Stabilne razdiobe i primjene

Horvat, Magdalena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Magdalena Horvat

STABILNE RAZDIOBE I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **2**

1 Preliminarni rezultati **3**
1.1 Osnovni rezultati iz teorije vjerojatnosti 3

2 Uvod u teoriju stabilnih distribucija **13**
2.1 Konvolucije distribucija 13
2.2 Normalna distribucija. Svojstva stabilnosti 16
2.3 Definicija stabilne distribucije 19
2.4 Cauchyjeva distribucija 25
2.5 Levyjeva distribucija 26
2.6 Svojstva stabilnih distribucija 27
2.7 Stabilni zakoni kao granične distribucije 32

3 Karakteristične funkcije stabilnih slučajnih varijabli **35**
3.1 Karakteristične funkcije stabilnih slučajnih varijabli 35
3.2 Karakterizacija stabilnosti preko karakterističnih funkcija 37
3.3 Vjerojatnosti repova stabilnih distribucija. Momenti stabilnih distribucija . 42
3.4 Karakteristične funkcije simetričnih stabilnih slučajnih varijabli 47

4 Simulacija stabilnih slučajnih varijabli. Procjena parametara **51**
4.1 Metoda inverzne funkcije 51
4.2 Druga parametrizacija stabilne slučajne varijable pomoću karakteristične funkcije. Dodatna svojstva stabilnih slučajnih varijabli 54
4.3 Prikladnost stabilnih modela 56
4.4 Program STABLE 56

Bibliografija **61**

Uvod

Cilj ovog rada je upoznati čitatelja s definicijom, raznim karakterizacijama i svojstvima stabilnih slučajnih varijabli. Njihove distribucije su posebna klasa distribucija koja uključuje asimetrične distribucije i distribucije s teškim repovima. Jedna od mogućih definicija stabilnosti razdiobe je da pozitivne linearne kombinacije tako distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabli opet imaju istu razdiobu, samo reparametriziranu. Drugi način definiranja je kao limes po distribuciji normaliziranih suma nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Nadalje, stabilne slučajne varijable često se definiraju pomoću svoje karakteristične funkcije. Ove slučajne varijable često se koriste u raznim konkretnim primjenama — za definiciju stabilnih procesa u financijskoj matematici, kod koreliranih sistema u fizici čvrstog stanja, kod anomalnih difuzija u statističkoj fizici, staničnoj biologiji ili kaotičnim dinamičkim sistemima, itd. Na ovom mjestu valja napomenuti kako smo, zbog opsega teksta, ali i opsežnosti i kompleksnosti samih dokaza, neke karakterizacije morali ostaviti bez dokaza, ali smo u takvim slučajevima naveli reference na odgovarajuću literaturu.

Rad započinjemo Poglavljem 1, koje sadrži preliminarne rezultate, odnosno daje kratak pregled pojmova i rezultata iz teorije vjerojatnosti koji će nam pomoći u razumijevanju samog rada i rezultate na koje ćemo se referencirati u kasnijim poglavljima. Ukratko ćemo proći kroz osnovne pojmove kao što su vjerojatnost, slučajna varijabla i funkcija distribucije kako bismo mogli dati definiciju i svojstva matematičkog očekivanja, momenata, nezavisnosti, karakterističnih funkcija, beskonačno djeljivih distribucija, kao i iskazati Levyjev centralni granični teorem. Ti koncepti i rezultati će nam biti od koristi u definiranju i raznim karakterizacijama stabilnih slučajnih varijabli te u dokazivanju njihovih zanimljivih svojstava. Rezultati u ovom poglavlju većinom su preuzeti iz knjige N. Sarape [11] te, budući da se kroz studij Matematička statistika dotičemo tih rezultata, dokazi navedenih tvrdnji nisu navedeni u ovom radu.

U Poglavlju 2 dajemo uvod u teoriju stabilnih distribucija. Započinjemo uvođenjem pojmova konvolucije funkcija distribucije i konvolucije funkcija gustoće, koji su također preuzeti iz knjige N. Sarape [11]. Na primjeru zbrajanja dvije uniformne te dvije normalne slučajne varijable, prema ideji i definiciji iz knjige V. V. Uchaikina i V. M. Zolotareva [12], pokazat ćemo što znači da distribucije dvije slučajne varijable imaju isti oblik, uvest ćemo osnovnu definiciju stabilne slučajne varijable temeljenu na stabilnosti kao svojstvu te ćemo pokazati osnovna svojstva vezana uz normalnu slučajnu varijablu, kao primjer stabilne slučajne varijable s konačnom varijancom. Nakon toga uvodimo još jednu karakterizaciju stabilne slučajne varijable, također temeljenu na stabilnosti kao svojstvu, te uvodimo pojam indeksa stabilnosti. Pokazat ćemo, prema knjizi V. Zolotareva [13], da je za provjeru stabilnosti dovoljno provjeravati uvjet iz osnovne definicije stabilne slučajne varijable samo za $n = 2$ i $n = 3$. Također, pokazat ćemo da su i Cauchyjeva i Levyjeva slučajna varijabla stabilne slučajne varijable te da je svaka stabilna slučajna varijabla neprekidna. Na kraju ovog poglavlja uvodimo karakterizaciju stabilne distribucije koja proizlazi iz generaliziranog centralnog graničnog teorema i koja nam govori da su stabilne distribucije jedine distribucije koje se mogu dobiti kao limesi normaliziranih suma niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Uvodimo i pojam domene atrakcije funkcije distribucije te zaključujemo da distribucija ima domenu atrakcije ako i samo ako je ona stabilna distribucija.

Nadalje, u Poglavlju 3 najprije uvodimo karakterizaciju stabilne slučajne varijable temeljene na karakterističnoj funkciji. Ta parametrizacija je najčešće korištena u raznoj literaturi za dokaze različitih svojstava stabilnih slučajnih varijabli. Vidjet ćemo da su članovi familije stabilnih distribucija definirani pomoću četiri parametra, a to su indeks stabilnosti, parametar asimetrije, parametar pomaka i parametar skale. Ovdje ćemo, uz ideje i tvrdnje iz knjige G. Samorodnitskyja i M. S. Taqqua [10], pokazati još nekoliko osnovnih svojstava stabilnih distribucija koja će nam pomoći u interpretaciji navedenih parametara i njihovom utjecaju na stabilnu distribuciju. Nakon toga ćemo promatrati asimptotsko ponašanje vjerojatnosti repova, pri čemu koristimo tvrdnje iz knjige W. Fellera [2]. Na kraju ovog poglavlja posebno ćemo promotriti karakteristične funkcije simetričnih stabilnih slučajnih varijabli te ćemo pomoću Laplaceove transformacije, definirane kao u knjizi S. Kurepe [3], pokazati da je svaka simetrična stabilna slučajna varijabla uvjetno normalna slučajna varijabla.

Rad završavamo Poglavljem 4 u kojem ćemo ukratko pokazati simulaciju stabilnih slučajnih varijabli te procjenu njihovih parametara. Vidjet ćemo na koji način, prema knjizi V. V. Uchaikina i V. M. Zolotareva [12], metodom inverzne funkcije možemo simulirati Cauchyjevu, normalnu i Levyjevu slučajnu varijablu. Također, dat ćemo Zolotarevljevu integralnu reprezentaciju stabilne slučajne varijable, koju smo preuzeli iz knjige V. Zolotareva [13] i koja nas uvodi u generiranje simetričnih stabilnih slučajnih varijabli. Nakon toga ćemo dati još jednu karakerizaciju pomoću karakteristične funkcije, koja se uglavnom koristi u primjenama zbog svojeg boljeg numeričkog ponašanja. Na kraju poglavlja i samog rada, objasnit ćemo prikladnost stabilnih modela te ćemo na primjeru pokazati upotrebu Nolanovog programa STABLE opisanog u [6], [7], [8], [9], koji je rješavanjem mnogih dotadašnjih numeričkih poteškoća olakšao korištenje stabilnih distribucija u praktičnim primjenama.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

U ovom poglavlju navodimo pojmove i rezultate na koje ćemo se referirati u ostatku rada te pojmove i rezultate koji će nam pomoći u razumijevanju teme rada. Rezultati su preuzeti iz knjige N. Sarape [11], osim ako nije drugačije navedeno, te se u istoj knjizi nalaze i dokazi iskazanih tvrdnji.

