SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karmen Županʼ

IZOMETRIČKI EKVIVALENTNI NIZOVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Mojoj obitelji.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu se proučavaju određeni aspekti kompaktnosti u metričkim prostorima povezani s izometričkim ekvivalentnim nizovima.

U prvom poglavlju daje se definicija metričkog prostora te se proučavaju konvergencija nizova, gomilišta nizova i podnizovi nizova s posebnim osvrtom na euklidski prostor.

U drugom poglavlju proučava se zatvorenost i omeđenost skupova u metričkim prostorima te se nadalje proučavaju kompaktni skupovi i pri tome se dokazuju određene činjenice vezane za kompaktnost. Nadalje, proučavaju se konačni nizovi u metričkim prostorima, izometrički ekvivalentni nizovi te neki pojmovi s tim u vezi kao npr. h-konvergentni nizovi.

Poglavlje 1

Metrički prostori i gomilišta nizova

1.1 Metrika

Neka je X neprazan skup. Neka je $d : X \times X \to \mathbf{R}$ funkcija takva da vrijedi:

1. $d(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$, za sve $x, y \in X$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$, za sve $x, y \in X$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, za sve $x, y \in X$.

Tada funkciju d nazivamo **metrika** na skupu X, a uređen par (X, d) nazivamo **metrički prostor**.

Primjer 1.1.1. Neka je $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$ za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

Dokažimo da je d metrika na $\mathbf{R}$.

Očito je $d(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in \mathbf{R}$. Imamo $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $|x - y| = 0$, što vrijedi ako i samo ako je $x - y = 0$, a što vrijedi ako i samo ako je $x = y$. Nadalje, očito je da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi: $d(x, y) = d(y, x)$.

Za sve $u, v \in \mathbf{R}$ vrijedi $|u + v| \leq |u| + |v|$. Koristeći navedenu nejednakost dobivamo da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$, dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Prema tome d je metrika na $\mathbf{R}$.

Za d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbf{R}$.

Primjer 1.1.2. Neka je $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ te neka je $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa:

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Može se pokazati da je d metrika na $\mathbf{R}^n$. Tu metriku nazivamo **euklidska metrika** na $\mathbf{R}^n$.

Primjer 1.1.3. Neka je $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ te neka je $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa:

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|.$$

Dokažimo da je d metrika.

Očito je $d(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in \mathbf{R}^n$. Neka su $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$. Imamo $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, ..., x_n = y_n \Leftrightarrow x = y$. Očito da je $d(x, y) = d(y, x)$, za sve $x, y \in \mathbf{R}^n$. Neka su $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n)$. Koristeći primjer 1.1.1 dobivamo

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| =$$

$$|x_1 - z_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_1 - y_1| + ... + |z_n - y_n| = d(x, z) + d(z, y),$$

dakle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Prema tome d je metrika na $\mathbf{R}^n$.

Postoji li na svakom nepraznom skupu barem jedna metrika?

Primjer 1.1.4. Neka je X neprazan skup. Definirajmo $d : X \times X \to \mathbf{R}$ sa

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \neq y, \\ 0, \text{ ako je } x = y. \end{cases}$$

Dokažimo da je d metrika na skupu X.
Očito je da su svojstva 1., 2., 3. iz definicije metrike zadovoljena.

Provjerimo svojstvo 4. Neka su $x, y, z \in X$. Vrijedi $d(x,y), d(x,z), d(z,y) \in \{0,1\}$, stoga jedini slučaj kada nejednakost $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ ne vrijedi jest kada je $d(x,y) = 1, d(x,z) = 0, d(z,y) = 0$, tj. kada $x \neq y$, $x = z, z = y$ što je očito nemoguće. Dakle, d je metrika na X. Za d kažemo da je **diskretna metrika** na X.

Podsjetimo se pojma konvergencije niza realnih brojeva.

Definicija 1.1.5. *Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ te neka je $a \in \mathbf{R}$. Kažemo da niz (x_n) teži prema a i pišemo $x_n \to a$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \epsilon$.*

Općenito za x,y $\in \mathbf{R}$, $r > 0$ vrijedi $|x - y| < r \Leftrightarrow x \in \langle y - r, y + r \rangle$. Stoga niz realnih brojeva (x_n) teži prema $a \in \mathbf{R}$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki n $\in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in \langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$.

Primjer 1.1.6. Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada $x_n \to 0$. Naime, neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $\frac{1}{\epsilon} < n_0$. Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\dfrac{1}{\epsilon} < n$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$ tj. $|x_n - 0| < \epsilon$.

Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži prema a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x \to a$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$.

Definicija 1.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X, te neka je $a \in X$. Kažemo da je a* ***limes niza*** *(x_n) ako je $x_n \to a$.*

Primjer 1.1.8. Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $a \in X$. Definirajmo niz (x_n) u X sa $x_n = a$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada $x_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d). Naime za svaki $\epsilon > 0$ i svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $d(x_n, a) = 0 < \epsilon$.

Propozicija 1.1.9 (Jedinstvenost limesa niza)**.** *Neka je (X,d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a, b \in X$. Pretpostavimo da je $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$. Također postoji $m_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $d(x_n, b) < \epsilon$. Neka je $n = \max\{n_0, m_0\}$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ te vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$ i $d(x_n, b) < \epsilon$. Dobivamo

$$d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Dakle, $d(a, b) < 2\epsilon$, za svaki $\epsilon > 0$. Pretpostavimo da je $d(a, b) > 0$. Neka je $\epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Tada je $\epsilon > 0$ pa vrijedi $d(a, b) < 2\epsilon$ tj. $d(a, b) < 2\frac{d(a,b)}{2} = d(a, b)$ što je nemoguće. Stoga je $d(a, b) = 0$, što znači da je $a = b$. $\square$

1.2 Gomilišta

Definicija 1.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Kažemo da je a* ***gomilište*** *niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ i za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < \epsilon$.*

Propozicija 1.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Prepostavimo da je a limes niza (x_n). Tada je a gomilište niza (x_n).*

Dokaz. Neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbf{N}$. Budući da je $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$. Neka je $n = \max\{N, n_0\}$. Tada je $n \geq N$, a zbog $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$. Zaključujemo da je a gomilište niza (x_n). $\square$

Primjer 1.2.3. Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$ te neka je (x_n) niz definiran sa $x_n = (-1)^n$.

Pretpostavimo da postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $\epsilon = \frac{1}{2}$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$. Odaberemo paran broj $n_1 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_1 \geq n_0$ te odaberemo neparan broj $n_2 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_2 \geq n_0$. Tada je $d(x_{n_1}, a) < \epsilon$ i $d(x_{n_2}, a) < \epsilon$ tj. $d(1, a) < \epsilon$ i $d(-1, a) < \epsilon$. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(1, -1) \leq d(1, a) + d(-1, a) < 2\epsilon$$

tj. $d(1, -1) < 2\epsilon$. No, to je nemoguće jer $d(-1, 1) = 2$, a $2\epsilon = 1$. Dakle, ne postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da $x_n \to a$, tj. niz (x_n) nema limes u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$.

Tvrdimo da je 1 gomilište niza (x_n).

Uzmimo $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbf{N}$. Odaberemo paran $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq \mathbf{N}$. Imamo $d(x_n, 1) = d(1, 1) = 0 < \epsilon$, dakle $d(x_n, 1) < \epsilon$. Dakle, 1 je gomilište niza (x_n).

Analogno, dobivamo da je -1 gomilište niza (x_n).

Definicija 1.2.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***kompaktan*** *ako svaki niz u X ima gomilište u (X, d).*

Primjer 1.2.5. Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Tada metrički prostor $(\mathbf{R}, d)$ nije kompaktan. Dokažimo to.

Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran sa $x_n = n$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Tvrdimo da niz (x_n) nema gomilišta u $(\mathbf{R}, d)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $a \in \mathbf{R}$ takav da je a gomilište

niza (x_n).
Uzmimo $\epsilon = \frac{1}{3}$ i $N \in \mathbf{N}$ takav da je $N > a + 1$. Tada postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < \epsilon$ što znači da je $|x_n - a| < \epsilon$ tj. da je $|n - a| < \epsilon = \frac{1}{3}$. Iz $n \geq N > a + 1$ slijedi $n > a + 1$ pa je $n - a > 1$ stoga je $|n - a| = n - a > 1$.To je u kontradikciji sa $|n - a| < \dfrac{1}{3}$. Dakle, niz (x_n) nema gomilišta u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$. To znači da metrički prostor $(\mathbf{R}, d)$ nije kompaktan.

Definicija 1.2.6. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je **gornja međa** skupa S ako je $x \leq a$ za svaki $x \in S$.*

Definicija 1.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za S kažemo da je **odozgo omeđen** skup ako S ima barem jednu gornju među.*

Definicija 1.2.8. *Neka su $S \subseteq \mathbf{R}$ i $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je **supremum** skupa S ako je a najmanja gornja međa skupa S tj. ako vrijedi sljedeće:*
1.) a je gornja međa skupa S
2.) za svaku gornju među b skupa S vrijedi $a \leq b$.

Uočimo sljedeće:
Ako su a_1 i a_2 supremumi skupa S, onda je $a_1 = a_2$. Naime vrijedi $a_1 \leq a_2$ jer je a_1 supremum od S, a a_2 gornja međa od S. Isto tako vrijedi $a_2 \leq a_1$ pa slijedi $a_1 = a_2$.
Ako supremum skupa S postoji onda ga označavamo sa $\sup S$.

Definicija 1.2.9. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $s_0 \in S$. Kažemo da je s_0 **maksimum** skupa S ako je $x \leq s_0$ za svaki $x \in S$ tj. ako je s_0 gornja međa skupa S.*

Ako je s_0 maksimum skupa S, onda je s_0 supremum skupa S. Naime, s_0 je gornja međa skupa S po definiciji maksimuma, a drugi uvjet iz definicije supremuma je zadovoljen jer je $s_0 \in S$. Uočimo da je maksimum skupa S, ako postoji jedinstven i u tom slučaju ga označavamo sa $\max S$.

Primjer 1.2.10. Neka je $S = \langle -\infty, 0\rangle$. Tada je 0 supremum skupa S. Naime, očito je 0 gornja međa skupa S. Nadalje ako je b gornja međa od S, onda je $0 \leq b$ jer bi u suprotnom vrijedilo $b < 0$ pa bi postojao $x \in \mathbf{R}$ takav da je $b < x < 0$ što bi značilo da je $x \in S$ i $b < x$ a to je nemoguće jer je b gornja međa od S.

