $\phi(p)$  Lipschitzove funkcije kordinata od  $p$ . Lipschitzova funkcija je takva funkcija  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  koja za svaki par točaka  $p, q \in U$  zadovoljava svojstvo  $|f(p) - f(q)| \leq konst. |p - q|$ .

*Dokaz:* Ako je  $q \in \partial F$ , po definiciji  $I^+(q) \in F$ , odnosno  $I^-(q) \in M - F$ . Ako je  $r \in I^+(q)$ , tada postoji okolina  $V$  oko  $r$  takva da je  $V \in I^+(q) \in F$ . Prema tome,  $r$  ne može pripadati rubu skupa  $F$ . Na okolini  $U_a$  oko  $q$  možemo uvesti normalne koordinate  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$ , gdje bi  $\frac{\partial}{\partial x^4}$  bio vremenskog tipa, i takav da krivulje konstantnog jednog od  $x^i, i = (1, 2, 3)$  presjecaju istodobno i  $I^+(q, U_a)$  i  $I^-(q, U_a)$ . Svaka od tih krivulja tada mora presjecati  $\partial F$  u točno jednoj točki. Koordinata  $x^4$  mora biti Lipschitzova funkcija od  $x^i$  (takva da ako je  $Y_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3), Y_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$  vrijedi da  $|x^4(Y_1) - x^4(Y_2)| \leq const. |Y_1 - Y_2|$ ) jer dvije točke iz  $\partial F$  nisu nikad razmaknute vremenskom udaljenosti. Prema tome, preslikavanje  $\phi_a : F \cap U_a \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definirano kao  $\phi_a(p) = x^i(p)$  je homeomorfizam. Iz toga slijedi da je  $(\partial F \cap U_a, \phi_a)$   $C^{1-}$  atlas za  $\partial F$ .  $\square$

Skup  $\partial F$  koji je zatvorena, uronjena i akronalna  $C^{-1}$  podmnogostrukost zovemo akronalni rub. Za neku točku  $q \in \partial F$  moguće je da postoje ili ne postoje točke  $p, r \in \partial F$ , takve da  $p \in E^-(q) - q, r \in E^+(q) - q$ . Po tome, moguće je  $\partial F$  podijeliti u četiri disjunktne podskupa  $(\partial F_N, \partial F_+, \partial F_-, \partial F_0)$

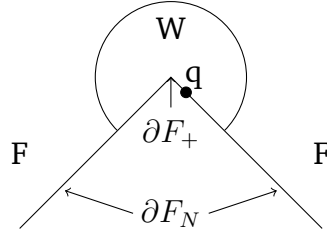
$\exists p$	$\nexists p$	
$\partial F_N$	$\partial F_-$	$\exists r$
$\partial F_+$	$\partial F_0$	$\nexists r$



Slika 4.4: Akronalni rub podijeljen u područja. Na  $\partial F_N$  možemo gledati kao na onu komponentu ruba sačinjenu od komada svjetlosnih krivulja.  $\partial F_-$  i  $\partial F_+$  su tada prošlosne, odnosno budućnosne krajnje točke tih komada, dok je  $\partial F_0$  ona komponenta ruba sačinjena od prostornih krivulja

**Propozicija 4.** Neka je  $W$  okolina oko  $q \in \partial F$  za  $F$  budućnosni skup. Tada:

(i)  $I^+(q) \subset I^+(F - W) \Rightarrow q \in \partial F_N \cup \partial F_+$



Slika 4.5: U ovom primjeru vidljivo vrijedi svojstvo (i). Naime, budućnost skupa  $F - W$  kao da prebriše preko cijele okoline  $W$ , pa je očito budućnost točke  $q$  sadržana u budućnosti skupa  $F - W$ .

(ii)  $I^-(q) \subset I^-(M - F - W) \Rightarrow q \in \partial F_N \cup \partial F_-$

*Dokaz:* (i): Neka je  $\{x_n\}$  beskonačan niz točaka na  $I^+(q) \cap W$  koje konvergiraju ka  $q$ . Ako je  $I^+(q) \subset I^+(F - W)$  tada će postojati u prošlost usmjerena vremenska krivulja  $\lambda_n$  prema  $(F - W)$  za svaki  $x_n$ . Niz  $\{\lambda_n\}$  imat će graničnu krivulju  $\lambda$  od  $q$  prema  $\overline{(F - W)}$ .

Budući da je  $I^-(q)$  otvoren skup i sadržan u  $(M - F)$ ,  $I^-(q) \cap F$  je prazan skup. Prema tome  $\lambda$  mora biti svjetlosni geodezik sadržan u  $\partial F$ .

(ii) Ako promatramo  $\partial F$  kao rub prošlognog skupa  $(M - F)$ , dokaz je jednak i tvrdnja vrijedi.  $\square$

### 4.3 Granične krivulje

- $p$  je gomilište niza  $\{\lambda_n\}$  ako svaka otvorena okolina  $O$  točke  $p$  sječe beskonačno članova niza  $\{\lambda_n\}$
- $p$  je točka konvergencije niza  $\{\lambda_n\}$  ako svaka otvorena okolina  $O$  točke  $p$  presijeca sve osim konačno mnogo  $\{\lambda_n\}$ .
- $\lambda$  je granična krivulja niza  $\{\lambda_n\}$  ako postoji podniz  $\{\lambda'_n\} \subset \{\lambda_n\}$  takav da svaka okolina svake točke  $p \in \lambda$  sječe sve osim konačno mnogo članova  $\{\lambda'_n\}$ .

**Propozicija 5.** Neka je  $S$  otvoren skup i neka je  $\lambda_n$  beskonačan niz kauzalnih krivulja unutar  $S$  koje su buduće beskrajne u  $S$ . Ako je  $p \in S$  gomilište niza  $\{\lambda_n\}$  tada kroz točku  $p$  prolazi kauzalna krivulja  $\lambda$  buduće beskrajna u skupu  $S$  koja je granična krivulja niza  $\{\lambda_n\}$

*Dokaz:* Zbog jednostavnosti, skup  $S$  promatramo kao cijelo prostor-vrijeme, što je moguće, jer je i  $S$  moguće promatrati kao zasebnu mnogostrukost sa Lorentzovom metrikom. Način dokazivanja je konstrukcija tražene granične krivulje, točku po točku.

Neka je  $U_1$  konveksna normalna okolina točke  $p$ . Neka je  $b > 0$  takav da je moguće definirati  $B(p, b) \subset U_1$  otvorenu kuglu koordinatnog radijusa  $b$  oko točke  $p$ . Konstruirat ćemo otvorene kugle oko točke  $p$  redom sve manjeg radijusa. Za

par vrijednosti  $i, j \in \mathbb{N}$  za koji vrijedi ili  $i \geq j \geq 1$  ili  $i > j = 0$ , otvorena kugla imat će radijus  $\frac{j}{i}b$ , a zapisivat ćemo je kao  $B(p, \frac{j}{i}b)$ . Cilj nam je za svaku kuglu naći niz presjecajućih krivulja čiji će podniz  $\lambda(i, j)_n$  imati točku konvergencije koja će po definiciji biti dio granične krivulje (svaka točka granične krivulje sječe sve osim konačno članova podniza).

Sama točka  $p$  nalazi se u svim kuglama koje možemo konstruirati, pa tako i u onima za koje je  $j = 0$ . Neka je  $\lambda(1, 0)_n$  odnosno u terminima  $i, j$ ,  $\lambda(i = j + 1, j = 0)_n$  podniz od  $\lambda_n \cap U_1$  kojem je  $p$  točka konvergencije. Budući da je  $\partial B(p, b)$  kompaktan, sadržavat će točke  $x$ , gomilišta niza  $\lambda(1, 0)_n$ . Svaka takva točka  $x$  mora biti sadržana ili u  $J^-(p, U_1)$  ili u  $J^+(p, U_1)$ . Odaberimo onu u budućnosti koja se nalazi na rubu kugle najvećeg radijusa:  $x_{11}$

$$x_{11} \in J^+(p, U_1) \cap \partial B(p, b)$$

i odaberimo  $\lambda(1, 1)_n$  podniz od  $\lambda(1, 0)_n$  kojem je  $x_{11}$  točka konvergencije, pa će točka  $x_{11}$  biti na graničnoj krivulji  $\lambda$ .

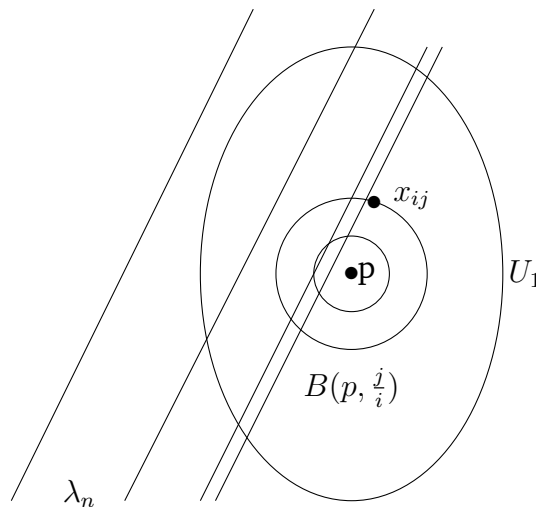
Ovu konstrukciju nastavljamo induktivno, pa definiramo  $x_{ij}$ , točku na rubu svake manje kugle:

$$x_{ij} \in J^+(p, U_1) \cap \partial B(p, \frac{j}{i}b)$$

koja će biti gomilište sljedećih nizova koji su sami podnizovi početnog niza  $\{\lambda_n\}$ .

- $\lambda(i - 1, i - 1)_n$  za  $j = 0$
- $\lambda(i, j - 1)_n$  za  $i \geq j \geq 1$

i tada odabiremo  $\lambda(i, j)_n$  podniz navedenih nizova kojem je točka konvergencije u  $x_{ij}$ .



Slika 4.6: Unutar konveksne okoline  $U_1$  odabiremo sve manje i manje otvorene kugle i pronalazimo sve više točaka  $x_{ij}$ , od kojih konstruiramo konačnu graničnu krivulju  $\lambda$



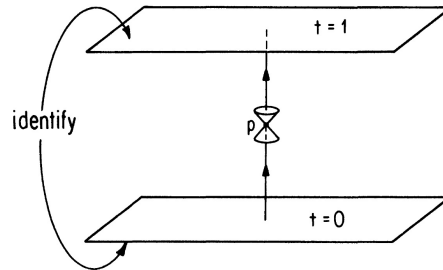
Zatvarač unije svih dobivenih točaka  $x_{ij}$ , ( $j \leq i$ ) dat će kauzalnu krivulju  $\lambda$  od  $p = x_{i0}$  do  $x_{11} = x_{ii}$ .

Kako bi  $\lambda$  bila tražena granična krivulja treba odabrati podniz  $\lambda'_n \subset \lambda_n$  za koji je svaka točka  $q \in \lambda$  točka konvergencije. Neka je  $\lambda'_m$  član podniza  $\lambda(m, m)_n$  koji presjeca svaku novu otvorenu kuglu  $B(x_{mj}, \frac{b}{m})$  oko svake pronađene granične točke  $x_{mj}$  za  $0 \leq j \leq m$ . Time smo pokazali da je  $\lambda$  granična krivulja niza  $\lambda_n$  od točke  $p$  do točke  $x_{11}$ .

Sada konstruiramo novu okolinu  $U_2$  oko točke  $x_{11}$  i ponavljamo cijeli postupak, no ovaj puta kao početni niz koristimo  $\lambda'_m$ , onaj koji nam je u prvoj iteraciji već iznjedrio graničnu krivulju. Na taj način možemo beskrajno produljivati  $\lambda$  i dobiti traženi rezultat.  $\square$

#### 4.4 Uvjeti kauzalnosti i njihova snaga

Moguća je situacija u kojoj je  $p \in I^+(p)$ , i to je prvi primjer modela u kojem je kauzalnost narušena. Ako je točka prostor-vremena  $p$  dio svoje budućnosti, to znači da postoji zatvorena krivulja vremenskog tipa. Primjer modela prostor-vremena u kojem je realizirana takva situacija jest  $M = S^1 \times \mathbb{R}$ , sa Lorentzovom metrikom  $ds^2 = -d\theta^2 + dt^2$ . Krivulja konstantnog  $t$  je zatvorena. U ovom 2D primjeru identifikacija nama intuitivno poznatih dimenzija možda nije dobra, no za vizualizaciju, koordinata  $t$  predstavlja kut, a koordinata  $\theta$  vrijeme. Sličan primjer bilo bi prostor-vrijeme  $M = S^1 \times \mathbb{R}^3$ , gdje su identificirane hiperplohe  $t = 0$  i  $t = 1$ .



Slika 4.7: Prostor-vrijeme sa povredom kauzalnosti

U ovom poglavlju proći ćemo po jačini kroz različite uvjete na modele prostor-vremena koji osiguravaju kauzalnost.

- **Kronološko prostor-vrijeme** je ono prostor-vrijeme koje ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa, to jest,  $p \notin I^+(p), \forall p \in M$
- **Kauzalno prostor-vrijeme** je ono prostor-vrijeme koje ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju kauzalnog tipa (ni vremenskog i svjetlosnog tipa), to jest ne postoji par različitih točaka  $p$  i  $q$ , tako da vrijedi  $p \leq q \leq p$

Uvjet da je prostor-vrijeme kronološko, najslabiji je uvjet kauzalnosti. Kauzalno prostor-vrijeme je malo ograničeniji tip prostor-vremena, no ipak postoje jači uvjeti. Ipak, već iz ovih uvjeta možemo izvući jednu činjenicu o modelima prostor-vremena.

**Propozicija 6.** *Bilo koje kompaktno prostor-vrijeme sadrži zatvorenu krivulju vremenskog tipa, i time krši uvjete kronološkog prostor-vremena.*

*Dokaz:* Budući da su  $I^+(p)$  otvoreni skupovi, moguće je konstruirati otvoreni pokrivač mnogostrukosti  $M$ , oblika  $\{I^+(p) : p \in M\}$ . Kako je  $M$  kompaktno, možemo odabrati konačan potpokrivač  $P_f = \{I^+(p_1), I^+(p_2), \dots, I^+(p_k)\}$ . Sada odaberimo neki  $i$  iz  $1 < i < k$  i označimo ga sa  $i(1)$ . Točka  $p_1 \in I^+(p_{i(1)})$ , za taj  $i(1)$ ,  $1 < i(1) < k$ . Nadalje, sada je točka  $p_{i(1)} \in I^+(p_{i(2)})$ , za neki  $i(2)$ ,  $1 < i(2) < k$ . Drugim riječima, budući da je skup  $P_f$  pokrivač prostor-vremena  $M$ , za svaku točku  $p \in M$ , možemo naći element skupa  $P_f$  čiji će ona biti član. Ako induktivno nastavimo, dobit ćemo beskonačan niz točaka  $\dots \ll p_{i(3)} \ll p_{i(2)} \ll p_{i(2)} \ll p_1$ . No s druge strane, imamo konačan broj mogućih indeksa  $i$ , od 1 do  $k$ . To znači da će neke od točaka iz našeg beskonačnog niza biti ponovljene. Budući da vrijedi tranzitivnost operacije  $\ll$ , vrijedit će tvrdnja  $p_{i(n)} \in I^+(p_{i(n)})$ , odnosno, neka točka prostor-vremena je dio svoje budućnosti, čime smo dokazali da u kompaktnom prostor-vremenu postoji zatvorena krivulja vremenskog tipa, što krši uvjete kronološkog prostor-vremena.  $\square$

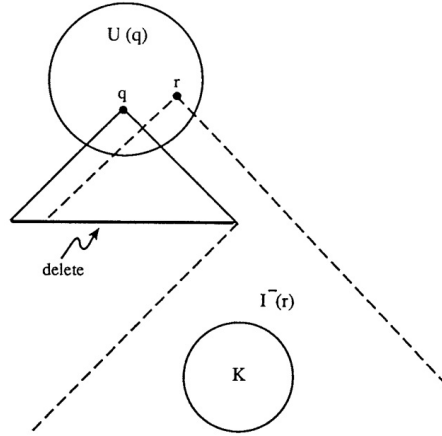
- **Razlučivo prostor-vrijeme** je takvo prostor-vrijeme u kojem za sve točke  $p$  i  $q$  u  $M$ , tvrdnja  $I^+(p) = I^+(q)$  ili  $I^-(p) = I^-(q)$  povlači da je  $p = q$ .

U razlučivom prostor-vremenu različite točke imaju različite kronološke budućnosti i kronološke prošlosti, odnosno, moguće ih je razlučiti pomoću njihove kronološke budućnosti, odnosno prošlosti.

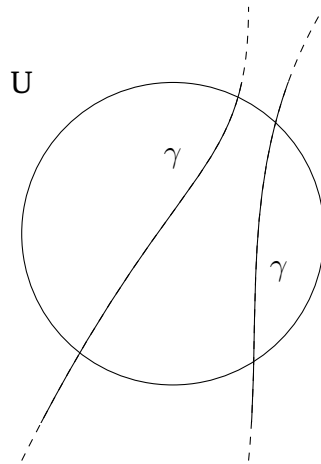
- Prostor-vrijeme je **kauzalno kontinuirano** ako je razlučivo, i ako skupovi  $I^+$  i  $I^-$  nekih točaka ili podskupova  $M$  imaju vanjsku kontinuiranost.

Skup  $I^+$  ima unutarnji kontinuitet u točki  $p \in M$  ako je za svaki kompaktni skup  $K \subseteq I^+(p)$ , postoji okolina  $U(p)$ , tako da je  $K \subseteq I^+(q)$  za svaku točku  $q \in U(p)$ . Skup  $I^+$  ima vanjski kontinuitet u točki  $p \in M$  ako za svaki kompaktni skup  $K \subseteq M - \overline{I^+(p)}$ , postoji okolina  $U(p)$  od  $p$ , takva da je  $K \subseteq M - \overline{I^+(q)}$  za svaku točku  $q \in U(p)$ . U konstrukciji ovih pojmova važno je pamtiti kako su  $I^+$  i  $I^-$  otvoreni skupovi,  $K$  je kompaktan, prema tome i zatvoren skup. Analogne definicije vrijede i za prošlosne skupove. Kauzalno kontinuirano prostor-vrijeme je ono razlučivo prostor vrijeme u kojem se kronološka budućnost i kronološka prošlost kontinuirano mijenjaju po mnogostrukosti.

**Definicija 14.** *Za svaku putanju  $\gamma$  vremenskog ili svjetlosnog tipa, otvoreni skup  $U \in M$  je **kauzalno konveksan** ako je  $\gamma \cap U$  povezan skup.*



Slika 4.8: Ovaj model prostor-vremena nije kauzalno kontinuiran, skup  $I^-(q)$  nema vanjski kontinuitet, jer je u svakoj okolini točke  $q$  moguće naći točku  $r$  tako da  $K$  neće biti element skupa  $M - \overline{I^-(r)}$



Slika 4.9: Primjer povrede uvjeta jake kauzalnosti budući da  $\gamma \cap U$  nije povezan skup

Drugim riječima, otvoreni skup  $U$  je kauzalno konveksan ako i samo ako za svake dvije točke  $x$  i  $y \in U$ ,  $x \ll z \ll y$  povlači da je  $z \in U$ . To znači i da svaka putanja vremenskog ili svjetlosnog tipa, otvoreni skup  $U$  presjeca samo jednom.

- Prostorvrijeme je **jako kauzalno u točki**  $p$  ako  $p$  ima proizvoljno male kauzalno konveksne okoline. Prostorvrijeme je **jako kauzalno** ako je jako kauzalno u svakoj svojoj točki.

Jako kauzalno prostor-vrijeme je također i razlučivo, te je tako to jači kriterij kauzalnosti.

Također, moguće je pokazati da se Alexandrova topologija za  $(M, g)$  u kojoj su baza skupovi oblika  $I^+(p) \cap I^-(q)$  slaže sa topologijom u kojoj su otvoreni skupovi otvorene  $m$ -dimenzionalne kugle ako i samo ako je  $(M, g)$  jako kauzalno prostor-vrijeme, pa se to slaganje može koristiti kao alat za provjeru kriterija jake kauzalnosti.

**Definicija 15.** Neka je  $\gamma : [a, b) \rightarrow M$  budućnosna ne-prostorna krivulja. Za  $\gamma$  kažemo

da je **budućnosno zatočena** u kompaktnom skupu  $K$  ako za neki  $t_0 < b$  vrijedi  $\gamma(t) \in K$  za svaki  $t_0 < t < b$ . Krivulja  $\gamma$  je **djelomično budućnosno zatočena**, ako u kompaktnom skupu  $K$  postoji beskonačan niz  $t_n \uparrow b$  tako da je  $\gamma(t_n) \in K$  za svaki  $n$ . (Djelomično je zatočena jer za neke vrijednosti  $t$  koje nisu u nizu, krivulja može biti izvan  $K$ .)

Jako kauzalno prostor-vrijeme posjeduje i sljedeću odliku:

**Propozicija 7.** *U jako kauzalnom prostor-vremenu nijedna beskrajna kauzalna krivulja ne može biti potpuno ni djelomično budućnosno, odnosno prošlosno zatočena u bilo kojem kompaktnom skupu*

*Dokaz:* Ako je  $(M, g)$  jako kauzalno prostor-vrijeme i  $K \subset M$  je njegov kompaktan podskup,  $K$  možemo prekriti konačnim brojem kompaktnih konveksnih normalnih kauzalnih okolina  $\{U_i\}$  koje svaka kauzalna krivulja presjeca najviše jednom. Pretpostavimo da postoji potpuno budućno zatočena kauzalna krivulja  $\gamma \subset K$ . Tada  $\gamma$  mora presjecati neki  $U_i$  i iz njega izaći.  $U_i$  je kompaktan, i svake dvije točke unutar  $U_i$  je moguće spojiti kauzalnom krivuljom, a  $\gamma$  je beskrajna, tako da za dovoljno velike vrijednosti svog parametra iscrpi sve točke unutar  $U_i$  koje može pospajati pa mora izaći. Budući da je  $K$  kompaktan, za neku vrijednost svog parametra  $\gamma$  bi opet ušla u neku od  $U_i$  što je po pretpostavci jake kauzalnosti nemoguće. Kada bi bila djelomično zatočena postojala bi takva kauzalno konveksna okolina  $U_i$  za koju bi  $\gamma \cap U_i$  bio nepovezan skup.  $\square$

## 4.5 Globalna hiperboličnost

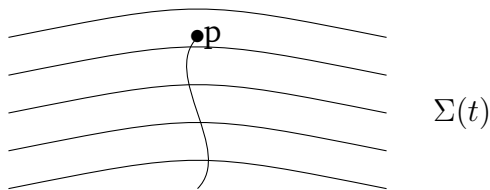
- Jako kauzalno prostor-vrijeme  $M, g$  je **globalno hiperbolično** ako je za svaki par točaka  $p, q \in M$ , skup  $J^+(p) \cap J^-(q)$  kompaktan.

Činjenica da je za svaki par točaka  $p, q \in M$ , skup  $J^+(p) \cap J^-(q)$  kompaktan, odražava svojstvo da  $J^+(p) \cap J^-(q)$  ne sadrži nikakve točke na rubu prostor-vremena (u beskonačnosti ili u singularnosti). Naziv "globalno hiperboličan" potječe od toga da na  $N$  valna jednadžba za točkasti izvor u  $p \in N$  ima jedinstveno rješenje koje iščezava na  $N - J^+(p, N)$ .

**Definicija 16.** *Cauchyjeva ploha  $S$  je podskup od  $M$ , kojeg svaka kauzalna krivulja presjeca točno jednom.*

Sljedeći rezultat nije nužan za kasnije dokaze, no uključen je zbog lakše interpretacije značenja globalne hiperboličnosti, naime za globalno hiperbolično prostor-vrijeme vrijedi da je za svaki zamrznuti trenutak prostorni dio prostor-vremena Cauchyjeva ploha.

**Teorem 2.** *Ako je otvoreni skup  $N$  globalno hiperboličan ( $N$  može biti i cijelo prostor-vrijeme) dimenzije  $n$ , tada je  $N$  homeomorfan sa  $\mathbb{R} \times S$ ; gdje je  $S$   $(n - 1)$  dimenzionalna topološka podmnogostrukost od  $N$ , i za svaki  $t$ ,  $t \times S$  je Cauchyjeva ploha za  $N$ .*



Slika 4.10: Svaku Cauchyjevu plohu svaka kauzalna krivulja presjeca samo jednom

*Dokaz:* Neka su  $p \leq q \in N$ . Odaberemo mjeru  $\mu$  na  $N$ , takvu da je ukupni volumen skupa  $N$  u toj mjeri jednak jedan. Za točku  $p \in N$  definiramo  $f^+(p)$ , volumen skupa  $J^+(p, N)$  u mjeri  $\mu$ . Globalno hiperbolični skup je jako kauzalan, prema tome  $f^+(p)$  je ograničena funkcija koja monotono pada uz svaku kauzalnu budućnosnu krivulju. Pokažimo da je  $f^+(p)$  neprekidna na bilo kojoj kauzalnoj krivulji  $\lambda$ . Neka je  $r \in \lambda$ , i neka je  $x_n$  beskonačan niz točaka koji teži u  $r$  na  $\lambda$  strogo u prošlosti od  $r$ . Neka je  $F = \bigcap_n J^+(x_n, N)$ . Pretpostavimo da  $f^+(p)$  nije polu-neprekidna, na gornjoj polovici  $\lambda$  u odnosu na  $r$ . Tada bi postojala točka  $q \in F - J^+(r, N)$ . To bi značilo da  $r \notin J^-(q, N)$ , ali svaki  $x_n \in J^-(q, N)$ , prema tome  $r \in \overline{J^-(q, N)}$ , no to je nemoguće jer je  $J^-(q, N)$  po uvjetu kauzalne jednostavnosti zatvoren skup. Dokaz analogno vrijedi i za neprekidnost na donjoj polovici.

Kako se krećemo po  $\lambda$ , vrijednost  $f^+(p)$  teži u nulu, jer inače postojala bi točka  $q$  koja bi bila u budućnosti svake točke na  $\lambda$ , što bi značilo da bi  $\lambda$  ušla i ostala unutar kompaktnog seta  $J^+(r) \cap J^-(q)$ , za bilo koju  $r \in \lambda$ , što je nemoguće po uvjetu jake kauzalnosti.