1.1 Osnovni rezultati iz teorije vjerojatnosti

Vjerojatnosni prostor

Neka je Ω prostor elementarnih događaja. Dakle, Ω je proizvoljan neprazan skup. Sa $\mathcal{P}(\Omega)$ označimo partitivni skup od Ω. U daljnjem tekstu skupovna inkluzija $A \subset B$ uključuje i slučaj $A = B$.

Definicija 1.1.1. *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω, (tj. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) je* ***$\sigma$-algebra skupova*** *(na Ω) ako vrijedi $\emptyset \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ te $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se* ***izmjeriv prostor****.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je* ***vjerojatnost*** *(na $\mathcal{F}$, na Ω) ako vrijedi $P(A) \geqslant 0$ za $A \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$ te $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j \Rightarrow P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

Definicija 1.1.4. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra i P vjerojatnost na $\mathcal{F}$, zove se* ***vjerojatnosni prostor****.*

Vjerojatnosni prostor je osnovni objekt u teoriji vjerojatnosti.

Slučajne varijable

Neka je S proizvoljan neprazan skup i $\mathcal{A}$ familija podskupova od S, tj. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$. Sa $\sigma(\mathcal{A})$ označimo najmanju σ-algebru podskupova od S koja sadrži $\mathcal{A}$. Nju zovemo **σ-algebra generirana sa $\mathcal{A}$**. Neka su S_1 i S_2 proizvoljni skupovi i $h : S_1 \to S_2$. Za $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(S_2)$ stavimo $h^{-1}(\mathcal{A}_2) = \left\{ h^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}_2 \right\}$. Dakle, $h^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{P}(S_1)$.

Propozicija 1.1.5. *Neka su S_1 i S_2 proizvoljni skupovi i $h : S_1 \to S_2$.*

1. *Ako je $\mathcal{A}_2$ σ-algebra na S_2, tada je $h^{-1}(\mathcal{A}_2)$ σ-algebra na S_1.*
2. *Ako je $\mathcal{A}_1$ σ-algebra na S_1, tada je familija $\mathcal{A}_2 = \{E \subset S_2 : h^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1\}$ σ-algebra na S_2.*

Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. S $\mathcal{B}$ označimo σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ zovemo **σ-algebra Borelovih skupova na** $\mathbb{R}$, a elemente σ-algebre $\mathcal{B}$ zovemo **Borelovi skupovi**.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X realna funkcija na Ω. Ako je ishod pokusa reprezentiran točkom iz $\omega \in \Omega$, tada je tom ishodu pridružen realan broj $X(\omega)$. Vrlo često je važno znati vjerojatnosti da je $a < X(\omega) < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tj. da X padne u intervale (a,b), za bilo koje $a < b$. Prema tome, mi želimo izračunati

$$P\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\right\} = P\left\{X \in B\right\} = P\left(X^{-1}(B)\right),$$

gdje je $B = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Da bi to bilo moguće, mora biti $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki interval $B = (a,b)$. Budući da je svaki otvoren skup na $\mathbb{R}$ prebrojiva unija otvorenih intervala, lako je dokazati da vrijedi $\mathcal{B} = \sigma\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Odavde i iz propozicije 1.1.5 (2) slijedi da, ako je $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{F}$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, da je tada $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svako $B \in \mathcal{B}$. S tim u vezi imamo sljedeću definiciju.

Definicija 1.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je* ***slučajna varijabla*** *(na Ω) ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.*

Definicija 1.1.7. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. X je* ***jednostavna slučajna varijabla*** *ako je njezino područje vrijednosti konačan skup.*

X je jednostavna slučajna varijabla ako i samo ako vrijedi $X = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{1}_{A_k}$, gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi, a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ međusobno disjunktni događaji koji u uniji daju Ω.

Teorem 1.1.8. *Neka je X nenegativna slučajna varijabla na Ω. Tada postoji rastući niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih slučajnih varijabli takav da je $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ (na Ω).*

Funkcije distribucije

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na Ω.

Za $B \in \mathcal{B}$ stavimo

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = P\{X \in B\}. \tag{1.1}$$

Relacijom (1.1) definirana je funkcija $P_X : \mathcal{B} \to [0,1]$ koja je vjerojatnost, odnosno vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}$. P_X zovemo **vjerojatnosna mjera inducirana sa** X, a vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ zovemo **vjerojatnosni prostor induciran sa** X.

Definicija 1.1.9. *Neka je X slučajna varijabla na Ω.* ***Funkcija distribucije od*** *X jest funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \le x\} = P\{X \le x\}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Teorem 1.1.10. *Funkcija distribucije slučajne varijable X je rastuća te neprekidna zdesna na $\mathbb{R}$ i zadovoljava*

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1. \tag{1.3}$$

Definicija 1.1.11. *Funkciju $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ koja ima svojstva iz teorema 1.1.10 zovemo* ***vjerojatnosna funkcija distribucije*** *na $\mathbb{R}$ ili, kraće,* ***funkcija distribucije***.

Svaka vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ određuje jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na $\mathcal{B}$.

Teorem 1.1.12. *Neka je $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ vjerojatnosna funkcija distribucije. Tada postoji vjerojatnosna mjera $P = P_F$ na $\mathcal{B}$, koja je jednoznačno određena sa F pomoću relacije*

$$P_F((-\infty, x]) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Definicija 1.1.13. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je F_X njezina funkcija distribucije. Kažemo da je X* ***apsolutno neprekidna*** *ili, kraće,* ***neprekidna slučajna varijabla*** *ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija f na $\mathbb{R}$, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ takva da je*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Za funkciju distribucije F_X neprekidne slučajne varijable X, dakle za funkciju oblika (1.5) kažemo da je **apsolutno neprekidna funkcija distribucije**.

Ako je X neprekidna slučajna varijabla, tada se funkcija f iz (1.5) zove **funkcija gustoće vjerojatnosti od** X, tj. njezine funkcije distribucije F_X.

Ako je X neprekidna s gustoćom f i ako je P_X vjerojatnosna mjera inducirana sa X, tada vrijedi

$$P_X(B) = P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,d\lambda(x), \quad B \in \mathcal{B}. \tag{1.6}$$

Propozicija 1.1.14. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Da bi f bila funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable X, nužno je i dovoljno da vrijedi*

1. $f(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\lambda(x) = 1$.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X i gustoćom f, tj. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,d\lambda(y),\ y \in \mathbb{R}$. Tada je, prema knjizi R.B. Asha [1], F_X diferencijabilna u gotovo svakoj točki i vrijedi

$$F_X'(x) = f(x) \quad \lambda\text{-g.s. na } \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

tj. $F_X' = f$ na $\mathbb{R}$ osim na skupu Lebesgueove mjere nula.

Dvije slučajne varijable X i Y su **jednako distribuirane** ako je $P_X = P_Y$, odnosno, $F_X = F_Y$. Pišemo $X \overset{d}{=} Y$.

Matematičko očekivanje. Varijanca i momenti

Definicija matematičkog očekivanja provodi se u tri koraka. Prvo se definira matematičko očekivanje jednostavne slučajne varijable, zatim nenegativne slučajne varijable i na kraju opće slučajne varijable.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. S $\mathcal{K}$ označimo skup svih jednostavnih slučajnih varijabli definiranih na Ω, a s ∞_+ skup svih nenegativnih funkcija iz $\mathcal{K}$. Neka je $X \in \mathcal{K}$, $X = \sum_{k=1}^{n} x_k K_{A_k}$, gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni.