Skup S nema maksimum.
Pretpostavimo da postoji maksimum s_0 skupa S. Tada bi vrijedilo da je s_0 supremum skupa S. S obzirom da je supremum skupa jedinstven imamo $s_0 = 0$ što je nemoguće jer $0 \notin S$.
Uočimo sljedeće: ako skup S ima supremum, onda je S odozgo omeđen.

AKSIOM POTPUNOSTI
Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbf{R}$ takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in S$ i $y \in T$. Tada postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in S$ i $y \in T$.

Propozicija 1.2.11. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od* $\mathbf{R}$*. Tada S ima supremum.*

Dokaz. Neka je T skup svih $a \in \mathbf{R}$ takav da je a gornja međa skupa S. Skup T je neprazan jer je S odozgo omeđen. Za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $x \leq y$. Tada postoji, prema aksiomu potpunosti, $z \in \mathbf{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$ za sve $x \in S$, $y \in T$. Budući da je $x \leq z$ za svaki $x \in S$, z je gornja međa skupa S a iz $z \leq y$ za svaki $y \in T$ slijedi da je z najmanja gornja međa skupa S. Dakle, z je supremum skupa S. □

Definicija 1.2.12. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je* ***donja međa*** *skupa S ako je $a \leq x$ za svaki $x \in S$.*

Definicija 1.2.13. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Za S kažemo da je* ***odozdo omeđen*** *skup ako S ima bar jednu donju među.*

Definicija 1.2.14. *Neka su $S \subseteq \mathbf{R}$ i $a \in \mathbf{R}$. Za a kažemo da je* ***infimum*** *skupa S ako je a najveća donja međa skupa S tj. ako vrijedi sljedeće:*
1.) a je donja međa skupa S
2.) Za svaku donju među b skupa S vrijedi $b \leq a$.

Slično kako u slučaju supremuma zaključujemo da je infimum skupa, ako postoji, jedinstven.
Infimum skupa S ako postoji označavamo $\inf S$.

Definicija 1.2.15. *Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te $s_0 \in S$. Kažemo da je s_0* ***minimum*** *skupa S ako je $s_0 \leq x$ za svaki $x \in S$ (tj. ako je s_0 donja međa skupa S).*

Uočimo sljedeće: ako je s_0 minimum onda je s_0 i infimum skupa S.
Minimum skupa S označavamo sa $minS$.
Npr. ako $S = \langle 0, \infty \rangle$ onda je 0 infimum skupa S, no skup S nema minimuma.

Propozicija 1.2.16. *Neka je S neprazan odozdo omeđen podskup od $\mathbf{R}$. Tada S ima infimum.*

Dokaz. Neka je T skup svih $a \in \mathbf{R}$ takvih da je a donja međa skupa S. Skup T je neprazan jer je S odozdo omeđen. Za svaki $x \in S$ i svaki $y \in T$ vrijedi $y \leq x$. Tada prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbf{R}$ takav da je $y \leq z \leq x$ za sve $x \in S$ i $y \in T$. Budući da je $z \leq x$ za svaki $x \in S$, z je donja međa skupa S, a iz $z \geq y$ za svaki $y \in T$ slijedi da je z najveća donja međa skupa S. Dakle, z je infimum skupa S. □

Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Kažemo da je S omeđen skup ako je S omeđen odozdo i odozgo.

Definicija 1.2.17. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbf{R}$. *Kažemo da je* (x_n) ***omeđen niz*** *u* $\mathbf{R}$ *ako je skup* $\left\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ *omeđen.*

Definicija 1.2.18. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x_0 \in x$ *te* $r > 0$. *Definiramo* $K(x_0, r) = \left\{y \in X \mid d(x_0, y) < r\right\}$. *Za* $K(x_0, r)$ *kažemo da je* ***otvorena kugla*** *ako* x_0 *radijusa* r *u metričkom prostoru* (X, d).

Umjesto $K(x_0, r)$ pišemo $K_d(x_0, r)$.

Primjer 1.2.19. Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Neka su $x_0 \in \mathbf{R}$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Dokažimo to.

Dokaz. Neka je $y \in K(x_0, r)$. Tada je $|y - x_0| < r$ pa je $-r < y - x_0 < r$ što povlači $x_0 - r < y < r + x_0$ tj. $y \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$.
Analogno dobijemo da $y \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$, povlači $y \in K(x_0, r)$. □

Definicija 1.2.20. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $U \subseteq X$. *Za* U *kažemo da je* ***otvoren skup*** *u metričkom prostoru* (X, d) *ako za svaki* $x \in U$ *postoji* $r > 0$ *takav da je* $K(x, r) \subseteq U$.

Primjer 1.2.21. Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Tada je skup $\langle 0, +\infty\rangle$ otvoren u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$. Dokažimo to.

Neka je $x_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je $r = x_0$. Tada je

$$K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle = \langle 0, 2x_0\rangle$$

pa je očito $K(x_0, r) \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$.
Skup $[0, +\infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbf{R}, d)$ jer je $0 \in [0, +\infty\rangle$, a ne postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, +\infty\rangle$. Vrijedi $K(0, r) = \langle -r, +r\rangle$ pa je očito da $K(0, r)$ sadrži i negativne brojeve.

Propozicija 1.2.22. *(Svaka otvorena kugla je otvoren skup). Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u otvorenom metričkom prostoru (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Želimo naći $r_1 > 0$ takav da $K(x, r_1) \subseteq K(x_0, r)$. Vrijedi $d(x, x_0) < r$. Neka je $r_1 = r - d(x, x_0)$. Očito je $r_1 > 0$ te očito vrijedi $d(x, x_0) + r_1 = r$. Tvrdimo da je

$$K(x, r_1) \subseteq K(x_0, r). \tag{1.1}$$

Neka je $y \in K(x, r_1)$. Pokažimo da je $y \in K(x_0, r)$. Znamo da je $d(y, x) < r_1$. Koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r_1 + d(x, x_0) = r,$$

dakle $d(y, x_0) < r$ tj. $y \in K(x_0, r)$. Time smo dokazali da vrijedi (1.1) . Prema tome $K(x_0, r)$ otvoren je skup u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 1.2.23. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki otvoren skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo $x_n \to a$. Uzmimo otvoren skup U u (X, d) takav da je $a \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r) \subseteq U \tag{1.2}$$

Budući da $(x_n) \to a$, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < r$, tj. $x_n \in K(a, r)$. Iz (1.2) slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Pretpostavimo sada da za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. Dokažimo da $x_n \to a$. Neka je $\epsilon > 0$. Po propoziciji 1.2.22 skup $K(a, \epsilon)$ je otvoren u (X, d), a očito je $a \in K(a, \epsilon)$. Prema pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in K(a, \epsilon)$ tj. $d(x_n, a) < \epsilon$. Prema tome $x_n \to a$. □

Propozicija 1.2.24. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X, te neka je $a \in X$. Tada je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ i svaki $N \in \mathbf{N}$ postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da $n \geq N$ i $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Neka je U otvoreni skup u (X, d) takav da je $a \in U$ te neka je $N \in \mathbf{N}$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(a, r) \subseteq U$. Budući da je a gomilište niza (x_n) postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < r$. Slijedi $x_n \in K(a, r)$ pa je $x_n \in U$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ i svaki $N \in \mathbf{N}$ postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$ i $x_n \in U$. Dokažimo da je a gomilište niza (x_n). Neka je $\epsilon > 0$ te $N \in \mathbf{N}$. Skup $K(a, \epsilon)$ je otvoren u (X, d) i očito sadrži a pa prema pretpostavci postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$ i $x_n \in K(a, \epsilon)$ tj. $d(x_n, a) < \epsilon$. Stoga je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). □

Definicija 1.2.25. *Neka je X skup te neka je (x_n) niz u X. Neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je skup A* ***gomilište*** *niza (x_n) ako za svaki $N \in \mathbf{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in A$.*

Primjer 1.2.26. Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran sa $x_n = (-1)^n$.
Neka je $A = \langle 0, 1 \rangle$. Tada A nije gomilište niza (x_n) jer ne postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $x_n \in A$.
Neka je $B = [0, 1]$. Tada je B gomilište niza (x_n) jer za svaki $N \in \mathbf{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in B$, naime dovoljno je uzeti paran broj n takav da je $n \geq N$.

Primjer 1.2.27. Neka je (x_n) niz u $\mathbf{R}$ definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$. Skup $\{0\}$ nije gomilište niza (x_n) jer ne postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $x_n \in \{0\}$.
Neka je $A = \langle 0, \frac{1}{5} \rangle$. Tada je A gomilište niza (x_n). Naime, ako je $N \in \mathbf{N}$ onda možemo uzeti $n = \max\{N, 6\}$ pa vrijedi $n \geq N$ i $x_n \in A$.

Neka je $B = [\frac{1}{2}, 1]$. Skup B nije gomilište niza (x_n) . Naime za $N = 3$ ne postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in B$. (Za svaki $n \geq N$ vrijedi $x_n = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{N} = \frac{1}{3}$).

Napomena 1.2.28. *Ako je (x_n) niz u skupu X te $A \subseteq X$ takav da je $x_n \in A$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, onda je očito A gomilište niza (x_n).*

Propozicija 1.2.29. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Tada je točka a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ vrijedi da je skup U gomilište niza (x_n).*

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Neka je U otvoreni skup u (X, d) takav da je $a \in U$. Neka je $N \in \mathbf{N}$. Prema propoziciji1.2.24 postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$. Prema tome skup U je gomilište niza (x_n).
Obratno, pretpostavimo da je za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ vrijedi da je skup U gomilište niza (x_n). Neka je U otvoreni skup u (X, d) takav da je $a \in U$ i neka je $N \in \mathbf{N}$. Budući da je skup U gomilište niza (x_n) postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$, $x_n \in U$. Iz propozicije 1.2.24 slijedi da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). □

Lema 1. Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$ te neka je c supremum skupa S. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $c - \epsilon < x$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Pretpostavimo da ne postoji $x \in S$ takav da je $c - \epsilon < x$. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq c - \epsilon$ što znači da je $c - \epsilon$ gornja međa skupa S, no to je nemoguće jer je c najmanja gornja međa skupa S. Dakle, postoji $x \in S$ takav da je $c - \epsilon < x$. □

Lema 2. Neka je (x_n) skup u nizu X, te neka su $A, B \subseteq X$ takvi da je A gomilište niza (x_n), a B nije gomilište niza (x_n). Tada je $A \setminus B$ gomilište niza (x_n).