Promotrimo funkciju  $f(p) = f^-(p)/f^+(p)$ . Svaka ploha sa konstantnim  $f$  biti će akauzalni skup (granica budućnosnog skupa koja je prostornog tipa), i po lemi o granici budućnosnog skupa, bit će  $(n - 1)$  dimenzionalna mnogostrukost unutar  $N$ . Također, ta će hiperploha biti Cauchyjeva ploha, budući da će uzduž bilo koje kauzalne  $f^+$  težiti ka nuli u budućnosti, a  $f^-$  u prošlosti. Možemo definirati vektorsko polje  $V$  vremenskog tipa na  $N$  i neprekidno preslikavanje  $\beta$  koje preslikava točke iz  $N$  uzduž integralnih krivulja od  $V$  u mjesto gdje presjecaju plohu  $S$  ( $f = 1$ ). Tada je  $(\log f(p), \beta(p))$  homeomorfizam od  $N$  na  $\mathbf{R} \times S$ .  $\square$

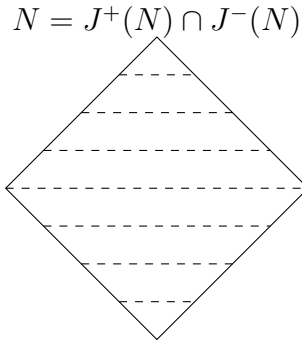
**Definicija 17.**  $C(p, q)$  je skup svih neprekidnih kauzalnih krivulja od  $p$  do  $q$ .

**Propozicija 8.** Neka na otvorenom skupu  $N$  vrijedi uvjet jake kauzalnosti i neka je

$$N = J^-(N) \cap J^+(N) = I^-(N) \cap I^+(N).$$

Skup  $N$  je globalno hiperboličan ako i samo ako je  $C(p, q)$  kompaktan za svaku točku  $p, q \in N$ .

*Dokaz:* Pretpostavimo da je  $C(p, q)$  kompaktan skup. Neka je  $r_n$  beskonačan niz točaka sadržan u  $J^+(p) \cap J^-(q)$ , i neka je  $\lambda_n$  niz kauzalnih krivulja od točke  $p$  do točke



Slika 4.11: U ovom primjeru globalno hiperboličnog skupa svaka je horizontalna linija Cauchyjeva ploha



Slika 4.12: Svaka prikazana krivulja dio je skupa  $C(p, q)$

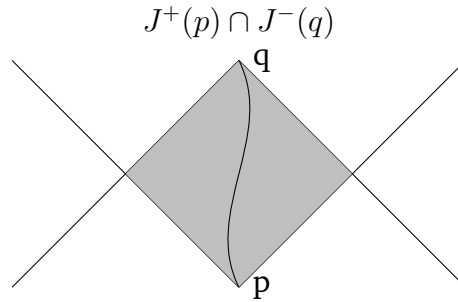
$q$  kroz odgovarajuću točku  $r_n$ . Kako je  $C(p, q)$  kompaktan skup, postojat će krivulja  $\lambda$  takva da podniz  $\lambda'_n$  konvergira u nju. Neka je  $U \subset M$  okolina od  $\lambda$  takva da je  $\bar{U}$  kompaktan skup. Za  $n$  dovoljno velik  $U$  će sadržavati sve osim konačno mnogo  $\lambda'_n$  sa pripadajućim  $r'_n$ , te će postojati granična točka  $r \in U$  koja će ležati na  $\lambda$ . Prema tome, svaki beskonačan niz u  $J^+(p) \cap J^-(q)$  posjeduje svoje granične točke u  $J^+(p) \cap J^-(q)$  što je dovoljan uvjet da je  $J^+(p) \cap J^-(q)$  kompaktan.

Za dokaz s druge strane, pretpostavimo da je  $J^+(p) \cap J^-(q)$  kompaktan. Neka je  $\lambda_n$  beskonačan niz kauzalnih krivulja od  $p$  do  $q$ . Za potrebu dokaza, privremeno izrežemo točku  $q$  iz mnogostrukosti. Tada će po –teoremu o graničnim krivuljama u  $M - q$  sigurno postojati  $\lambda$  buduće beskrajna kauzalna granična krivulja koja počinje u  $p$ , i takva da postoji podniz  $\lambda'_n$  koji konvergira u  $r$  za svaki  $r \in \lambda$ . Vratimo točku  $q$  u mnogostrukost pa po propoziciji 7  $\lambda$  mora imati buduću krajnju točku u  $q$  jer ne može biti potpuno buduće zarobljena u kompaktnom skupu  $J^+(p) \cap J^-(q)$ , a ne može izaći iz skupa, osim u točki  $q$ . Neka je  $U$  okolina od  $\lambda$  i neka je  $r_i$  konačan skup točaka ( $1 \leq i \leq k$ ) takav da  $r_1 = p$ ,  $r_k = q$ , i svaki  $r_i$  ima okolinu  $V_i$  za koju vrijedi  $J^+(V_i) \cap J^-(V_{i+1}) \subset U$ . Za  $n$  dovoljno velik,  $\lambda'_n$  bit će sadržana u  $U$ . Prema tome  $\lambda'_n$  konvergirat će u  $\lambda$  u topologiji na  $C(p, q)$ , prema čemu je  $C(p, q)$  kompaktan skup.  $\square$

Sljedeći je rezultat najvažnija odlika globalno hiperboličnih skupova, i bit će ključan u dokazivanju teorema Hawking, Penrose 1970.

**Propozicija 9.** Neka su  $p$  i  $q$  sadržane u globalno hiperboličnom skupu  $N$ , i neka vrijedi

$q \in J^+(p)$ . Tada postoji kauzalni geodezik od  $p$  do  $q$  čija je duljina veća ili jednaka duljini bilo koje druge kauzalne krivulje od  $p$  do  $q$ .



Slika 4.13: U globalno hiperboličnom prostor vremenu postoji geodezik koji je krivulja maksimalne duljine između dvije točke  $p$  i  $q$

Za dokaz ove tvrdnje potrebno je promotriti neprekidnost duljina na skupu  $C(p, q)$ . Podskup skupa  $C(p, q)$  koji sadrži samo glatke vremenske krivulje označimo sa  $\tilde{C}(p, q)$ . Duljina jedne takve krivulje  $\lambda \in \tilde{C}(p, q)$  je

$$L[\lambda] = \int_q^p \left( -g \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right)^{1/2} dt \quad (4.4)$$

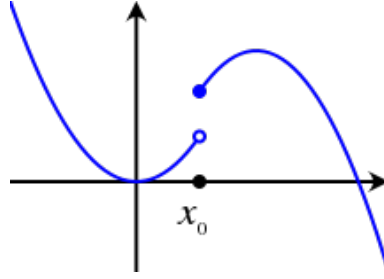
gdje je  $t \in C^1$  parametar na  $\lambda$ . Definiciju duljine želimo proširiti na cijeli  $C(p, q)$ , koji sadrži i samo neprekidne krivulje, uz one glatke, kako bismo mogli pokazati da postoji krivulja u  $C(p, q)$  čija duljina postiže maksimum. Funkcija  $L$  nije neprekidna jer je za svaku  $\lambda$  u svakoj njenoj proizvoljno maloj okolini moguće naći krivulju koja je po dijelovima skoro svjetlosna, i proizvoljno dobro aproksimira  $\lambda$ , a duljina joj je proizvoljno mala. Nedostatak neprekidnosti funkcije  $L$  dogodio se zbog definiranja  $C(p, q)$  kao skupa neprekidnih krivulja i topologijom u kojoj se otvoreni skupovi oko neke krivulje  $\gamma$  na  $C(p, q)$  sastoje od onih krivulja  $\lambda : I \rightarrow M$  čije su slike u  $M$  sadržane u otvorenim skupovima oko slike krivulje  $\gamma$ . Kada bismo  $C(p, q)$  definirali samo kao skup glatkih krivulja, tada ne bi mogao biti kompaktan.

Iako  $L$  ne možemo gledati kao neprekidnu funkciju na  $C(p, q)$ , vrijedi nešto slabiji rezultat:

**Definicija 18.** Funkcija  $f$  je **gornje polu-neprekidna** u točki  $(x_0)$  ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji okolina  $U$  oko  $x_0$  takva da vrijedi  $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$  za svaki  $x \in U$ .

**Lema 6.**  $L$  je gornje polu-neprekidna u  $C^0$  topologiji na  $\tilde{C}(p, q)$ .

*Dokaz:* Neka je  $\lambda(t) \in C^1$  krivulja od  $p$  do  $q$  gdje je  $t$  parametar odabran tako da predstavlja duljinu krivulje počevši od  $p$ . Za dovoljno malu okolinu  $U$  od  $\lambda$  moguće je naći funkciju  $f$  koja je jednaka  $t$  na  $\lambda$  i takvu da su hiperplohe  $\{f = const\}$  prostorne i ortogonalne na tangentni vektor krivulje, odnosno da je normala tih hiperploha



Slika 4.14: Funkcija koja je gornje polu-neprekidna u točki  $x_0$

jednaka tangentnom vektoru krivulje  $\lambda$ :  $g^{ab}f_{;b}|_{\lambda} = (\partial/\partial t)^a$ . Takvu funkciju možemo definirati na način da konstruiramo prostorne geodezike ortogonalne na  $\lambda$ . Za dovoljno malu okolinu  $U$  oko  $\lambda$  prostorni geodezici će definirati jedinstveno preslikavanje sa  $U$  na  $\lambda$ . Vrijednost funkcije  $f$  u nekoj točki unutar  $U$  odaberemo jednaku vrijednosti  $t$  točke na  $\lambda$  na koju je točka iz  $U$  preslikana. Na okolini  $U$  možemo naći neku drugu krivulju  $\mu$  koja će biti parametrizirana sa  $f$ . Tangentni vektor krivulje  $\mu$  možemo izraziti kao

$$\left( \frac{\partial}{\partial f} \Big|_{\mu} \right)^a = g^{ab}f_{;b} + k^a$$

gdje je  $k^a$  vektor prostornog tipa koji je tangentan na hiperplohu  $f = const.$ , to jest  $k^a f_{;a} = 0$ . Tada je

$$\begin{aligned} g \left( \frac{\partial}{\partial f} \Big|_{\mu}, \frac{\partial}{\partial f} \Big|_{\mu} \right) &= g^{ab}f_{;a}f_{;b} + g_{ab}k^a k^b \\ &\geq g^{ab}f_{;a}f_{;b} \end{aligned}$$

Jer je  $k^a$  prostornog tipa. Budući da na  $\lambda$  vrijedi  $g^{ab}f_{;a}f_{;b} = -1$ , za bilo koji  $\epsilon > 0$ , možemo odabrati  $U' \subset U$  dovoljno malen tako da na  $U'$  vrijedi  $g^{ab}f_{;a}f_{;b} > -1 + \epsilon$ .

$$L[\mu] \geq \int (1 - \epsilon)^{(1/2)} dt = (1 - \epsilon)^{(1/2)} L[\lambda] \quad (4.5)$$

Odnosno za maleni  $\epsilon$  vrijedi

$$L[\mu] \leq (1 + \epsilon)L[\lambda] \quad (4.6)$$

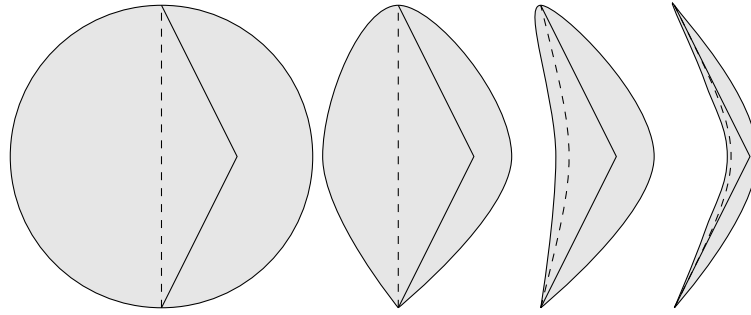
Što analogno kriteriju iz definicije 18 dokazuje da je  $L$  gornje polu-neprekidna  $\square$

Uz ovaj rezultat definiramo duljinu svake kontinuirane kauzalne krivulje u  $C(p, q)$ . Neka je  $U_{\lambda} \subset M$  okolina od  $\lambda$  i  $l(U_{\lambda})$  najmanja gornja granica duljina vremenskih krivulja unutar  $U_{\lambda}$  od  $p$  do  $q$ . Definiramo

$$L[\lambda] = \inf\{l(U_{\lambda})\} \quad (4.7)$$

Dakle za duljinu neprekidne kauzalne krivulje  $\lambda$  promotrimo okolinu od  $\lambda$ , i na toj okolini izaberemo vremensku krivulju najveće duljine, ili najmanje gornje granice te





Slika 4.15: Iscrtkana krivulja predstavlja krivulju najveće duljine (budući da radimo u Lorentzovim mnogostrukostima, kraću duljinu imaju krivulje koje su na većem nagibu). U svakoj okolini nađemo krivulju najveće duljine, tada promotrimo sve okoline, pa od svih promotrenih okolina izaberemo najkraću duljinu iscrtkane krivulje. Ta najbolje opisuje duljinu neprekidne kauzalne krivulje.

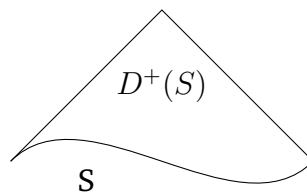
duljine ako su te veličine različite, te zabilježimo tu duljinu kao  $l(U)$ . Nakon toga promotrimo sve okoline od  $\lambda$ , i skupimo sve  $l(U)$  u jedan skup. Iz tog skupa tada izaberemo najmanju vrijednost, ili najveću donju granicu tih vrijednosti ako su te veličine različite. Tu vrijednost tada zadržimo kao duljinu kauzalne krivulje. Ovim postupkom možemo odrediti duljine svih kauzalnih krivulja koje u svojoj okolini imaju  $C^1$  vremenske krivulje, odnosno sve one  $\lambda \in \widetilde{C}(p, q)$ . Vani su nam još ostali samo svjetlosni geodezici  $\in C(p, q) - \widetilde{C}(p, q)$ , a za njihovu duljinu uzimamo 0.

*Dokaz propozicije 9:* Preslikavanje  $L : \widetilde{C}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$  gornje je polu-neprekidno. Budući da djeluje na kompaktnom skupu, postoji krivulja  $\in \widetilde{C}(p, q)$  za koju  $L$  postiže svoj maksimum, a po propoziciji 1, ona je geodezik.  $\square$

## 4.6 Domene ovisnosti i horizonti

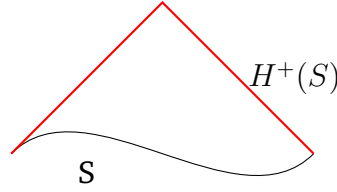
**Definicija 19.** *Buduća domena ovisnosti* skupa  $S$  je skup svih događaja  $p \in M$  takvih da svaka prošlosno beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $p$  presjeca  $S$ . Buduću domenu ovisnosti označavamo kao  $D^+(S)$

Vrijedi da je  $S \subset D^+(S)$ . Prošlosnu domenu ovisnosti  $D^-(S)$  definiramo analogno a ukupna domena ovisnosti je njihova unija  $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ .



Slika 4.16: Akronalni skup  $S$  i njegova buduća domena ovisnosti  $D^+(S)$

**Definicija 20.** *Budući Cauchyjev horizont* je skup  $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-(D(S))$  i označava buduću granicu buduće domene ovisnosti skupa  $S$ .



Slika 4.17: Akronalni skup  $S$  i njegov budući Cauchyjev horizont  $H^+(S)$

Prošlosni Cauchyjev horizont definiramo analogno, a ukupni Cauchyjev horizont je njihova unija  $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$ .

**Definicija 21.**  $\text{edge}(S)$  za akronalni skup  $S$  je skup svih točaka  $q \in \overline{S}$  takvih da u svakoj okolini  $U$  od  $q$  postoje točke  $p \in I^-(q, U)$  i  $r \in I^+(q, U)$  koje je moguće povezati vremenskom krivuljom koja ne presjeca  $S$ .

**Propozicija 10.** Za zatvoreni akronalni skup  $S$  vrijedi

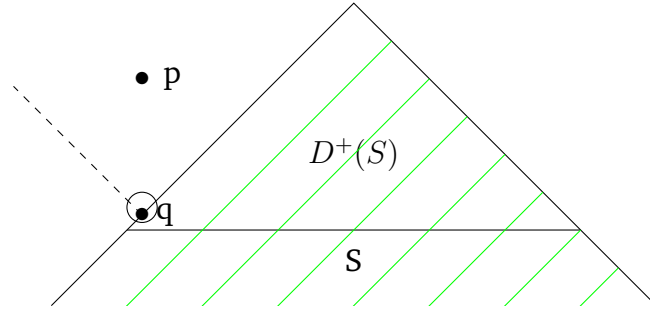
$$\text{edge}(H^+(S)) = \text{edge}(S) \quad (4.8)$$

*Dokaz:* Neka je  $U_n$  niz okolina točke  $q \in \text{edge}(H^+(S))$ , takvih da za dovoljno veliki  $n$  bilo koja okolina točke  $q$  sadrži sve osim konačno mnogo  $U_n$ . U svakoj  $U_n$  postojat će točke  $p_n \in I^-(q, U_n)$  i  $r_n \in I^+(q, U_n)$  koje je moguće spojiti vremenskom krivuljom  $\lambda_n$  koja ne presjeca  $H^+(S)$ . To znači da  $\lambda_n$  ne mogu sjeći  $\overline{D^+(S)}$ . S druge strane  $q \in \overline{D^+(S)}$  pa  $I^-(q) \subset I^-(\overline{D^+(S)}) \subset (I^-(S) \cup \overline{D^+(S)})$ . Prema tome  $p_n$  mora biti sadržan u  $I^-(S)$ . Također, svaka vremenska krivulja od  $q$  koja je beskrajna u prošlosnom smjeru mora sjeći  $S$ . Za svaki  $n$  tada mora postojati točka na  $S$  na svakoj vremenskoj krivulji unutar  $U_n$  između  $q$  i  $p_n$ , što znači da  $q$  mora ležati na  $\overline{S}$ . Budući da  $\lambda_n$  ne presjecaju  $S$ ,  $q$  može biti samo u  $\text{edge}(S)$ .

**Propozicija 11.** Neka je  $S$  zatvoreni akronalni skup. Tada je  $H^+(S)$  generiran svjetlosnim geodetskim segmentima koji ili nemaju prošlih krajnjih točaka, ili su te točke na  $\text{edge}(S)$ .

*Dokaz:* Definiramo prošlosni skup  $F = \overline{D^+(S)} \cup I^-(S)$ . Prema propoziciji 3  $\partial F$  je akronalna  $C^{1-}$  podmnogostrukost.  $H^+(S)$  je zatvoreni podskup od  $\partial F$ . Neka je točka  $q \in H^+(S) - \text{edge}(S)$ . Ako  $q \notin S$  tada je  $q \in I^+(S)$ , budući da je  $q \in \overline{D^+(S)}$ . Budući da je  $S$  akronalan skup moguće je naći konveksnu normalnu okolinu  $W$  od  $q$  koja ne presjeca  $I^-(S)$ . Čak i da je  $q \in S$ , tada bi bilo moguće naći konveksnu normalnu okolinu od  $q$  takvu da nijedna točka u  $I^+(q, W)$  ne može biti spojena ni sa jednom točkom u  $I^-(q, W)$  vremenskom krivuljom u  $W$  koja ne bi presjecala  $S$ . U oba slučaja, ako je točka  $p \in I^+(q)$ , tada mora postojati prošlosno usmjerena vremenska

kriuvlja od  $p$  do neke točke u  $M - F - W$ , jer bi u suprotnom vrijedilo  $p \in D^+(S)$ . Prema uvjetu (i) iz propozicije 4 primjenjenom na budućnosni skup  $(M - F)$  budući da vrijedi  $I^+(q) \subset I^+((M - F) - W)$  to znači da je  $q \in \partial F_n \cup \partial F_+$ .



Slika 4.18: Zelene linije označavaju područje skupa  $F$ . Iz ovog je primjera vidljivo kako  $I^+(q) \subset I^+(M - F - W)$ , što je važno za zadnji korak dokaza.

**Propozicija 12.** *Za  $S$  zatvoren i akronalan skup vrijedi da je  $\text{int}D(S) = D(S) - \partial D(S)$ , ako nije prazan, globalno hiperboličan.*

Za dokaz ove tvrdnje potrebno je još nekoliko lema

**Lema 7.** *Ako je  $p \in D^+(S) - H^+(S)$ , tada svaka prošlosno beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $p$  presjeca  $I^-(S)$ .*

*Dokaz:* Neka je  $p \in D^+(S) - H^+(S)$ , i neka je  $\gamma$  prošlosno beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $p$ . Tada postoji točka  $q \in D^+(S) \cap I^+(S)$  i prošlosno beskrajna krivulja  $\lambda$  kroz točku  $q$  takva da za svaki  $x \in \lambda$  postoji točka  $y \in I^-(x)$ . Kako će  $\lambda$  sigurno presjecati  $S$ , postojat će takva  $y_1 \in \gamma \cap I^-(x_1)$  za  $x_1 \in S$ , odnosno  $y_1 \in \gamma \cap I^-(S)$ .

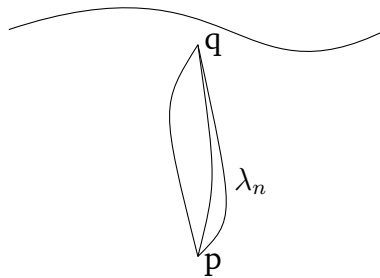
**Korolar 4.** *Ako je  $p \in \text{int}D(S)$  tada svaka beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $p$  presjeca  $I^-(S)$  i  $I^+(S)$ .*

*Dokaz:*  $\text{int}D(S) = D(S) - (H^+(S) \cup H^-(S))$ . Ako je  $p \in I^+(S)$  ili  $p \in I^-(S)$  tada rezultat slijedi po prethodnoj lemi. Ako je  $p \in (D^+(S) - I^+(S))$  tada je  $p \in S \subset D^-(S)$ , a po pretpostavci korolara  $p \in \text{int}D^-(S)$ , pa po prethodnoj lemi rezultat opet vrijedi.

**Lema 8.** *Uvjet jake kauzalnosti vrijedi na  $\text{int}D(S)$ .*

*Dokaz:* Za početak treba pokazati da na skupu vrijedi uvjet kauzalnosti. Pretpostavimo suprotno, neka postoji zatvorena kauzalna krivulja  $\lambda$  kroz točku  $p \in \text{int}D(S)$ . Po prethodnom korolaru sigurno bi postojale točke  $q \in \lambda \cap I^-(S)$  i  $r \in \lambda \cap I^+(S)$ . Po konstrukciji zatvorene kauzalne krivulje vrijedilo bi  $r \in J^-(q)$ , pa bi  $r$  također bila unutar  $I^-(S)$ . To bi bilo u kontradikciji sa time da je  $S$  akronalni skup. Prema tome, na  $\text{int}D(S)$  vrijedi kauzalnost.

Pretpostavimo da u točki  $p \in \text{int}D(S)$  ne vrijedi uvjet jake kauzalnosti. Konstruiramo beskonačan niz  $\{V_n\}$  okolina od  $p$  od kojih svaka posjeduje  $\lambda_n$ , kauzalnu krivulju koja napušta i vraća se u  $V_n$ . Jednakom konstrukcijom kao u dokazu propozicije 24, zaključujemo da granična krivulja  $\gamma$  mora biti beskrajni svjetlosni geodezik kroz točku  $p$ , no tada bi postojale točke  $q \in \gamma \cap I^-(S)$  i  $r \in \gamma \cap I^+(S)$ , što znači da bi za dovoljno veliki  $n$  postojala takva  $\lambda_n$  koja bi bar dvaput presjecala okolinu  $V_q$  od  $q$  i  $V_p$  od  $p$ , a time bi bio narušen uvjet da je  $S$  akronalni skup.  $\square$



Slika 4.19: Konstrukcija granične krivulje za slučaj  $p, q \in I^-(S)$

*Dokaz propozicije 12:* Želimo pokazati kako je skup  $C(p, q)$  kompaktan za sve  $p, q \in \text{int}D(S)$ . Dokaz ćemo podijeliti u slučajeve ovisne o tome gdje se nalaze  $p, q$ .

1) Neka su  $p, q \in I^-(S)$  i pretpostavimo da je  $p \in J^-(q)$ . Neka je  $\lambda_n$  beskonačan niz kauzalnih krivulja od  $p$  do  $q$ . Privremeno izrežemo  $q$  iz mnogostrukosti. Tada po teoremu o graničnim krivuljama 5 postoji buduće usmjerena beskrajna kauzalna krivulja  $\lambda$  od  $p$ , koja je granična krivulja niza  $\lambda_n$ . Vratimo točku  $q$  u mnogostrukost.  $\lambda$  tada može ili ostati beskrajna, ili završiti u  $q$ . Po rezultatu korolar, svaka beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $p$  presjeca  $I^-(S)$  i  $I^+(S)$ . Kako niti jedna  $\lambda_n$  ne presjeca  $I^+(S)$  tako niti  $\lambda$  ne presjeca  $I^+(S)$ . Prema tome  $\lambda$  ima krajnju točku u  $q$  jer bi inače morala sjeći  $I^+(S)$ , što je nemoguće jer je  $q \in I^-(S)$ , prema tome  $C(p, q)$  je kompaktan skup.

2) Neka su  $p, q \in I^+(S)$ , tada dokaz vrijedi analogno kao u prvom slučaju

3) Neka je  $p \in J^-(S)$ ,  $q \in J^+(S) \cap J^+(p)$ . Ako istim postupkom možemo konstruirati graničnu krivulju i njena krajnja točka bude  $q$ , tada je  $C(p, q)$  kompaktan. No, u prethodnom smo postupku koristili činjenicu da su obje točke s iste strane skupa  $S$ , pa smo uz pomoć korolar vidjeli da je granična krivulja, koja je beskrajna i usmjerena ka  $q$  morala nakon vraćanja točke  $q$  završiti u  $q$ . Sada  $\lambda$  već po konstrukciji sječe  $I^-(S)$  i  $I^+(S)$ . Zato moramo promotriti slučaj da njena krajnja točka nije u  $q$ .