Definicija 1.1.15. ***Matematičko očekivanje od*** *X koje označavamo s $\mathrm{E}X$ definira se s*

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k). \tag{1.8}$$

Propozicija 1.1.16. *Neka su $X, Y \in \mathcal{K}$ i $X \leqslant Y$. Tada je $\mathrm{E}X \leqslant \mathrm{E}Y$.*

Neka je X nenegativna slučajna varijabla definirana na Ω. Prema teoremu (1.1.8) postoji rastući niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli takav da je $X = \lim_{n\to\infty} X_n$. Iz prethodne propozicije slijedi da je niz $(\mathrm{E}X_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz u $\mathbb{R}$, dakle postoji $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n$ (koji može biti jednak i $+\infty$).

Definicija 1.1.17. ***Matematičko očekivanje od*** *X koje označavamo s $\mathrm{E}X$ definira se s*

$$\mathrm{E}X = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n. \tag{1.9}$$

Neka je sada X proizvoljna slučajna varijabla na Ω. Vrijedi $X = X^+ + X^-$, X^+, X^- su slučajne varijable i $X^+, X^- \geqslant 0$.

Definicija 1.1.18. *Kažemo da* ***matematičko očekivanje od*** *X, koje označavamo sa $\mathrm{E}X$,* ***postoji*** *ako je barem jedna od veličina $\mathrm{E}X^+$ ili $\mathrm{E}X^-$ konačna.*

Granični teoremi za matematičko očekivanje

Definicija 1.1.19. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli na Ω* ***konvergira gotovo sigurno*** *prema funkciji $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (ili $\overline{\mathbb{R}}$) ako je $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$* ***za gotovo svaki*** *$\omega \in \Omega$, tj. ako je $P\left\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$.*

Skup svih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koje imaju konačno očekivanje označavamo sa $\mathcal{L}(P)$.

Teorem 1.1.20. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da je (g.s) $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ i neka je $|X_n| \leqslant Y$ (g.s.), za sve n, pri čemu je $Y \in \mathcal{L}(P)$. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n = \mathrm{E}X. \tag{1.10}$$

Računanje matematičkog očekivanja

Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, neka je P_X vjerojatnosna mjera inducirana sa X i neka je F_X funkcija distribucije od X.

Teorem 1.1.21. *Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$ vrijedi*

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)\, dP = \int_B g\, dP_X \tag{1.11}$$

u smislu da, ako jedan od integrala postoji, postoji i drugi i vrijednosti su im jednake.

Ako u (1.11) stavimo $B = \mathbb{R}$, dobivamo

$$\mathrm{E}\,[g(X)] = \int_\Omega g(X)\,dP = \int_\mathbb{R} = g\,dP_X = \int_\mathbb{R} g(x)\,dF_X(x).$$

Ako u prethodni izraz stavimo $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\mathrm{E}X = \int_\mathbb{R} x\,dP_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_X(x).$$

Neka je sada X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_X. Tada vrijedi

$$\mathrm{E}\,[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,d\lambda(x) \tag{1.12}$$

gdje je g proizvoljna Borelova funkcija, a λ Lebesgueova mjera.

Varijanca i momenti

Definicija 1.1.22. $\mathrm{E}(X^r)$ *zovemo* ***r-ti moment od** X, a* $\mathrm{E}(|X|^r)$ *zovemo* ***r-ti apsolutni moment od** X.*

Definicija 1.1.23. *Neka* $\mathrm{E}X$ *postoji. Tada* $\mathrm{E}\,[(X-\mathrm{E}X)^r]$ *zovemo* ***r-ti centralni moment od** X.*

Definicija 1.1.24. ***Varijanca od** X, u oznaci* $\mathrm{Var}X$*, je drugi centralni moment od X.*

Propozicija 1.1.25. *Neka je* $0 < r < \infty$ *i* $\mathrm{E}(|X|^r) < \infty$*. Tada je*

$$\lim_{x\to\infty} x^r\,P\{\,|X| \geqslant x\,\} = 0. \tag{1.13}$$

Propozicija 1.1.26. *Neka je X neprekidna i nenegativna slučajna varijabla. Neka je* $\mathrm{E}(X^r) < \infty$*,* $r > 0$*. Neka je F funkcija distribucije od X. Tada vrijedi*

$$\int_0^\infty r x^{r-1}(1 - F(x))\,dx = \mathrm{E}(X^r). \tag{1.14}$$

Nezavisnost slučajnih varijabli

Definicija 1.1.27. *Neka su* $X_1, \ldots, X_n$ *slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Kažemo da su* $X_1, \ldots, X_n$ ***nezavisne** ako za proizvoljne* $B_i \in \mathcal{B}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *vrijedi*

$$P\{\,X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\,\} = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\,\}\right) = \prod_{i=1}^n P\{X_i \in B_i\,\}. \tag{1.15}$$

Sljedeći teorem daje u općem slučaju karakterizaciju nezavisnosti pomoću funkcija distribucije.

Teorem 1.1.28. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Neka je dalje F_i funkcija distribucije od X_i za $i = 1, \ldots, n$ i F funkcija distribucije od X. Tada su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1)\, F_2(x_2) \ldots F_n(x_n) \tag{1.16}$$

za proizvoljno $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Nezavisnost se može okarakterizirati i pomoću gustoća, što se vidi iz sljedećeg teorema.

Teorem 1.1.29. *Ako slučajni vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ima gustoću f, tada svaka slučajna varijabla X_i ima gustoću f_i za $i = 1, \ldots, n$. Osim toga, u tom su slučaju $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) \tag{1.17}$$

za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ osim eventualno Borelovog podskupa od $\mathbb{R}^n$ Lebesgueove mjere nula.

Korolar 1.1.30. *Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i X_i ima gustoću f_i za $i = 1, \ldots, n$, tada $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ima gustoću danu sa*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

Teorem 1.1.31. *Neka je $(F_n,\ n \in \mathbb{N})$ proizvoljan niz funkcija distribucije. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i niz $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ nezavisnih slučajnih varijabli na Ω takav da je $F_{X_n} = F_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 1.1.32. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable. Ako su sve X_i nenegativne ili ako je $\mathrm{E}X_i$ konačno za sve $i = 1, \ldots, n$, tada postoji $\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$ i vrijedi*

$$\mathrm{E}\Big(\prod_{i=1}^n X_i\Big) = \prod_{i=1}^n \mathrm{E}X_i. \tag{1.19}$$

Teorem 1.1.33. *Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable čije varijance postoje, tada postoji i varijanca od $\sum_{i=1}^n X_i$ i vrijedi*

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}X_i. \tag{1.20}$$

Karakteristične funkcije

Definicija 1.1.34. *Neka je F ograničena (poopćena) funkcija distribucije na $\mathbb{R}$, normirana u smislu da ima limes 0 u $-\infty$. **Karakteristična funkcija** od F jest funkcija φ definirana sa*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin tx\, dF(x), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Za svako $t \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto e^{itx}$ je neprekidna i budući da je $|e^{itx}| = 1$, φ je dobro definirana, tj. imamo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definicija 1.1.35. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X. **Karakteristična funkcija** φ_X od X je karakteristična funkcija od F_X.*

Ako je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_X, prema (1.12) slijedi

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Propozicija 1.1.36. *Karakteristična funkcija φ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$ i za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = F(\infty)$.*

Teorem 1.1.37.

1. *Ako je X slučajna varijabla i $a, b \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. *Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, tada vrijedi*

$$\varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Iz navedenih rezultata slijedi $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, za sve t, dakle $\overline{\varphi_X}$ je karakteristična funkcija od $-X$.

Između funkcija distribucije i karakterističnih funkcija postoji bijektivna korespondencija, što nam pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 1.1.38. ***Teorem jedinstvenosti.*** *Neka su F_1 i F_2 funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ i neka one imaju istu karakterističnu funkciju, tj. ako za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_2(x), \tag{1.23}$$

tada mora biti $F_1 = F_2$.

Sljedeći teorem pokazuje kako se funkcija distribucije, odnosno u specijalnom slučaju funkcija gustoće, mogu eksplicitno prikazati pomoću svoje karakteristične funkcije.