Dokaz. Budući da B nije gomilište niza (x_n) postoji $N_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \geq N_0$ vrijedi $x_n \notin B$. Neka je $N \in \mathbf{N}$. Budući da je A gomilište niza (x_n), postoji $n \geq \max \left\{N, N_0\right\}$

takav da je $x_n \in A$. Vrijedi $n \geq N_0$ pa $x_n \notin B$. Slijedi $x_n \in A \setminus B$. Očito je $n \geq N$. Time smo dokazali da je $A \setminus B$ gomilište niza (x_n). $\square$

Teorem 1.2.30. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbf{R}$. *Neka je (x_n) omeđen niz u* $\mathbf{R}$. *Tada niz (x_n) ima gomilište u metričkom prostoru* $(\mathbf{R}, d)$.

Dokaz. Budući da je (x_n) omeđen niz postoje $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbf{N} \tag{1.3}$$

Neka je

$$S = \{z \in \mathbf{R} \mid [z, \infty\rangle \text{ je gomilište niza } (x_n)\}. \tag{1.4}$$

Neka je $z \in S$. Vidimo da je $z \leq b$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $b < z$. Budući da je $[\, z, \infty\rangle$ gomilište niza (x_n), postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $x_n \in [\, z, +\infty\rangle$. Slijedi $z \leq x_n$ pa je $b < x_n$, što je u kontradikciji s (1.3).
Dakle, $z < b$. Prema tome b je gornja međa skupa S. Budući da je S neprazan i odozgo omeđen postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je c supremum skupa S. Iz činjenice da je b gornja međa skupa S i definicije supremuma slijedi da je $c \leq b$. Nadalje $a \in S$ slijedi $a \leq c$. Prema tome $c \in [\, a, b]$. Tvrdimo da je c gomilište niza (x_n).

Dokažimo da je za svaki $\epsilon > 0$ skup $\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ gomilište niza (x_n). Ako to dokažemo onda smo gotovi, naime to će značiti da za svaki $\epsilon > 0$ i svaki $N \in \mathbf{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in \langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$, tj. $|x_n - c| < \epsilon$, odnosno $d(x_n, c) < \epsilon$.
Neka je $\epsilon > 0$. Prema lemi 1 postoji $z \in S$ takav da je $c - \epsilon < z$. Iz ovoga slijedi da je $[\, z, \infty\rangle \subseteq \langle c - \epsilon, \infty\rangle$, a skup $[\, z, \infty\rangle$ je gomilište niza (x_n).
Neka je $A = \langle c - \epsilon, \infty\rangle$, a $B = [c + \epsilon, \infty\rangle$. Budući da je c supremum skupa S te da je $c < c + \epsilon$ imamo da je $c + \epsilon \notin S$ .Stoga skup B nije gomilište niza (x_n). Znamo da je A gomilište niza (x_n) pa iz leme2 slijedi da je $A \setminus B$ gomilište niza (x_n) tj.$\langle c - \epsilon, c + \epsilon\rangle$ je gomilište niza (x_n).
Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Definicija 1.2.31. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S* ***omeđen skup*** *u (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Propozicija 1.2.32. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen skup u (X, d). Tada za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Dokaz. Budući da je S omeđen skup (X, d), postoje $x_1 \in X$ i $r_1 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_1, r_1)$. Neka je $x \in X$. Definirajmo $r = d(x, x_1) + r_1$. Očito je $r > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x_1, r_1) \subseteq K(x, r). \tag{1.5}$$

Neka je $y \in K(x_1, r_1)$. Tada je $d(x_1, y) < r_1$ pa koristeći nejednakost trokuta dobivamo:

$$d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y) < d(x, x_1) + r_1 = r.$$

Dakle $d(x, y) < r$ pa je $y \in K(x, r)$. Prema tome vrijedi (1.5) pa vrijedi $S \subseteq K(x, r)$. □

Korolar 1.2.33. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $S_1, \ldots, S_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S_1 \cup, \cdots \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x \in X$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ prema prethodnoj propoziciji postoji $r_i > 0$ takav da je $S_i \subseteq K(x, r_i)$. Neka je $r = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ očito vrijedi $r_i \leq r$ pa je $K(x, r_i) \subseteq K(x, r)$ iz čega slijedi $S_i \subseteq K(x, r)$. Dakle $S_1 \subseteq K(x, r), \ldots, S_n \subseteq K(x, r)$ pa je $S_1 \cup \cdots \cup S_n \subseteq K(x, r)$. Dakle, $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ je omeđen skup u (X, d). □

Propozicija 1.2.34. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$ te neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Tada je S odozgo i odozdo omeđen u $\mathbf{R}$ ako i samo ako je S omeđen u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen odozgo i odozdo. Tada postoje $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da je,

$$a \leq x \leq b, \forall x \in S. \tag{1.6}$$

Želimo dokazati da je S omeđen u $(\mathbf{R}, d)$. Možemo pretpostaviti da je $S \neq \emptyset$. Odaberimo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ takve da je $\alpha < a$ i $b < \beta$. Tada iz (1.6) slijedi $S \subseteq \langle \alpha, \beta \rangle$. No, $\langle \alpha, \beta \rangle$ je otvorena kugla u $(\mathbf{R}, d)$. Naime ako definiramo $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i $r = \frac{\beta-\alpha}{2}$, onda imamo da je $r > 0$ (jer $\alpha < \beta$) te da je $x_0 - r = \alpha$ i $x_0 + r = \beta$ pa je $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$ tj. $\langle \alpha, \beta \rangle = K(x_0, r)$, prema primjeru 1.2.19. Prema tome S je omeđen skup u $(\mathbf{R}, d)$.
Obratno, pretpostavimo da je S omeđen u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$. Tada postoje $x \in \mathbf{R}$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$ tj. $S \subseteq \langle x - r, x + r \rangle$. Iz ovoga je očito da je skup S omeđen odozgo i odozdo. □

1.3 Podnizovi

Definicija 1.3.1. *Za funkciju $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ kažemo da je strogo rastuća ako je $a(n) < a(n+1)$, za svaki $n \in \mathbf{N}$.*

Definicija 1.3.2. *Neka je (x_n) niz u skupu X, neka je $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija te neka je (y_n) niz u X definiran sa $y_n = x_{a(n)}$, $n \in \mathbf{N}$. Tada za niz (y_n) kažemo da je* ***podniz*** *niza (x_n).*

Primjer 1.3.3. Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbf{R}$ definirani sa $x_n = (-1)^n, y_n = 1$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada je (y_n) podniz niza (x_n) jer $y_n = x_{2n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$, a funkcija $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto 2n$ je strogo rastuća.

Lema 3. Neka je $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija. Tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $n \leq a(n)$.

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom. Očito je $1 \leq a(1)$. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $n \leq a(n)$. Iz $a(n) < a(n+1)$ slijedi $n < a(n+1)$ pa je $n + 1 \leq a(n+1)$. Time smo dokazali da je $n \leq a(n)$, za sve $n \in \mathbf{N}$. □

Lema 4. Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X te neka je $b \in X$ takav da je

$$d(x_n, b) < \frac{1}{n} \tag{1.7}$$

za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada $x_n \to b$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Neka je $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$. Tada je $n > \frac{1}{\epsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$ što zajedno sa (1.7) povlači da je $d(x_n, b) < \epsilon$. Dakle, za sve $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, b) < \epsilon$. Time smo dokazali da $x_n \to b$. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $b \in X$. Tada je b gomilište niza (x_n) u (X, d) ako i samo ako postoji podniz niza (x_n) koji teži prema b u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je b gomilište niza (x_i). Definirajmo funkciju $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ induktivno na sljedeći način. Budući da je b gomilište niza (x_n) postoji $l \in \mathbf{N}$ takav da je $d(x_l, b) < 1$.

Definirajmo $a(1) = l$, dakle

$$d(x_{a(1)}, b) < 1 \tag{1.8}$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbf{N}$ te da smo definirali broj $a(n)$. Neka je $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ te $N = a(n) + 1$. Budući da je b gomilište niza (x_i) postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da je $k \geq N$ i

$$d(x_k, b) < \epsilon. \tag{1.9}$$

Definirajmo $a(n + 1) = k$. Prema (1.9) vrijedi

$$d(x_{a(n+1)}, b) < \frac{1}{n+1} \tag{1.10}$$

Nadalje zbog $k \geq N$ imamo $a(n + 1) \geq a(n) + 1$, pa je

$$a(n) < a(n + 1) \tag{1.11}$$

Na ovaj način smo definirali funkciju $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ koja je zbog (1.11) očito strogo rastuća. Nadalje, iz (1.10) i (1.8) slijedi da je $d(x_{a(n)}, b) < \frac{1}{n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Neka je (y_n) niz definiran sa $y_n = x_{a(n)}$. Očito je (y_n) podniz od (x_n). Za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $d(y_n, b) < \frac{1}{n}$, pa iz leme 4 slijedi $y_n \to b$. Dakle, postoji podniz niza (x_n) koji teži ka b.

Pretpostavimo sada da postoji podniz (y_n) niza (x_n) koji teži prema b. Dakle, postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y_n = x_{a(n)}, \forall n \in \mathbf{N}$. Neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbf{N}$. Budući da $y_n \to b$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je za svaki $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $d(y_n, b) < \epsilon$, tj. $d(x_{a(n)}, b) < \epsilon$. Neka je $n = \max\{N, n_0\}$. Tada je $d(x_{a(n)}, b) < \epsilon$. Vrijedi $n \leq a(n)$, a znamo $n \geq N$ pa je $a(n) \geq N$. Neka je $m = a(n)$. Dakle, $m \geq N$, $d(x_m, b) < \epsilon$. Zaključujemo da je b gomilište niza (x_n). □

Definicija 1.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je niz (x_n)* ***konvergentan*** *u metričkom prostoru (X, d) ako postoji $b \in X$ takav da $x_n \to b$.*

Korolar 1.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, te (x_n) niz u X. Tada (x_n) ima gomilište ako i samo ako ima konvergentan podniz.*

Korolar 1.3.7. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$ te neka je (x_n) omeđen niz u $\mathbf{R}$. Tada (x_n) ima podniz konvergentan u $(\mathbf{R}, d)$.*

Dokaz. Iz Teorema 1.2.30 slijedi da (x_n) ima gomilište u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, d)$, pa iz zadnjeg korolara slijedi da (x_n) ima konvergentan podniz. □

Definicija 1.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n)* ***omeđen niz*** *u metričkom prostoru (X, d) ako je skup $\left\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen u metričkom prostoru (X, d).*

Definicija 1.3.9. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je (x_i) niz u $\mathbf{R}^n$. Za svaki $i \in \mathbf{N}$ postoje i jedinstveno su određeni brojevi $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n \in \mathbf{R}$ takvi da je $x_i = \left(x_i^1, \ldots, x_i^n\right)$. Za nizove realnih brojeva $(x_i^1)_{i \in \mathbf{N}}, \ldots, (x_i^n)_{i \in \mathbf{N}}$ kažemo da su* ***komponentni nizovi*** *niza (x_i).*

Lema 5. Neka je $S \subseteq \mathbf{R}$. Tada je S omeđen odozgo i odozdo u $\mathbf{R}$ ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da je $|x| \leq M$, za svaki $x \in S$.