Neka je  $\lambda_n$  beskonačan niz kauzalnih krivulja od  $p$  do  $q$ . Privremeno izrežemo  $q$  iz mnogostrukosti, tada postoji  $\lambda$  beskrajna kauzalna krivulja granična nizu  $\lambda_n$  koja posjeduje točku  $r \in \lambda \cap I^+(S)$ . Odaberemo podniz  $\lambda'_n$  takav da je svaka točka na segmentu od  $\lambda$  između  $p$  i  $r$  točka konvergencije tog podniza. Vratimo točku  $q$  u mnogostrukost i okrenemo postupak. Izrežemo točku  $p$  iz mnogostrukosti i pro-

matramo isti podniz  $\lambda'_n$  kao niz prošlosno usmjerenih beskrajnih kauzalnih krivulja koje počinju u  $q$ . Ponovno po teoremu o graničnim krivuljama 5 dobijamo graničnu krivulju  $\lambda'$  koja ulazi u  $I^-(S)$ . Vratimo točku  $p$  i dobijamo krivulju koja sječe  $I^-(S)$  i  $I^+(S)$  pa i dalje zadržava mogućnost biti beskrajna.  $\lambda'$  prolazi kroz točku  $r$ , budući da je  $r$  točka konvergencije za  $\lambda'_n$ . Spajanjem segmenta krivulje  $\lambda$  od  $p$  do  $r$  i  $\lambda'$  od  $r$  do  $q$  dobili smo graničnu krivulju za  $\lambda_n$  koja je sadržana u  $C(p, q)$ , prema čemu je taj skup kompaktan.

Time smo do na preimenovanje točaka  $p$  i  $q$  iscrpili sve mogućnosti i dokazali da je  $C(p, q)$  kompaktan, odnosno  $\text{int}D(S)$  globalno hiperboličan skup.  $\square$

## 5 Energijski uvjeti

Neprekidna distribucija materije u prostorvremenu je opisana simetričnim tenzorom  $T_{ab}$  - **Tenzor tlaka energije i impulsa**. Za promatrača sa 4-brzinom  $v^a$ , komponentu  $T_{ab}v^av^b$  interpretiramo kao gustoću energije koju taj promatrač mjeri. Za vektor  $x^a$  ortogonalan na  $v^a$  veličina  $-T_{ab}v^ax^b$  predstavlja gustoću impulsa u  $x^a$  smjeru. Iako i u općoj teoriji relativnosti vrijedi uvjet:

$$\nabla^a T_{ab} = 0$$

on ne povlači jednoznačno, kao u specijalnoj teoriji relativnosti, strogo očuvanje energije, no upućuje na to u dijelovima prostorvremena malim u usporedbi sa referentnim radijusom zakrivljenosti.

### 5.1 Einsteinova jednadžba

Einsteinova jednadžba povezuje zakrivljenost prostor-vremena sa njegovim energetskim sadržajem. Dana je sljedećim izrazom.

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (5.1)$$

$R_{ab}$  je Riccijev tenzor,  $R$  Riccijev skalar,  $g_{ab}$  metrika. Uzimajući trag Einsteinove jednadžbe dolazimo do

$$R = -8\pi T$$

odnosno,

$$R_{ab} = 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T) \quad (5.2)$$

U kontekstu opće relativnosti, na tenzor energije i impulsa postavljamo neke uvjete koje smatramo fizikalno opravdanima. u nastavku su navedeni oni uvjeti koji su važni u kasnijim teoremima.

### 5.2 Slabi energijski uvjet i svjetlosni energijski uvjet

Uvjet koji postavljamo je da je gustoća energije koju mjeri bilo koji promatrač u svemiru ne-negativna.

$$T_{ab}v^av^b \geq 0 \quad (5.3)$$

Vektor  $v^a$  predstavlja 4-brzinu promatrača koji mjeri gustoću energije. Ako je taj vektor vremenski, tada uvjet zovemo slabi, dok za vektor svjetlosnog tipa, uvjet zovemo svjetlosni. Za ilustraciju, promotrimo moguću dekompoziciju tenzora energije i impulsa

$$T^{ab} = \rho e_0^a e_0^b + p_1 e_1^a e_1^b + p_2 e_2^a e_2^b + p_3 e_3^a e_3^b \quad (5.4)$$

Za savršeni fluid vrijedilo bi  $p_1 = p_2 = p_3 \equiv p$ , pa bi tenzor energije i impulsa poprimio oblik  $T^{ab} = (p+\rho)e_0^a e_0^b + pg^{ab}$ . Proizvoljni normirani, vremenski, budućnosno orijentirani vektor  $v^a$  možemo zapisati u sljedećoj dekompoziciji

$$v^a = \gamma(e_0^a + ae_1^a + be_2^a + ce_3^a), \quad \gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gdje su  $a, b, c$  proizvoljne konstante ograničene uvjetom  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ . Kad bi se radilo o svjetlosnom vektoru  $k^a$ , njega možemo zapisati u proizvoljnoj dekompoziciji

$$k^a = e_0^a + a'e_1^a + b'e_2^a + c'e_3^a$$

gdje su  $a', b', c'$  proizvoljne konstante ograničene uvjetom  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ .

U sljedećem koraku možemo pogledati što bi slabi energijski uvjet značio za konkretan model tenzora energije i impulsa. Ako u (5.4) uvrstimo izraz za  $v^a$ , i slobodno odaberemo  $a = b = c = 0$ , slabi energijski uvjet postaje  $\rho \geq 0$ , dok uz odabir  $b = c = 0$  (ili  $a = b = 0, a = c = 0$ ) uvjet glasi  $\rho + p_i > 0$ . Jednaki postupkom, za svjetlosni energijski uvjet dobivamo  $\rho + p_i \geq 0$ .

### 5.3 Jaki energijski uvjet

Veoma važan uvjet u većini teorema o singularitetima je jaki energijski uvjet. Motivacija za njegovo uvođenje je definiranje gravitacije kao privlačne u svim smjerovima, što će biti vidljivo kasnije iz rješenja Raychaudhurijeve jednadžbe. Iz tog razloga jaki energijski uvjet zove se i uvjet vremenske konvergencije (ako se radi o vremenskim geodezicima).

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)v^a v^b \geq 0 \quad (5.5)$$

Iz jednakosti (5.2) vidljivo je da je ovaj uvjet ujedno i uvjet na Riccijev tenzor, odnosno, na zakrivljenost. Zanimljivo je primjetiti kako je jaki energetski uvjet, kada se odnosi na svjetlosne vektore, ekvivalentan slabom svjetlosnom energijskom uvjetu.

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\right)k^a k^b \geq 0$$

$$T_{ab}k^a k^b - \frac{1}{2}g_{ab}T k^a k^b \geq 0$$

Budući da je  $g_{ab}k^a k^b = k^a k_a = 0$

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0$$

### 5.4 Narušenja energijskih uvjeta

Očekivano je da navedeni uvjeti vrijede za materiju klasične fizike, no već jednostavne demonstracije poput Casimirovog efekta pokazuju da kvantni efekti mogu dovesti do narušenja slabog energijskog uvjeta. Budući da je opća teorija relativnosti još uvijek klasična teorija, za koju očekujemo da bude klasični limes neke buduće

kvantne teorije, takva se narušenja aproksimativno mogu izbjeći korištenjem uprosječenih verzija istih uvjeta, poput  $\int_{\gamma} T_{ab} k^a k^b d\lambda \geq 0$ , integracije svetlosnog energijskog uvjeta uzduž nekog svjetlosnog geodezika.

Veću težinu ima problem opravdavanja jakog energijskog uvjeta, budući da je on u središtu teorema o singularitetima, a po nekim modelima inflacije koje koriste skalarna polja kao pogon za inflaciju i čak trenutnim mjerenjima ekspanzije svemira, u kojima je ona ubrzana, taj je uvjet narušen [7]. Ipak, u kontekstu ovoga rada, pretpostavljeno je kako je prostor-vrijeme popunjeno samo klasičnom materijom, i pretpostavka je da jaki energijski uvjet vrijedi. Ostaje za istraživanje vrijede li isti ili slični zaključci u slučaju u kojem jaki energijski uvjet nije zadovoljen.



## 6 Kongruencije geodezika

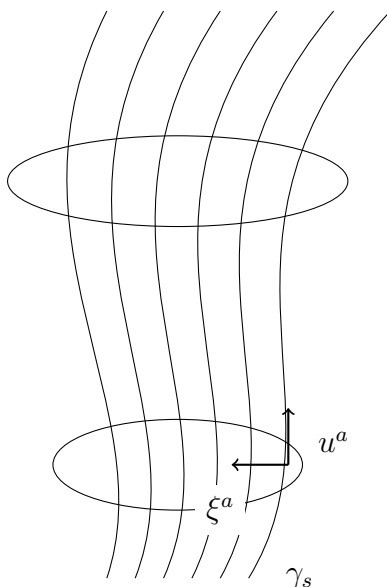
Neka je  $O$  otvorena okolina u prostor-vremenu  $(M, g)$ . Kongruencijom nazivamo familiju krivulja takvu da kroz svaku točku sadržanu u  $O$  prolazi točno jedna krivulja, i one se međusobno ne presjecaju. Cilj nam je promotriti kako se geodezici ponašaju jedan naspram drugog unutar iste familije, kako se udaljavaju ili približavaju u ovisnosti o njihovom parametru. Konkretno, tražimo ponašanje vektora devijacije  $\xi^a$  u vremenu, odnosno, uzduž geodezika u ovisnosti o afinom parametru. Konstrukcijom skalara  $\theta$  kojega ćemo interpretirati kao skalar ekspanzije, veličinu koja opisuje relativnu promjenu volumena razapetog kongruencijom, želimo pokazati da će uz jaki energijski uvjet svaka kongruencija geodezika konvergirati ka istoj točki.

### 6.1 Kongruencija vremenskih geodezika

Neka je  $u^a = \frac{dx^a}{dt}$  tangentan vektor na vremenski geodezik  $\gamma(t)$  gdje je  $t$  afini parametar, odnosno vlastito vrijeme. Neka je  $\xi^a$  vektor devijacije između dva susjedna geodezika u kongruenciji, ovisan o vlastitom vremenu geodezika. Sljedeće jednakosti vrijede:

$$u^a u_a = -1 \quad u^a_{;b} u^b = 0 \quad u^a \xi_a = 0$$

i označavaju redom: normiranost tangentskog vektora, jednadžbu geodezika, ortogonalnost vektora devijacije i tangentskog vektora. Oznakom  $u^a_{;b}$  podrazumijevamo kovariantnu derivaciju  $u^a_{;b} \equiv \nabla_b u^a$



Slika 6.1: Kongruencija geodezika

Neka je  $\gamma_s$  familija susjednih geodezika, gdje parametrom  $s \in [0, 1]$  razlikujemo jedan geodezik od drugoga. Vektor (okomit na  $u^a$ ) devijacije između dva geodezika tada je  $\xi^a = \frac{\partial x^a}{\partial s}$ . Tangentan vektor je  $u^a = \frac{\partial x^a}{\partial t}$ . Ako vektor devijacije parcijalno

deriviramo po  $t$ , a tangentan vektor po parametru  $s$ , vidljivo je da vrijedi jednakost  $\frac{\partial u^a}{\partial s} = \frac{\partial \xi^a}{\partial t}$ , odnosno vrijedi i

$$u_{;b}^a \xi^b = \xi_{;b}^a u^b \quad (6.1)$$

Definiramo novi tenzor - transverzalnu metriku  $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$  (transverzalnu u smislu da je okomita na  $u^a$ ) i uvodimo novo tenzorsko polje  $B_{ab} = u_{a;b}$  koje je u istom smislu transverzalno, a budući da vrijedi (6.1) dobivamo jednadžbu koja mjeri odstupanje vektora devijacije da bude paralelno transportiran uzduž  $u^a$

$$\xi_{;b}^a u^b = B^a_b \xi^b \quad (6.2)$$

Trag tenzora je  $B^a_a = \theta$ .  $B_{ab}$  možemo rastaviti u simetrični dio koji uključuje samo trag  $\frac{1}{3}\theta h_{ab}$ , simetrični dio bez traga  $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$  i antisimetrični dio  $\omega_{ab} = B_{[ab]}$ .

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (6.3)$$

$\sigma_{ab}$  je tenzor smicanja,  $\omega_{ab}$  je tenzor rotacije geodezika, a  $\theta$  je skalar ekspanzije. Interpretaciju  $\theta$  kao skalara ekspanzije dodatno ćemo pokazati kasnije. Značaj tenzora smicanja vidjet ćemo iz njegove jednadžbe evolucije, a tenzor rotacije neće utjecati na daljnje rezultate jer ćemo pokazati da je  $\omega_{ab} = 0$ . Svaki od članova na koji smo rastavili tenzor  $B_{ab}$  je transverzalan na  $u^a$ .

### 6.1.1 Raychaudhurijeva jednadžba

Cilj nam je doći do jednadžbe za evoluciju skalara ekspanzije  $\theta$ . Počinjemo jednadžbom za evoluciju tenzora  $B_{ab}$ .

$$\begin{aligned} B_{ab;c} u^c &= u_{a;bc} u^c \\ &= (u_{a;cb} - R_{adbc} u^d) u^c \\ &= (u_{a;c} u^c)_{;b} - u_{a;c} u^c_{;b} - R_{adbc} u^d u^c \\ &= -B_{ac} B^c_b - R_{adbc} u^d u^c \end{aligned}$$

Izračunajmo trag prethodne jednadžbe

$$\begin{aligned} h^{ab} B_{ab;c} u^c &= \frac{d}{d\tau} B^a_a = \frac{d\theta}{d\tau} \\ &= -B_{ac} B^{ca} - R_{dc} u^d u^c \end{aligned}$$

Drugi član sa desne strane je jednostavan, kontrakcijom Riemannovog tenzora dobijamo Riccijev tenzor. Pogledajmo prvi član:

$$\begin{aligned} B_{ac} B^{ca} &= \left(\frac{1}{3}\theta h_{ac} + \sigma_{ac} + \omega_{ac}\right) \left(\frac{1}{3}\theta h^{ca} + \sigma^{ca} + \omega^{ca}\right) \\ \frac{1}{9}\theta^2 h_{ac} h^{ca} &= \frac{1}{9}\theta^2 h_{ac} h^{ac} = \frac{1}{9}\theta^2 \times 3 = \frac{1}{3}\theta^2 \end{aligned}$$

jer je  $h^{ac}$  simetričan tenzor.

$$h_{ac}\sigma^{ca} = h_{ac}(B^{(ca)} - \frac{1}{3}\theta h^{ac}) = \theta - \frac{1}{3}\theta \times 3 = 0$$

$$h_{ac}\omega^{ca} = 0$$

jer je  $h_{ac}$  simetričan, a  $\omega^{ca}$  antisimetričan tenzor. Sve zajedno, dolazimo do konačnog izraza za *Raychaudhurijevu jednadžbu*

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab} \quad (6.4)$$

Važno je primijetiti da su  $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$  i  $\omega_{ab}\omega^{ab} \geq 0$ .

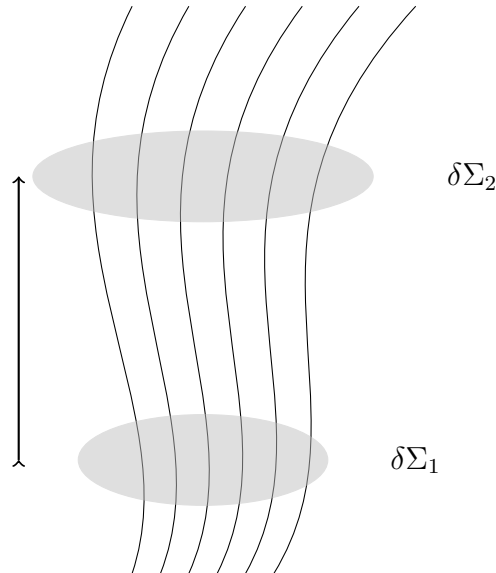
### 6.1.2 Interpretacija $\theta$ kao skalara ekspanzije

Dokazujemo tvrdnju

$$\theta = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{d\tau} \delta V$$

Skalar ekspanzije opisuje normiranu promjenu komada volumena poprečnog presjeka kongruencije. Uvodimo pojmove poprečnog presjeka i njegovog volumena. Odaberemo neki geodezik  $\gamma$  iz kongruencije, na njemu odaberemo točku  $P$  u kojoj vrijedi  $\tau = \tau_P$ . U maloj okolini oko  $P$  konstruiramo mali skup  $\delta\Sigma(\tau_P)$  točaka  $P'$ , tako da kroz svaku točku  $P'$  prolazi točno jedan drugi geodezik iz kongruencije i vrijedi  $\tau_{P'} = \tau_P$ .

$\delta\Sigma(\tau_P)$  zovemo poprečni presjek kongruencije. Namjera nam je izračunati promjenu njegovog volumena u odnosu na susjednu točku  $Q \in \gamma$ . Neka su  $y^i, i = 1, 2, 3$  ko-



Slika 6.2: Kongruencija geodezika i promjena volumena poprečnog presjeka

ordinate na  $\delta\Sigma(\tau_P)$ . Svaka točka  $P'$  dobija svoju koordinatu  $y^i$ . Istoznačno, možemo svaki geodezik iz kongruencije označiti sa  $y^i$ . Time smo omogućili korištenje istih koordinata i na  $\delta\Sigma(\tau_Q)$ .

Sada imamo konstruirani koordinatni sustav  $(\tau, y^i)$  u okolini geodezika  $\gamma$ . Moguća je koordinatna transformacija između novog sustava, i originalnog sustava  $x^a \equiv x^a(\tau, y^i)$ . Budući da je  $y^i$  konstanta uzduž geodezika, vrijedi relacija:

$$u^a = \left( \frac{\partial x^a}{\partial \tau} \right)_{y^i} \quad (6.5)$$

S druge strane, vektori

$$e_i^a = \left( \frac{\partial x^a}{\partial y^i} \right)_\tau$$

su tangentni na poprečni presjek. Uvodimo novi tenzor dimenzije  $d = 3$ , koji će nam služiti kao metrički tenzor na poprečnom presjeku,

$$h_{ij} = g_{ab} e_i^a e_j^b$$

Za pomake po  $\delta\Sigma(\tau_P)$  (ograničene na  $d\tau = 0$ ) vrijedi:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} dx^a dx^b \\ &= g_{ab} \left( \frac{\partial x^a}{\partial y^i} dy^i \right) \left( \frac{\partial x^b}{\partial y^j} dy^j \right) \\ &= g_{ab} e_i^a e_j^b dy^i dy^j \\ &= h_{ij} dy^i dy^j \end{aligned}$$

3D element volumena je  $\delta V = \sqrt{\det[h_{ij}]}$ . Budući da su  $y^i$  konstantne uzduž jednog geodezika,  $d^3y$  ostaje isti od  $\delta\Sigma(\tau_P) \rightarrow \delta\Sigma(\tau_Q)$ . Prema tome, promjena volumena dolazi samo od promjene  $\sqrt{\det[h_{ij}]}$ .

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{d\tau} \delta V = \frac{1}{\sqrt{\det[h_{ij}]}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{\det[h_{ij}]} = \frac{1}{2} h^{ij} \frac{dh_{ij}}{d\tau} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_{ij}}{d\tau} &= (g_{ab} e_i^a e_j^b)_{;c} u^c \\ &= g_{ab} (e_{i;c}^a u^c) e_j^b + g_{ab} e_i^a (e_{j;c}^b u^c) \\ &= g_{ab} (u_{;c}^a e_i^c) e_j^b + g_{ab} e_i^a (u_{;c}^b e_j^c) \\ &= u_{b;a} e_i^a e_j^b + u_{a;b} e_i^a e_j^b \\ &= (B_{ba} + B_{ab}) e_i^a e_j^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^{ij} \frac{dh_{ij}}{d\tau} &= (B_{ba} + B_{ab}) h^{ij} e_i^a e_j^b \\ &= 2B_{ab} h^{ab} = 2B_{ab} g^{ab} \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Prema tome, slijedi da je

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\det[h_{ij}]}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{\det[h_{ij}]} = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{d\tau} \delta V \quad (6.7)$$

$\theta$ , skalar ekspanzije, jednak frakcionalnoj promjeni volumena poprečnog presjeka kongruencije geodezika.

## 6.2 Kongruencija svjetlosnih geodezika

Za razliku od vremenskih geodezika, tangentni vektor svjetlosnog geodezika je okomit sam na sebe, pa ga moramo promotriti zasebno. Vrijede sljedeće relacije

$$k^a k_a = 0, \quad k^a{}_{;b} k^b = 0, \quad k^a \xi_a = 0, \quad k^a{}_{;b} \xi^b = \xi^a{}_{;b} k^b \quad (6.8)$$

Ponovo tražimo dio metrike koji je isključivo transverzalan, no u slučaju svjetlosnih geodezika, problem nije toliko trivijalan. Ranije rješenje  $h'_{ab} = g_{ab} + k_a k_b$  nije zadovoljavajuće jer  $h'_{ab} k^b = k_a \neq 0$ . Rješenje tražimo u odabiru pomoćnog svjetlosnog vektorskog polja  $N^a$ , takve normalizacije da je  $k^a N_a = -1$ . Transverzalna metrika tada je dana izrazom:

$$h_{ab} = g_{ab} + k_a N_b + N_a k_b \quad (6.9)$$

Odabir svjetlosnog vektorskog polja  $N_a$  nije jedinstven, no kasnije će se pokazati da su zaključci o skalaru ekspanzije neovisni o konkretnom odabiru  $N_a$ . Nastavljamo kao i ranije

$$\xi^a{}_{;b} k^b = k^a{}_{;b} \xi^b = B^a{}_b \xi^b \quad (6.10)$$

Budući da bi  $\xi^a$  mogao imati komponentu koja nije transverzalna, počinjemo izolacijom onog dijela koji je transverzalan.

$$\tilde{\xi}^a = h^a{}_c \xi^c = \xi^a + (N_c \xi^c) k^a \quad (6.11)$$

A njegovo je ponašanje dano sa

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^c{}_{;b} k^b &= h^c{}_{d;b} \xi^d k^b + h^c{}_d B^d{}_b \xi^b \\ &= h^c{}_d B^d{}_b \xi^b + (N_{d;b} \xi^d k^b) k^c \end{aligned}$$

iz čega je jasna komponenta uzduž  $k^c$ , koje se rješavamo projekcijom na  $h^a{}_c$

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}^a{}_{;b} k^b)^\sim &\equiv h^a{}_c (\tilde{\xi}^c{}_{;b} k^b) = h^a{}_c B^c{}_d \xi^d \\ &= h^a{}_c B^c{}_d \tilde{\xi}^d \\ &= h^a{}_c h^d{}_b B^c{}_d \tilde{\xi}^b \\ \Rightarrow (\tilde{\xi}^a{}_{;b} k^b)^\sim &= \tilde{B}^a{}_b \tilde{\xi}^b \end{aligned}$$

Gdje je  $\tilde{B}_{ab} = h^c{}_a h^d{}_b B_{cd}$  potpuno transverzalni dio od  $B_{cd}$ . Eksplicitno zapisano, koristeći novu transverzalnu metriku

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ab} &= (g_a{}^d + k_a N^d + N_a k^d) (g_b{}^e + k_b N^e + N_b k^e) B_{de} \\ &= (g_a{}^d + k_a N^d + N_a k^d) (B_{db} + k_b B_{de} N^e) \\ &= B_{ab} + k_a N^d B_{db} + k_b B_{ad} N^d + k_a k_b B_{de} N^d N^e \end{aligned} \quad (6.12)$$

Vektor  $\tilde{B}^a_b \tilde{\xi}^b$  označava transverzalnu relativnu brzinu između dva susjedna geodezika. Tenzor  $\tilde{B}_{ab}$  možemo ponovo zapisati u dekompoziciji

$$\tilde{B}_{ab} = \frac{1}{2}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (6.13)$$

gdje vrijedi jednaka interpretacija komponenata kao i ranije. Skalar ekspanzije iznosi

$$\theta = g^{ab} \tilde{B}_{ab} = k^a_{;a}$$

i vidljivo je kako ne ovisi o odabiru pomoćnog polja  $N^a$

### 6.2.1 Raychaudhurijeva jednačba za svjetlosne geodezike

Izvod Raychaudhurijeve jednačbe za svjetlosne geodezike slijedi iste korake kao i za vremenske geodezike. Ona glasi:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\omega_{ab} - R_{ab}k^a k^b \quad (6.14)$$

## 6.3 Tenzor rotacije i smicanja

Jednačba evolucije za tenzor smicanja kongruencije vremenskih geodezika glasi

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ab}}{d\lambda} = & -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_a^c\sigma_{cb} - \omega_a^c\omega_{cb} + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma^2 - \omega^2) + \\ & + \frac{1}{2}h_{ca}h_{db}R^{cd} - \frac{1}{6}h_{ab}h_{cd}R^{cd} - C_{adbc}u^d u^c \end{aligned} \quad (6.15)$$

i iz ovog kompliciranog izraza važna nam je samo jedna stvar. U jednačbu evolucije tenzora smicanja ulazi Weylov tenzor  $C_{abcd}$ , koji, ako je različit od nule, čini da i tenzor smicanja postane različit od nule. Za slučaj kongruencije svjetlosnih geodezika jednačba evolucije za tenzor smicanja glasi

$$\frac{d\sigma_{ab}}{d\lambda} = -\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma_{cb} - \omega_{ac}\omega_{cb} + h_{ab}(\sigma^2 - \omega^2) - C_{adbc}u^d u^c \quad (6.16)$$

i njena važnost nam je jednaka kao i za slučaj kongruencije vremenskih geodezika.

### 6.3.1 Frobeniusov teorem

Neke kongruencije geodezika ortogonalne su na familiju hiperploha prostornog tipa koje raslojavaju otvorenu okolinu na kojoj je kongruencija definirana. Takve kongruencije imat će iščezavajući tenzor rotacije.