Teorem 1.1.39. ***Teorem inverzije.***

1. *Ako je φ karakteristična funkcija od F i ako su a, b proizvoljne točke neprekidnosti od F takve da je $a < b$, tada vrijedi*

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_T^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi(t)\, dt. \tag{1.24}$$

2. *Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty$, tada funkcija distribucije F ima gustoću f, tj. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$ za sve x i vrijedi*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

   Osim toga, f je neprekidna i ograničena funkcija.

Iz formule inverzije (1.24) slijedi tvrdnja teorema jedinstvenosti. Zato ćemo se najčešće pozivati na teorem inverzije u situacijama kad nam zapravo treba točna tvrdnja teorema jedinstvenosti.

X je simetrična slučajna varijabla ako i samo ako je φ_X realna funkcija.

Centralni granični problem

Najprije se prisjetimo definicije konvergencije po distribuciji.

Definicija 1.1.40. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučajnoj varijabli X ako je $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, $x \in C(F_X)$. To označavamo sa $X_n \xrightarrow{d} X$, $(n \to \infty)$.*

U prethodnoj definiciji F_X je funkcija distribucije od X, a $C(F_X)$ je skup svih točaka neprekidnosti od F_X.

Teorem 1.1.41. ***Levyjev centralni granični teorem.*** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$ i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

$$\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty. \tag{1.26}$$

Beskonačno djeljive distribucije

Definicija 1.1.42. *Karakteristična funkcija φ je* ***beskonačno djeljiva*** *ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji karakteristična funkcija φ_n takva da je $\varphi = \varphi_n^n$.*

Definicija 1.1.43. *Funkcija distribucije F je* ***beskonačno djeljiva*** *ako je njezina karakteristična funkcija beskonačno djeljiva.*

Nakon što u idućem odjeljku definiramo konvoluciju funkcija distribucije, primijetit ćemo da je svojstvo beskonačne djeljivosti ekvivalentno tome da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji funkcija distribucije F_n takva da je $F = F_n * F_n * \cdots * F_n$ (n puta). Funkcija F_n je jednoznačno određena s F.

Definicija 1.1.44. *Slučajna varijabla X je* ***beskonačno djeljiva*** *ako je njezina karakteristična funkcija φ_X (odnosno funkcija distribucije F_X) beskonačno djeljiva.*

To je ekvivalentno tome da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ takve da je $X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Propozicija 1.1.45. *Beskonačno djeljiva karakteristična funkcija nigdje ne iščezava.*

Dokaz. Neka je φ beskonačno djeljiva i neka je za svako $n \in \mathbb{N}$ $\varphi = \varphi_n^n$, pri čemu je φ_n karakteristična funkcija.

Stavimo $g(t) = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} |\varphi(t)|^{\frac{2}{n}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Funkcija g poprima samo dvije vrijednosti, 0 ili 1, i vrijedi $g(t) = 0$ ako je $\varphi(t) = 0$ i $g(t) = 1$ ako je $\varphi(t) \neq 0$.

φ je neprekidna funkcija i $\varphi(0) = 1$ pa je $\varphi(t) \neq 0$ u nekoj okolini nule. Odavde slijedi $g(t) = 1$ u toj okolini nule, dakle g je neprekidna u nuli. Budući da je g limes niza $(|\varphi_n|^2)$ karakterističnih funkcija, iz teorema neprekidnosti zaključujemo da je g karakteristična funkcija. No, tada je g neprekidna svuda.

Dakle, $g(t) \equiv 1$, tj. $\varphi(t) \neq 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Poglavlje 2

Uvod u teoriju stabilnih distribucija

2.1 Konvolucije distribucija

Uvedimo najprije definiciju konvolucije distribucija. Prema knjizi N. Sarape [11] imamo sljedeću definiciju:

Definicija 2.1.1. *Neka su F_1 i F_2 ograničene funkcije distribucije na $\mathbb{R}$. Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

zove se ***konvolucija*** *od F_1 i F_2 i označava se sa $F = F_1 * F_2$.*

Budući da je F_1 nenegativna i rastuća funkcija, slijedi da je funkcija F nenegativna i rastuća na $\mathbb{R}$. Konstanta $F_1(\infty)$ dominira $F_1(x-y)$ i integrabilna je $\left(\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\infty)\, dF_2(y) = F_1(\infty)\, F_2(\infty) < \infty\right)$ pa iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da je F neprekidna zdesna na $\mathbb{R}$. Osim toga, $F(-\infty) = 0$ i $F(\infty) = F_1(\infty)F_2(\infty)$. Prema tome, F je ograničena funkcija distribucije na $\mathbb{R}$.

Teorem 2.1.2. *Za ograničene funkcije distribucije F_1 i F_2 vrijedi $F = F_1 * F_2$ ako i samo ako je $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, gdje su $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ karakteristične funkcije od F, F_1 i F_2 redom.*

Dokaz. Ako je $F_1(\infty) = 0$ ili $F_2(\infty) = 0$, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo zato da je $F_1(\infty) \neq 0$ i $F_2(\infty) \neq 0$.

Zbog $F(\infty) = F_1(\infty)F_2(\infty)$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su F_1 i F_2, a prema tome i F, vjerojatnosne funkcije distribucije (definicija 1.1.11); ako nisu, promatramo funkcije $\dfrac{F_1}{F_1(\infty)}, \dfrac{F_2}{F_2(\infty)}, \dfrac{F}{F(\infty)}$.

Pretpostavimo zato da su F_1, F_2 i F vjerojatnosne funkcije distribucije i neka je $F = F_1 * F_2$. Prema teoremu 1.1.31, postoje nezavisne slučajne varijable X_1 i X_2 takve da je $F_{X_i} = F_i$, za $i = 1, 2$.

Neka je $X = X_1 + X_2$. Zbog nezavisnosti od X_1 i X_2 za $z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_x(z) = P\{X_1 + X_2 \leqslant z\} &= \iint_{x+y\leqslant z} dF_1(x)\, dF_2(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x+y\leqslant z\}}\, dF_1(x)\, dF_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-y)\, dF_2(y). \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo $F_X = F_1 * F_2 = F$, tj. sumi nezavisnih slučajnih varijabli odgovara konvolucija njihovih funkcija distribucije. Iz teorema 1.1.37 slijedi $\varphi = \varphi_X = \varphi_1\varphi_2$.

Obratno, neka je $\varphi = \varphi_1\varphi_2$. Iz prvog dijela teorema slijedi da $F_1 * F_2$ također ima karakterističnu funkciju $\varphi_1\varphi_2$. Iz teorema jedinstvenosti 1.1.38 zaključujemo $F = F_1 * F_2$. □

Budući da je množenje karakterističnih funkcija komutativno i asocijativno, iz teorema 2.1.2 slijedi

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \quad (F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3), \tag{2.2}$$

tj. operacija konvolucije je komutativna i asocijativna.

Korolar 2.1.3. *Neka su X i Y neprekidne nezavisne slučajne varijable i neka je $Z = X + Y$. Tada je Z neprekidna slučajna varijabla i vrijedi*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\, dx, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Funkciju f_Z iz (2.3) zovemo **konvolucija** od f_X i f_Y i označavamo sa $f_Z = f_X * f_Y$.

Ilustrirajmo konvoluciju funkcija distribucija i konvoluciju funkcija gustoće na jednostavnom primjeru. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable uniformno distribuirane na [0,1].

Funkcije distribucije zadanih varijabli definirane su na sljedeći način:

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \tag{2.4}$$

Funkcije gustoće zadanih varijabli definirane su na sljedeći način:

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ili } x > 1 \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

(Vrijednost funkcije f_X u točkama $x = 0$ i $x = 1$ je 0 prema konvenciji.)

Promotrimo sada zbroj varijabli X_1 i X_2, slučajnu varijablu distribuiranu na $[0,2]$. Prvo je potrebno uvesti pojam Irwin-Hallove distribucije. Prema [4] imamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.4. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable uniformno distribuirane na* $[0,1]$. *Tada varijabla $X = X_1 + X_2$ ima* ***Irwin-Hallovu distribuciju*** *reda* 2.