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $S = \emptyset$. Uzmimo stoga da je $S \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je S omeđen u $\mathbf{R}$. Tada postoje $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da je $a \leq x \leq b$, za sve $x \in S$. Iz ovoga slijedi da je $-x \leq -a$, za sve $x \in S$. Neka je $M = \max\left\{b, -a\right\} + 1$. Tada je $-x < M$, $x < M$, za sve $x \in S$. Stoga je $|x| < M$,za sve $x \in S$. Iz ovoga je očito da je $M > 0$.
Obratno, pretpostavimo da postoji $M > 0$ takav da je $|x| \leq M$, za sve $x \in S$. Tada je $-M \leq x \leq M$, za sve $x \in S$, iz čega slijedi da je S omeđen odozgo i odozdo. □

Propozicija 1.3.10. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Neka je p euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Neka je (x_i) niz na $\mathbf{R}^n$ te neka su $(x_i^1), \ldots (x_i^n)$ komponentni nizovi od (x_i).*
1. Niz (x_i) je omeđen u metričkom prostoru $(\mathbf{R}_n, d)$ ako i samo ako su njegovi komponentni nizovi omeđeni u $\mathbf{R}$.
2. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Tada niz (x_i) teži prema $(a_1, \ldots, a_n)$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}_n, d)$ ako i samo ako u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, p)$ vrijedi $x_i^1 \to a_1, \ldots, x_i^n \to a_n$.
Posebno niz (x_i) je konvergentan u $(\mathbf{R}^n, d)$ ako i samo ako su njegovi komponentni nizovi konvergentni u $(\mathbf{R}, p)$.

1. Pretpostavimo da je niz (x_i) omeđen u metričkom prostoru $(\mathbf{R}_n, d)$. Tada je skup $\left\{x_i \mid i \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen u $(\mathbf{R}_n, d)$. Prema propoziciji 1.2.32 postoji $r > 0$ takav da je $\left\{x_i | i \in \mathbf{N}\right\}$ $\subseteq K\big((0 \ldots, 0), r\big)$. Neka je $i \in \mathbf{N}$. Tada je $x_i \in K\big((0, \ldots, 0), r\big)$, pa je $d\big(x_i, (0, \ldots, 0)\big) < r$, tj.

$$d\Big((x_i^1, \ldots, x_i^n), (0, \ldots, 0)\Big) < r.$$

Slijedi

$$\sqrt{(x_i^1)^2 + \ldots, (x_i^n)^2} < r$$

pa je

$$(x_i^1)^2 + \ldots + (x_i^n)^2 < r^2. \tag{1.12}$$

Dakle, (1.12) vrijedi za svaki $i \in \mathbf{N}$. Neka je $j \in \left\{i, \dots, n\right\}$. Iz (1.12) zaključujemo da je $(x_i^j)^2 < r^2$ pa je $|x_i^j| < r$, tj. $x_i^j \in \langle -r, r\rangle$, za sve $i \in \mathbf{N}$. To znači da je skup $\left\{x_i^j \mid i \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen u $\mathbf{R}$. Prema tome niz $(x_i^j)_{i\in\mathbf{N}}$ je omeđen u $\mathbf{R}$. Dakle komponentni nizovi od (x_i) su omeđeni u $\mathbf{R}$.

Obratno, pretpostavimo da su komponentni nizovi od (x_i) omeđeni u $\mathbf{R}$. Neka je $j \in \left\{1, \dots, n\right\}$. Niz $(x_i^j)_{i\in\mathbf{N}}$ je omeđen u $\mathbf{R}$, pa je skup $\left\{x_i^j \mid i \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen u $\mathbf{R}$. Prema lemi (5) postoji $M_j > 0$ takav da je $|y| \leq M_j$, za sve $y \in \left\{x_i^j \mid i \in \mathbf{N}\right\}$. Dakle, $|x_i^j| \leq M_j$, za sve $j \in \left\{1, \dots, n\right\}$,za sve $i \in \mathbf{N}$. Neka je $a = (0, \dots, 0)$. Neka je $i \in \mathbf{N}$. Imamo $x_i = \left(x_i^1, \dots, x_i^n\right)$ pa je

$$d(x_i, a) = \sqrt{(x_i^1)^2 + \dots, (x_i^n)^2} \leq \sqrt{M^2 + \dots + M^2} =$$

$$= \sqrt{nM^2} = M\sqrt{n} < M\sqrt{n} + 1.$$

Neka je $r = M\sqrt{n} + 1$. Dokazali smo da je $d(x_i, a) < r$, za sve $i \in \mathbf{N}$ tj. $x_i \in K(a, r)$,za sve $i \in \mathbf{N}$. Prema tome $\left\{x_i \mid i \in \mathbf{N}\right\} \subseteq K(a, r)$. Zaključujemo da $\left\{x_i \mid i \in \mathbf{N}\right\}$ omeđen skup u $(\mathbf{R}^n, d)$, stoga je i niz (x_i) omeđen u $(\mathbf{R}^n, d)$.

Pretpostavimo da (x_i) teži prema $(a_1, \dots, a_n)$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^n, d)$. Neka je $j \in 1, \dots, n$. Dokažimo da $(x_i^j)_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema a_j u $(\mathbf{R}, p)$. Neka je $\epsilon > 0$. Budući da $x_i \to (a_1, \dots, a_n)$ postoji $i_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $i \geq i_0$ vrijedi $d\Big(x_i, (a_1, \dots, a_n)\Big) < \epsilon$. Neka je $i \geq i_0$. Imamo

$$\sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + \dots, +(x_i^n - a_n)^2} < \epsilon,$$

pa je

$$(x_i^1 - a_1)^2 + \dots, +(x_i^n - a_n)^2 < \epsilon^2.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $(x_i^j - a_j)^2 < \epsilon^2$ pa je $|x_i^j - a_j| < \epsilon$.

Dakle, $p(x_i^j, a_j) < \epsilon$, za sve $i \geq i_0$. Time smo dokazali da $x_i^j \to a_j$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, p)$.

Pretpostavimo da $x_i^j \to a_j$, za sve $j \in \{1, \dots, n\}$. Želimo dokazati da $x_i \to (a_1, \dots, a_n)$.

Neka je $\epsilon > 0$. Za svaki $j \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $x_i^j \to a_j$ pa postoji $i_j \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $i \geq i_j$ vrijedi $|x_i^j - a_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Dakle,

$$|x_i^1 - a_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \forall i \geq i_1, \dots, |x_i^n - a_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \forall i \geq i_n. \tag{1.13}$$

Neka je $i_0 = \max\{i_1, \dots, i_n\}$. Tada za svaki $i \geq i_0$ vrijedi

$$|x_i^1 - a_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |x_i^n - a_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

pa za svaki $i \geq i_0$ vrijedi

$$d\Big(x_i, (a_1, \dots, a_n)\Big) = \sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + \dots, +(x_i^n - a_n)^2} < \sqrt{n \cdot (\frac{\epsilon}{\sqrt{n}})^2} = \epsilon.$$

Dakle, $d\Big(x_i, (a_1, \dots, a_n)\Big) < \epsilon$, za sve $i \geq i_0$. Time smo dokazali da $x_i \to (a_1, \dots, a_n)$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^n, d)$.

Lema 6. Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X.

1) Neka je $b \in X$ takav da $x_n \to b$. Neka je (y_n) podniz od (x_n). Tada $(y_n) \to b$. Posebno, svaki podniz konvergentnog niza je konvergentan.

2) Ako je (x_n) omeđen niz u (X, d) onda je svaki podniz niza (x_n) omeđen u (X, d).

Dokaz. 1. Budući da je (y_n) podniz od (x_n) postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y_n = x_{a(n)}$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, b) < \epsilon$. Neka je $n \geq n_0$. Prema lemi 3 vrijedi $a(n) \geq n$ pa je $a(n) \geq n_0$. Stoga je $d\Big(x_{a(n)}, b\Big) < \epsilon$, tj. $d(y_n, b) < \epsilon$. Dakle $d(y_n, b) < \epsilon$, za sve $n \geq n_0$. Time smo dokazali $y_n \to b$.

2. Pretpostavimo da je (x_n) omeđen niz u (X, d) te da je (y_n) podniz od (x_n). Tada je $y_n = x_{a(n)}$, za sve $n \in \mathbf{N}$, gdje je $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija.

Budući da je (x_n) omeđen niz u (X, d), skup $\Big\{x_n | n \in \mathbf{N}\Big\}$ je omeđen u (X, d) pa postoje $z \in X$ i $r > 0$ takvi da je $\Big\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\Big\} \subseteq K(z, r)$. Imamo

$$\{y_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \Big\{x_{a(n)} \mid n \in \mathbf{N}\Big\} \subseteq \Big\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\Big\} \subseteq K(z, r).$$

Zaključujemo da je niz (Y_n) omeđen u (X, d). Time je lema dokazana. □

Lema 7. Neka su $a, c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuće funkcije. Tada je $a \circ c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija.