Kongruencija nekih krivulja (ne nužno geodezika) bit će ortogonalna na familiju hiperploha ako je njen tangenti vektor  $u^a$  proporcionalan sa normalom hiperploha  $n^a$ . Hiperplohe možemo zadati preko neke funkcije  $\Phi(x^a) = c$  koja je na cijeloj hiperplohi konstatnog iznosa. Tada je vektor normale  $n^a \propto \nabla_a \Phi = \Phi_{;a}$  pa i vrijedi

$$u_a = -\mu \Phi_{;a} \quad (6.17)$$

za neki faktor  $\mu$  koji je moguće odrediti iz zadane normalizacije. Deriviramo prethodni izraz:

$$u_{a;b} = -\mu\Phi_{;ab} - \Phi_{;a}\mu_{;b} \quad (6.18)$$

Skoro pa iz rukava, promotrimo sada sljedeći tenzor, koji je potpuno antisimetričan

$$u_{[a;b}u_{c]} = \frac{1}{3}(u_{a;b}u_c + u_{c;a}u_b + u_{b;c}u_a - u_{b;a}u_c - u_{a;c}u_b - u_{c;b}u_a) \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{3}[(-\mu\Phi_{;ab} - \Phi_{;a}\mu_{;b})u_c - (-\mu\Phi_{;ba} - \Phi_{;b}\mu_{;a})u_c + \dots] \quad (6.20)$$

$$= 0 \quad (6.21)$$

jer je  $\Phi_{;ba} = \Phi_{;ab}$

Prema tome, vrijedi sljedeći rezultat

**Lema 9.** *Ako je kongruencija krivulja ortogonalna na familiju hiperploha prostornog tipa tada vrijedi  $u_{[a;b}u_{c]} = 0$ .*

Vrijedi i obrat ove tvrdnje, koja je u ukupnom obliku poznata kao Frobeniusov teorem, no nije potreban za sljedeće dokaze, a njegov je dokaz tehnički zahtjevniji. Sada usmjeravamo pažnju na kongruenciju vremenskih geodezika.

$$3!u_{[a;b}u_{c]} = 2(u_{[a;b}u_c + u_{[c;a}u_b + u_{[b;c}u_a) \quad (6.22)$$

$$= 2(B_{[ab}u_c + B_{[ca}u_b + B_{[bc}u_a) \quad (6.23)$$

$$= 2(\omega_{ab}u_c + \omega_{ca}u_b + \omega_{bc}u_a) \quad (6.24)$$

Za kongruenciju vremenskih geodezika ortogonalnu na familiju prostornih hiperploha lijeva je strana jednaka 0 po prijašnjem rezultatu. Desnu stranu pomnožimo zdesna sa  $u^c$ , pamtimo da je tenzor rotacije transverzalan na tangentni vektor geodezika  $\omega_{ca}u^c = \omega_{bc}u^c = 0$ , pa dobijamo

$$0 = -2\omega_{ab} \quad (6.25)$$

Vrijedi sljedeća tvrdnja

**Lema 10.** *Ako je kongruencija vremenskih geodezika ortogonalna na familiju prostornih hiperploha, tada njen tenzor rotacije iščezava.*

Po zaključcima iz leme 4, kongruencija vremenskih geodezika je ortogonalna na familiju prostornih hiperploha parametriziranih vlastitim vremenom geodezika, pa za tu kongruenciju vrijedi  $\omega_{ab} = 0$ .

Jednaki zaključci vrijede i za kongruenciju svjetlosnih geodezika. Rezultat leme 9 je općenit i možemo ga primjeniti na vektorsko polje  $k^a$  svjetlosnog tipa.

$$3!k_{[a;b}k_{c]} = 0 = 2(B_{[ab}u_c + B_{[ca}u_b + B_{[bc}u_a) \quad (6.26)$$

Ponovo iskoristimo pomoćni vektor  $N^c$  svjetlosnog tipa definiran ranije za koji vrijedi  $k_c N^c = -1$ , i njime pomnožimo prethodni izraz zdesna.

$$B_{[ab]} = B_{[ca]}k_b N^c + B_{[bc]}k_a N^c \quad (6.27)$$

$$= \frac{1}{2} (B_{ca}k_b - B_{ac}k_b + B_{bc}k_a - B_{cb}k_a) N^c \quad (6.28)$$

$$= B_{c[a}k_{b]}N^c + k_{[a}B_{b]c}N^c \quad (6.29)$$

Ako sada potpuno antisimetriziramo izraz (6.12), dobit ćemo

$$\tilde{B}_{[ab]} = B_{[ab]} - B_{c[a}k_{b]}N^c - k_{[a}B_{b]c}N^c \quad (6.30)$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza za  $B_{[ab]}$  konačno dobivamo

$$\tilde{B}_{[ab]} = \omega_{ab} = 0 \quad (6.31)$$

pa kao i za kongruenciju vremenskih geodezika vrijedi rezultat

**Lema 11.** *Ako je kongruencija svjetlosnih geodezika ortogonalna na familiju prostarih hiperploha, tada njen tenzor rotacije iščezava.*

## 6.4 Teorem o fokusiranju

Demonstrirat ćemo značaj Raychaudhurijeve jednadžbe i prikazati motivaciju za održavanje jakog energijskog uvjeta. Krećemo sa vremenskim geodezicima.

**Teorem 3.** *Neka je kongruencija vremenskih geodezika okomita na familiju prostornih ploha ( $\omega_{ab} = 0$ ) i neka vrijedi jaki energijski uvjet*

$$R_{ab}u^a u^b \geq 0$$

Tada Raychaudhurijeva jednadžba povlači:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}u^a u^b \leq 0$$

*Dokaz:* Na desnoj strani Raychaudhurijeve jednadžbe nalazi se kvadrirani skalar ekspanzije, koji je pozitivno definitan,  $\sigma_{ab}\sigma^{ab}$  je pozitivno definitna, a  $R_{ab}u^a u^b$  je po pretpostavci veći ili jednak nuli. Prema tome, cijela desna strane Raychaudhurijeve jednadžbe je manja ili jednaka nuli.  $\square$

Zaključak je da se ekspanzija smanjuje tijekom evolucije kongruencije. Početno divergirajuća kongruencija ( $\theta > 0$ ) će u budućnosti manje divergirati, dok će početno konvergirajuća kongruencija ( $\theta < 0$ ) naglije konvergirati. Fizikalna interpretacija ovog teorema je "Gravitacija je privlačna sila kada vrijedi jaki energijski uvjet". Iz ove je tvrdnje transparentno vidljiva motivacija za uvođenje jakog energijskog uvjeta. Gravitacija kao sila privlačna u svim smjerovima koncept je čak i intuitivno poznat



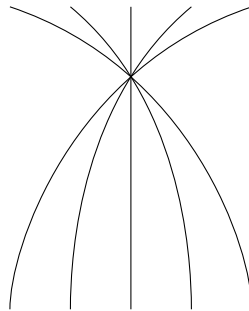
iz klasične fizike. Otvoreno je pitanje može li se jaki energijski uvjet pomiriti sa ubrzanom ekspanzijom svemira, ili je taj zahtjev pogrešno formuliran.

Također je važno kako je Raychaudhurijeva jednačba izvedena na otvorenoj okolini  $O$  koja ne mora predstavljati cijeli svemir, odnosno Raychaudhurijeva jednačba opisuje samo dobro ponašajuća područja vremenskih i svjetlosnih geodezika (iako zaključci izvedeni iz nje dovode do nedefiniranih točaka, sve "prije" problematičnih točaka je dobro ponašajuće područje). Singulariteti, rupe ili drukčije deformacije nisu uključene u područje koje Raychaudhurijeva jednačba opisuje, pa i to treba uzeti u obzir prije odbacivanja jakog energijskog uvjeta kao globalno važećeg.

**Teorem 4.** *Neka je kongruencija vremenskih geodezika okomita na familiju prostornih ploha ( $\omega_{ab} = 0$ ) i neka vrijedi jaki energijski uvjet*

$$R_{ab}u^a u^b \geq 0$$

*Ako u nekoj točki  $r \in \gamma$  skalar ekspanzije poprimi negativnu vrijednost  $\theta_0 < 0$ , kongruencija vremenskih geodezika razvit će kaustik za ili prije  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ .*



Slika 6.3: Kaustik u kongruenciji

*Dokaz:* Iz Raychaudhurijeve jednačbe i teorema o fokusiranju (jer su  $\sigma^{ab}\sigma_{ab} \geq 0$ ,  $R_{ab}u^a u^b \geq 0$ ) moguće je zaključiti i

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$$

To je moguće odmah integrirati, što daje

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{\tau}{3}$$

gdje je  $\theta_0 \equiv \theta(0)$ . To pokazuje da će početno konvergirajuća kongruencija ( $\theta_0 < 0$ ) u konačnom vremenu ( $\tau \leq 3/|\theta_0|$ ) razviti kaustik ( $\theta(\tau) \rightarrow -\infty$ ), točku u kojoj se neki geodezici spajaju. Ta je točka singularitet kongruencije, pa prethodne jednačbe za kongruenciju tu gube svoj smisao.  $\square$

Jednak oblik ima i teorem o fokusiranju za svjetlosne geodezike:

**Teorem 5.** *Neka je kongruencija svjetlosnih geodezika ortogonalna na familiju prostornolikh hiperploha ( $\omega_{ab} = 0$ ) i neka vrijedi jaki energijski uvjet ili slabi svjetlosni energijski uvjet (za svjetlosne vektore, ovi su uvjeti ekvivalentni)*

$$R_{ab}k^ak^b \geq 0$$

Tada Raychaudhurijeva jednadžba polvači:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}k^ak^b \leq 0$$

**Teorem 6.** *Neka je kongruencija svjetlosnih geodezika okomita na familiju prostornih ploha ( $\omega_{ab} = 0$ ) i neka vrijedi jaki energijski uvjet*

$$R_{ab}u^au^b \geq 0$$

*Kongruencija svjetlosnih geodezika u konačnom će vremenu razviti kaustik.*

*Dokaz:* Ponovo, moguće je zaključiti  $\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$ . To je moguće odmah integrirati, što daje  $\theta^{-1}(\lambda) \geq \theta_0^{-1} + \frac{\lambda}{3}$  gdje je  $\theta_0 \equiv \theta(0)$ . Početno konvergirajuća kongruencija svjetlosnih geodezika ( $\theta_0 < 0$ ) u konačnoj duljini afinog parametra ( $\lambda \leq 2/|\theta_0$ ) bit će fokusirana u istu točku ( $\theta(\lambda) \rightarrow -\infty$ ). □

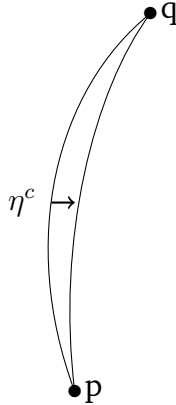
## 7 Konjugirane točke

Neka je  $u^a$  tangentan vektor na geodezik  $\gamma$ , a  $\eta^a$  vektor devijacije. Označimo sa  $v^a = \eta^a_{;b} u^b$  vektor koji mjeri promjenu vektora devijacije uzduž geodezika. Analogno tome,  $a^a = v^a_{;c} u^c$  predstavlja mjeru akceleracije prema infinitezimalno susjednom geodeziku. U drugom obliku zapisano:

$$\begin{aligned}
 a^a &= u^c \nabla_c (u^b \nabla_b \eta^a) \\
 &= u^c \nabla_c (\eta^b \nabla_b u^a) \\
 &= (u^c \nabla_c \eta^b) (\nabla_b u^a) + \eta^b u^c \nabla_c \nabla_b u^a \\
 &= (\eta^c \nabla_c u^b) (\nabla_b u^a) + \eta^b u^c \nabla_b \nabla_c u^a - R_{cbd}{}^a \eta^b u^c u^d \\
 &= \eta^c \nabla_c (u^b \nabla_b u^a) - R_{cbd}{}^a \eta^b u^c u^d \\
 &= -R_{cbd}{}^a \eta^b u^c u^d
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ova se jednadžba zove "jednadžba devijacije geodezika". Iz ove je jednadžbe jasno vidljiva interpretacija Riemannovog tenzora. Neki geodezici će se približavati ili udaljavati od svojih infinitezimalno bliskih susjeda samo ako je  $R_{abcd} \neq 0$ . Vektorsko polje  $\eta^a$  koje je rješenje jednadžbe (7.1) zovemo Jacobijevo polje.

**Definicija 22.** Dvije točke  $p, q \in M$  zovemo **konjugirane** ako postoji rješenje Jacobijeve jednadžbe takvo da nužno iščezava i u  $p$  i u  $q$ , a općenito je različito od nule.



Slika 7.1: Par konjugiranih točaka

### 7.1 Konjugirane točke na vremenskim geodezicima

Za jednostavnije baratanje konjugiranim točkama uvodimo ortonormiranu bazu vektora paralelno propagiranu uz vremenski geodezik  $\gamma$ .

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4 = u\}$$

Tri su vektora prostornog tipa, a četvrti je vektor vremenskog tipa i jednak je tangentnom vektoru vremenskog geodezika kojeg promatramo. Ova se baza u općenitom

obliku (kada je adaptirana na proizvoljnu krivulju) zove Fermijeva propagirana baza, a specijalni slučaj u kojem je adaptirana na geodezike je lakši za baratanje. U novim koordinatama metrika uvijek ima dijagonalni oblik.

$$g(E_i, E_j) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{za } i, j = 1, 2, 3 \\ -1 & \text{za } i, j = 4 \\ 0 & \text{za } i = 1, 2, 3, j=4 \end{cases}$$

Vektor devijacije ortogonalan je na tangentni vektor geodezika, pa se sastoji samo od linearne kombinacije prva tri vektora baze  $\eta = \eta^\alpha E_\alpha$  gdje  $\alpha = 1, 2, 3$ . Zapisano u novoj bazi, Jacobijeva jedandžba glasi

$$\frac{d^2 \eta^\alpha}{d\tau^2} = -R_{\delta\beta\nu}{}^\alpha \eta^\beta u^\delta u^\nu \quad (7.2)$$

a budući da je  $u^\mu = 1 \cdot \delta_4^\mu$ , i uz poneko premještanje i preimenovanje indeksa u Riemannovom tenzoru, možemo je zapisati i kao:

$$\frac{d^2 \eta^\alpha}{d\tau^2} = R^\alpha{}_{4\beta 4} \eta^\beta \quad (7.3)$$

Svakako je važno pamtiti da ova jednadžba u ovom obliku vrijedi samo u Fermijevoj propagiranoj bazi. Budući da  $\eta^\alpha$  zadovoljava običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu, mora linearno ovisiti o početnim uvjetima  $\eta^\alpha(0)$  i  $d\eta^\alpha/d\tau(0)$  u točki  $p$ . Budući da je po konstrukciji u početnoj točki  $\eta^\alpha(0) = 0$ , vrijedi:

$$\eta^\alpha(\tau) = A^\alpha{}_\beta \left. \frac{d\eta^\beta}{d\tau} \right|_{\gamma(0)=p} \quad (7.4)$$

Matrica  $A^\alpha{}_\beta$  tada zadovoljava svoju verziju Jacobijeve jednadžbe

$$\frac{d^2 A^\alpha{}_\beta}{d\tau^2} = -R^\alpha{}_{4\gamma 4} A^\gamma{}_\beta \quad (7.5)$$

Što se tiče početnih uvjeta za matricu  $A^\alpha{}_\beta$  vrijedi

$$A^\alpha{}_\beta \Big|_{\gamma(0)=p} = 0 \quad (7.6)$$

$$\left. \frac{dA^\alpha{}_\beta}{d\tau} \right|_{\gamma(0)=p} = \delta^\alpha{}_\beta \quad (7.7)$$

Par konjugiranih točaka postojat će samo ako je vektor devijacije u točki  $q$  jednak  $\eta^\alpha|_q = 0$ , ali  $d\eta^\alpha/d\tau|_p \neq 0$ , odnosno, vektor devijacije mora iščezavati u početnoj i konačnoj točki, ali mora nešto raditi između, pa njegova derivacija u početnoj točki mora biti različita od nule. Iz jednadžbe (7.5) tada vidimo da će navedeni uvjeti vrijediti ako je

$$\det A^\alpha{}_\beta \Big|_q = 0 \quad (7.8)$$

Ovo je važan i operativno veoma koristan uvjet kojim pokazujemo postojanje para konjugiranih točaka. Matrica  $A^\alpha{}_\beta$  koja opisuje ponašanje Jacobijevog polja povezana

je sa ranije definiranom matricom  $B_{ab} = u_{a;b}$  koja opisuje ponašanje vektora devijacije uzduž geodezika. Da bismo to vidjeli, promotrimo

$$\frac{d\eta^\alpha}{d\tau} = u^a \nabla_a \eta^\alpha = u^a \nabla_a [(e_\alpha)_b \eta^b] \quad (7.9)$$

$$= (e_\alpha)_b u^a \nabla_a \eta^b \quad (7.10)$$

$$= (e_\alpha)_b B^b_a \eta^a \quad (7.11)$$

$$= B^\alpha_\nu \eta^\nu \quad (7.12)$$

gdje smo iskoristili prijašnje činjenice o tenzoru  $B_{ab}$  iz jednažbi (6.1) i (6.2). S druge strane, iz jednažbe (7.4) znamo

$$\frac{d\eta^\alpha}{d\tau} = \frac{dA^\alpha_\beta}{d\tau} \frac{d\eta^\beta}{d\tau} \Big|_p \quad (7.13)$$

Usporedbom dva prethodna izraza

$$\frac{dA^\alpha_\beta}{d\tau} \frac{d\eta^\beta}{d\tau} \Big|_p = B^\alpha_\nu A^\nu_\beta \frac{d\eta^\beta}{d\tau} \Big|_p \quad (7.14)$$

Odnosno u matičnom zapisu

$$\frac{dA}{d\tau} = BA \quad (7.15)$$

$$B = \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \quad (7.16)$$

i konačno najvažnija veza

$$\theta = \text{tr} B = \text{tr} \left[ \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \right] \quad (7.17)$$

Po Jacobijevoj formuli ovo možemo prepisati u sljedećem obliku

$$\theta = \text{tr} \left[ \frac{dA}{d\tau} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det A} \frac{d}{d\tau} (\det A) \quad (7.18)$$

Važnost ove jednažbe je gotovo ključna u dokazima teorema o singularitetima i u potpunoj veličini to možemo vidjeti u sljedećem rezultatu:

**Lema 12.** *Nužan i dovoljan uvjet da bi točka  $q$  bila konjugirana točki  $p$  uzduž vremenskog geodezika  $\gamma$  je  $\theta \rightarrow -\infty$*

*Dokaz:* Ako skalar ekspanzije  $\theta \rightarrow -\infty$  u točki  $q$ , tada po jednažbi (7.18) mora vrijediti  $\det A|_q \rightarrow 0$ .

Obratno, ako u točki  $q$  vrijedi  $\det A|_q \rightarrow 0$ , tada po jednažbi (7.18) mora vrijediti  $\theta \rightarrow -\infty$  u točki  $q$ .  $\square$

Sada možemo navesti nekoliko važnih rezultata vezanih za konjugirane točke na vremenskim geodezicima.

**Propozicija 13.** *Ako svugdje vrijedi jaki energijski uvjet  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ , i ako u nekoj točki vremenskog geodezika  $\gamma(t_1)$  skalar ekspanzije  $\theta$  poprimi negativnu vrijednost  $\theta_1 < 0$ , tada će postojati točka konjugirana točki  $q = \gamma(t_0)$  uzduž  $\gamma(t)$  između  $\gamma(t_1)$  i  $\gamma(t_1 + \frac{3}{|\theta_1|})$ , uz uvjet da je  $\gamma(t)$  definirana za te vrijednosti parametra  $t$ .*

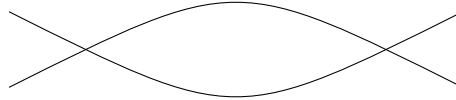
*Dokaz:* Iz leme 4 znamo da će kongruencija vremenskih geodezika od točke  $r$  unutar vlastitog vremena  $\tau \leq 3/\theta_0$  razviti kaustik, odnosno, skalar ekspanzije će divergirati  $\theta \rightarrow -\infty$ , što je po lemi 12 nužan i dovoljan uvjet da bi nova točka bila konjugirana točki  $q$ .  $\square$

Za postojanje para konjugiranih točaka na dovoljno dugom geodeziku (definiranom na dovoljno velikom intervalu svog parametra) dovoljan je i puno slabiji uvjet.

**Propozicija 14.** *Ako vrijedi uvjet vremenske konvergencije, odnosno jaki energijski uvjet  $R_{ab}v^av^b$ , i ako je u nekoj točki  $p = \gamma(t_1)$  vremenskog geodezika  $\gamma$  plimna sila  $R_{abcd}v^av^b \neq 0$ , tada će postojati vrijednosti  $t_0$  i  $t_2$  takve da će  $q = \gamma(t_0)$  i  $r = \gamma(t_2)$  biti konjugirani par točaka, uz uvjet da je  $\gamma$  definiran za te vrijednosti.*

*Dokaz:* Ako u Raychaudhurijevu jednadžbu uvrstimo zamjenu  $\theta = \frac{3}{y} \frac{dy}{dt}$ , te  $F(t) = \frac{1}{3} R_{abcd}v^av^b + \sigma^2$ , ona poprima oblik

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -F(t)y. \quad (7.19)$$



Slika 7.2: Za dovoljno širok interval na kojem je definiran  $\gamma$  postojat će barem par konjugiranih točaka

Nadalje vrijedi  $F(t) > 0$ , budući da vrijedi jaki energijski uvjet i uvjet vremenske generičnosti. Naime, član  $R_{abcd}v^av^b \neq 0$  pojavljuje se u jednadžbi evolucije tenzora smicanja, i uvjetuje da će tenzor smicanja sigurno postati različit od nule, prema čemu će  $\sigma^2 > 0$ . Iz oblika jednadžbe (7.19) vidljivo je kako će rješenje sigurno imati bar dvije nultočke, uz uvjet da parametar  $t$  možemo dovoljno produžiti. Kako je divergencija skalara ekspanzije nužan i dovoljan uvjet za par konjugiranih točaka, propozicija vrijedi.  $\square$

### 7.1.1 Ekstrinzična zakrivljenost hiperplohe

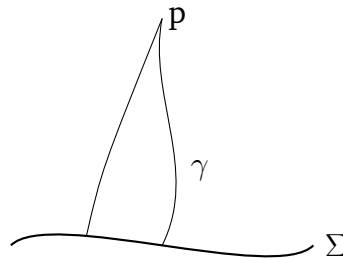
Neka je  $\Sigma$  glatka (ili barem  $C^2$ ) prostorna hiperploha (uronjena trodimenzionalna podmnogostrukost). Neka je  $u^a$  jedinično tangentno polje kongruencije vremenskih geodezika ortogonalnih na  $\Sigma$ .

$$K_{ab} = \eta_{b;a} = B_{ba} \quad (7.20)$$

Budući da je kongruencija po konstrukciji ortogonalna na hiperplohu, vrijedi  $\omega_{ab} = -\omega_{ba} = 0$ , pa je prema tome  $K_{ab}$  simetričan tenzor.  $K_{ab}$  je tenzor ekstrinzične zakrivljenosti koji mjeri promjenu prostorne metrike  $h_{ab}$  (dio metrike  $g_{ab}$  koji je ograničen na djelovanje samo na hiperplohi  $\Sigma$ ) uzduž kongruencije ortogonalne na  $\Sigma$ . Njegov trag jednak je skalaru ekspanzije  $K \equiv K^a_a = h^{ab}K_{ab} = \theta$ .

Točka  $p$  konjugirana je hiperplohi  $\Sigma$  uzduž  $\gamma(t)$  ako postoji Jacobijevo polje različito od nule na hiperplohi  $\Sigma$ , a jednako nuli u točki  $p$ .

**Propozicija 15.** *Ako svugdje vrijedi jaki energijski uvjet  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  i ako trag tenzora ekstrinzične zakrivljenost neke hiperplohe ima negativnu vrijednost  $K = \theta_1 < 0$ , tada će postojati točka  $p$  konjugirana točki hiperplohi  $\Sigma$  uzduž  $\gamma(t)$  koji prolazi kroz točku  $q \in \Sigma$  u ili prije nego  $\gamma(t)$  postigne vrijednost  $\gamma(t_1 + \frac{3}{|\theta_1|})$ , uz uvjet da je  $\gamma(t)$  definirana za te vrijednosti parametra  $t$ .*



*Dokaz:* Trag tenzora ekstrinzične zakrivljenosti jednak je skalaru ekspanzije. Kao i u propoziciji 13, ako je u nekoj točki skalar ekspanzije negativan, matrica  $A^\alpha_\beta$  postat će singularna unutar vrijednosti parametra  $\tau \leq \frac{3}{|\theta_1|}$ , pa će Jacobijevo polje u toj točki iščezavati, odnosno, ta će točka biti konjugirana hiperplohi  $\Sigma$ .  $\square$

## 7.2 Konjugirane točke na svjetlosnim geodezicima

Kao i za slučaj vremenskih geodezika, uvodimo tetradu paralelno propagiranih vektora koji će za svaku točku na svjetlosnom geodeziku činiti bazu tangentnog prostora. No sada je tangentni vektor geodezika  $K^a$  svjetlosnog tipa, što ga čini ortogonalnim na samog sebe. Potprostor tangetnog prostora koji se sastoji od svih vektora okomitih na tangetni vektor geodezika sada sadrži i sam taj tangentni vektor. Želimo vektor devijacije zapisati samo pomoću onih vektora koji su ortogonalni na tangentni vektor geodezika, ali ne i proporcionalni. Naime, devijacija geodezika u smjeru njegovog tangentnog vektora nije ništa doli reparametrizacija. Iz tog razloga uvodimo pseudo-ortonormalnu bazu

$$\{E_1, E_2, E_3 = L, E_4 = K\}$$

gdje su vektori  $L$  i  $K$  svjetlosnog tipa i normirani tako da je  $g(L, K) = -1$  (što znači da gledaju u istu budućnost). Vektori  $E_1$  i  $E_2$  su prostornog tipa, ortonormirani su i ortogonalni na  $L$  i  $K$ . Vektor devijacije ortogonalan na tangentni vektor geodezika

bez komponente u smjeru tangentskog vektora geodezika možemo zapisati kao  $\eta = \eta^m E_m$  za  $m = 1, 2$ . Jacobijeva jednadžba tada glasi:

$$\frac{d^2 \eta^m}{ds^2} = -R^m{}_{4n4} \eta^n \quad (7.21)$$

gdje je  $s$  afini parametar svjetlosnog geodezika. Ponovo možemo definirati matricu  $A^m{}_n$  koja je u ovom slučaju  $2 \times 2$

$$\eta^m = A^m{}_n \frac{d}{ds} \eta^n|_q \quad (7.22)$$

$$\frac{d^2 A^m{}_n}{ds^2} = -R^m{}_{4i4} A^i{}_n \quad (7.23)$$

Povezanost sa skalarom ekspanzije potpuno je analogna kao i za slučaj vremenskog geodezika i vrijedi

$$\theta = \frac{1}{\det A} \frac{d}{ds} (\det A) \quad (7.24)$$

**Lema 13.** *Nužan i dovoljan uvjet da bi točka  $q$  bila konjugirana točki  $p$  uzduž svjetlosnog geodezika  $\gamma$  je  $\theta \rightarrow -\infty$*

Dokaz je jednak kao i za vremenski tip geodezika. Vrijede i naredni rezultati čiji dokazi slijede iste korake kao i u slučaju vremenskih geodezika.