Propozicija 2.1.5. *Vjerojatnosna funkcija gustoće slučajne varijable $X_1 + X_2$ definirane u (2.1.4) dana je sa*

$$f_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & x < 0 \text{ ili } x > 2 \end{cases} \tag{2.6}$$

Dokaz. Primijetimo da $X_1 + X_2$ poprima vrijednosti u $[0,2]$ te

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) f(x-u)\, du, \quad x \in [0,2].$$

Dobivamo

$$\int_0^x 1\, du = x, \quad x \in [0,1],$$
$$\int_{x-1}^1 1\, du = 2 - x, \quad x \in [1,2].$$

□

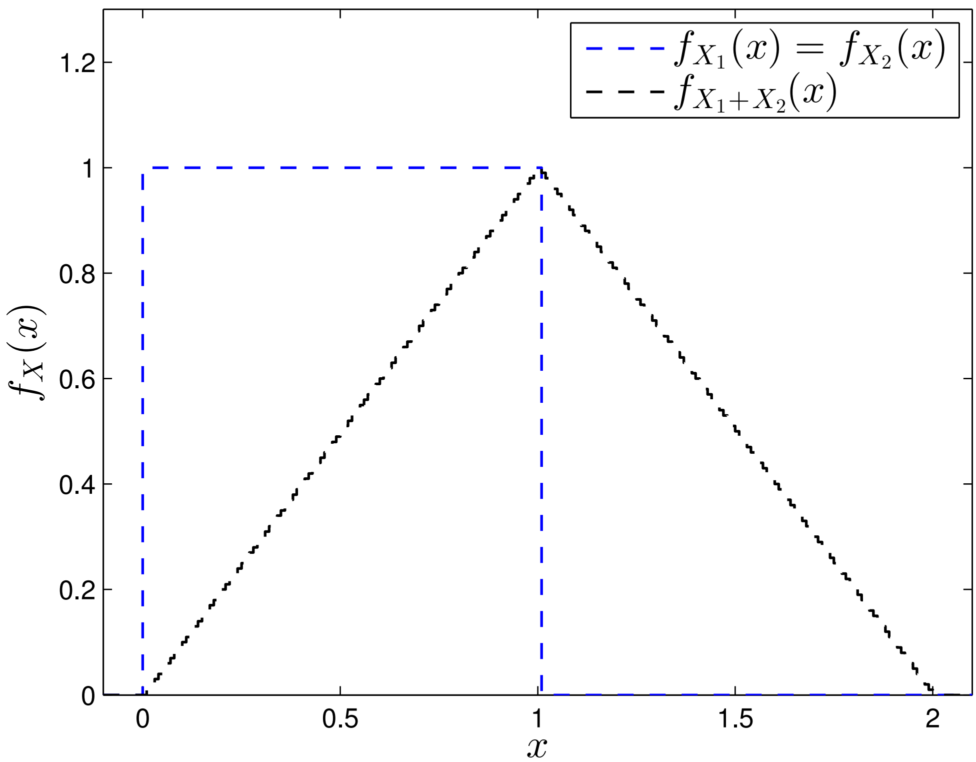
Graf funkcije gustoće od $X_1 + X_2$ je prikazan na slici (2.1). Primijetimo da je lik ispod grafa funkcije gustoće slučajnih varijabli X_1 i X_2 kvadrat, dok je lik ispod grafa funkcije gustoće njihovog zbroja, odnosno varijable $X_1 + X_2$ trokut.

Nadalje, prisjetimo se osnovnih rezultata iz teorije vjerojatnosti:

$$\mathrm{E}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 \tag{2.7}$$
$$\mathrm{Var}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}X_1 + \mathrm{Var}X_2, \tag{2.8}$$

Drugim riječima, matematičko očekivanje zbroja slučajnih varijabli jednako je zbroju matematičkog očekivanja slučajnih varijabli koje zbrajamo. Varijanca sume nezavisnih slučajnih varijabli jednaka je sumi varijanci slučajnih varijabli koje zbrajamo, pod uvjetom da očekivanje i varijanca s desne strane postoje.

Ako su slučajne varijable distribuirane u ograničenoj domeni, očito je $f_X(x)$ jednaka nuli izvan te domene i ne javlja se problem egzistencije momenata. Problem se javlja jedino u slučaju kada je slučajna varijable distribuirana u domeni koja je neograničena



Slika 2.1: Funkcije gustoće slučajnih varijabli X_1, X_2 i $X_1 + X_2$

te funkcija gustoće ne pada tako brzo na velikim udaljenostima od ishodišta. U takvim slučajevima se otkrivaju načini na koje se repovi takvih distribucija mogu skratiti. No, u ovom radu ćemo se usmjeriti na distribucije kod kojih su integrali u izrazima za očekivanje i varijancu divergentni te ćemo pokazati kako su upravo takve distribucije izrazito korisne u raznim primjenama.

2.2 Normalna distribucija. Svojstva stabilnosti

Neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Neprekidna slučajna varijabla X ima **normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2** ako joj je gustoća f dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

To označavamo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Nadalje, X ima **jediničnu normalnu distribuciju** ako je $X \sim N(0,1)$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Uzmimo sada X_1 i X_2 nezavisne normalne slučajne varijable, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ i promotrimo njihov zbroj, odnosno slučajnu varijablu $X_1 + X_2$. Dokazat ćemo $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, preko karakterističnih funkcija.

Zaista, uzmimo najprije $Z \sim N(0,1)$. Prema knjizi N. Sarape [11], karakteristična funkcija slučajne varijable Z je $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Neka je sada $X' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tada je $\dfrac{X' - \mu}{\sigma} = Y \sim N(0,1)$, a odavde je $X' = \sigma Y + \mu$. Prema teoremu 1.1.37 (a) slijedi

$$\varphi_{X'}(t) = e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Sada za $X_1 + X_2$ vrijedi

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{i\mu_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{i\mu_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

pa iz teorema jedinstvenosti zaključujemo $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Drugim riječima, konvolucija normalno distribuiranih slučajnih varijabli je također normalna slučajna varijabla, odnosno

$$f_{X_1} * f_{X_2} = f, \tag{2.12}$$

gdje je f funkcija gustoće normalne slučajne varijable $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ definirana kao u (2.9).

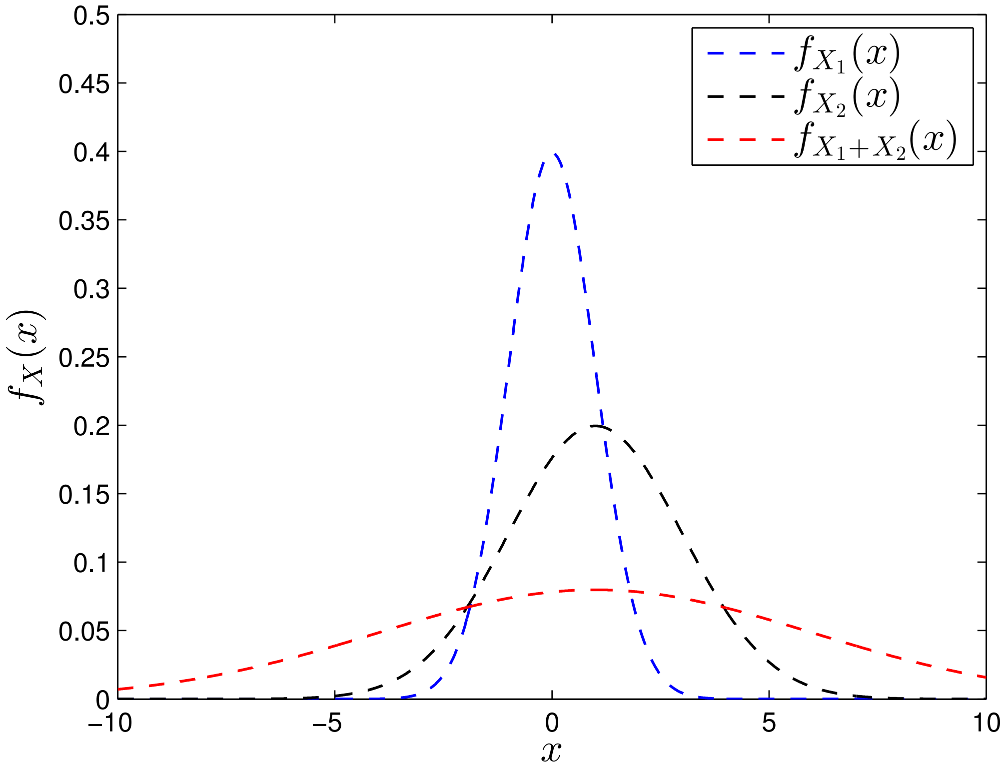
Analogno se pokaže da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, neka je $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, n$ i neka je $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Tada je

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{i\mu_k t - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}} = e^{it\sum_{k=1}^{n}\mu_k - \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

pa iz teorema jedinstvenosti zaključujemo $X \sim N\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu_k, \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\Big)$.