Dokaz. Iz činjenice da je $a(n) < a(n+1)$, za sve $n \in \mathbf{N}$ lako zaključujemo da je $a(n) < a(m)$, za sve $n, m \in \mathbf{N}$ takve da je $n < m$. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Tada je $c(n) < c(n+1)$ pa je $a(c(n)) < a(c(n+1))$, tj. $(a \circ c)(n) < (a \circ c)(n+1)$. Time je lema dokazana. □

Teorem 1.3.11. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d_n euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Tada svaki omeđen niz u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^n, d_n)$ ima podniz koji je konvergentan u $(\mathbf{R}^n, d_n)$.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po $n \in \mathbf{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi prema korolaru 1.3.7 i propoziciji 1.2.34. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$.

Neka je (x_i) omeđen niz u $(\mathbf{R}^{n+1}, d_{n+1})$. Neka su $(x_i^1)_{i \in \mathbf{N}}, \dots, (x^{n+1})_{i \in \mathbf{N}}$ komponentni nizovi od (x_n). Prema Propoziciji 1.3.10 nizovi $(x_i^1), \dots, (x_i^{n+1})$ su omeđeni u $\mathbf{R}$. Definirajmo niz (y_i) u $\mathbf{R}^n$ sa $y_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$, za sve $i \in \mathbf{N}$. Očito su $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$ komponentni nizovi od (y_i).

Prema propoziciji 1.3.10 niz (y_i) je omeđen u $(\mathbf{R}^n, d_n)$. Prema induktivnoj pretpostavci postoji podniz (z_i) niz (y_i) koji je konvergentan u $(\mathbf{R}^n, d_n)$. Neka je $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $z_i = y_{a(i)}$, za sve $i \in \mathbf{N}$. Dakle $z_i = \left(x_{a(i)}^1, \dots, x_{a(i)}^n\right)$, za sve $i \in \mathbf{N}$.

Stoga su $(x_{a(i)}^1), \dots, (x_{a(i)}^n)$ komponentni nizovi od (z_i). Budući da je niz (z_i) konvergentan u $(\mathbf{R}^n, d_n)$, postoji $p \in \mathbf{R}^n$ takav da $z_i \to p$ u $(\mathbf{R}^n, d_n)$. Imamo $p = (p_1, \dots, p_n)$, gdje su $p_1, \dots, p_n \in \mathbf{R}$. Iz propozicije 1.3.10 slijedi da

$$x_{a(i)} \to p_1, \dots, x_{a(i)} \to p_n \tag{1.14}$$

u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, p)$ gdje je p euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Niz $\left(x_{a(i)}^{n+1}\right)_{i \in \mathbf{N}}$ je podniz niza $(x^{n+1})_{i \in \mathbf{N}}$ koji je omeđen u $\mathbf{R}$, pa je prema lemi 6 $(x_{a(i)}^{n+1})$ omeđen u $\mathbf{R}$.

Prema korolaru 1.3.7 postoji podniz (v_i) niza $(X_{a(i)}^{n+1})$ koji je konvergentan u $(\mathbf{R}, p)$. Dakle, postoji $w \in \mathbf{R}$ takav da $v_i \to w$ u $(\mathbf{R}, p)$. Postoji strogo rastuća funkcija $c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $v_i = x^{n+1}_{a(c(i))}$, za sve $i \in \mathbf{N}$.

Dakle, $x^{n+1}_{a(c(i))} \to w$. Nizovi $(x^1_{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x^n_{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ su podnizovi od $(x^1_{a(i)}), \dots, (x^n_{a(i)})$ pa iz (1.14) i leme 6 slijedi da $x^1_{a(c(i))} \to p_1, \dots, x^n_{a(c(i))} \to p_n$.

Nizovi $(x^1_{a(c(i))}) \dots (x^{n+1}_{a(c(i))})$ su komponentni nizovi od $(x_{a(c(i))})$. Iz propozicije 1.3.10 slijedi $x_{a(c(i))} \to (p_1, \dots, p_n, w)$ u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^{n+1}, d_{n+1})$. Dakle, niz $(x_{a(c(i))})$, je konvergentan u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^{n+1}, d_{n+1})$.

Za svaki $i \in \mathbf{N}$ vrijedi $x_{a(c(i))} = x_{(a\circ c)(i)}$ pa je prema prethodnoj lemi $(x_{a(c(i))})$ podniz niza (x_i). Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Poglavlje 2

Izometrički ekvivalentni nizovi

2.1 Zatvoreni skupovi

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Kažemo da je F* ***zatvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako je $X \setminus F$ otvoren skup u (X, d).*

Neka je (X, d) metrički prostor. Skup X je **otvoren** u (X, d) jer za svaki $x \in X$ možemo odabrati bilo koji $r > 0$ i tada vrijedi $K(x, r) \subseteq X$. Prazan skup je trivijalno otvoren u (X, d). Iz ovoga slijedi da su $\emptyset$ i X zatvoreni skupovi u (X, d).

Primjer 2.1.2. Neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}$. Skup $\langle -\infty, 0]$ je zatvoren u $(\mathbf{R}, d)$ jer je $\mathbf{R} \setminus \langle -\infty, 0] = \langle 0, +\infty \rangle$, a $\langle 0, \infty \rangle$ je otvoren skup u $(\mathbf{R}, d)$ prema primjeru 1.2.21
Skup $\langle -\infty, 0 \rangle$ nije zatvoren u $(\mathbf{R}, d)$ jer skup $\mathbf{R} \setminus \langle -\infty, 0 \rangle = [0, +\infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbf{R}, d)$. (Prema primjeru 1.2.21).

Skup $[0, 1\rangle$ nije ni otvoren ni zatvoren u $(\mathbf{R}, d)$. Pretpostavimo da je taj skup otvoren. Imamo $0 \in [0, 1\rangle$ pa postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, 1\rangle$, tj. $\langle -r, r \rangle \subseteq [0, 1\rangle$ no to je očito nemoguće.

Pretpostavimo da je $[0, 1\rangle$ zatvoren u $(\mathbf{R}, d)$. Tada je $\mathbf{R} \setminus [0, 1\rangle = \langle -\infty, 0\rangle \cup [1, +\infty\rangle$ otvoren skup pa postoji $r > 0$ takav da je $K(1, r) \subseteq \langle -\infty, 0\rangle \cup [1, +\infty\rangle$, tj. $\langle 1 - r, 1 + r\rangle \subseteq \langle -\infty, 0\rangle \cup [1, +\infty\rangle$. Ovo je očito nemoguće.

Propozicija 2.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X, neka je $a \in X$ te neka je F zatvoren skup u (X, d). Pretpostavimo da $x_n \to a$ te da je $x_n \in F$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada je $a \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $a \in X \setminus F$. Po propoziciji 1.2.23 postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$, $x_n \in X \setminus F$ što je u kontradikciji s $x_n \in F, \forall n \in \mathbf{N}$. Dakle, $a \in F$ □

Definicija 2.1.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***omeđen*** *ako je skup X omeđen u metričkom prostoru (X, d).*

Dakle, metrički prostor (X, d) je omeđen skup ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $X \subseteq K(x, r)$, a što vrijedi ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takav da je $X = K(x, r)$.

Primjer 2.1.5. Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Tada metrički prostor $(\mathbf{R}^n, d)$ nije omeđen.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x \in \mathbf{R}^n$ i $r > 0$ takvi da je $\mathbf{R}^n = K(x, r)$. Neka su $a, b \in \mathbf{R}^n$. Tada zbog $a, b \in K(x, r)$ imamo

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, r) < r + r = 2r.$$

Dakle, $d(a, b) < 2r$, za sve $a, b \in \mathbf{R}^n$.

Neka je $a = (0, \ldots, 0)$, $b = (3r, 0, \ldots, 0)$. Tada je

$$d(a, b) = \sqrt{(0 - 3r)^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 3r > 2r.$$

Kontradikcija. Zaključak je da $(\mathbf{R}^n, d)$ nije omeđen.

Propozicija 2.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$ skup koji ima sljedeće svojstvo: ako je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in F$, za sve $n \in \mathbf{N}$ te $a \in X$ takav da $x_n \to a$, onda je $a \in F$. Tada je F zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da F nije zatvoren. Tada $X \setminus F$ nije otvoren u (X, d). Stoga postoji $a \in X \setminus F$ takav da ne postoji $r > 0$ sa svojstvom da je $K(a, r) \subseteq X \setminus F$. Dakle, za svaki $r > 0$ vrijedi $K(a, r) \nsubseteq X \setminus F$. Stoga, za sve $r > 0$ vrijedi $K(a, r) \cap F \neq \emptyset$. Posebno, za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $K(a, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$, pa odaberemo neki $x_n \in K(a, \frac{1}{n}) \cap F$,za sve $n \in \mathbf{N}$.
Dakle, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$ pa iz leme 4 slijedi $x_n \to a$. Sada iz pretpostavke propozicije zaključujemo da je $a \in F$. Ovo je kontradikcija s činjenicom da je $a \in X \setminus F$. Prema tome F je zatvoren skup u (X, d). □

2.2 Kompaktni skupovi

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Za K kažemo da je **kompaktan skup** u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki niz (x_n) u X takav da je $x_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$ postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n).*

Propozicija 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X$. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako za svaki niz (x_n) u X takav da je $x_n \in K$,za sve $n \in \mathbf{N}$ postoje $b \in K$ i podniz (y_n) od (x_n) takvi da $y_n \to b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K kompaktan te da je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada postoji $b \in K$ takav da je b gomilište niza (x_n) . Po propoziciji 1.3.4 postoji podniz (y_n) od (x_n) takav da $y_n \to b$.
Obratno, pretpostavimo da za svaki niz (x_n) u X takav da je $x_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$ postoje $b \in K$ i podniz (y_n) od (x_n) takvi da $y_n \to b$. Iz propozicije 1.3.4 zaključujemo da je K kompaktan. □

Propozicija 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_n) omeđen niz u (X, d).*

Dokaz. Budući da je niz (x_n) konvergentan, postoji $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Odaberimo bilo koji $\epsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za sve $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \epsilon$ tj. $x_n \in K(a, \epsilon)$.

Prema tome $\{x_n | n \geq n_0\} \subseteq K(a, \epsilon)$, dakle $\{x_n | n \geq n_0\}$ je omeđen skup u (X, d). Vrijedi

$$\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_n | n \geq n_0\} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_{n_0}\} \cup \{x_n | n \geq n_0\}$$

pa iz korolara 1.2.33 slijedi da je $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ omeđen skup u (X, d). (Očito je svaki jednočlani podskup od X omeđen u (X, d).) Time je propozicija dokazana.