**Propozicija 16.** *Ako svugdje vrijedi svjetlosni energijski uvjet  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$ , i ako u nekoj točki  $\gamma(s_1)$  skalar ekspanzije  $\theta$  poprimi negativnu vrijednost  $\theta_1 < 0$ , tada će postojati točka konjugirana točki  $q$  uzduž  $\gamma(s)$  između  $\gamma(s_1)$  i  $\gamma(s_1 + \frac{2}{|\theta_1|})$ , uz uvjet da je  $\gamma(s)$  definirana za te vrijednosti parametra  $s$ .*

*Dokaz:* Jednako kao u slučaju propozicije 13. □

**Propozicija 17.** *Ako svugdje vrijedi svjetlosni energijski uvjet  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$  i ako u točki  $p = \gamma(s_1)$  vrijedi  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$  postojat će vrijednosti  $s_0$  i  $s_1$  takve da će  $q = \gamma(s_0)$  i  $r = \gamma(s_2)$  biti konjugirane uzduž  $\gamma(s)$ , uz uvjet da je  $\gamma(s)$  definirana za te vrijednosti parametra.*

*Dokaz:* Uvjet  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$  je ekvivalentan  $R_{m4n4} \neq 0$ , kao što ćemo kasnije pokazati u lemi 18. Tada je dokaz identičan dokazu propozicije 14. □

**Propozicija 18.** *Ako svugdje vrijedi svjetlosni energijski uvjet  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$  i ako trag tenzora ekstrinzične zakrivljenost neke hiperplohe ima negativnu vrijednost  $K = \theta_1 < 0$ , postojat će točka konjugirana hiperplohi  $S$  unutar afine duljine  $\frac{2}{|\theta_1|}$  od  $S$*

*Dokaz:* Jednako kao u slučaju propozicije 15, uz to da umjesto promatranja vremenskog geodezika, promatramo svjetlosni geodezik, pa se služimo teoremom o fokusiranju za svjetlosne geodezike 5.



## 8 Varijacije krivulja

U ovom poglavlju primijenit ćemo saznanja o konjugiranim točkama i vidjeti što nam njihovo postojanje može reći o modelu prostor-vremena. Osim što će konjugirane točke na geodezicima iznjedriti druge krivulje veće duljine između tih točaka nego na samom geodeziku, ta će činjenica imati i utjecaja na kauzalnu strukturu prostor-vremena. Konkretno, uz relativno općenite uvjete na energiju i Riemannov tenzor moći ćemo iz kronološkog uvjeta izvući valjanost uvjeta jake kauzalnosti.

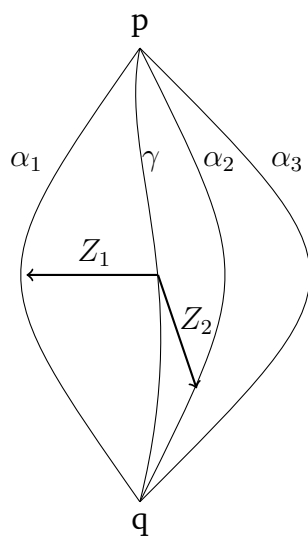
### 8.1 Varijacije vremenskih geodezika

**Definicija 23.** 2-parametarska **varijacija** geodezika  $\gamma(t)$  od  $q = \gamma(0)$  do  $p = \gamma(t_p)$  je preslikavanje  $\alpha : \langle -\epsilon_1, +\epsilon_1 \rangle \times \langle -\epsilon_2, +\epsilon_2 \rangle \times [0, t_p] \rightarrow M$ , takvo da:

1.  $\alpha(0, 0, t) = \gamma(t)$
2.  $\alpha$  je  $C^3$  derivabilna na svakom pojedinom intervalu  $\langle -\epsilon_1, +\epsilon_1 \rangle \times \langle -\epsilon_2, +\epsilon_2 \rangle \times [t_i, t_{i+1}]$
3.  $\alpha(u_1, u_2, 0) = q$ ,  $\alpha(u_1, u_2, t_p) = p$
4. za  $u_1 = \text{const.}$ ,  $u_2 = \text{const.}$   $\alpha(u_1, u_2, t)$  je vremenska krivulja

Varijacijske vektore definiramo kao

$$Z_1 = \alpha_* \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \right), Z_2 = \alpha_* \left( \frac{\partial}{\partial u_2} \right)$$



Slika 8.1: Krivulja  $\gamma$ , varijacijski vektori  $Z_1, Z_2$  i nekoliko varijacijskih krivulja  $\alpha$ .

Za vremenske geodezike, prva derivacija duljine geodezika iščezava, pa varijacijske krivulje promatramo u višem redu. Za Lorentzove mnogostrukosti, druga derivacija duljine za 2-parametarsku varijaciju je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1=u_2=0} &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g \left( Z_1, \left[ \frac{D^2}{ds^2} (Z_2 + g(V, Z_2)V) - R(V, Z_2)V \right] \right) ds + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} g \left( Z_1, \left[ \frac{D}{ds} (Z_2 + g(V, Z_2)V) \right] \right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

gdje su  $Z_1, Z_2$  varijacijski vektori, a  $V$  vektor tangentan na krivulju čiju duljinu promatramo. Jednadžba vrijedi za krivulje dovoljno glatke po dijelovima  $[t_i, t_{i+1}]$ . Integriranje se u formuli izvršava upravo po tim glatkim dijelovima, a kasnije se sve sumira po broju dijelova.  $R(V, Z_2)V$  označava djelovanje Riemannovog tenzora i u notaciji apstraktnih indeksa glasi  $R^a{}_{bcd}V^cV^bZ_2^d$ . Drugu derivaciju duljine je izraz simetričan u članovima  $Z_1, Z_2$  i možemo ju doživljavati kao funkcional  $L(Z_1, Z_2)$ . Ovisno o predznaku, varijacijska krivulja bit će dulja ( $L(Z_1, Z_2) > 0$ ), kraća ( $L(Z_1, Z_2) < 0$ ) ili jednake duljine  $L(Z_1, Z_2) = 0$ .

**Propozicija 19.** *Geodezik vremenskog tipa  $\gamma(t)$  od točke  $q$  to točke  $p$  je maksimalan ako i samo ako ne postoji točka konjugirana točki  $q$  uzduž  $\gamma(t)$  unutar  $\langle q, p \rangle \subset \gamma$ .*

*Dokaz:* Neka na geodeziku  $\gamma$  ne postoji par konjugiranih točaka. Jacobijeva polja koja iščezavaju u  $q$ , ali ne nužno u  $p$  bit će reprezentirana matricom  $A_{\alpha\beta}(t)$ , koja je regularna svugdje unutar  $\langle q, p \rangle$  (odnosno, u tom području ima inverz). Zbog toga vektorsko polje varijacije možemo zapisati kao

$$Z^\alpha = A_{\alpha\beta} W^\beta$$

gdje su  $W^\beta$  komponente nekog vektorskog polja nad  $\gamma$ . (Integrale pišemo bez granice, a podrazumijevaju integriranje po glatkom dijelu, dok suma podrazumijeva sumiranje po broju svih glatkih dijelova).

$$\begin{aligned} L(Z, Z) &= \sum \int A_{\alpha\beta} W^\beta \left\{ \frac{d^2}{ds^2} (A_{\alpha\delta} W^\delta) + R_{\alpha\gamma\delta} A_{\gamma\delta} W^\delta \right\} \\ &+ \sum A_{\alpha\beta} W^\beta \left[ \frac{d}{ds} (A_{\alpha\delta} W^\delta) \right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} (A_{\alpha\delta} W^\delta) &= A''_{\alpha\delta} W^\delta + 2A'_{\alpha\delta} W'^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta \\ &= -R_{\alpha\gamma\delta} A_{\gamma\delta} W^\delta + 2A'_{\alpha\delta} W'^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta \end{aligned} \quad (8.3)$$

Drugi red uvučemo pod integral na način da cijeli izraz deriviramo, pa dobivamo

$$\begin{aligned} \sum A_{\alpha\beta} W^\beta \left[ \frac{d}{ds} (A_{\alpha\delta} W^\delta) \right] &= \int A'_{\alpha\beta} W^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W'^\delta) + \\ &+ A_{\alpha\beta} W'^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta) \\ &+ A_{\alpha\beta} W^\beta (A''_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta + 2A'_{\alpha\delta} W'^\delta) \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned}
L(Z, Z) = \sum \int & A_{\alpha\beta} W^\beta \{2A'_{\alpha\delta} W'^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta\} \\
& + A'_{\alpha\beta} W^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W'^\delta) + \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W'^\delta) \\
& + A_{\alpha\beta} W^\beta (A''_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W''^\delta + 2A'_{\alpha\delta} W'^\delta)
\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}
L(Z, Z) = \sum \int & + 4A_{\alpha\beta} W^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + 2A_{\alpha\beta} W^\beta A_{\alpha\delta} W''^\delta \\
& + A'_{\alpha\beta} W^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W'^\delta) + \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta + A_{\alpha\delta} W'^\delta) \\
& + A_{\alpha\beta} W^\beta (A''_{\alpha\delta} W^\delta)
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Parcijalno integriramo drugi red ( $A_{\alpha\beta} W^\beta$  iščezava u početnoj i konačnoj točki, budući da je to varijacijski vektor).

$$\begin{aligned}
\int 2A_{\alpha\beta} W^\beta A_{\alpha\delta} W''^\delta & = -2 \int A'_{\alpha\beta} W^\beta A_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta A_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + A_{\alpha\beta} W^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta
\end{aligned} \tag{8.7}$$

I uvrstimo rezultat

$$\begin{aligned}
L(Z, Z) = \sum \int & + 2A_{\alpha\beta} W^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + A'_{\alpha\beta} W^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta - A_{\alpha\delta} W'^\delta) + \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta (A'_{\alpha\delta} W^\delta - A_{\alpha\delta} W'^\delta) \\
& + A_{\alpha\beta} W^\beta (A''_{\alpha\delta} W^\delta)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Parcijalno integriramo zadnji red

$$\begin{aligned}
\int A_{\alpha\beta} W^\beta A''_{\alpha\delta} W^\delta & = -2 \int A'_{\alpha\beta} W^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta \\
& + A_{\alpha\beta} W^\beta A'_{\alpha\delta} W'^\delta
\end{aligned} \tag{8.9}$$

i uvrstimo rezultat

$$\begin{aligned}
L(Z, Z) = \sum \int & + A'_{\alpha\beta} W^\beta (-A'_{\alpha\delta} W^\delta - A_{\alpha\delta} W'^\delta) + \\
& + A_{\alpha\beta} W'^\beta (-A'_{\alpha\delta} W^\delta - A_{\alpha\delta} W'^\delta)
\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$L(Z, Z) = \sum \int -A'_{\alpha\beta} W^\beta (A_{\alpha\delta} W^\delta)' - A_{\alpha\beta} W'^\beta (A_{\alpha\delta} W^\delta)' \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} L(Z, Z) &= - \sum \int (A_{\alpha\delta} W^\delta)' (A'_{\alpha\beta} W^\beta + A_{\alpha\beta} W'^\beta) \\ &= - \sum \int (A_{\alpha\delta} W^\delta)' (A_{\alpha\beta} W'^\beta)' \leq 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

Čime smo pokazali da, ako nema konjugiranih točaka, svaka varijacija daje kraću krivulju. Obratno, pretpostavimo da postoji točka  $r \in \langle q, p \rangle$  konjugirana točki  $q$ . Tada postoji Jacobijevo polje  $J$  koje iščezava u  $q$  i  $r$ . Neka je vektor  $K \in T_\gamma$  takav da vrijedi

$$g(K, \nabla_T J)|_r = -1$$

Neka je polje  $J$  definirano i od  $r$  do  $p$ , na način da je za te vrijednosti parametra jednako nuli. Definiramo varijacijski vektor  $Z = \epsilon K + \epsilon^{-1} J$  za  $\epsilon > 0$ . Vrijedit će

$$\begin{aligned} L(Z, Z) &= L(\epsilon K + \epsilon^{-1} J, \epsilon K + \epsilon^{-1} J) \\ &= \epsilon^2 L(K, K) + 2L(K, J) + \epsilon^{-2} L(J, J) \\ &= \epsilon^2 L(K, K) + 2 \end{aligned} \quad (8.13)$$

pa će za dovoljno mali  $\epsilon$  varijacija dati krivulju veće duljine.  $\square$

## 8.2 Varijacije svjetlosnih geodezika

**Definicija 24.** *Varijacija svjetlosnog geodezika  $\gamma(s)$  od  $q = \gamma(0)$  do  $p = \gamma(s_p)$  je preslikavanje  $\alpha : [0, s_p] \times \langle -\epsilon, +\epsilon \rangle \rightarrow M$ , takvo da:*

1.  $\alpha(0, t) = \gamma(t)$
2.  $\alpha$  je  $C^3$  derivabilna na svakom pojedinom intervalu  $\langle -\epsilon, +\epsilon \rangle \times [t_i, t_{i+1}]$
3.  $\alpha(u, 0) = q$ ,  $\alpha(u, t_p) = p$
4. za  $u = \text{const.}$   $\alpha(u, t)$  je vremenska krivulja

Varijacijski vektor je

$$Z = \alpha_* \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

gdje je  $\frac{\partial}{\partial u}$  koordinatno vektorsko polje na  $\langle -\epsilon, +\epsilon \rangle$

$\partial/\partial s$  neka je koordinatno vektorsko polje na  $[0, s_p]$ . Tada je tangentni vektor na varijacijsku krivulju jednak  $T = \alpha_* (\partial/\partial s)$ . Tangentni vektor na početni svjetlosni geodezik je  $T|_{s,0}$ . Vektor varijacije iščezava u početnoj i konačnoj točki geodezika  $Z|_{0,u} = Z|_{s_p,0} = 0$ .

**Lema 14.** *Da bi varijacija svjetlosnog geodezika bila vremenska krivulja mora vrijediti*

$$(i) \quad g(Z, T)|_{(s,0)} = 0 \quad \forall s \in [0, s_p]$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial u} g(T, T)|_{(s,0)} = 0 \quad \forall s \in [0, s_p]$$

$$(iii) \quad \frac{\partial}{\partial s} [g(\nabla_Z Z, T) + g(Z, \nabla_T Z)]|_{(s,0)} - g(Z, \nabla_T^2 Z + R(Z, T)T)|_{(s,0)} < -c < 0$$

*Dokaz (i):* Da bi varijacija dala vremensku krivulju, njen tangenti vektor prijelazom sa početnog geodezika na varijaciju mora postati vremenskog tipa.

$$\frac{\partial}{\partial u} (g(T, T))|_{(s,0)} \leq 0 \quad (8.14)$$

budući da  $g(T, T)|_{(s,u)} < 0$  za  $u \neq 0$ , a  $g(T, T)|_{(s,0)} = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (g(T, T))|_{(s,0)} &= 2g(\nabla_Z T, T)|_{(s,0)} = 2g(\nabla_T Z, T)|_{(s,0)} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial s} (g(Z, T))|_{(s,0)} - 2g(Z, \nabla_T T)|_{(s,0)} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial s} (g(Z, T))|_{(s,0)} \end{aligned} \quad (8.15)$$

gdje drugi član u drugom redu propada jer se radi o geodeziku.  $g(Z, T)|_{(s,0)} = f(s)$  je po dijelovima glatka funkcija za koju (po konstrukciji varijacijskog vektorskog polja) mora vrijediti  $f(0) = f(s_p) = 0$ . Kada bi za neku vrijednost  $s \in [0, s_p]$  vrijedilo  $f(s) \neq 0$ , tada bi morala postojati vrijednost  $s_0$  za koju bi  $f'(s_0) > 0$ . Tada bi

$$\frac{\partial}{\partial u} (g(T, T))|_{(s,0)} = 2f'(s_0) > 0 \quad (8.16)$$

no to bi bilo u kontradikciji sa (8.14). Prema tome

$$g(Z, T)|_{(s,0)} = 0 \quad (8.17)$$

*Dokaz (ii):*

$$\frac{\partial}{\partial u} (g(T, T))|_{(s,0)} = 2\frac{\partial}{\partial s} (g(Z, T))|_{(s,0)} = 0 \quad (8.18)$$

*Dokaz (iii):* Da bi varijacija dala vremensku krivulju, tangenti vektor  $T$  mora postati vremenskog tipa. Budući da je  $\frac{\partial}{\partial u} (g(T, T))|_{(s,0)} = 0$ , promatramo drugu derivaciju i zahtijevamo da bude ograničena negativnom vrijednošću odozdo.

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} (g(T, T))|_{(s,0)} < -c < 0 \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (g(T, T))|_{(s,0)} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial u} (g(T, T)) \right)|_{(s,0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( 2\frac{\partial}{\partial s} (g(Z, T)) - 2g(Z, \nabla_T T) \right)|_{(s,0)} \\ &= 2\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (g(Z, T)) \right]|_{(s,0)} - 2g(\nabla_Z Z, \nabla_T T)|_{(s,0)} \\ &\quad - 2g(Z, \nabla_Z \nabla_T T)|_{(s,0)} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Koristeći identitete:

$$\begin{aligned} R(Z, T)T &= \nabla_Z \nabla_T T - \nabla_T \nabla_Z T \\ &= \nabla_Z \nabla_T T - \nabla_T \nabla_T Z \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dolazimo do

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (g(T, T))|_{(s,0)} &= 2 \frac{\partial}{\partial s} [g(\nabla_Z Z, T) + g(Z, \nabla_Z T)]|_{(s,0)} \\ &\quad - 2g(Z, \nabla_T^2 Z + R(Z, T)T)|_{(s,0)} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial t} [g(\nabla_Z Z, T) + g(Z, \nabla_T Z)]|_{(s,0)} \\ &\quad - 2g(Z, \nabla_T^2 Z + R(Z, T)T)|_{(s,0)} < -c < 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

□

**Propozicija 20.** *Ako postoji točka  $r \in \langle q, p \rangle$  konjugirana točki  $q$  uzduž svjetlosnog geodezika  $\gamma(t)$ , tada će postojati varijacija geodezika  $\gamma$  koja će biti vremenska krivulja od točke  $q$  to točke  $p$ .*

*Dokaz:* Kako bismo dokazali tvrdnju dovoljno je naći barem jednu krivulju vremenskog tipa, ujedno varijaciju geodezika  $\gamma(t)$  od točke  $q$  do točke  $p$ . Dokaz se stoga sastoji od konstrukcije jedne takve krivulje, za koju je potrebno pokazati da je njen tangentni vektor uvijek vremenskog tipa. Ideja vodilja je pokazati da postoji  $t_2 \in \langle t_0, t_1 \rangle$  takav da postoji varijacija početnog geodezika koja daje vremensku krivulju od  $\gamma(0)$  do  $\gamma(t_2)$ . Tada vrijedi  $\gamma(0) \ll \gamma(t_2) \leq \gamma(1)$ , odnosno  $\gamma(0) \ll \gamma(1)$ , što je i tvrdnja propozicije. Budući da je dokaz dug, podijelit ćemo ga u nekoliko lema.

Pretpostavimo da postoji par konjugiranih točaka  $(q, r)$  na svjetlosnom geodeziku  $\gamma(t)$  sa tangentnim vektorom  $Z = \gamma'(t)$ . Tada postoji Jacobijevo polje koje iščezava u  $\gamma(0) = q$  i u  $\gamma(t_0) = r$ . Ono zadovoljava Jacobijevu jednadžbu

$$W'' = -R(W, T)T \quad (8.23)$$

gdje  $'$  označava derivaciju po afinom parametru, a  $T$  je tangentni vektor na početni geodezik. Možemo pisati

$$W(t) = f(t)\hat{W}(t)$$

gdje je  $f(t)$  glatka funkcija, a  $\hat{W}$  jedinični vektor.

**Lema 15.** *Funkcija  $f(t)$  zadovoljava jednadžbu*

$$f'' + hf = 0$$

gdje je  $h = g(\hat{W}, \hat{W}'' + R(\hat{W}, T)T)$

*Dokaz:*  $f(0) = f(t_0) = 0$ , i odabiremo  $f(t) > 0$ , budući da kasnije u konstrukciji, ako bude potrebno, možemo promijeniti  $\hat{W}$  u  $-\hat{W}$ . Derivacija Jacobijevog polja je netrivialna u točkama  $q$  i  $r$ , pa vrijedi  $W'(t_0) = f'(t_0)\hat{W}(t_0) + f(t_0)\hat{W}'(t_0) = f'(t_0)\hat{W}(t_0)$ . Dakle  $f'(t_0) \neq 0$ , pa možemo odabrati neki  $t_1 \in (t_0, 1]$  takav da je  $f(t) < 0$  za svaki  $t \in (t_0, t_1]$ .

Uvrštavanjem  $W(t) = f(t)\hat{W}(t)$  u jednadžbu (8.23) dolazimo do:

$$\begin{aligned} 0 &= W'' + R(W, T)T = f''\hat{W} + 2f'\hat{W}' + f\hat{W}'' + fR(\hat{W}, T)T \\ 0 &= g(\hat{W}, W'' + R(W, T)T) = f'' + 0 + g(\hat{W}, f\hat{W}'' + fR(\hat{W}, T)T) \end{aligned} \quad (8.24)$$

gdje drugi član zdesna u prvom redu propada jer  $g(\hat{W}, \hat{W}') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g(\hat{W}, \hat{W}) = 0$ . Uvodimo pokratu

$$h = g(\hat{W}, \hat{W}'' + R(\hat{W}, T)T) \quad (8.25)$$

Pa vrijedi jednadžba

$$f'' + hf = 0 \quad (8.26)$$

□

Dakle, sada znamo kako se ponaša funkcija  $f$ , "norma" Jacobijevog polja. Konstruiramo takav vektor varijacije koji će zadovoljavati uvjete iz (8.22), uz posebno namještene faktore:

$$Z(t) = [b(e^{at} - 1) + f(t)] \hat{W}(t) \quad (8.27)$$

gdje je  $b = -f(t_1)(e^{at_1} - 1)^{-1}$  i  $a > 0$  takav da zadovoljava:

$$a^2 + h_{min}(t) > 0 \quad (8.28)$$

Uz ovakav  $b$  vrijedit će  $Z(0) = Z(t_2) = 0$ , što nam je potrebno da bi  $Z$  bio varijacijski vektor. Pogledamo li (8.22), iz drugog člana vidimo da je potrebno da vektor  $Z$  zadovoljava uvjet  $g(Z, Z'' + R(Z, Z)Z) > 0$ .

**Lema 16.** Varijacijski vektor  $Z(t) = [b(e^{at} - 1) + f(t)] \hat{W}(t)$  zadovoljava uvjet

$$g(Z, Z'' + R(Z, Z)Z) > 0$$

.

Uvodimo pokratu  $r(t) = b(e^{at} - 1) + f$ , odnosno  $Z(t) = r(t)\hat{W}(t)$

$$\begin{aligned} g(Z, Z'' + R(Z, T)T) &= g(r\hat{W}, r''\hat{W} + 2r'\hat{W}' + r\hat{W}'' + rR(\hat{W}, T)T) \\ &= rr'' + 0 + r^2g(\hat{W}, \hat{W}'' + R(\hat{W}, T)T) \\ &= rr'' + r^2h \\ &= r(r'' + rh) \\ &= r(ba^2e^{at} + f'' + h(b(e^{at} - 1) + f)) \\ &= r(ba^2e^{at} + -hf + hf + h(b(e^{at} - 1))) \\ &= rb((a^2 + h)e^{at} - h) \end{aligned} \quad (8.29)$$

$b = -f(t_1)(e^{at_1} - 1)^{-1} > 0$  jer je po konstrukciji  $f(t_1) < 0$ . Član u zagradi je također  $((a^2 + h)e^{at} - h) > 0$ , što je vidljivo iz konstrukcije člana  $a$ , pa nam još preostaje promotriti  $r(t) = [b(e^{at} - 1) + f(t)]$ . Za  $t \in (0, t_0)$  vrijedi  $f(t) > 0 \Rightarrow r(t) > 0$ .

Za  $t_1 \in [t_0, 1]$  po konstrukciji faktora  $b$  vrijedi  $r(t_1) = 0$ . Zbog neprekidnosti, mora postojati  $t_2 > t_0$  takav da  $r(t) > 0$  za  $t \in [t_0, t_2]$ . Ako je taj  $t_2 \geq t_q$ , tada odabiremo  $t_2 = t_1$  i vrijedi  $r(t) > 0$ . ako je  $t_2 < t_1$ , tada samo promijenimo konstrukciju vektora varijacije tako da  $Z(t_2) = 0$  i svi zaključci i dalje vrijede, kao i  $r(t) > 0$ .  $\square$

Po uvjetu (8.22), još moramo zadovoljiti da nam  $\frac{\partial}{\partial t} [g(\nabla_Z Z, T) + g(Z, \nabla_T Z)]|_{(s,0)}$  mora biti manji od 0.

Kako bismo mogli u potpunosti konstruirati neku krivulju, po teoriji diferencijalnih jednadžbi potrebna su nam dva početna uvjeta. Uvodimo pseudo-ortonormalnu bazu  $(E_1, E_2, L, T)$ , za koju vrijedi:

$$g(E_1, E_1) = g(E_2, E_2) = 1, g(E_1, E_2) = g(E_1, L) = g(E_1, T) = 0, g(L, Z) = -1 \quad (8.30)$$

Dakle  $(E_1, E_2)$  su vektori prostornog tipa, dok su  $(L, T)$  vektori svjetlosnog tipa koji su jednako budućnosno usmjereni, a  $T$  je ujedno i tangentan vektor početnog svjetlosnog geodezika. Tu bazu paralelno propagiramo uzduž geodezika pa imamo pseudo-ortonormalnu bazu u svakoj točki  $t \in [0, 1]$ .