Graf funkcija gustoće od X_1, X_2, $X_1 + X_2$ je prikazan na slici (2.2).

Možemo primijetiti da se, kao i u slučaju uniformnih, funkcija gustoće zbroja ne poklapa s funkcijama gustoće slučajnih varijabli koje zbrajamo. Težište distribucije zbroja slučajnih varijabli je pomaknuto po $x-$osi te je graf funkcije "raspršeniji". No, za razliku od zbroja dvije uniformno distribuirane varijable gdje se zbrajanjem promijenio oblik grafa funkcije iz trokutastog u kvadratni, primijetimo da u ovom slučaju oblik grafa ostaje isti.



Slika 2.2: Funkcije gustoće slučajnih varijabli X_1, X_2 i $X_1 + X_2$

Najprije ćemo objasniti što podrazumijevamo pod pojmom oblik distribucije, odnosno, što znači da se oblik distribucije promijenio ili nije promijenio.

Prema knjizi V. V. Uchaikina i V. M. Zolotareva [12], kažemo da su **dvije slučajne varijable X i Y slične**, i pišemo $X \stackrel{s}{=} Y$, ako postoje konstante a i $b > 0$ takve da vrijedi $Y \stackrel{d}{=} a+bX$. Također, distribucije dviju slučajnih varijabli X i Y su **istog oblika** ako iz jedne slučajne varijable linearnom transformacijom možemo dobiti drugu, odnosno $Y \stackrel{d}{=} a + bX$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Zaista, za funkcije distribucije tada vrijedi:

$$F_Y(x) = F_{a+bX}(x) = P\{\, a + bX \leqslant x \,\} = P\left\{ X \leqslant \frac{x-a}{b} \right\} = F_X\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{2.13}$$

Pogledajmo vezu i između funkcija gustoće. Derivirajući (2.13) po x dobivamo

$$f_Y(x) = f_{a+bX}(x) = f_X\left(\frac{x-a}{b}\right)\frac{1}{b}. \tag{2.14}$$

Prema tome, gustoću normalno distribuirane slučajne varijable $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ definiranu u (2.9) možemo prikazati pomoću gustoće jedinične normalne slučajne varijable $X \sim N(0,1)$ iz (2.10):

$$f_Y(x) = f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}. \tag{2.15}$$

Vratimo se sada našim normalno distribuiranim varijablama X_1 i X_2 i njihovoj konvoluciji $X_1 + X_2$. Prema (2.15) imamo

$$f_{Y_1}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_1} * f_{Y_2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\frac{1}{\sigma_2} = f_Y\left(\frac{x-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}, \tag{2.16}$$

pri čemu su $Y_1,\ Y_2,\ Y$ jedinične slučajne varijable.

Drugim riječima, ako sa Y^G označimo normalnu slučajnu varijablu s funkcijom gustoće (2.10), imamo

$$\sigma_1 Y_1^G + \sigma_2 Y_2^G \stackrel{d}{=} \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,Y^G, \tag{2.17}$$

pri čemu su Y_1^G i Y_2^G nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i Y^G.

Ako pretpostavimo $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ te primijenimo relaciju (2.17) na zbroj n nezavisnih slučajnih varijabli, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^G \stackrel{d}{=} \sqrt{n}Y^G, \tag{2.18}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^G \stackrel{s}{=} Y^G \tag{2.19}$$

za $a = 0$ i $b = \sqrt{n}$.

Svojstvo (2.12) možemo interpretirati na sljedeći način: zbroj nezavisnih normalno distribuiranih slučajnih varijabli je slučajna varijabla slična slučajnim varijablama koje zbrajamo.

Ovo svojstvo normalnih slučajnih varijabli nas uvodi u definiciju stabilnih distribucija.

2.3 Definicija stabilne distribucije

Definicija 2.3.1. *Slučajna varijabla X je* ***stabilna slučajna varijabla*** *ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{s}{=} X \tag{2.20}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pri čemu su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X.

Drugim riječima, slučajna varijabla X je stabilna slučajna varijabla ako postoje konstante a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ takve da je

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} a_n + b_n X, \tag{2.21}$$

pri čemu su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X.

Definicija 2.3.2. *Stabilnu slučajnu varijablu X nazivamo **strogo stabilna slučajna varijabla** ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} b_n X, \tag{2.22}$$

pri čemu su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X.

Uvedene dvije definicije temelje se na stabilnosti kao svojstvu.

Shodno definiciji strogo stabilne slučajne varijable, normalna slučajna varijabla Y^G iz poglavlja 2.2 je strogo stabilna s parametrima $b_n^G = \sqrt{n}$.

Propozicija 2.3.3. *Ako matematičko očekivanje stabilne slučajne varijable X postoji i jednako je nuli, tada je X strogo stabilna slučajna varijabla.*

Dokaz. Ako primijenimo operator matematičkog očekivanja na obje strane u (2.21) dobivamo

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \stackrel{d}{=} \mathrm{E}\left[a_n + b_n X\right].$$

Budući da su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jednako distribuirane kao X imamo

$$n\mathrm{E}X \stackrel{d}{=} a_n + b_n \mathrm{E}X.$$

Kako je $\mathrm{E}X = 0$, slijedi $a_n = 0$. □

Propozicija 2.3.4. *Neka je X stabilna slučajna varijabla s očekivanjem μ i konačnom varijancom. Tada su parametri iz definicije (2.21) jednaki $b_n = \sqrt{n}$ te $a_n = (n - \sqrt{n})\mu$.*

Dokaz. Označimo sa σ^2 (konačnu) varijancu od X.

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X. Prema definiciji stabilne slučajne varijable (2.21), vrijedi $\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} a_n + b_n X$.

Uzmimo varijancu obiju strana:

$$n\sigma^2 = b_n^2\sigma^2 \Rightarrow b_n = \sqrt{n}.$$

Nadalje, uzmimo očekivanje s obje strane iz iste jednakosti:

$$n\mu = a_n + b_n\mu \overset{b_n=\sqrt{n}}{\Rightarrow} a_n = (n - \sqrt{n})\mu.$$

□

Jedina stabilna slučajna varijabla s konačnom varijancom je upravo normalna slučajna varijabla te vidimo da izračunati parametri u prethodnoj diskusiji odgovaraju rezultatima prethodne propozicije.

Uvodimo još jednu karakterizaciju stabilne slučajne varijable, također temeljenu na stabilnosti kao svojstvu.

Teorem 2.3.5. *Slučajna varijabla X je **stabilna slučajna varijabla** ako i samo ako za proizvoljne $b', b'' \in \mathbb{R}$ postoje $a, b \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$b'X_1 + b''X_2 \overset{d}{=} a + bX, \tag{2.23}$$

pri čemu su X_1 i X_2 nezavisne i $X_1 \overset{d}{=} X_2 \overset{d}{=} X$.

*Također, ako vrijedi $a = 0$, slučajna varijabla X je **strogo stabilna slučajna varijabla**.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da je X stabilna slučajna varijabla, prema (2.21), uvjet teorema očito vrijedi.