□

Propozicija 2.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da K nije omeđen. Odaberimo neki $b \in X$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $K \nsubseteq K(b, n)$ (jer K nije omeđen), pa postoji $x_n \in K$ takav da

$$x_n \notin K(b, n). \tag{2.1}$$

Na ovaj način smo dobili niz (x_n) koji zbog činjenice da je K kompaktan ima podniz (y_n) koji je konvergentan u (X, d).

Iz prethodne propozicije slijedi da je (y_n) omeđen u (X, d). Dakle, skup $\{y_n | n \in \mathbf{N}\}$ je omeđen u (X, d). Po propoziciji 1.2.32 postoji $r > 0$ takav da je $\{y_n | n \in \mathbf{N}\} \subseteq K(b, r)$ iz čega slijedi da je $d(y_n, b) < r$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Budući da je (y_n) podniz niza (x_n), postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y_n = x_{a_n}$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Stoga je $d(a_n, b) < r$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Odaberemo $k \in \mathbf{N}$ takav da je $r < k$. Prema lemi 3 vrijedi $k \leq a_k$. Stoga je $r < a_k$ pa slijedi $d(x_{a_n}, b) < a_k$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Posebno za $n = k$ dobivamo $d(x_{a_k}, b) < a_k$, što povlači da je $x_{a_k} \in K(b, a_k)$. S druge strane prema (2.1) (za $n = a_k$) vrijedi $x_{a_k} \notin K(b, a_k)$. Kontradikcija. Zaključak: K je omeđen u (X, d). □

Propozicija 2.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Dokazat ćemo da je K zatvoren koristeći propoziciju 2.1.6. Pretpostavimo da je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$ te da je $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Ako dokažemo da je $a \in K$ onda će iz navedene propozicije slijediti da je K zatvoren skup. Prema propoziciji 2.2.2 postoje podniz (y_n) od (x_n) i $b \in K$ takvi da $y_n \to b$. Iz leme 6 slijedi da $y_n \to a$. Po propoziciji 1.1.9 imamo $a = b$, stoga $a \in K$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Primjer 2.2.6. Neka je X beskonačan skup, te neka je d diskretna metrika na X. Odaberimo $x_0 \in X$. Tada je

$$K(x_0, 2) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < 2\} = X.$$

Posebno $X \subseteq K(x_0, 2)$ pa zaključujemo da je X omeđen skup u (X, d). Nadalje, X je zatvoren skup u (X, d).

Tvrdimo da skup X nije kompaktan u (X, d). Budući da je X beskonačan skup postoji injekcija $x : \mathbf{N} \to S$. Dakle $x = (x_n)$ je niz u S takav da je $x_n \neq x_m$, za sve $n, m \in \mathbf{N}, n \neq m$. Pretpostavimo da niz (x_n) ima gomilište u (X, d). Dakle postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza (x_n). Uzmimo $\epsilon = \frac{1}{2}$ i $N = 1$. Tada po definiciji gomilišta postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$ i $d(x_n, a) < \frac{1}{2}$. Slijedi $d(x_n, a) = 0$ tj. $x_n = a$. Uzmimo sada $N = n + 1$. Tada opet iz definicije gomilišta slijedi da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $m \geq n + 1$ i $d(x_m, a) < \frac{1}{2}$. Slijedi $x_m = a$. Dakle, $x_m = x_n$. No, ovo je nemoguće jer $m \neq n$ (jer je $m \geq n + 1 > n$). Dakle, niz (x_n) nema gomilišta u (X, d).
Zaključak: skup X nije kompaktan u (X, d). Prema tome zatvoren i omeđen skup u me-

tričkom prostoru ne mora biti kompaktan.

Teorem 2.2.7. *Neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Neka je K zatvoren i omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^n, d)$. Tada je K kompaktan skup u $(\mathbf{R}^n, d)$.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada je $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq K$. Budući da je K omeđen skup u $(\mathbf{R}^n, d)$ postoje $a \in X$ i $r > 0$ takvi da je $K \subseteq K(a, r)$. Slijedi $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq K(a, r)$, prema tome $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ je omeđen skup u $(\mathbf{R}^n, d)$. Dakle niz (x_n) je omeđen u $(\mathbf{R}^n, d)$. Prema teoremu 1.3.11 postoji podniz (y_n) niza (x_n) koji je konvergentan u $(\mathbf{R}^n, d)$. Dakle, postoji $b \in \mathbf{R}^n$ takav da $y_n \to b$ u $(\mathbf{R}^n, d)$. Očito je $y_n \in K$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Iz propozicije 2.1.3 slijedi da je $b \in K$. Iz propozicije 1.3.4 slijedi da je b gomilište niza (x_n). Time smo dokazali da je K kompaktan skup u $(\mathbf{R}^n, d)$. □

Definicija 2.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Definirajmo funkciju $p : Y \times Y \to \mathbf{R}$ sa $p(a, b) = d(a, b)$, za sve $a, b \in Y$.*
Tvrdimo da je p metrika na Y. Neka su $a, b \in Y$. Tada je $p(a, b) \geq 0$ jer je $p(a, b) = d(a, b)$ a $d(a, b) \geq 0$ jer je d metrika na X. Dakle, za p vrijedi prvo svojstvo iz definicije metrike. Analogno dobivamo da vrijede ostala svojstva iz definicije metrike.
Za (Y, p) kažemo da je ***potprostor*** *metričkog prostora (X, d).*

Lema 8. Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Neka je (x_n) niz u Y te neka je $a \in Y$. Tada je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (Y, p) ako i samo ako je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d).

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (Y, p). Neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbf{N}$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$ i $p(x_n, a) < \epsilon$. Po definiciji potprostora vrijedi $p(x_n, a) = d(x_n, a)$, stoga je $d(x_n, a) < \epsilon$. Time smo dokazali da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Obratno pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Neka su $\epsilon > 0$ i $N \in \mathbf{N}$. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n \geq N$ i $d(x_n, a) < \epsilon$. Dakle $p(x_n, a) < \epsilon$. Stoga je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (Y, p). □

Propozicija 2.2.9. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je (Y, p) kompaktan metrički prostor ako i samo ako je Y kompaktan skup u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da (Y, p) kompaktan. Neka je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in Y$, za sve $n \in \mathbf{N}$. Tada postoji $a \in Y$ takav da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (Y, p). Po prethodnoj lemi a je gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Time smo dokazali da je Y kompaktan skup u (X, d). Obratno pretpostavimo da je Y kompaktan skup u (X, d). Uzmimo niz (x_n) u Y. Tada postoji $a \in Y$ takav da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). Po prethodnoj lemi a je gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (Y, p). Dakle, (Y, p) je kompaktan metrički prostor. □

Definicija 2.2.10. *Neka je $n \in \mathbf{N}$, te neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$. Neka je S neprazan podskup od $\mathbf{R}^n$. Neka je $p : S \times S \to \mathbf{R}$ funkcija definirana sa $p(x, y) = d(x, y)$, za sve $x, y \in S$. Tada je (S, p) potprostor metričkog prostora $(\mathbf{R}^n, d)$. Za p kažemo da je euklidska metrika na S.*

Korolar 2.2.11. *Neka je $n \in \mathbf{N}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbf{R}^n$, te neka je K neprazan omeđen i zatvoren skup u metričkom prostoru $(\mathbf{R}^n, d)$. Neka je p euklidska metrika na K. Tada je (K, p) kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Prema teoremu 2.2.7 K je kompaktan skup u metričkom prostoru u $(\mathbf{R}^n, d)$. Budući da je (K, p) potprostor od $(\mathbf{R}^n, d)$ po propoziciji 1.3.7 (K, p) je kompaktan metrički prostor. □

Propozicija 2.2.12. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je $n \in \mathbf{N}$. Neka su $(x_i^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_n)_{i\in\mathbf{N}}$ nizovi u X. Tada postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da su nizovi $(x_{a(i)}^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_{a(i)}^n)_{i\in\mathbf{N}}$ konvergentni u (X, d).*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz definicije kompaktnog metričkog prostora, propozicije 1.3.4 i definicije podniza. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. Neka su $(x_i^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_i^{n+1})_{i\in\mathbf{N}}$ nizovi u X. Prema induktivnoj pretpostavci postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da su nizovi $(x_{a(i)}^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_{a(i)}^n)_{i\in\mathbf{N}}$ konvergentni. Promotrimo niz $(x_{a(i)}^{n+1})_{i\in\mathbf{N}}$. Budući da je (X, d) kompaktan metrički prostor ovaj niz ima konvergentan podniz, dakle postoji strogo rastuća funkcija $b : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je niz $(x_{a(b(i))}^{n+1})_{i\in\mathbf{N}}$ konvergentan. Neka je $j \in \{1, \dots, n\}$. Niz $(x_{a(b(i))}^j)_{i\in\mathbf{N}}$ je podniz konvergentnog niza $(x_{a(i)}^j)_{i\in\mathbf{N}}$ pa iz leme 6 slijedi da je konvergentan. Dakle, nizovi $(x_{a(b(i))}^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_{a(b(i))}^n)_{i\in\mathbf{N}}, (x_{a(b(i))}^{n+1})_{i\in\mathbf{N}}$ su konvergentni. Neka je $c = a \circ b$. Prema lemi 7 c je strogo rastuća funkcija. Imamo da su nizovi $(x_{c(i)}^1)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_{c(i)}^{n+1})_{i\in\mathbf{N}}$ konvergentni. Dakle tvrdnja vrijedi za $n + 1$. Time je propozicija dokazana. $\square$

2.3 Konačni nizovi

Definicija 2.3.1. *Neka je X skup, te $n \in \mathbf{N}$. Za funkciju $x : \{1, \dots, n\} \to X$ kažemo da je **konačan niz** u X duljine n.*

Ako je x konačan niz u X duljine n, onda za $i \in \{1, \dots, n\}$ umjesto $x(i)$ pišemo $x_{(i)}$, a čitav x označavamo i sa $x_1, \dots, x_n$ ili $(x_1, \dots, x_n)$.

Ako je X skup i $n \in \mathbf{N}$ onda sa $\mathcal{F}^n(X)$ označavamo skup svih konačnih nizova x u X duljine n.