Definiramo pomoćnu funkciju  $\rho(t) : [0, t_2] \rightarrow R$  i zadajemo početne uvjete za našu konkretnu varijacijsku krivulju:

$$\rho(t) = \begin{cases} -\epsilon t & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{t_2}{4} \\ \epsilon(t - \frac{t_2}{2}) & \text{if } \frac{t_2}{4} \leq t \leq \frac{3t_2}{4} \\ \epsilon(t_2 - t) & \text{if } \frac{3t_2}{4} \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (8.31)$$

$$\alpha_* \frac{\partial}{\partial u}|_{(t,0)} = Z(t) \quad (8.32)$$

$$\nabla_Z \left( \alpha_* \frac{\partial}{\partial u} \right)|_{(t,0)} = [g(Z, Z')|_{(t,0)} - \rho(t)] L \quad (8.33)$$

gdje je  $\epsilon > 0$  posebno odabran tako da zadovoljava:

$$\epsilon < \min \left\{ g(Z, Z'' + R(Z, T)T) : t \in \left[ \frac{t_2}{4}, \frac{3t_2}{4} \right] \right\} \quad (8.34)$$

Uz ovakvu konstrukciju vidimo da:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [g(\nabla_Z Z, T) + g(Z, \nabla_T Z)]|_{(t,0)} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} [(g(Z, Z')|_{(t,0)} - \rho(t))(-1) + g(Z, \nabla_T Z)]|_{(t,0)} \\ & = \rho'(t) \end{aligned} \quad (8.35)$$



$$\rho'(t) = \begin{cases} -\epsilon & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{t_2}{4} \\ \epsilon & \text{if } \frac{t_2}{4} \leq t \leq \frac{3t_2}{4} \\ -\epsilon & \text{if } \frac{3t_2}{4} \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (8.36)$$

$$(8.37)$$

Sada je konačno pokazano da ova konstrukcija zadovoljava uvjet (8.22) i da je proizvedena varijacija zaista vremenska krivulja.  $\square$

Jednak rezultat vrijedi i za točku konjugiranu hiperplohi, a dokaz slijedi iste korake.

**Propozicija 21.** *Ako za hiperplohu  $S$  postoji točka  $p$  konjugirana plohi  $S$  uzduž svjetlosnog geodezika  $\gamma$ , tada postoji varijacija tog geodezika koja daje vremensku krivulju od  $S$  do  $p$ .*

### 8.3 Varijacije krivulja i kauzalna struktura

Ako je uvjet kauzalnosti narušen, no prostor-vrijeme je i dalje kronološko, tada mora postojati zatvoreni svjetlosni geodezik. Neka je njegov afini parametar  $v$ . Tada možemo uspoređivati tangentni vektor geodezika svaki put kada paralelnim transportom prođe cijeli krug u točki  $q = \gamma(v_{-1}) = \gamma(v_1) = \gamma(v_2) \dots$ . Budući da tangentni vektor u točki  $q$  u prvom navratu  $\partial/\partial v|_{v_1}$  sigurno gleda u istom smjeru kao i nekom sljedećem navratu  $\partial/\partial v|_{v_2}$ , oni moraju biti proporcionalni.

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v_1} = a \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v_2} \quad (8.38)$$

Afina duljina geodezika tada je vezana za parametar  $a$ . Konkretno, afina duljina geodezika u jednom zatvorenoj putanji u  $n$ -toj iteraciji je

$$L_n[\gamma] = (v_{n+1} - v_n) \quad (8.39)$$

$$= a^{-n}(v_1 - v_0) \quad (8.40)$$

Prema tome, potpunost geodezika ovisi o parametru  $a$ .

$$a < 1 \Rightarrow \gamma \text{ je nepotpun u prošlom smjeru}$$

$$a > 1 \Rightarrow \gamma \text{ je nepotpun u budućem smjeru}$$

$$a = 1 \Rightarrow \gamma \text{ je potpun}$$

**Propozicija 22.** *Ako je  $\gamma$  zatvoren svjetlosni geodezik, nepotpun u budućem smjeru, tada postoji varijacija od  $\gamma$  koja daje zatvorenu vremensku krivulju.*

*Dokaz:* Prostor-vrijeme je vremenski orijentabilna mnogostrukost, pa odaberemo neko vektorsko polje  $V$  vremenskog tipa budućnosno usmjereno

$$g(V, V) = -1$$

Definiramo novu pozitivno definitnu metriku uz pomoć navedenoga vektorskog polja  $V$ :

$$g'(X, Y) = g(X, Y) + 2g(X, V)g(Y, V) \quad (8.41)$$

Neka je  $t$  ne-afini parametar na  $\gamma$  koji iznosi  $t = 0$  za neku točku  $q \in \gamma$ , tangenti vektor parametriziran parametrom  $t$  označavamo  $T = \frac{\partial}{\partial t}$  i neka za  $t$  vrijedi

$$g(V, T) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Takvim odabirom parametra  $t$  postigli smo da on mjeri vlastitu duljinu uzduž geodezika  $\gamma$  u novoj metrici  $g'$ , i neograničen je  $-\infty < t < \infty$ .

$$\begin{aligned} L'[\gamma(t)] &= \int \sqrt{g(T, T)} dt \\ &= \int \sqrt{(0 + 2g(T, V)g(T, V))} dt \\ &= \int dt \end{aligned} \quad (8.42)$$

Sada promotrimo varijaciju geodezika  $\gamma$  gdje je varijacijski vektor  $Z = \partial/\partial s = xV$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} g(T, T) &= 2g(\nabla_Z T, T) \\ &= 2g(\nabla_T Z, T) \\ &= 2\frac{d}{dt} g(Z, T) - 2g(Z, \nabla_T T) \end{aligned} \quad (8.43)$$

Prvi član zdesna je

$$g(Z, T) = g(xV, T) = -x\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.44)$$

a za drugi član zdesna iskoristimo geodetsku jednadžbu za ne-afinu parametrizaciju  $\nabla_T T = f(t)T$ .

$$g(Z, f(t)T) = -f(t)x\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.45)$$

Prema tome

$$0 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{dx}{dt} - xf \right) \quad (8.46)$$

Neka je  $v$  afini parametar na  $\gamma$ . U toj parametrizaciji tangenti vektor je  $\partial/\partial v = T_2$  i proporcionalan je ne-afino parametriziranom tangentnom vektoru  $T_2 = aT$ .

$$\nabla_{T_2} T_2 = 0 = a\nabla_T (aT)$$

$$0 = a \left( \frac{da}{dt} T + a f T \right)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -f$$

Budući da je  $\gamma$  buduće nepotpun, njegov tangenti vektor se u jednom krugu poveća za ranije definirani faktor  $a > 1$ . Prema tome

$$\oint f dt = -\log a \leq 0 \quad (8.47)$$

pa ako odaberemo takav varijacijski vektor  $Z = xV$ , za koji je  $x(t)$

$$x(t) = \exp \left( \int_0^t f(t') dt' + b^{-1} t \log a \right) \quad (8.48)$$

gdje je  $b = \oint dt$ , dobivena varijacija  $\gamma$  bit će zatvorena vremenska krivulja, jer će zadovoljavati uvjete prije izvedene u lemi 14  $\square$

**Propozicija 23.** *Ako vrijede uvjeti:*

- (i)  $R_{ab} k^a k^b, \forall k^a$  svjetlosnog tipa
- (ii) Svjetlosni generični uvjet  $k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} k^c k^d \neq 0$
- (iii) Prostor-vrijeme je kronološko

Tada nužno vrijedi da je prostor-vrijeme kauzalno

*Dokaz:* Pretpostavimo da je kauzalnost narušena, a da kronološki uvjet i dalje vrijedi. Tada bi postojao zatvoreni svjetlosni geodezik. Ako bi bio nepotpun, prema propoziciji 22 postojala bi varijacija koja bi dala zatvorenu vremensku krivulju. Ako bi bio potpun, tada bi prema propoziciji 17 posjedovao par konjugiranih točaka, a prema propoziciji 20 postojala bi varijacija koja bi bila vremenska krivulja, što bi ponovno dalo zatvorenu vremensku krivulju. U oba slučaja dolazi do kontradikcije.

**Propozicija 24.** *Ako vrijede uvjeti (i) - (iii) iz propozicije 23 i ako je prostor-vrijeme svjetlosno geodetski potpuno, tada je ono jako kauzalno*

*Dokaz:* Pretpostavimo da uvjet jake kauzalnosti ne vrijedi u točki  $p \in M$ . Neka je  $U$  konveksna normalna okolina od  $p$  i neka je  $V_n \subset U$  beskonačan niz okolina od  $p$  takav da za dovoljno veliki  $n$  bilo koja okolina od  $p$  sadrži sve osim konačno mnogo  $V_n$ . Za svaki  $V_n$  postojala bi u budućnost usmjerena beskrajna kauzalna krivulja  $\lambda_n$  koja bi napustila  $U$  i vratila se u  $V_n$ . Po teoremu o graničnim krivuljama 5 za  $\{\lambda_n\}$  postojala bi beskrajna kauzalna granična krivulja  $\lambda$  kroz točku  $p$ . Budući da vrijedi kauzalni uvjet, dvije točke na  $\lambda$  ne mogu biti vremenski udaljene. Pretpostavimo da su  $q, r \in \lambda$  vremenski udaljene. Tada bi postojale okoline  $U_q$  i  $U_r$  koje bi presijecale

sve osim konačno mnogo  $\lambda_n$ . Za dovoljno male takve okoline  $I^-(q, U_q)$  i  $I^+(r, U_r)$  presijecale bi istu  $\lambda_i \in \{\lambda_n\}$ . Neka je  $q' \in I^-(q, U_q) \cap \lambda_i$ ,  $r' \in I^+(r, U_r) \cap \lambda_i$ , i neka vrijedi  $r' < q'$ . Posljednji odabir možemo napraviti jer znamo da će  $\lambda_i$  bar dvaput presjeći  $I^-(q, U_q)$  i  $I^+(r, U_r)$ . Tada bi krivulja  $q' \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow r' \rightarrow q'$  dala zatvorenu kauzalnu krivulju. Prema tome, kako dvije točke na  $\lambda$  ne mogu biti vremenski udaljene,  $\lambda$  mora biti svjetlosni geodezik. No budući da je beskrajna,  $\lambda$  bi sadržavala konjugirane točke, koje bi preko neke varijacije bile vremenski udaljene, te bismo ponovo dobili zatvorenu kauzalnu krivulju što vodi do kontradikcije.  $\square$

## 9 Teoremi o singularnosti

Na početku poglavlja, demonstrirat ćemo jedan od "slabijih" teorema o singularnosti prostor-vremena. Naime, uz postavljene jake uvjete, lako je u dokazu postići kontradikciju i njome pokazati da je prostor-vrijeme geodetski nepotpuno. Iako ovaj primjer možemo doživljavati kao ogledni, on ocrta način na koji se većinom dokazuju teoremi o singularnosti.

**Teorem 7.** *Neka je  $(M, g_{ab})$  globalno hiperboličko prostor-vrijeme u kojem vrijedi jaki energijski uvjet ( $R_{ab}u^a u^b \geq 0 \forall u^a$  vremenskog tipa). Pretpostavimo da postoji glatka (ili barem  $C^2$ ) prostorna Cauchyjeva ploha  $\Sigma$  takva da za ortogonalnu prošlosno orijentiranu kongruenciju od  $\Sigma$  vrijedi  $K \leq C < 0$  svugdje na  $\Sigma$ . Tada niti jedan prošlosno orijentirani geodezik od  $\Sigma$  nema duljinu veću od  $3/|C|$ , odnosno, svi prošlosno orijentirani vremenski geodezici su nepotpuni.*

*Dokaz:* Pretpostavimo da postoji prošlosno orijentirana vremenska krivulja  $\lambda$  od  $\Sigma$  sa duljinom većom od  $3/|C|$ . Neka je  $p$  točka na  $\lambda$  na duljini većoj od  $3/|C|$  od  $\Sigma$ . Po prethodnom teoremu 9, postoji geodezik sa maksimalnom duljinom od  $p$  do  $\Sigma$ , koja tada isto mora imati duljinu veću od  $3/|C|$ . Nužan uvjet da geodezik ima maksimalnu duljinu između hiperplohe  $\Sigma$  i točke  $p$  je da ne posjeduje konjugirane točke između  $\Sigma$  i  $p$ . No, po teoremu o fokusiranju (3), ako kongruencija u nekoj točki ima negativan skalar ekspanzije, u konačnom vremenu manjem od  $3/|\theta_0$  (što je u ovom slučaju jednako  $3/|C|$ ), divergirati će u  $-\infty$ , odnosno razviti točku konjugiranu plohi  $\Sigma$ , što dovodi do kontradikcije. Prema tome, sve su prošlosno orijentirane vremenske krivulje  $\lambda$  od  $\Sigma$  duljine manje od  $3/|C|$ .  $\square$

Navedeni teorem ima dva veoma jaka uvjeta: jaki energijski uvjet čiju smo problematičnost već analizirali, i uvjet globalne hiperboličnosti, koji je najjači uvjet na kauzalnu strukturu i zasigurno je neželjen pri demonstraciji postojanja singulariteta, gdje tražimo što manje specifičnih uvjeta. Ovaj je teorem dobra polazišna točka za mehanizam funkcioniranja ostalih teorema o singularitetima, i na dobar način pokazuje singularnost svemira kao nepotpunost vremenskih geodezika.

### 9.1 Uvjet generičnosti

Želja nam je uvjete iz teorema čim više "olakšati". Primjerice, htjeli bismo svakako odbaciti pretpostavku o globalnoj hiperboličnosti prostor-vremena, i osloniti se na neki od slabijih uvjeta kauzalnosti. Također, pretpostavka da je na cijeloj Cauchyjevoj plohi skalar ekspanzije ograničen negativnom vrijednošću odozdo je također jaka pretpostavka, pa bismo i nju htjeli oslabiti, bar na način da taj uvjet (koji se odnosi na gravitacijsko djelovanje) postavimo u nekoj lokalnoj okolini.

Također, htjeli bismo opisati čim općenitije prostor-vrijeme, ono koje nije puno simetrija i idealnih situacija, i zato formuliramo uvjet generičnosti.

**Definicija 25.** Za prostor-vrijeme kažemo da je **generično** ako na svakom geodeziku (vremenskom ili svjetlosnom) za njegov tangenti vektor  $k^a$  postoji točka na kojoj je  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$

Njegovo uvođenje motivirano je promatranjem svojstvenih vektora Weylovog tenzora, što je moguće naći u dodatku A. Fizikalno značenje koje je nama važno iz ovog uvjeta jest da će u nekoj točki negdje u svemiru postojati neka plimna sila, što zvuči veoma uvjerljivo u odnosu na promatrani svemir. Za vremenske geodezike to je lako vidljivo:

**Lema 17.** Uvjet  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$  za vremenske geodezike ekvivalentan je uvjetu  $R_{abcd} k^b k^c \neq 0$

*Dokaz:*

$$\begin{aligned} 4 \cdot k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} &= k^c k^d k_{[a} R_{b]cde} k_f + k^c k^d k_{[a} R_{b]cdf} k_e \\ &= k^c k^d k_a R_{bcde} k_f + k^c k^d k_b R_{acde} k_f + \\ &+ k^c k^d k_a R_{bcdf} k_e + k^c k^d k_b R_{acdf} k_e \end{aligned} \quad (9.1)$$

Sada sve pomnožimo sa  $k^a k^f$

$$\begin{aligned} k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} k^a k^f &= (-1)^2 k^c k^d R_{bcde} - k^c k^d k_b R_{acde} k^a \\ &- k^c k^d R_{bcdf} k_e k^f + k^c k^d k_b R_{acdf} k_e k^a k^f \end{aligned} \quad (9.2)$$

Drugi i treći član su nula jer zamjenama imena indeksa ( $c \leftrightarrow a$ ) i simetrijama Riemannovog tenzora

$$k^c k^d k_b R_{acde} k^a = k^a k^d k_b R_{cade} k^c = -k^a k^d k_b R_{acde} k^c = 0 \quad (9.3)$$

Na isti način propada i zadnji član

$$k^c k^d k_b R_{acdf} k_e k^a k^f = k^a k^d k_b R_{cadf} k_e k^c k^f = -k^c k^d k_b R_{acdf} k_e k^a k^f = 0 \quad (9.4)$$

Pa vidimo da jedini način da za vremenske geodezike vrijedi  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$  jest da je  $R_{abcd} k^b k^c \neq 0$   $\square$

Za svjetlosne geodezike interpretacija je ista, no ne možemo iskoristiti isti postupak pri dokazivanju, budući da je svjetlosni vektor ortogonalan sam na sebe.

**Lema 18.** Ako vrijedi  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$ , tada je u paralelno propagiranoj pseudo-ortonormalnoj bazi ( $E_1, E_2, E_3 = L, E_4 = V$ )  $R_{m4n4} \neq 0$  za  $m, n \leq 2$ .

*Dokaz:* U pseudo-ortonormalnoj bazi tangenti vektor  $V = \delta_4^\mu E_\mu$ . Komponente dualnog vektora tada su  $V_\mu = g_{\mu\nu} \delta_4^\nu = g_{\mu 4}$ . U pseudo ortonormalnoj bazi  $g_{34} = -1$ , ostali članovi  $g_{\mu 4}$  su nula.

$$4 \cdot V^c V^d V_{[a} R_{b]cd[e} V_{f]} = V^c V^d V_a R_{bcde} V_f + V^c V^d V_b R_{acde} V_f + \\ + V^c V^d V_a R_{bcdf} V_e + V^c V^d V_b R_{acdf} V_e \quad (9.5)$$

Ulazimo u bazu ( $E_1, E_2, E_3 = L, E_4 = V$ ) i izvršavamo sumaciju po  $\gamma$  i  $\delta$ .

$$4 \cdot V^\gamma V^\delta V_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta[\eta} V_{\nu]} = V_\alpha R_{\beta44\eta} V_\nu + V_\beta R_{\alpha44\eta} V_\nu + \\ + V_\alpha R_{\beta44\nu} V_\eta + V_\beta R_{\alpha44\nu} V_\eta \\ = \delta_\alpha^3 R_{\beta44\eta} \delta_\nu^3 + \delta_\beta^3 R_{\alpha44\eta} \delta_\nu^3 + \\ + \delta_\alpha^3 R_{\beta44\nu} \delta_\eta^3 + \delta_\beta^3 R_{\alpha44\nu} \delta_\eta^3 \quad (9.6)$$

Kada bi  $\alpha, \beta, \eta, \nu$  bili jednaki 4, cijeli izraz bio bi nula. Ako je ovaj izraz različit od nule, tada točno jedan od  $\alpha, \beta$  mora biti jednak tri, ujedno točno jedan od  $\eta, \nu$  mora biti jednak 3. Prema tome, slijedi da za uvjet  $k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} k_{f]} \neq 0$  mora vrijediti  $R_{m4n4} \neq 0$  za  $m, n \leq 2$ .  $\square$

Tehnička vrijednost uvjeta generičnosti je u dokazivanju postojanja konjugiranih točaka, što možemo vidjeti iz pozicija 14 i 17.

## 9.2 Hawking, Penrose 1970.

Teorem koji su formulirali Stephen Hawking i Roger Penrose 1970. godine, smatra se jednim od najvažnijih rezultata vezanih uz opću teoriju relativnosti u drugoj polovici 20. stoljeća. Nakon nekoliko već objavljenih teorema o singularitetima od strane oba autora, ujedno i turbulencije u znanstvenoj zajednici nastaloj kada su Landau i Lifshitz objavili rezultat kojim su tvrdili da se singulariteti javljaju samo u idealno simetričnim rješenjima, autori su dovoljno "izbrusili" argumente teorema i dali na uvid rezultat koji nam daje jake indikacije da je upravo i naš svemir singularan. Landau i Lifshitz su kasnije sami povukli svoje rezultate nakon uočavanja greške u računu.

Originalan iskaz teorema je sljedeći

**Teorem 8.** (Hawking, Penrose 1970.) *Neka je  $(M, g)$  prostor-vrijeme koje zadovoljava sljedeće uvjete:*

1.  $R_{ab}v^a v^b \geq 0$  za bilo koji kauzalni vektor  $v^a$
2. Vrijedi svjetlosna i vremenska generičnost, to jest  $v^c v^d v_{[a} R_{b]cd[e} v_{f]} \neq 0$  za bilo koji kauzalni vektor  $v^a$
3. Ne postoji zatvorena vremenska krivulja
4. Postoji barem jedno od sljedećeg:

- (a) Kompaktni akronalni skup  $S$  bez ruba ( $\text{edge}(S) = \emptyset$ )
- (b) Zatvorena zatočena ploha
- (c) Točka  $p$  takva da svaki prošlosni (ili budućnosni) svjetlosni geodezik kroz točku  $p$  poprima negativnu vrijednost ekspanzije

Tada  $M$  sadrži barem jedan nepotpun kauzalni geodezik.

Svakako treba napomenuti da je navedeni teorem u osnovi geometrijski, i sam po sebi važeć je u području proučavanja pseudo-Riemannovih mnogostrukosti. Fizika u priču ulazi prilikom opravdavanja zahtjeva teorema.

Naime,  $R_{ab}v^av^b \geq 0$  možemo preko Einsteinove jednadžbe povezati sa tenzorom energije i impulsa, kao što smo vidjeli u poglavlju o energijskim uvjetima. Problematična je situacija ako u Einsteinovu jednadžbu uključimo pozitivnu kozmološku konstantu. No, opravdanje korištenju ovakve formulacije dajemo time da očekujemo pojavu singulariteta u području gdje je zakrivljenost prostor-vremena velika, i time utjecaj kozmološke konstante zanemarujemo. Ipak, prigovor je na mjestu, i postoje poopćenja Raychaudhurijeve jednadžbe koja prilikom izvođenja teorema o fokusiranju uzimaju u obzir i kozmološku konstantu.

Uvjet generičnosti već smo opisali, i očekujemo da vrijedi u nekom, donekle realnom, modelu prostor-vremena.

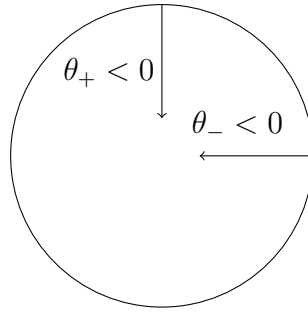
Ne-postojanje zatvorene vremenske krivulje, odnosno održivost kronološkog uvjeta je svakako u sukladnosti sa svakidanim iskustvom. Postojanje jedne takve petlje svakako bi uvelo razne nedoumice i filozofske probleme vezane uz reinterpretaciju kauzalnosti. Ipak, taj uvjet nije sam po sebi potpuno fizikalno motiviran. Iako nam djeluje veoma prihvatljivo, odbacivanje zatvorenih vremenskih krivulja zbog izbjegavanja neugodnosti koje bi njihovo postojanje impliciralo nije potpuno opravdan postupak. Također, postoje moderniji teoremi o singularnosti koji se oslanjaju upravo na postojanje područja narušene kronalnosti. U svrhu znanstvenog razmišljanja, bolje bi bilo promatrati koje bi sve posljedice takva krivulja imala na prostor-vrijeme, pa ju odbaciti ako bi se pojavio jasniji argument, ili prihvatiti ako bi pri tome došlo do nekog novog otkrića.

U četvrtom zahtjevu nalaze se glavni zahtjevi koji dovode do nepotpunih geodezika. Kompaktni akronalni skup bez ruba se javlja u rješenjima Einsteinovih jednadžbi koja su prostorno zatvorena, poput FLRW metrike sa pozitivnom zakrivljenošću, koju smatramo najboljim grubim opisom vidljivog svemira

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (9.7)$$

Zatvorena zatočena ploha  $S$  ima svojstvo da svi (bilo izlazni ili ulazni) svjetlosni geodezici ortogonalni na nju imaju negativan skalar ekspanzije. Primjer takvog ponašanja možemo vidjeti i u Schwarzschildovom rješenju. Svi svjetlosni geodezici unutar horizonta događaja nužno nastavljaju prema  $r = 0$ , što znači da se unutar

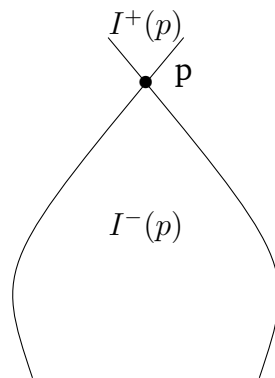




Slika 9.1: Za zatvorenu zatočenu plohu vrijedi da svi svjetlosni geodezici ortogonalni na nju imaju negativan skalar ekspanzije.  $\theta_+$  pripada geodezicima koji su na izlaznoj strani plohe,  $\theta_-$  geodezicima na ulaznoj strani plohe. Ovaj crtež ima smjer vremena u papir.

horizonta događaja može definirati zatvorena zatočena ploha. To možemo slikovito interpretirati, kao da je gravitacija toliko jaka, da čak i ono fotoni koji su namjerali pobjeći, bivaju povučeni unutra. U kolapsu zvijezda u crnu rupu također očekujemo pojavu zatvorene zatočene plohe. Prednost tog koncepta je da takva ploha ne mora biti sfera, niti nužno na neki način simetrična, pa je primjenjiva na situacije astronomskog kolapsa koje su na svakve načine nepravilne.

Ako postoji točka  $p$  iz uvjeta (c), to bi značilo da gledano u prošlost, svjetlosni stošci počinju kovergirati. Analogno gledano, kada bi uvjet vrijedio za budućnosne geodezike, svjetlosni stošci bi u budućnosti počeli konvergirati.



Slika 9.2: U nekoj točki u prošlosti točke  $p$ , svjetlosni stošci počinju se okretati "prema unutra"

Ponovo, ako prihvatimo FLRW model za opis našeg svemira, uz mjerenja ekspanzije svemira, ovaj uvjet vrijedi i za naš položaj u svemiru.

Dokaz teorema napraviti ćemo na sljedećem obliku:

**Teorem 9.** (Hawking, Penrose 1970.) *Sljedeća tri uvjeta zajedno ne mogu vrijediti:*

- (i) *svaki beskrajni kauzalni geodezik posjeduje par konjugiranih točaka*
- (ii)  *$(M, g)$  je kronološko prostor-vrijeme*

(iii) Postoji akronalni skup  $S$  takav da je  $E^+(S)$  ili  $E^-(S)$  kompaktan

Potrebno je još pokazati da druga verzija teorema, iako nešto općenitija, slijedi iz prve.

**Lema 19.** *Teorem 9 slijedi iz teorema 8*

*Dokaz:*

- (1) + (2)  $\Rightarrow$  (i)

Pretpostavimo da je prostor-vrijeme geodetski potpuno. Budući da vrijedi jaki energijski uvjet i uvjet vremenske i svjetlosne generičnosti, po propozicijama 14 i 17, a budući da smo zbog geodetske potpunosti sigurni da su geodezici definirani za sve vrijednosti svojih parametara, znamo da će svaki beskrajni kauzalni geodezik posjedovati par konjugiranih točaka.