Obratni smjer pokazat ćemo indukcijom. Za $n = 2$, uvjet stabilnosti iz (2.21) vrijedi za $b' = b'' = 1$. Pretpostavimo da (2.21) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ te pretpostavimo da su $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X. Prema pretpostavci indukcije $Y_n := X_1 + \cdots + X_n$ ima jednaku distribuciju kao $a_n + b_nX$ za neki $a_n \in \mathbb{R}$ i $b_n > 0$. Zbog nezavisnosti, $Y_{n+1} := X_1 + \cdots + X_{n+1}$ ima jednaku distribuciju kao $a_n + b_nX_n + X_{n+1}$. Ponovo, prema pretpostavci teorema, vrijedi $b_nX_n + X_{n+1} \overset{d}{=} c + b_{n+1}X$, za neki $c \in \mathbb{R}$ i $b_{n+1} > 0$. Prema tome, $Y_{n+1} \overset{d}{=} (a_n + c) + b_{n+1}X$. Dakle, pokazali smo da tvrdnja vrijedi. □

Primijetimo da je slučajna varijabla X koncentrirana u jednoj točki uvijek stabilna. Taj degenerirani slučaj nam nije od prevelikog interesa i, osim ako nije drugačije navedeno, uvijek pretpostavljamo da je X nedegenerirana slučajna varijabla.

Propozicija 2.3.6. *Za svaku stabilnu slučajnu varijablu X postoji $\alpha \in (0,2]$ takav da konstante b', b'' i b u teoremu 2.3.5 zadovoljavaju*

$$(b')^\alpha + (b'')^\alpha = b^\alpha. \tag{2.24}$$

Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u knjizi W. Fellera [2].

Parametar α ćemo detaljnije proučiti u nastavku rada.

Definicija 2.3.7. *Funkcija distribucije i funkcija gustoće (strogo) stabilne slučajne varijable nazivaju se* ***(strogo) stabilna funkcija distribucije*** *i* ***(strogo) stabilna funkcija gustoće*** *te se označavaju sa $G(x)$ i $g(x)$, respektivno.*

Shodno oznakama u prethodnoj definiciji, relaciju (2.23) možemo zapisati na sljedeći način:

$$G\left(\frac{x}{b'}\right) * G\left(\frac{x}{b''}\right) = G\left(\frac{x-a}{b}\right), \tag{2.25}$$

i

$$\frac{1}{b'}g\left(\frac{x}{b'}\right) * \frac{1}{b''}g\left(\frac{x}{b''}\right) = \frac{1}{b}g\left(\frac{x-a}{b}\right), \tag{2.26}$$

odnosno

$$\frac{1}{b'b''}g\left(\frac{x}{b'}\right) * g\left(\frac{x}{b''}\right) = \frac{1}{b}g\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{2.27}$$

Definicija strogo stabilne slučajne varijable 2.3.2 je tada ekvivalentna sa

$$g(x) * g(x) = \frac{1}{b_2}g\left(\frac{x}{b_2}\right) \tag{2.28}$$

$$g(x) * g(x) * g(x) = \frac{1}{b_3}g\left(\frac{x}{b_3}\right) \tag{2.29}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{g(x) * g(x) * \cdots * g(x)}_{n} = \frac{1}{b_n}g\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

$$\vdots$$

Sljedeća tvrdnja i ideja dokaza preuzete su iz knjige V. M. Zolotareva [13].

Teorem 2.3.8. *Slučajna varijabla X je stabilna slučajna varijabla ako je jednakost (2.21) zadovoljena za $n = 2$ i $n = 3$.*

Dokaz. Pokazat ćemo da ako vrijedi

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\overset{d}{=} b_2 X_1 + a_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\overset{d}{=} b_3 X_1 + a_3, \end{aligned} \tag{2.30}$$

pri čemu su $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$ $(i = 2, 3)$, tada X_j $(j = 1, 2, 3)$ imaju stabilnu distribuciju.

Neka je φ karakteristična funkcija slučajne varijable X_1.

Cilj nam je pokazati da tada φ za svaki $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ zadovoljava jednakost

$$\varphi^n(t) = \varphi(b_n t)\, e^{i a_n t},\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.31}$$

što je, prema teoremu 1.1.37, ekvivalentno s (2.21).

Ako je jednakost zadovoljena za $n = 2$, to očito povlači da je jednakost zadovoljena za vrijednosti $n = 2^m$ s konstantama b_n i a_n oblika $b_n = b_2^m$ i $a_n = a_2\,(1 + b_2 + \cdots + b_2^{m-1})$. Zaista, ako zapišemo (2.21) kao niz suma, tada on glasi

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\overset{d}{=} b_2 X_1 + a_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\overset{d}{=} b_3 X_1 + a_3 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\overset{d}{=} b_4 X_1 + a_4 \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{2.32}$$

Uzmimo sada u obzir samo sume koje sadrže 2^m pribrojnika, $m = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\overset{d}{=} b_2 X_1 + a_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\overset{d}{=} b_4 X_1 + a_4 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 &\overset{d}{=} b_8 X_1 + a_8 \\ &\ \vdots \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_{2^m - 1} + X_{2^m} &\overset{d}{=} b_{2^m} X_1 + a_{2^m} \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ako iskoristimo prvu jednakost po distribuciji, drugu možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_4 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\ &= (X_1 + X_2) + (X_3 + X_4) \\ &\overset{d}{=} b_2(X_1 + X_2) + a_2 \\ &\overset{d}{=} b_2(b_2 X_1 + a_2) + a_2 \\ &\overset{d}{=} b_2^2 X_1 + a_2(1 + b_2). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ovdje smo uzeli u obzir $X_1 + X_2 \overset{d}{=} X_3 + X_4$.

Analogno, primjenjujući isti argument na treću jednakost imamo

$$\begin{aligned} S_8 &= (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (X_5 + X_6 + X_7 + X_8) \\ &\stackrel{d}{=} b_2^3 X_1 + a_2(1 + b_2 + b_2^2). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Za sumu s 2^m pribrojnika, na isti način zaključujemo

$$S_{2^m} \stackrel{d}{=} b_{2^m} X_1 + a_{2^m} \stackrel{d}{=} b_2^m X_1 + a_2(1 + b_2 + b_2^2 + \cdots + b_2^{m-1}). \tag{2.36}$$

Prema tome i prema definiciji 1.1.43, distribucija slučajne varijable X_1 je beskonačno djeljiva pa prema propoziciji 1.1.45 slijedi $\varphi(t) \neq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Definirajmo funkciju $\chi(t) = \ln \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tada uvjete (2.31) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 2\chi(t) &= \chi(b_2 t) + i a_2 t \\ 3\chi(t) &= \chi(b_3 t) + i a_3 t. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Prema tome, za sve $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, imamo

$$2^j 3^k \chi(t) = \chi(b_2^j b_3^k t) + i a_{jk}, \tag{2.38}$$

pri čemu su $a_{jk} \in \mathbb{R}$ za sve $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Skup brojeva $\{ 2^j 3^k \ : \ j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$ je gust u skupu $\mathbb{R}_+$. To slijedi iz činjenice da je skup brojeva oblika $j + \omega k$, $j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, gdje je ω iracionalan broj, gust u $\mathbb{R}$.

Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji niz brojeva $r_m = 2^{j_m} 3^{k_m}$ takav da $r_m \to n$ kad $m \to \infty$. Neka je $b_n(m) = b_2^{j_m} b_3^{k_m}$. Pokažimo tada da je taj niz brojeva ograničen. Iz funkcijske jednadžbe za $\chi(t)$ imamo

$$r_m \mathrm{Re}\,\chi(t) = \mathrm{Re}\,\chi(b_n(m) t), \tag{2.39}$$

za svaki $m \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{R}$.

Kada bi niz brojeva $b_n(m)$ bio neograničen, tada bi imao podniz brojeva $b_n(m')$ takav da $|b_n(m')| \to \infty$ kad $m' \to \infty$. Supstituirajmo $t' = t b_n(m')$ u (2.39). Tada, uzimajući u obzir $r_{m'} \to n$ kad $m' \to \infty$, imamo

$$\mathrm{Re}\,\chi(t') = r_{m'} \mathrm{Re}\,\chi\left(\frac{t'}{b_n(m')}\right) \to 0. \tag{2.40}$$

Stoga, $|\varphi(t)| \equiv 1$ te time dobivamo kontradikciju s uvjetom da je X_1 nedegenerirana slučajna varijabla.