Definicija 2.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $n \in \mathbf{N}$ te neka su $x, y \in \mathcal{F}^n(X)$. Kažemo da su x i y **izometrički ekvivalentni konačni nizovi** u (X, d) ako za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi da je $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$. U tom slučaju pišemo $x \backsim y$.*

Definicija 2.3.3. *Ako je (X, d) metrički prostor, onda za nizove (x_i) i (y_i) u X kažemo da su* ***izometrički ekvivalentni nizovi*** *u (X, d) ako za sve $i, j \in \mathbf{N}$ vrijedi $d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$. U tom slučaju pišemo $(x_i) \backsim (y_i)$.*

Lema 9. Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, b, a^{'}, b^{'} \in X$. Tada je

$$|d(a, b) - d(a^{'}, b^{'})| \leq d(a, a^{'}) + d(b, b^{'}). \tag{2.2}$$

Dokaz. Dokažimo da je

$$d(a, b) - d(a^{'}, b^{'}) \leq d(a, a^{'}) + d(b, b^{'}) \tag{2.3}$$

i

$$d(a^{'}, b^{'}) - d(a, b) \leq d(a, a^{'}) + d(b, b^{'}). \tag{2.4}$$

Iz ove dvije nejednakosti će slijediti (2.2) (naime ako su $x, y \in \mathbf{R}$ takvi da je $x \leq y$ i $-x \leq y$, onda je $|x| \leq y$). Vrijedi:

$$d(a, b) \leq d(a, a^{'}) + d(b, a^{'}) \leq d(a, a^{'}) + d(b, b^{'}) + d(b^{'}, a^{'}) \tag{2.5}$$

Dakle,

$$d(a, b) \leq d(a, a') + d(a^{'}, b') + d(b, b') \tag{2.6}$$

iz čega slijedi 2.3. Analogno dobiv,amo da vrijedi 2.4. □

Propozicija 2.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka su (x_n) i (y_n) nizovi u X te $a, b \in X$. Pretpostavimo da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Tada niz realnih brojeva $(d(x_n, y_n))$ teži prema $d(a, b)$ (u metričkom prostoru $(\mathbf{R}, p)$ gdje je p euklidska metrika na $\mathbf{R}$).*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoje $n_0, m_0 \in \mathbf{N}$ takvi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$ i da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi $d(y_n, b) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Neka je $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Neka je $n \geq k_0$. Koristeći lemu 9 dobivamo

$$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, $|d(x_n, y_n) - d(a, b)| < \epsilon$ za svaki $n \geq k_0$. Time je tvrdnja dokazana. □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $n \in \mathbf{N}$. Neka je $(x^i)_{i\in\mathbf{N}}$ niz u $\mathcal{F}^n(X)$ te neka je $a \in \mathcal{F}^n(X)$. Imamo $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_n)$, za sve $i \in \mathbf{N}$, gdje su $(x^i_1)_{i\in\mathbf{N}}, \ldots, (x^i_n)_{i\in\mathbf{N}}$ nizovi u X te $a = (a_1, \ldots, a_n)$ gdje su $a_1, \ldots, a_n \in X$. Kažemo da niz $(x^i)_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema a u $\mathcal{F}^n(X)$ s obzirom na metriku d i pišemo $x^i \to a$ ako za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $x^i_j \to a_j$ u metričkom prostoru (X, d).

Korolar 2.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su (x_n) i (y_n) nizovi u X. Neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $y_n \to b$. Pretpostavimo da je $d(x_n, y_n) = d(x_m, y_m)$ za sve $n, m \in \mathbf{N}$. Tada je $d(x_n, y_n) = d(a, b)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.3.4 vrijedi $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$. Neka je $n_0 \in \mathbf{N}$. Prema primjeru 1.1.8 vrijedi $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$. Po propoziciji 1.1.9 vrijedi $d(x_0, y_0) = d(a, b)$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $n \in \mathbf{N}$, neka je (x^i) niz u $\mathcal{F}^n(X)$ te neka je $a \in \mathcal{F}^n(X)$. Pretpostavimo da $x^i \to a$ te da je $x^i \backsim x^l$ za sve $i, l \in \mathbf{N}$. Tada je $x^i \sim a$, za sve $i \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Neka su $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.Tada po pretpostavci $(x^i_j)_{i\in\mathbf{N}} \to a_j$ i $(x^i_k)_{i\in\mathbf{N}} \to a_k$. Također po pretpostavci $d(x^i_j, y^i_k) = d(x^l_j, y^l_k)$, za sve $i, l \in \mathbf{N}$. Prema korolaru 2.3.5 $d(x^i_j, y^i_k) = d(a_j, a_k)$, za sve $i \in \mathbf{N}$. Zaključujemo da $x^i \sim a$, za sve $i \in \mathbf{N}$. □

Teorem 2.3.7. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Ako je $n \in \mathbf{N}$ te ako je (x^i) niz u $\mathcal{F}^n(X)$, tada postoje podniz (y^i) niza (x^i) i $b \in \mathcal{F}^n(X)$ takvi da $y^i \to b$.*

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n. Dokažimo prvo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Neka je (x^i) niz u $\mathcal{F}^1(X)$. Imamo $x^i = (x^i_1)$ za sve $i \in \mathbf{N}$ gdje je $(x^i_1)_{i\in\mathbf{N}}$ niz u X. Prema propoziciji 2.2.2 postoji podniz niza $(x^i_1)_{i\in\mathbf{N}}$ koji je konvergentan u (X, d). Dakle, postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $(x^{a(i)}_1)_{i\in\mathbf{N}}$ konvergentan. Stoga postoji $b_1 \in X$ takav da niz $(x^{a(i)}_1)_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema b_1. Neka je $b \in \mathcal{F}^1(X)$ element definiran sa $b = (b_1)$. Za svaki $i \in \mathbf{N}$ vrijedi $x^{a(i)} = (x_1^{a(i)})$ pa zaključujemo da niz $(x_1^{a(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema b u $\mathcal{F}^1(X)$. Očito je $(x^{a(i)})$ podniz niza (x^i). Time smo dokazali da tvrdnja teorema vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za neki $n \in \mathbf{N}$. Dokažimo da vrijedi za $n+1$. Neka je (x^i) niz u $\mathcal{F}^{n+1}(X)$. Imamo $x^i = (x_1^i, \dots, x_{n+1}^i)$ za sve $i \in \mathbf{N}$, gdje su $(x_1^i)_{i\in\mathbf{N}}, \dots, (x_{n+1}^i)_{i\in\mathbf{N}}$ nizovi u X. Neka je (z^i) niz u $\mathcal{F}^n(X)$, definiran sa $z^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ za sve $i \in \mathbf{N}$. Prema induktivnoj pretpostavci postoje podniz (y^i) od (z^i) i $b \in F^n(x)$ takvi da je $y^i \to b$. Imamo $b = (b_1, \dots, b_n)$. Nadalje postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $y^i = z^{a(i)}$, za sve $i \in \mathbf{N}$. Stoga je $y^i = (x_1^{a(i)}, \dots, x_n^{a(i)})$ za sve $i \in \mathbf{N}$. Iz $y^i \to b$ slijedi $x_1^{a(i)} \to b_1, \dots, x_n^{a(i)} \to b_n$. Promotrimo niz $(x_{n+1}^{a(i)})_{i\in\mathbf{N}}$. Budući da je (X, d) kompaktan, ovaj niz ima konvergentan podniz. Postoje podniz (w^i) od $(x_{n+1}^{a(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ i $b_{n+1} \in \mathbf{N}$ takvi da $w^i \to b_{n+1}$. Nadalje postoji strogo rastuća funkcija $c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $w^i = x_{n+1}^{a(c(i))}$, za sve $i \in \mathbf{N}$. Dakle, niz $(x_{n+1}^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema b_{n+1}. Neka je $j \in \{1, \dots, n\}$. Znamo da niz $(x_j^{a(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema b_j. Očito je $(x_j^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ podniz niza $(x_j^{a(i)})_{i\in\mathbf{N}}$. Iz leme 6 slijedi da niz $(x_j^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema b_j. Dakle, $x_1^{a(c(i))} \to b_1, \dots, x_{n+1}^{a(c(i))} \to b_{n+1}$ pa iz činjenice da je $x^{a(c(i))} = (x_1^{a(c(i))}, \dots, x_{n+1}^{a(c(i))})$ za sve $i \in \mathbf{N}$ zaključujemo da niz $(x^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ teži prema $(b_1, \dots, b_{n+1})$. No, $(x^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}} = (x^{(a\circ c)(i)})_{i\in\mathbf{N}}$, a $a \circ c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je strogo rastuća funkcija prema lemi 7 pa je $(x^{a(c(i))})_{i\in\mathbf{N}}$ podniz niza (x^i). Time smo dokazali da tvrdnja teorema vrijedi za $n + 1$, pa je teorem dokazan. □

Neka je X skup, $p \in \mathbf{N}$ te neka je a konačan niz u X duljine p. Tada broj p označavamo sa $l(a)$.

Neka je X skup. Neka je $\mathcal{G}(X)$ skup svih nizova $(v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ u $\cup_{p=1}^{\infty}\mathcal{F}^p(X)$ takvih da je $l(v^k) < l(v^{k+1})$, za sve $k \in \mathbf{N}$.

Lema 10. Neka je X skup te neka je $v \in G(X), v = (v^k)_{k\in\mathbf{N}}$. Tada je svaki podniz od v također element od $\mathcal{G}(X)$.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Dokažimo indukcijom po $m > n$ da je

$$l(v^n) < l(v^m). \tag{2.7}$$

Za $m = n + 1$ (2.7) vrijedi jer je $v \in \mathcal{G}(X)$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m > n$. Dakle, $l(v^n) < l(v^m)$, a vrijedi i $l(v^m) < l(v^{m+1})$, jer je $v \in \mathcal{G}(X)$. Stoga je $l(v^n) < l(v^{m+1})$. Time smo dokazali da (2.7) vrijedi za svaki $m > n$. Neka je $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strogo rastuća funkcija. Tvrdimo da je $(v^{a(k)})_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}(X)$. Očito je $(v^{a(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ niz u $\cup_{p=1}^{\infty}\mathcal{F}^p(X)$. Neka je $k \in \mathbf{N}$. Tada je $a(k) < a(k+1)$ pa iz (2.7) slijedi da je $l(v^{a(k)}) < l(v^{a(k+1)})$. Zaključujemo da je $(v^{a(k)})_{k\in\mathbf{N}} \in \mathcal{G}(X)$. □

Ako je $(v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ niz u $\cup_{p=1}^{\infty}\mathcal{F}^p(X)$, tada za sve $i, k \in \mathbf{N}$ takve da je $i \leq l(v^k)$, sa v_i^k označavamo $(v^k)_i$.