- (3)  $\Rightarrow$  (ii)

Kronološko prostor-vrijeme je definirano upravo kao ono koje ne posjeduje zatvorene vremenske krivulje.

- (1) + (a)  $\Rightarrow$  (iii)

Za ovaj dio dokaza potrebna nam je sljedeća lema

**Lema 20.** *Neka je  $S \subset M$  neki skup.  $\partial J^+(S) - \bar{S}$  generiraju svjetlosni geodezici bez konjugiranih točaka, koji su ili beskrajni, ili imaju prošlosnu krajnju točku na  $\text{edge}(S)$*

*Dokaz:* Budući da je  $J^+(S)$  budućnosni skup, po propoziciji 3  $\partial J^+(S)$  je akronalna Lipschitzova podmnostrukost. Neka je  $x \in \partial J^+(S) - \bar{S}$  i neka je  $\gamma$  maksimalno produljen prošlosni svjetlosni geodezik, koji je ujedno i generator skupa  $\partial J^+(S) - \bar{S}$ , što znamo da je moguća situacija po propoziciji 4. Neka je  $x$  buduća krajnja točka geodezika  $\gamma$ , i neka je  $y$  njegova prošlosna krajnja točka. Budući da  $\gamma$  generira  $\partial J^+(S) - \bar{S}$  postoji okolina  $W$  oko  $\gamma - y$  koja ne presjeca  $\bar{S}$ .

Pretpostavimo da je  $y \in \bar{S} - \text{edge}(S)$ . Tada postoji konveksna okolina  $U$  oko  $y$  takva da za svaki par točaka  $z_+ \in I^+(y, U)$ ,  $z_- \in I^-(y, U)$ , svaka kauzalna krivulja od  $z_-$  do  $z_+$  presjeca  $S$ . Neka je  $z_- \in I^-(x, U)$ ,  $z_0 \in I^+(z_-, U) \cap I^-(z_+, U) \cap \gamma \cap W$ , i neka je  $\lambda$  vremenska krivulja od  $z_-$  do  $z_0$ . Neka je  $z_+ \in I^+(y, U) \cap W$ , i neka je  $\lambda_2 \subset W$  vremenska krivulja od  $z_0$  do  $z_+$ . Spojimo li  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , dobijamo vremensku krivulju  $\lambda$  koja sječe  $S$ , budući da je  $y \in \bar{S} - \text{edge}(S)$ . Po konstrukciji okoline  $W$ , znamo da  $\lambda_2$  ne sječe  $S$ . Tada treba postojati točka  $z \in \lambda_1 \cap S$ . Time dobijamo da je  $x \in J^+(z_0) \subset I^+(z) \subset I^+(S)$  što je kontradikcija činjenici da je  $x \in \partial J^+(S)$ .

Sada pretpostavimo da  $y$  nije sadržan u  $\bar{S}$ . Tada postoji okolina  $U$  oko  $y$  koja ne presjeca  $\bar{S}$ . To znači da za svaki  $z \in I^+(S) \cap U$  postoji vremenska krivulja od  $S$  do  $z$  koja ne počinje u  $U$ . Prema tome  $I^+(S) = I^+(I^+(S)) = I^+(I^+(S) - U)$  što bi po

propoziciji 4 značilo da je  $y$  ili buduća krajnja točka geodezika  $\gamma$  ili samo dio  $\partial J^+(S)$ , ali nikako prošlosna krajnja točka.

Jedine preostale opcije su da je  $\gamma$  prošlosno beskrajna ili da ima prošlosnu krajnju točku na  $\text{edge}(S)$   $\square$

Budući da je  $E^+(S) = J^+(S) - I^+(S)$ , po lemi 20 kroz svaku točku  $x \in E^+(S) - S$  prolazi svjetlosni geodezik, generator skupa  $E^+(S)$ , koji presjeca  $\text{edge}(S)$  ili je beskrajna. No,  $\text{edge}(S) = \emptyset$ , prema tome  $E^+(S) = S$ , a kako je  $S$  kompaktan, i  $E^+(S)$  je kompaktan.

- (1) + (b)  $\Rightarrow$  (iii)

Svi svjetlosni geodezici ortogonalni na zatvorenu zatočenu plohu imaju negativan skalar ekspanzije. Prema propoziciji 18, a budući da smo pretpostavili da je prostor-vrijeme geodetski potpuno svi će svjetlosni geodezici razviti konjugirane točke. Po propoziciji 20 postojati će varijacijska krivulja koja će biti vremenskog tipa od početne točke, do neke druge točke koja je konjugirana prvoj ili nakon nje. To znači da nakon nekog trenutka, točke na svjetlosnom geodeziku više neće biti na rubu kauzalne budućnosti, budući da ih je moguće dostići vremenskim krivljama. Prema tome, generatori skupa  $E^+(S)$ , koji moraju biti svjetlosni geodezici bez konjugiranih točaka, imat će buduće krajnje točke. Budući da je zatvorena zatočena ploha kompaktan, i  $E^+(S)$  bit će kompaktan.

- (1) + (c)  $\Rightarrow$  (iii)

Svjetlosni geodezici koji generiraju kauzalnu budućnost točke  $p$  imat će konjugirane točke po propoziciji 13, pa će zbog toga generatori skupa  $E^+(p = S)$  imati krajnje točke, a kako je sama točka  $p$  kompaktan skup,  $E^+(p = S)$  će biti kompaktan.  $\square$

Analogno vrijede i dokazi za prošlosne slučajeve. Sada znamo da druga verzija teorema slijedi iz prve. Druga je verzija općenitija zbog toga što je moguće da postoji još neka situacija zbog koje će  $E^+(S)$  biti kompaktan skup, a da nije navedena u 4. uvjetu prvog teorema.

Krećemo u dokazivanje drugog oblika teorema. Pokazat ćemo da, kada bi sva tri uvjeta zajedno vrijedila, tada bi došlo do kontradikcije. Nakon dokaza, pokazat ćemo kako ta kontradikcija ukazuje na singularnost prostor-vremena. Postupak dokazivanja je sljedeći: Pretpostavimo da vrijede sva tri uvjeta. Uz  $S$  zatvoren i akronalan skup pokazat ćemo da  $H^+(E^+(S))$  nije kompaktan ili je prazan. Uz kompaktan  $E^+(S)$  jednostavnim preslikavanjem sa  $E^+(S)$  na  $H^+(E^+(S))$  pokazati ćemo da mora postojati buduće beskrajna kauzalna krivulja  $\gamma$  sadržana u  $D^+(E^+(S))$ . Uz sličnu konstrukciju u prošlosti od  $E^+(S) \cap J^-(\gamma)$  konstruirat ćemo beskrajnu kauzalnu krivulju u

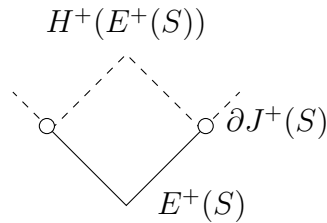
potpunosti sadržanu u  $D(E^+(S))$ . Budući da je  $\text{int}(D(E^+(S)))$  globalno hiperboličan skup, na njemu mora postojati geodezik koji je krivulja maksimalne duljine između dvije točke. No, uz uvjet (i) moguće je konstruirati dulju krivulju čime dolazi do kontradikcije.

**Lema 21.** *Na prostor-vremenu  $M$  vrijedi uvjet jake kauzalnosti.*

*Dokaz:* Ako je prostor-vrijeme kronološko i vrijede jaki energijski uvjet i uvjet generičnosti, tada je po propoziciji 23 ono kauzalno. Nadalje, ako je svjetlosno geodetski potpuno, tada je po propoziciji 24 ono i jako kauzalno.  $\square$

**Lema 22.** *Neka je  $S$  zatvoreni akronalni skup. Tada vrijedi inkluzija:*

$$H^+(E^+(S)) \subset H^+(\partial J^+(S))$$



Slika 9.3: Inkluzija iz tvrdnje vrijedit će ako je  $E^+(S) = \partial J^+(S)$ . Budući da to nije općenita tvrdnja, kao na ovom primjeru gdje su neke točke sa ruba budućnosti izrezane, treba nam općeniti dokaz.

*Dokaz:* Pretpostavimo suprotno, neka je  $x \in H^+(E^+(S)) - H^+(\partial J^+(S))$ . Budući da je  $E^+(S) \subset \partial J^+(S)$  vrijedi i  $D^+(E^+(S)) \subset D^+(J^+(S))$ . Uz osnovna pravila za razlike i presjek skupova

$$\begin{aligned} x &\in (H^+(E^+(S)) - H^+(\partial J^+(S))) \\ &= \left[ \overline{D^+(E^+(S))} - I^-(D^+(E^+(S))) \right] - \left[ \overline{D^+(\partial J^+(S))} - I^-(D^+(\partial J^+(S))) \right] \\ &= \left[ \overline{D^+(E^+(S))} - I^-(D^+(E^+(S))) \right] \cap I^-(D^+(\partial J^+(S))) \cup \\ &\quad \left\{ \left[ \overline{D^+(E^+(S))} - I^-(D^+(E^+(S))) \right] - \overline{D^+(\partial J^+(S))} \right\} \end{aligned}$$

Iz prvog u drugi red došli smo raspisivanjem  $H^+$  po definiciji, a u treći red smo prešli primjenom pravila za skupove  $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C - B)$ . Član u vitičastim zagradama u zadnjem redu je prazan skup jer vrijedi  $D^+(E^+(S)) \subset D^+(J^+(S))$  iz čega zaključujemo da mora vrijediti  $x \in I^-(D^+(\partial J^+(S)))$ . Za takav  $x$  sigurno postoji  $y \in I^+(x) \cap D^+(\partial J^+(S))$

Potrebna nam je tvrdnja  $I^+(x) \cap I^-(y)$  ne sječe  $\partial J^+(S)$ . Pretpostavimo suprotno  $\exists z \in \partial J^+(S) \cap I^+(x) \cap I^-(y)$ . Tada je otvoreni skup  $I^-(z)$  okolina točke  $x \in H^+(E^+(S))$  i prema tome presjeka  $D^+(E^+(S))$ . Budući da svaka prošlosno beskrajna vremenska

krivulja sa budućom krajnjom točkom u  $D^+(E^+(S))$  presjeca  $E^+(S) \subset \partial J^+(S)$ , postojala bi točka  $z' \in [I^-(z) \cap \partial J^+(S)] \subset [I^-(\partial J^+(S)) \cap \partial J^+(S)]$ , što je u kontradikciji sa time da je  $\partial J^+(S)$  akronalan skup.

Po propoziciji 11  $H^+(E^+(S))$  je generiran prošlosnim svjetlosnim geodezicima koji su ili beskrajni ili imaju prošlu krajnju točku na  $\text{edge}(S)$ . Budući da je  $I^-(y)$  okolina točke  $x \in H^+(E^+(S))$ , postoji prošlosno beskrajna vremenska krivulja  $\gamma \subset I^-(y)$  sa krajnjom točkom u  $y$  koja ne presjeca  $E^+(S)$ . Činjenica da  $I^+(x) \cap I^-(y)$  ne sječe  $\partial J^+(S)$  osigurava nam da  $\gamma$  ne počinje "iza"  $\partial J^+(S)$ , pa uz  $y \in D^+(J^+(S))$ ,  $\gamma$  sigurno negdje sječe  $\partial J^+(S)$ . Neka je  $z$  točka presjcišta. Tada po propoziciji 4 postoji  $\mu$ , svjetlosni generator skupa  $\partial J^+(S)$  koji ima buduću završnu točku u  $z$ , a prošlosno je beskrajan ili završava u  $\text{edge}(S)$ . Oba slučaja vode do kontradikcije i pokazuju da pretpostavljeni  $x$  ne može postojati.

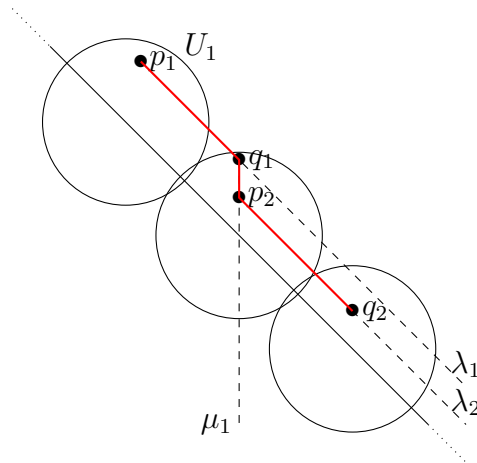
Ako postoji točka  $z' \in \text{edge}(S)$  koju  $\mu$  sječe, tada ona mora biti sadržana u  $S$  jer je  $S$  zatvoren skup. Iz toga slijedi da je  $z \in J^+(S) \cap \partial J^+(S) = E^+(S)$  što je kontradikcija konstrukciji krivulje  $\gamma$ .

Pretpostavimo da je  $\mu$  prošlosno beskrajna i ne presjeca  $S$ . Budući da je  $\gamma$  vremenska krivulja sa budućom završnom točkom u  $y \in D^+(\partial J^+(S))$  tada ona presjeca  $\text{int}D^+(\partial J^+(S))$ . Neka je točka  $y' \in \gamma \cap \text{int}D^+(\partial J^+(S))$ . Po korolaru 4 svaka prošlosno beskrajna kauzalna krivulja kroz točku  $y'$  presjeca  $I^-(\partial J^+(S))$ . Jednu takvu krivulju možemo dobiti spajanjem  $\gamma$  i  $\mu$  u točki  $z$ . Tada bi i  $\mu$  presjecala  $I^-(\partial J^+(S))$ , no kako je  $\mu \in \partial J^+(S)$  to je u kontradikciji sa akronalnosti skupa  $\partial J^+(S)$ .  $\square$

**Lema 23.** *Ako je  $S$  zatvoreni akronalni skup, i ako na  $\overline{J^+(S)}$  vrijedi uvjet jake kauzalnosti, tada  $H^+(\overline{E^+(S)})$  nije kompaktan ili je prazan.*

*Dokaz:* Pretpostavimo da je  $H^+(\overline{E^+(S)})$  kompaktan. Tada postoji konačan pokrivač  $P = \{U_i\}$  sačinjen od lokalnih konveksnih kauzalnih okolina sa kompaktnim zatvaračem. Kako vrijedi uvjet jake kauzalnosti, nijednu  $U_i$  nijedna kauzalna krivulja ne presjeca dvaput. Neka je  $z_1 \in H^+(E^+(S))$ . Zbog leme 22 sigurno postoji točka  $p_1 \in J^+(S) \cap [U_1 - D^+(\partial J^+(S))]$  (kad ne bismo znali zaključak leme 22 mogli bismo zaključiti samo da postoji neka točka sadržana u  $J^+(S) \cap [U_1 - D^+(E^+(S))]$ , što je specijalnija tvrdnja sa manje korisnosti u daljnjem dokazivanju).

Počevši od  $p_1$  postoji prošlosno beskrajna kauzalna krivulja  $\lambda_1$  koja ne presijeca  $\partial J^+(S)$  ni  $D^+(E^+(S))$ .  $\lambda_1$  počinje u  $p_1 \in J^+(S)$ , prošlosno je beskrajna i nikad ne presijeca  $\partial J^+(S)$ . Zbog toga je sadržana u  $J^+(S)$ . Budući da  $U_i$  imaju kompaktan zatvarač,  $\lambda_1$  mora napustiti  $U_1$ . Neka je  $q_1$  točka na  $\lambda_1$  izvan  $U_1$ .  $q_1 \in \lambda_1$  je sadržana u  $J^+(S)$ , pa postoji takva kauzalna prošlosna krivulja  $\mu_1$  od  $q_1$  do  $S$ , koja tada presijeca neki drugi  $U_i$ . Neka je to  $U_2$ . Tada postoji  $p_2 \in J^+(S) \cap [U_2 - D^+(\partial J^+(S))]$ . Od  $p_2$  tada možemo ponoviti konstrukciju dalje. Kako ima konačno mnogo  $U_i$  koji su ujedno kompaktni, a svaka  $\lambda_i$  je beskrajna, u svakoj iteraciji  $\lambda_i$  mora napustiti  $U_i$ . Kad bismo postupak ponovili dovoljno mnogo puta, morali bismo ponovo ući u neki



Slika 9.4: Krivulja označena crvenom bojom dobivena je spajanjem dijelova krivulja  $\lambda_i$  i  $\mu_i$ , i služi ukazivanju na kontradikciju. Kad bi  $H^+(E^+(S))$  bio kompaktan, tada bi bio pokriven konačnim brojem kauzalnih konveksnih okolina, pa bi dobivena krivulja morala dvaput ući u neku od okolina, što je suprotno zahtjevu jake kauzalnosti

$U_i$  što bi narušilo uvjet jake kauzalnosti. Prema tome  $H^+(\overline{E^+(S)})$  nije kompaktan ili je prazan.  $\square$

Sada u priču ubacimo pretpostavku (iii),  $E^+(S)$  je kompaktan. Cilj nam je naći beskrajni kauzalni geodezik, jer će on imati par konjugiranih točaka, koje će nam trebati za ukazivanje kontradikcije. Takav ćemo geodezik moći konstruirati pomoću komada buduće beskrajne vremenske krivulje i prošlosno beskrajne vremenske krivulje.

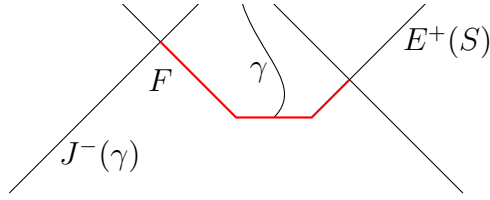
**Korolar 5.** Za  $S$  buduće zatočen skup (takav da je  $E^+(S)$  kompaktan) postoji buduće beskrajna vremenska krivulja  $\gamma$  sadržana u  $D^+(E^+(S))$ .

*Dokaz:* Na  $M$  postavimo vektorsko polje vremenskog tipa. Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je  $M$  vremenski orijentabilno prostor-vrijeme. Kada bi sve integralne krivulje tog vektorskog polja koje sječu  $E^+(S)$  presijecale i  $H^+(E^+(S))$ , tada bi one definirale neprekidno jedan na jedan preslikavanje sa  $E^+(S)$  na  $H^+(E^+(S))$ , pa bi  $H^+(E^+(S))$  također bio kompaktan skup. Prema tome, mora postojati bar jedna buduće beskrajna vremenska krivulja sadržana u  $D^+(E^+(S))$ .  $\square$

Sada kada znamo da postoji buduće beskrajna vremenska krivulja, ostaje nam pronaći i prošlosno beskrajnu, pa definiramo novi skup. Neka je  $\gamma$  buduće beskrajna vremenska krivulja sadržana u  $D^+(E^+(S))$ , a kako je vremenska, sadržana je i u  $\text{int}D^+(E^+(S))$ . Neka je skup  $F \equiv E^+(S) \cap \overline{J^-(\gamma)}$ . Kako je  $\overline{J^-(\gamma)}$  zatvoren a  $E^+(S)$  kompaktan, i  $F$  je kompaktan.

**Lema 24.**  $E^-(F) \subset F \cup \partial J^-(\gamma)$

*Dokaz:* Neka je  $x \in (E^-(F) - F)$ . Ako bi postojala točka  $x' \in I^-(x) \cap E^+(S)$  tada bi  $I^+(x')$  bila okolina točke  $x$  i presijecala  $I^-(E^+(S))$ , što je u kontradikciji sa akronalnosti skupa  $E^+(S)$ , pa vrijedi  $I^-(x) \cap E^+(S) = \emptyset$ .



Slika 9.5:  $F \equiv E^+(S) \cap \overline{J^-(\gamma)}$ . Važno je pamtiiti kako je  $\gamma$  buduće beskrajna, pa ne postoje buduće krajnje točke ruba njene kauzalne budućnosti.

Ako je  $x \in I^-(\gamma)$  tada bi postojala točka  $z \in I^+(x) \cap I^-(\gamma)$ . Neka je  $\mu$  vremenska krivulja od  $x$  preko  $z$  do  $\gamma$ . Budući da  $I^-(x) \cap E^+(S) = \emptyset$ , i  $\gamma \subset D^+(E^+(S))$ ,  $\mu$  mora presijecati  $E^+(S)$ . Neka je  $p$  točka tog presijecišta. Tada je  $p \in E^+(S) \cap I^-(\gamma) \subset F$  što bi značilo da je  $x \in I^-(F)$  u kontradikciji sa  $x \in E^-(F)$ . Jedina preostala opcija je  $x \in (\overline{J^-(F)} - I^-(\gamma)) \subset \overline{J^-(\gamma)} - I^-(\gamma) = \partial J^-(\gamma)$ .  $\square$

**Lema 25.**  $F$  je prošlosno zatočen, odnosno  $E^-(F)$  je kompaktan skup.

*Dokaz:*  $E^-(F) - F$  je generiran svjetlosnim geodezicima  $\{\beta\}$  sa budućom krajnjom točkom na  $F$ . Kad bi  $\beta$  bili prošlosno beskrajni, mogli bi ih spojiti sa generatorima skupa  $\partial J^-(\gamma)$  koji su buduće beskrajni, i time dobiti beskrajne svjetlosne geodezike, koji bi po (i) posjedovali par konjugiranih točaka. Tada bi po propoziciji 20 postojale bar dvije točke na  $\partial J^-(\gamma)$  vremenski udaljene, što bi bilo u kontradikciji sa akronalnosti skupa  $\partial J^-(\gamma)$ . Prema tome,  $\{\beta\}$  moraju imati prošlosnu krajnju točku. Budući da je konjugirane točke moguće dobiti integracijom zakrivljenosti preko Jacobijeve jednadžbe, one kontinuirano prelaze preko  $\{\beta\}$ , pa segmenti krivulja  $\{\beta\}$  od njihovih krajnjih točaka do skupa  $F$  generiraju kompaktan skup  $C$ . Dakle  $E^-(F) = \partial J^-(\gamma) \cap (C \cup F)$  je kompaktan.  $\square$

**Korolar 6.** Postoji prošlosno beskrajna krivulja  $\lambda$  sadržana u skupu  $D^-(E^-(F))$ .

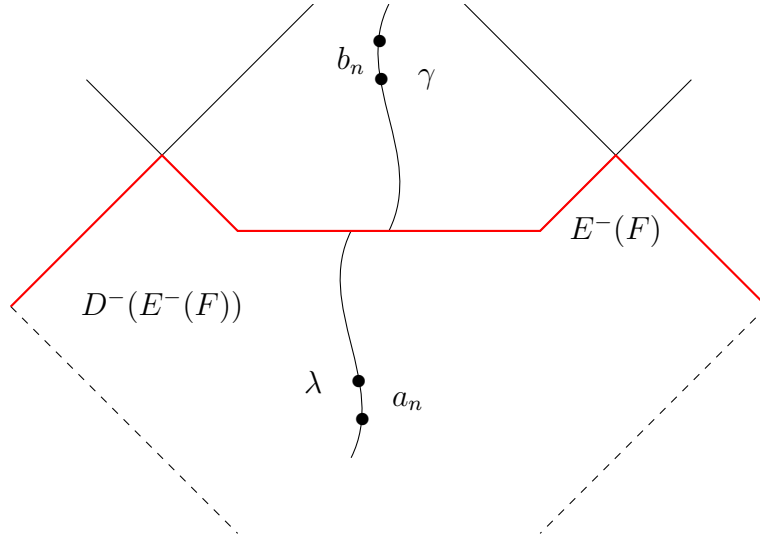
*Dokaz:* Ako primjenimo korolar 5 na prošlosno zatočeni skup  $F$  skup, vrijedi da postoji prošlosno beskrajna vremenska krivulja  $\lambda$  sadržana u  $\text{int}D^-(E^-(F)) \subset D^-(E^-(F))$ .  $\square$

Sada možemo pristupiti zadnjem koraku. Znamo da postoji buduće beskrajna vremenska krivulja  $\gamma \in \text{int}D^+(E^+(S))$  i prošlosno beskrajna vremenska krivulja  $\lambda \in D^-(E^-(F))$ . Zbog same konstrukcije skupa  $F$  vrijedi da je vremenska krivulja  $\gamma \in \text{int}D(E^-(F))$ , a isto vrijedi i za krivulju  $\lambda \in \text{int}D(E^-(F))$ .

Neka je  $\{a_n\}$  beskonačan niz točaka na  $\lambda$  takav da vrijedi

- $a_{n+1} \in I^-(a_n)$
- u svakom kompaktnom segmentu krivulje  $\lambda$  nalazi se konačno mnogo  $a_n$ .

Neka je  $\{b_n\}$  sličan niz na krivulji  $\gamma$



Slika 9.6: Crvenom je bojom označen skup  $E^-(F)$ . Postoji prošlosno beskra-  
jna krivulja  $\lambda$  sadržana u  $\text{int}D^-(E^-(F))$  i buduće beskrajna vremenska krivulja  $\lambda$   
sadržana u  $\text{int}D(E^-(F))$

- $b_1 \in I^+(a_1)$
- $b_{n+1} \in I^+(b_n)$
- u svakom kompaktnom segmentu krivulje  $\gamma$  nalazi se konačno mnogo  $b_n$ .

Kako su i  $\gamma$  i  $\lambda$  sadržane u  $\text{int}D(E^-(F))$  koji je po propoziciji 12 globalno hiperboličan skup, po propoziciji 9 između svakog para  $a_n$  i  $b_n$  postoji geodezik  $\mu_n$  maksimalne duljine. Niz točaka  $\{\mu_n\} \cap E^+(S)$  imao bi gomilište na kompaktnom skupu  $E^+(S)$ , a u svežnju smjerova geodezika  $\{\mu_n\}$  koje je nad  $E^+(S)$  također kompaktno postojalo bi gomilište smjerova. Za neki podskup  $\mu'_n \cap E^+(S)$  tada bi postojala točka konvergencije sa pripadajućim smjerom, što bi zajedno definiralo graničnu krivulju  $\mu$ . Po svojstvima nizova  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  taj bi geodezik bio beskrajan.