Lema 11. Neka je X skup te neka je $v \in \mathcal{G}(X), v = (v^k)_{k\in\mathbf{N}}$. Tada za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $k \leq l(v^k)$.

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom. Za $k = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbf{N}$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $k + 1$. Znamo da je $l(v^k) < l(v^{k+1})$ a po pretpostavci je $k \leq l(v^k)$. Iz navedenog slijedi $k < l(v^{k+1})$ te s obzirom da je riječ o prirodnim brojevima vrijedi $k+1 \leq l(v^{k+1})$ čime je tvrdnja leme dokazana. □

2.4 h-konvergentni nizovi

Definicija 2.4.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $h \in \mathbf{N}$ te neka je $v \in \mathcal{G}(X)$, $v = (v^k)_{k\in\mathbf{N}}$. Za v kažemo da je* ***h-konvergentan*** *niz u (X, d) ako za svaki $h' \in \{1, \dots, h\}$ vrijedi da je niz $(v_{h'}^{h'+k})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergentan u (X, d).*

Uočimo da je prema navedenoj lemi, $h' \leq l(v^{h'+k})$.

Lema 12. Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $x_0 \in X$. Pretpostavimo da su $v \in \mathcal{G}(X)$, $v = (v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ i $l \in \mathbf{N}$ takvi da niz $(v_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$ teži prema x_0. Tada za svaki podniz $(w^k)_{k\in\mathbf{N}}$ od $(v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ vrijedi da niz $(w_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$ teži prema x_0.

Dokaz. Neka je $(w^k)_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v^k)_{k\in\mathbf{N}}$. Tvrdimo da je $(w_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$. Ako to dokažemo onda smo gotovi, jer će tvrdnja slijediti iz leme 6.

Budući da je $(w^k)_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v^k)_{k\in\mathbf{N}}$ postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je $w^k = v^{a(k)}$, za sve $k \in \mathbf{N}$. Stoga za sve $k \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$w_l^{k+l} = v_l^{a(k+l)}. \tag{2.8}$$

Definirajmo funkciju $b : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sa $b(k) = a(k+l)-l$. Za sve $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $l \leq a(l) < a(k+l)$, dakle $l < a(k+l)$ pa je $a(k+l) - l > 0$, tj. $a(a+l) - l \in \mathbf{N}$. Ovo znači da je funkcija b dobro definirana. Tvrdimo da je b strogo rastuća funkcija. Neka je $k \in \mathbf{N}$. S obzirom da je a strogo rastuća funkcija vrijedi: $a(k+l) < a((k+l)+1)$ pa slijedi $a(k+l)-l < a((k+l)+1)-l$ odnosno $a(k+l) - l < a(k+l+1) - l$ tj. $b(k) < b(k+1)$. Time smo dokazali da je b strogo rastuća funkcija. Vrijedi da je $(v_l^{b(k)+l})_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$. Prema definiciji funkcije b vrijedi $b(k) + l = a(k+l)$ za sve $k \in \mathbf{N}$. Stoga je $(v_l^{a(k+l)})_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$ pa je prema (2.8) $(w_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$ podniz od $(v_l^{k+l})_{k\in\mathbf{N}}$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $p \in \mathbf{N}$. Definirajmo funkciju $D : \mathcal{F}^p(X) \times \mathcal{F}^p(X) \to \mathbf{R}$ sa

$$D(x, y) = \max\{d(x_i, y_i) \mid i \in \{1, ..., p\}\}$$

za sve $x, y \in \mathcal{F}^p(X)$.

Tvrdimo da je D metrika na $\mathcal{F}^p(X)$.

1. Neka su $x, y \in \mathcal{F}^p(X)$. Za svaki $i \in \{1, ..., p\}$ vrijedi $d(x_i, y_i) \geq 0$. Iz toga je očito da je $D(x, y) \geq 0$.

2. Neka su $x, y \in \mathcal{F}^p(X)$. Pretpostavimo da je $x = y$. Tada za svaki $i \in \{1, ..., p\}$ vrijedi $x_i = y_i$ pa je $d(x_i, y_i) = 0$. Stoga je $D(x, y) = max\{0\} = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $D(x, y) = 0$. Tada je $\max\{d(x_i, y_i) \mid i \in \{1, ..., p\}\} = 0$, pa za svaki $i \in \{1, ..., p\}$ vrijedi $0 \leq d(x_i, y_i) \leq 0$, tj. $d(x_i, y_i) = 0$ pa je $x_i = y_i$. Stoga je $x = y$.

3. Neka su $x, y \in \mathcal{F}^p(X)$. Za svaki $i \in \{1, ..., p\}$ vrijedi $d(x_i, y_i) = d(y_i, x_i)$. Stoga je

$\{d(x_i, y_i) \mid i \in \{1, ..., p\}\} = \{d(y_i, x_i) \mid i \in \{1, ..., p\}\}$ pa je $D(x, y) = D(y, x)$.

4. Neka su $x, y \in \mathcal{F}^p(X)$. Neka je $i \in \{1, ..., p\}$. Tada je $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$. Iz definicije funkcije D jasno je da $d(x_i, z_i) \leq D(x, z)$ i $d(y_i, z_i) \leq D(y, z)$. Stoga je $d(x_i, y_i) \leq D(x, z) + D(y, z)$. Dakle, $d(x_i, y_i) \leq D(x, z) + D(y, z)$ za svaki $i \in \{1, ..., p\}$. Neka je $i \in \{1, ..., p\}$ takav da je $D(x, y) = d(x_i, y_i)$ (takav i prema definiciji funkcije D sigurno postoji). Slijedi $D(x, y) \leq D(x, z) + D(y, z)$.

Time smo dokazali da je D metrika na $\mathcal{F}^p(X)$.

Propozicija 2.4.2. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, te neka je $v \in \mathcal{G}(X)$, $v = (v^k)_{k\in\mathbf{N}}$. Pretpostavimo da je $l \in \mathbf{N}$ te da je v l-konvergentan u (X, d). Tada postoji podniz od v koji je (l+1)-konvergentan u (X, d).*

Dokaz. Promotrimo niz $(v_{l+1}^{k+(l+1)})_{k\in\mathbf{N}}$. To je niz u X, a metrički prostor (X, d) je kompaktan. Iz definicije kompaktnog metričkog prostora i propozicije 1.3.4 slijedi da niz $(v_{l+1}^{k+(l+1)})_{k\in\mathbf{N}}$ ima podniz koji je konvergentan u (X, d). Stoga postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da je niz $(v_{l+1}^{a(k)+l+1})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergentan. Neka je $b : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funkcija definirana sa $b(k) = a(k) + l + 1$, za svaki $k \in \mathbf{N}$. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $a(k) < a(k + 1)$ pa je $a(k) + l + 1 < a(k + 1) + l + 1$ tj. $b(k) < b(k + 1)$. Prema tome b je strogo rastuća funkcija. Neka je $w = (w^k)_{k\in\mathbf{N}}$ niz u $\cup_{p=1}^{\infty}\mathcal{F}^p(X)$ definiran sa $w^k = v^{b(k)}$, za sve $k \in \mathbf{N}$. Očito je w podniz od v. Nadalje iz leme 6 slijedi da je $w \in \mathcal{G}(X)$. Neka je $k \in \mathbf{N}$. Imamo

$$w_{l+1}^{k+l+1} = v_{l+1}^{b(k+l+1)} = v_{l+1}^{a(k+l+1)+l+1}, \tag{2.9}$$

dakle $w_{l+1}^{k+l+1} = v_{l+1}^{a(k+l+1)+l+1}$. Tvrdimo da je niz $\beta = (v_{l+1}^{a(k+l+1)+l+1})_{k\in\mathbf{N}}$ podniz niza $\alpha = (v_{l+1}^{a(k)+l+1})_{k\in\mathbf{N}}$. Neka je $c : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funkcija definirana sa $c(k) = k + l + 1$. Očito je c strogo rastuća funkcija. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\alpha_{c(k)} = v_{l+1}^{a(c(k))+l+1} = v_{l+1}^{a(k+l+1)+l+1} = \beta_k. \tag{2.10}$$

Dakle, $\beta_k = \alpha_{c(k)}$, za svaki $k \in \mathbf{N}$. Prema tome β je podniz od α. Dakle $(w_{l+1}^{k+l+1})_{k\in\mathbf{N}}$ je podniz od α, a za α znamo da je konvergentan u (X, d). Po lemi 10 niz $(w_{l+1}^{k+l+1})_{k\in\mathbf{N}}$ je konvergentan.

Neka je $l^{'} \in \{1, ..., l\}$. Niz $(v_{l'}^{l^{'}+k})_{k\in\mathbf{N}}$ je konvergentan u (X, d) jer je v l-konvergentan. Pa iz leme 12 slijedi da je niz $(w_{l'}^{l^{'}+k})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergentan. Time smo dokazali da je w (l+1)-konvergentan u (X, d).

$\square$

Bibliografija

1. C.O.Christenson, W.L.Voxman, *Aspects od topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

2. Z. Iljazović, *Isometries and Computability Structures*, Journal of Universal Computer Science, 16(18), 2569-2596, 2010.

3. W.A.Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press. 1975.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijeljen je na dva poglavlja. U prvom poglavlju se proučavaju konvergentni nizovi, gomilišta nizova i podnizovi nizova u metričkim prostorima. U drugom poglavlju proučavaju se zatvoreni i omeđeni skupovi u metričkim prostorima a naglasak je stavljen na proučavanje kompaktnih skupova. Nadalje, proučavaju se konačni nizovi, izometrički ekvivalentni nizovi te pojmovi s tim u vezi kao h-konvergentni nizovi.

Summary

This graduate thesis is divided into two chapters. In the first chapter, convergent sequences, accumulation points of sequences and subsequences of sequences in metric spaces are studied. In the second chapter, closed and bounded sets are studied in metric spaces and emphasis is placed on studying compact sets. Furthermore, the finite sequences, isometric equivalent sequences, and concepts related to *h*-convergence of sequences are studied.

Životopis

Moje ime je Karmen Župan. Rođena sam 22. srpnja 1990. u Zagrebu gdje sam završila osnovnu i srednju školu. Nakon završene srednje škole, upisala sam studij Matematike na PMF.