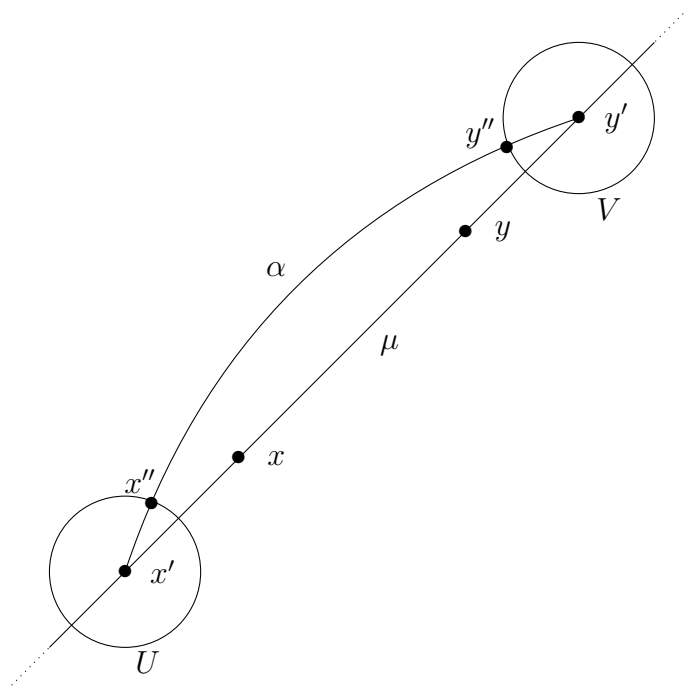
Po pretpostavci (i)  $\mu$  posjeduje par konjugiranih točaka  $x \ll y$ . Neka su točke  $x' \in I^-(x)$  i  $y' \in I^+(y)$ . Tada po propoziciji 19 postoji vremenska krivulja  $\alpha$  za koju vrijedi  $L(\alpha|_{x' \rightarrow y'}) = \epsilon + L(\mu|_{x' \rightarrow y'})$  na intervalu od  $x'$  do  $y'$ , za  $\epsilon > 0$ .

Neka su  $U$  i  $V$  konveksne okoline oko  $x'$  i  $y'$ , takve da svaka ne može sadržavati krivulju dulju od  $\frac{1}{4}\epsilon$ . Krivulja  $\alpha$  presjeca njihove rubove u točkama  $x'' = \partial U \cap \alpha$ ,  $y'' = \partial V \cap \alpha$ . Neka su  $x'_n$  i  $y'_n$  točke na  $\mu'_n$  koje konvergiraju ka  $x'$  i  $y'$ . Za  $n$  dovoljno velik, duljina krivulje  $\mu'_n$  od  $x'_n$  do  $y'_n$  bit će sigurno manja od  $\frac{1}{2}\epsilon$  plus duljina krivulje  $\mu$  od  $x'$  do  $y'$ .

$$L(\mu'_n|_{x'_n \rightarrow y'_n}) < \frac{1}{2}\epsilon + L(\mu|_{x' \rightarrow y'}) \quad (9.8)$$

Za  $n$  dovoljno velik vrijedit će također  $x'_n \in I^-(x'', U)$  i  $y'_n \in I^+(y'', U)$ . Sada možemo konstruirati kauzalnu krivulju  $\pi$  spajanjem točaka  $x'_n \rightarrow x'' \rightarrow \alpha|_{x'' \rightarrow y''} \rightarrow y'' \rightarrow y'_n$ , koja ima veću duljinu nego  $\mu'_n$  od točaka  $x'_n$  do  $y'_n$ . Naime, duljina krivulje





Slika 9.7:  $\mu$  je beskrajn geodezik koji po pretpostavci (i) posjeduje par konjugiranih točaka  $x, y \in \mu$ , zbog čega smo sigurni da postoji krivulja  $\alpha$ , takva da je udaljenost između točaka  $x' \ll x$  i  $y' \gg y$  veća ako je mjerena uzduž krivulja  $\alpha$  nego uzduž geodezika  $\mu$ .

$\alpha$  od  $x''$  do  $y''$  je sigurno donja granica konstruirane krivulje  $\pi$ .

$$L(\pi|_{x'_n \rightarrow y'_n}) \geq L(\alpha|_{x'' \rightarrow y''}) \quad (9.9)$$

Pogledajmo s druge strane koja je gornja granica za duljinu krivulje  $\alpha$ . Po konstrukciji okolina  $U$  i  $V$  u njima se može naći krivulja najveće duljine  $\frac{1}{4}\epsilon$ . Prema tome sigurno će vrijediti

$$L(\alpha|_{x' \rightarrow y'}) < L(\alpha|_{x'' \rightarrow y''}) + 2 \times \frac{1}{4}\epsilon \quad (9.10)$$

Krivulju  $\alpha$  smo odabrali tako da vrijedi  $L(\alpha|_{x' \rightarrow y'}) = \epsilon + L(\mu|_{x' \rightarrow y'})$ , pa ako to iskoristimo u izrazu (9.10), te iskoristimo izraz (9.8)

$$\begin{aligned} \epsilon + L(\mu|_{x' \rightarrow y'}) &< L(\alpha|_{x'' \rightarrow y''}) + \frac{1}{2}\epsilon \\ L(\mu|_{x' \rightarrow y'}) &< L(\alpha|_{x'' \rightarrow y''}) - \frac{1}{2}\epsilon \\ L(\mu'_n|_{x'_n \rightarrow y'_n}) - \frac{1}{2}\epsilon &< L(\mu|_{x' \rightarrow y'}) < L(\alpha|_{x'' \rightarrow y''}) - \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned} \quad (9.11)$$

Uz (9.9) konačno dolazimo do

$$L(\mu'_n|_{x'_n \rightarrow y'_n}) < L(\pi|_{x'_n \rightarrow y'_n}) \quad (9.12)$$

što je kontradikcija, jer za  $n$  dovoljno velik  $a'_n$  bio bi sadržan u prošlosti točke  $x'_n \in \mu'_n$ , a  $b'_n$  sadržan u budućnosti točke  $y'_n \in \mu'_n$ , pa bi po propoziciji 9  $\mu'_n$  trebao imati najveću duljinu.  $\square$

Dakle, dobili smo kontradikciju, i fizikalnim argumentima opravdavamo interpretirati ovaj teorem kao teorem o singularnosti prostor-vremena. Pogledajmo zato pomnije gdje je stvar pukla.

Za uvjet (iii) već smo argumentirali koje su fizikalne situacije koje bi dovele do njegovog ostvarenja, pa njega prihvaćamo kao važećeg. Uvjet (ii) zabranjivao je postojanje zatvorenih vremenskih krivulja. Uz jaki energijski uvjet, generični uvjet i pretpostavku geodetske potpunosti taj nam je uvjet osigurao jaku kauzalnost na prostor-vremenu. Uvjet (i) je uz jaki energijski uvjet, uvjet generičnosti i pretpostavku o geodetskoj potpunosti garantirao postojanje konjugiranih točaka na beskrajnim kauzalnim geodezicima.

Jaki energijski uvjet i uvjet generičnosti također smo već opisali i opravdali, pa i njih prihvaćamo kao važeće. Prema tome, kontradikcija može rušiti samo još dvije stvari: geodetsku potpunost ili postojanje zatvorene vremenske petlje. Ako sada zaista odbacimo zatvorene vremenske petlje kao ne-fizikalne pojave, jedino što ostaje je geodetska nepotpunost. Geodetski nepotpuno prostor-vrijeme je i b-nepotpuno, pa po definiciji 6 ovaj teorem govori o singularnosti prostor vremena.

Modernija istraživanja ipak ne odbacuju zatvorene vremenske krivulje a priori, već istražuju što se sa prostor-vremenom događa ako one u nekom obliku postoje. Marcus Kriele je 1991. formulirao sljedeći teorem:

**Teorem 10.** *Neka je  $(M, g_{ab})$  prostor-vrijeme koje zadovoljava svjetlosni energijski uvjet i uvjet svjetlosne generičnosti. Ako je povezana komponenta ruba skupa sa povredom kronološkog uvjeta kompaktna, tada je  $M$  svjetlosno geodetski nepotpuno.*

Dakle, ako postoji dio prostor-vremena koji sadrži samo zatvorene vremenske krivulje, i ako je rub tog dijela kompaktan, uz navedena dva uvjeta prostor-vrijeme je svjetlosno geodetski nepotpuno. Ovo nam daje indiciju da nas čak prihvaćanje nečega poput zatvorenih vremenskih krivulja ne izbavlja iz singularnosti. Naravno, ovaj argument nije općenit, već samo naznaka alternativnih situacija.

## 10 Zaključak

Fenomen singulariteta, odnosno odliku nekih prostor-vremena da budu singularna upoznali smo kroz pokušaje obuhvaćanja značenja raznih divergencija u općoj teoriji relativnosti. Definicija koju smo konačno koristili generalizira ideju rupe u prostor-vremenu, općenitija je od definicija koje bi bile vezane isključivo uz divergirajuće ponašanje, a ujedno obuhvaća situacije u kojima "rupa" nije nužno nastala zbog "beskonačne zakrivljenosti". Odmakom od konkretnih jednadžbi, uporabom topoloških alata i promatranjem ponašanja krivulja na prostor-vremenu definirali smo i analizirali svojstva brojnih alata kojima je moguće pristupiti modelu prostor-vremena i ispitati njegovu singularnu ili ne-singularnu prirodu.

Naglasak rada svakako je na teoremu Hawking, Penrose 1970. Uz navedena fizikalna opravdanja, taj nam teorem, iako geometrijski u svojoj naravi, daje indikacije da je upravo i naše prostor-vrijeme singularno. Svakako, ostaje puno otvorenih pitanja.

Energijski uvjet koji smo koristili ima svoje mane, navedene u poglavlju o narušenjima energijskih uvjeta, i iz tog je razloga važno daljnja istraživanja formulirati imajući uvijek u vidu najnovije spoznaje o materiji koja nas okružuje, te njenom tenzoru energije i gustoće.

Mjerenja koja ukazuju na pozitivnu kozmološku konstantu također bi bilo potrebno uzeti u obzir, te promotriti moguće generalizacije Raychaudhurijeve jednadžbe i teorema o fokusiranju.

Uvjet na kauzalnost također može biti podložan izmjenama, kao što smo i vidjeli u posljednjem navedenom teoremu. Zatvorene vremenske krivulje čak se i pojavljuju u nekim egzaktnim rješenjima Einsteinovih jednadžbi, poput Kerrovog rješenja, prostor-vremena sa rotirajućom crnom rupom. Redovito se u istraživanjima zatvorene vremenske krivulje zanemaruju i ignoriraju uz argument kako su egzaktna rješenja idealna, i kako bi svaka perturbacija u stvari uništila njihovo postojanje. No, to je upravo ono što se povijesno dogodilo singularitetima, i prezentirani teorem 8 jedan je od dokaza da i generična situacija može iznjedriti singularnost. Motivirani time, mogli bismo krenuti u istraživanje: koliko generično prostor-vrijeme može biti, a da se zatvorena vremenska krivulja ipak pojavi? Ta bi saznanja tada mogli također uključiti u argumente kojima tražimo geodetsku nepotpunost u teoremima o singularitetima.

Nastavak istraživanja singularnosti prostor-vremena mogao bi se u tom smislu sastojati od sve finijeg brušenja argumenata. No, moramo imati na umu kako je geodetska nepotpunost u duhu ovog rada još uvijek stvar ne-kvantne fizike. Pitanje je što bi se sa singularitetima događalo u nekoj kvantnoj teoriji gravitacije. Zsigurno su nam saznanja koja dobijemo iz promatranja singularnosti prostor-vremena u općoj teoriji relativnosti nit vodilja prema kvantnom ponašanju gravitacije, ili bar provokacija koja nam govori kako nešto sa našom teorijom nije u redu.

Maleni dio ogromnog područja proučavanja kauzalne strukture prostor-vremena prezentiran je u ovom radu i svakako uz pokazane ključne rezultate može služiti kao uvod u područje. Neriješenih problema ima još, mnogo je pitanja otvoreno i mnogo odgovora samo čeka na otkriće.

# Dodaci

## Dodatak A Spinori i generičnost

Kako bi dodatno pojasnili i opravdali uvjet generičnosti, demonstrirat ćemo njegovo značenje kroz formalizam spinora u općoj teoriji relativnosti, bez ulaženja u detalje o spinorima. Spinore doživljavamo kao objekte fundamentalnije od tenzora, u smislu da tenzorske veličine možemo sagraditi od spinora.

Motivaciju za uvođenje spinora vučemo iz kvantne mehanike, konkretno, ako je  $\vec{\sigma}$  matrica  $2 \times 2$  na Hilbertovom prostoru valnih funkcija, i ako je  $\vec{u}$  vektor u koordinatnom prostoru, tada je spin u smjeru  $\vec{u}$  jednak

$$\vec{u} \cdot \vec{\sigma} = u^1 \sigma_1 + u^2 \sigma_2 + u^3 \sigma_3 \quad (\text{A.1})$$

i ako matricu  $\vec{\sigma}$  zapišemo preko Paulijevih spin matrica, ukupni operator spina je

$$\vec{u} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & -u^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Za relativističku generalizaciju ovog izraza matrici  $\vec{\sigma}$  dodajemo "vremensku" komponentnu  $\sigma_0 = I_2$ , jediničnu  $2 \times 2$  matricu. Tada nam prethodni izraz postaje

$$\vec{u} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Determinantna ovog izraza upravo je norma 4-vektora  $u^a$ . Taj izraz uzimamo kao postupak upisivanja realnih 4-vektora u  $2 \times 2$  Hermitske matrice.

$$u^a \mapsto \begin{pmatrix} u^{00'} & u^{01'} \\ u^{10'} & u^{11'} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Stupce dobivene matrice, kompleksne 2-vektore, proglašavamo fundamentalnim objektima **spinorima**.

### A.1 Spinori izranjaju iz simplektičkog linearnog prostora

**Definicija 26.** *Simplektički vektorski prostor* je parno dimenzionalni vektorski prostor  $S$  nad  $\mathbb{C}$  sa definiranim unutarnjim produktom  $[\cdot, \cdot]$  sa svojstvima:

(i) *Antisimetričnost*  $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$  za svaki vektor  $\xi, \eta \in S$

(ii)  $[\cdot, \cdot]$  je nedegeneriran

(iii)  $[\cdot, \cdot]$  je bilinearan

$[\cdot, \cdot]$  zovemo antisimetričan unutarnji produkt

Antisimetričan unutarnji produkt definira prirodan izomorfizam između  $S$  i njegovog dualnog prostora  $S^*$  na način da svakom elementu  $\xi \in S$  pridružuje  $[\xi, \ ]$ . Neka je  $o, i$  baza za dvo-dimenzionalni  $S$

$$[o, i] = 1$$

Tada je neki vektor  $\xi \in S$  jednak

$$\xi = \xi^0 o + \xi^1 i \quad (\text{A.5})$$

Komponentne vektora označavamo sa  $\xi^A$ , i za ovu bazu vrijedi

$$o^A = (1, 0), \quad i^A = (0, 1)$$

Element dualnog prostora pišemo  $\xi_A = [\xi, \ ]$  Antisimetričan unutarnji produkt možemo reprezentirati elementom prostora  $S^* \times S^*$ , kojega označavamo sa  $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ . Za njega vrijedi

$$[\xi, \eta] = \epsilon_{AB} \xi^A \eta^B$$

U bazi  $(o, i)$  njegova reprezentacija je

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Budući da ima inverz  $\epsilon^{AB} = -(\epsilon^{-1})^{-1}$ , možemo ga koristiti za spuštanje i podizanje indeksa

$$\xi^C = \epsilon^{CB} \xi_B \quad (\text{A.7})$$

Nadalje, važno je da kompleksna konjugacija nekog člana prostora  $S$  nije nužno opet član prostora  $S$ . Kompleksna konjugacija nekog  $\alpha + c\beta$ , gdje su  $\alpha, \beta \in S, c \in \mathbb{C}$  je  $\bar{\alpha} + \bar{c}\bar{\beta}$ , a ne  $\bar{\alpha} + c\bar{\beta}$ . Tako da ukupno imamo četiri prostora:

- Simplektički prostor  $S$
- njegov dual  $S^*$
- kompleksno konjugirani prostor  $\bar{S}$
- dual kompleksno konjugiranog prostora  $\bar{S}^*$

Prilikom kompleksne konjugacije, notacijski, objekt dobiva crtu preko, a njegov sufiks dobiva crticu, kako bi se naglasilo da pripada drugom prostoru.

$$\alpha^A \mapsto \overline{\alpha^A} = \bar{\alpha}^{A'}$$

općeniti spinor je objekt koji je član produkta prostora

$$S \times \dots \times S \times S^* \times \dots \times S^* \times \bar{S} \dots \times \bar{S} \times \bar{S}^* \dots \times \bar{S}^*$$

## A.2 Hermitski spinori generiraju realne vektore

Hermitijski spinor je onaj za koji vrijedi  $\bar{\tau} = \tau$ . Najjednostavniji primjer za takav spinor je element produkta  $S \times \bar{S}$ , odnosno  $\tau^{AA'}$ . Neka su  $(o, i), (\bar{o}, \bar{i})$  baze za  $S$  i  $\bar{S}$ . Tada postoje skalari  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  takvi da je

$$\tau^{AA'} = \mu_1 o^A \bar{o}^{A'} + \mu_2 i^A \bar{i}^{A'} + \mu_3 o^A \bar{i}^{A'} + \mu_4 i^A \bar{o}^{A'}$$

Prema tome, skup Hermitijskih spinora  $\tau^{AA'}$  razapinje 4-dimenzionalni realni vektorski prostor koji identificiramo sa tangnetnim prostorom  $T_p(M)$ . Odabrana baza definira tetradu vektora

$$l^a = o^A \bar{o}^{A'}, \quad n^a = i^A \bar{i}^{A'}, \quad m^a = o^A \bar{i}^{A'}, \quad \bar{m}^a = i^A \bar{o}^{A'} \quad (\text{A.8})$$

koja se linearnim kombinacijama može pretvoriti u ortonormalnu tetradu. Mnemotehnika generiranja vektora iz spinora je preimenovanje  $AA' \mapsto a$ . Metrički tenzor dobivamo iz

$$g_{ab} = g_{ABA'B'} = \epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} \quad (\text{A.9})$$

Lako je vidljivo da je  $l_a l^a = 0$

$$l_a l^a = o_A \bar{o}_{A'} o^A \bar{o}^{A'} = [o, o][\bar{o}, \bar{o}] = 0 \quad (\text{A.10})$$

Svaki univalentan spinor ( $\kappa^A \in S$ ) definira realni svjetlosni vektor  $k^a = \kappa^A \kappa^{A'}$ .

**Teorem 11.** Za potpuno simetričan spinor  $\tau_{AB\dots C} = \tau_{(AB\dots C)}$  postoje univalentni spinori  $\alpha_A, \beta_B, \dots, \gamma_C$  takvi da vrijedi

$$\tau_{AB\dots C} = \alpha_{(A} \beta_{B\dots C)}$$

Spinore  $\alpha_A, \beta_B, \dots, \gamma_C$  zovemo **svojstveni spinori** za  $\tau$  i oni definiraju svojstvene svjetlosne vektore.

## A.3 Tenzori imaju svojstvene spinore

### A.3.1 Elektromagnetski tenzor

Elektromagnetski tenzor  $F_{ab}$  koji je antisimetričan možemo zapisati preko spinora na način

$$F_{ab} \mapsto F_{ABA'B'} = \epsilon_{AB} \bar{\Phi}_{A'B'} + \Phi_{AB} \epsilon_{A'B'} \quad (\text{A.11})$$

Gdje je  $\Phi_{AB}$  simetričan spinor koji možemo po teoremu 11 zapisati kao

$$\Phi_{AB} = \alpha_{(A} \beta_{B)} \quad (\text{A.12})$$

Ako su  $\alpha_A$  i  $\beta_A$  međusobno proporcionalni, tada je  $\Phi_{AB}$  algebarski specijalan. Ako nisu međusobno proporcionalni tada je  $\Phi_{AB}$  algebarski općenit.

Pretpostavimo sada da vrijedi algebarska općenitost. Kad bismo se uputili u traženje svojstvenih vrijednosti i svjostvenih vektora tenzora  $F_{ab}$  u spinornoj reprezentaciji to bi izgledalo (pomoćne relacije  $\alpha^A \epsilon_{AB} = \alpha_B$ ,  $\epsilon_{AB} \alpha^B = -\alpha_A$ ):

$$k^a F_{ab} = \alpha^A \bar{\alpha}^{A'} F_{ABA'B'} = \alpha_B \bar{\alpha}^{A'} \bar{\alpha}_{(A'} \bar{\beta}_{B')} + \alpha_{(A} \beta_B) \alpha^A \bar{\alpha}_{B'} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\bar{\alpha}^{A'} \bar{\alpha}_{A'} \alpha_B \bar{\beta}_{B'} + \bar{\alpha}^{A'} \bar{\beta}_{A'} \alpha_B \bar{\beta}_{B'} \\ &+ \alpha^{A'} \alpha_{A'} \bar{\alpha}_{B'} \beta_B + \alpha^B \beta_A \alpha_B \bar{\alpha}_{B'}) \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\alpha}^{A'} \bar{\beta}_{A'} + \alpha^A \beta_A] \alpha_B \bar{\alpha}_{B'} \\ &= \lambda k_b \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Kada  $\Phi_{AB}$  ne bi bio algebarski općenit, tada bi desna strana nužno išezavala ( $\beta$  bi bio proporcionalan  $\alpha$ ). Prema tome, znamo uvjet koji treba vrijediti da bi svojstveni vektori imali različite smjerove:

$$k^a F_{ab} = \lambda k_b \quad (\text{A.15})$$

za  $\lambda \neq 0$ . Ekvivalentno, ako pomnožimo izraz sa  $k_c$  i antisimetriziramo u indeksima  $b$  i  $c$ , on glasi

$$k^a F_{a[b} k_{c]} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Ako sada promatramo neki geodezik i želimo da situacija bude generična, općenita i ni po čemu posebna, tada tražimo da svi svojstveni vektori tenzora  $F_{ab}$  budu različiti, i da se tangentan vektor geodezika  $v^a$  nikada ne poklapa ni sa jednim od tih smjerova. Prema tome, uvjet generičnosti elektromagnetskog polja glasi:

$$v^a F_{a[b} v_{c]} \neq 0 \quad (\text{A.17})$$

### A.3.2 Weylov tenzor

U spinornom formalizmu Weylov tenzor možemo zapisati kao

$$C_{abcd} = \Psi_{ABCD} \epsilon_{A'B'} \epsilon_{C'D'} + \bar{\Psi}_{A'B'C'D'} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} \quad (\text{A.18})$$

gdje je  $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A} \beta_B \gamma_C \delta_{D)}$ . Ako opet zahtijevamo da se nijedan svojstveni spinor ne poklapa, i to prevedemo u tenzorsku notaciju istim postupkom (traženje svojstvenih vektora, antisimetrizacija za ekvivalentni zapis), tada dobivamo uvjet:

$$k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} k^b k^c = 0 \quad (\text{A.19})$$

Konačno, sada promatramo neki geodezik, i tražimo da situacija bude najopćenitija moguća, da svi svojstveni smjerovi Weylovog tenzora budu različiti, i da se nijedan od tih smjerova ne poklapa sa tangentskim vektorom  $v^a$  geodezika, uvjet glasi:

$$v_{[e} C_{a]bc[d} v_{f]} v^b v^c \neq 0 \quad (\text{A.20})$$



Budući da je Weylov tenzor

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2!}{n-2} \left( (g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{1}{n-1} R g_{a[c}g_{e]b} \right) \quad (10.21)$$

uvjet da je prostor-vrijeme generično pišemo

$$v_{[e}R_{a]bc[d}v_{f]}v^bv^c \neq 0 \quad (10.22)$$

jer jedino kada taj uvjet ne bi vrijedio bilo bi da je svugdje  $R_{ab} = 0$ , i tada da Weylov tenzor nije generičan.

## Literatura

- [1] Hawking, S.W.; Ellis G.F.R. *The large scale structure of space-time* 1973: Cambridge University Press
- [2] Hawking, S.W.; Penrose, R.; *The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology* // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences vol. 314, 1519 (1970), str 529-548.
- [3] J.K. Beeem, P.E. Erlich, K.L. Easley *Global Lorentz Geometry* Second edition, 1996: Marcel Dekker, Inc., New York
- [4] Robert M. Wald *General Relativity* 1984: The University of Chicago Press
- [5] Loring W. Tu *An introduction to Manifolds* Second edition, 2011: Springer
- [6] Geroch R. : What is a Singularity in General Relativity? // *Annals of Physics*: Vol. 48 (1968), str. 526-540
- [7] Visser M., Barceló C. *Energy conditions and their cosmological implications*, Plenary talk, Cosmo99, Trieste Sept/Oct 1999
- [8] Thorne K. *Closed timelike curves*, General Relativity and Gravitation, 1992, Proceedings of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation, edited by R.J. Gleiser, C.N. Kozameh, and O.M. Moreschi, (Institute of Physics Publishing, Bristol, England, 1993), str. 295-315.
- [9] Carroll, S. *Spacetime and geometry* : Addison Wesley, 2004.
- [10] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*: Academic Press, 1983.
- [11] Poisson, E. *A relativist's toolkit - The mathematics of black-hole mechanics*: Cambridge University Press, 2004.
- [12] Kriele, M. *Spacetime - Foundations of general relativity and differential geometry*: Springer, 1999.
- [13] Melia, F. *Cracking the Einstein code*: The University of Chicago Press, 2009.
- [14] Earman, J. *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks - Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*: Oxford University Press, 1995.
- [15] Penrose, R. *Techniques of differential topology in relativity* : Society for Industrial Mathematics, 1972.
- [16] Stewart, J. *Advanced general relativity*: Cambridge University Press, 1991.

- [17] Senovilla, M. M. J.; Garfinkle, D.; *The 1965 Penrose singularity theorem* // Class. Quantum Grav. 32 (2015)
- [18] Minguzzi, E. Chronology violations and the origin of time : The Time Machine Factory [unspeakable, speakable] on Time Travel in Turin 2012 / EPJ Web of Conferences, Volume 58, 2013
- [19] Ellis, G.F.R.; Schmidt, B.G.; *Singular Space-Times* // General Relativity and Gravitation, Vol. 8, No. 11 (1977), str 915-953.
- [20] Hawking, S.W.; *Singularities and the geometry of spacetime* // Eur. Phys J.H., Vol. 39 (2014), str. 413 - 503
- [21] Hawking, S.W.; *The Occurrence of Singularities in Cosmology* // Proc. Roy. Soc. London A; Vol. 294. (1966) str. 511-521
- [22] Hawking, S.W.; *The Occurrence of Singularities in Cosmology, II* // Proc. Roy. Soc. London A; Vol. 295. (1966) str. 490-493