Dakle, niz $b_n(m)$ je ograničen pa ima podniz $b_n(m')$ koji konvergira prema nekom broju b_n kad $m' \to \infty$.

Prema tome,

$$\begin{aligned} a_{j_{m'}k_{m'}} &= it^{-1}[\chi(b_n(m')t) - r_{m'}\chi(t)] \\ &\to it^{-1}[\chi(b_n t) - n\chi(t)] = a_n \end{aligned} \tag{2.41}$$

kad $m' \to \infty$.

Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $t \in \mathbb{R}$ imamo $n\chi(t) = \chi(b_n t) + ita_n$, što nas dovodi do uvjeta iz definicije (2.21). □

Posebno, normalna slučajna varijabla Y^G iz poglavlja 2.2 s funkcijom gustoće (2.10) zadovoljava (2.28) i (2.29) uz paramatre $b_2 = \sqrt{2}$ i $b_3 = \sqrt{3}$.

Slučajna varijabla s normalnom distribucijom nije jedini primjer slučajne varijable koja ima svojstvo stabilnosti te ćemo u nastavku rada ilustrirati još primjera stabilnih slučajnih varijabli.

2.4 Cauchyjeva distribucija

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a > 0$. Neprekidna slučajna varijabla X ima **Cauchyjevu distribuciju s parametrima a i b** ako joj je gustoća f dana sa

$$f(x) = \frac{a}{\pi\,[a^2 + (x-b)^2]}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

X ima **jediničnu Cauchyjevu distribuciju** ako je $a = 1$ i $b = 0$, tj. ako joj je funkcija gustoće dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.43}$$

Ako je jedinična Cauchyjeva distribucija stabilna, ona je i strogo stabilna obzirom na simetričnost oko 0.

Dokažimo strogu stabilnost. Neka su X_1 i X_2 nezavisne jedinične Cauchyjeve slučajne varijable s gustoćom definiranom kao u (2.43). Prema knjizi N. Sarape [11], karakteristične funkcije varijabli X_1i X_2 definirane su sa

$$\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.44}$$

Također, ako Y ima Cauchyjevu razdiobu s parametrima $a, b \in \mathbb{R}$ i $a > 0$ i gustoćom definiranom kao u (2.42), tada je njezina karakteristična funkcija definirana na sljedeći način

$$\varphi_Y(t) = e^{ibt - a|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.45}$$

Sada za $X_1 + X_2$ vrijedi

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{-|t|}e^{-|t|} = e^{-2|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

pa iz teorema jedinstvenosti, prema prethodno navedenom, zaključujemo da $X_1 + X_2$ ima Cauchyjevu razdiobu s parametrima $a = 2$ i $b = 0$. Vrijedi

$$f(x) * f(x) = f_{X_1+X_2}(x) = \frac{2}{\pi(4+x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(1+(x/2)^2)} = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right). \tag{2.46}$$

Analogno dobivamo

$$f(x) * f(x) * f(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{3}\right). \tag{2.47}$$

Dakle, pokazali smo da je jedinična Cauchyjeva razdioba strogo stabilna slučajna varijabla uz $b_n^C = n$.

Ako sa Y^C označimo jediničnu Cauchyjevu varijablu, prema definiciji 2.3.2 sada vidimo

$$Y_1^C + \ldots + Y_n^C \overset{d}{=} nY^C \Rightarrow \frac{Y_1^C + \ldots + Y_n^C}{n} \overset{d}{=} Y^C \tag{2.48}$$

pri čemu su $Y_1^C, \ldots, Y_n^C$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i Y^C. Drugim riječima, aritmetička sredina Cauchyjevih slučajnih varijabli jednako je distribuirana kao svaka od slučajnih varijabli koje zbrajamo.

2.5 Levyjeva distribucija

Prema [5] uvodimo Levyjevu distribuciju. Slučajna varijabla X ima **standardnu Levyjevu distribuciju** ako joj je vjerojatnosna funkcija gustoće dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{2x}}, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.49}$$

Slučajna varijabla X ima **Levyjevu distribuciju s parametrima** a **i** b ako je $X = a+bU$, pri čemu je U standardna Levyjeva slučajna varijabla. Funkcija gustoće slučajne varijable X dana je sa

$$f(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\frac{1}{(x-a)^{3/2}}e^{-\frac{b}{2(x-a)}}, \quad x \in (a,\infty). \tag{2.50}$$

Karakteristična funkcija Levyjeve slučajne varijable X dana je sa

$$\varphi_X(x) = e^{ita-b^{1/2}|t|^{1/2}[1+i\mathrm{sgn}(t)]}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.51}$$

pri čemu je sgn funkcija predznaka, tj. $\mathrm{sgn}(t) = 1$ za $t > 0$, $\mathrm{sgn}(t) = -1$ za $t < 0$ i $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

Karakteristična funkcija standardne Levyjeve slučajne varijable X dana je sa

$$\varphi_X(x) = e^{-|t|^{1/2}[1+i\mathrm{sgn}(t)]}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.52}$$

Pokažimo da je standardna Levyjeva distribucija stabilna. Neka su X_1 i X_2 nezavisne jedinične Levyjeve slučajne varijable s definiranom kao u (2.49). Izračunajmo karakterističnu funkciju slučajne varijable $X_1 + X_2$:

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{-|t|^{1/2}[1+i\mathrm{sgn}(t)]}e^{-|t|^{1/2}[1+i\mathrm{sgn}(t)]} = e^{-2|t|^{1/2}[1+i\mathrm{sgn}(t)]}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Prema (2.51) i teoremu jedinstvenosti, zaključujemo da je $X_1 + X_2$ slučajna varijabla s Levyjevom distribucijom i parametrima $a = 0$ i $b = 4$. Nadalje, prema (2.50) imamo

$$f(x)*f(x) = f_{X_1+X_2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^{3/2}}e^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\frac{1}{8}x^{3/2}}e^{-\frac{1}{2(x/4)}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\frac{x}{4})^{3/2}}e^{-\frac{1}{2(x/4)}} = \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right). \tag{2.53}$$

Analogno dobivamo

$$f(x) * f(x) * f(x) = \frac{1}{9}f\left(\frac{x}{9}\right). \tag{2.54}$$

Dakle, pokazali smo da je jedinična Levyjeva razdioba strogo stabilna slučajna varijabla, uz $b_n^L = n^2$. Ako sa Y^L označimo jediničnu Levyjevu varijablu, prema definiciji 2.3.2 sada vidimo

$$Y_1^L + \ldots + Y_n^L \stackrel{d}{=} n^2 Y^L \Rightarrow \frac{Y_1^L + \ldots + Y_n^L}{n} \stackrel{d}{=} nY^C \tag{2.55}$$

pri čemu su $Y_1^L, \ldots, Y_n^L$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i Y^L. Ovaj rezultat nam govori da aritmetička sredina varijabli Y_i^L, za $i = 1, \ldots, n$, ima "raspršeniju" distribuciju nego svaka od slučajnih varijabli koje zbrajamo.

U nekoliko prethodnih poglavlja pokazali smo primjer (strogo) stabilne slučajne varijable koja je simetrična oko 0 i ima konačnu varijancu, zatim primjer (strogo) stabilne slučajne varijable koja je simetrična oko 0, ali nema konačnu varijancu te, na kraju, primjer (strogo) stabilne slučajne varijable koja nije simetrična i nema konačnu varijancu.

U nastavku rada ćemo vidjeti da su normalna distribucija, Cauchyjeva distribucija i Levyjeva distribucija jedine stabilne distribucije čije funkcije gustoće znamo u eksplicitnom obliku. Ostale stabilne slučajne varijable karakteriziramo pomoću karakterističnih funkcija zato što njihove funkcije gustoće nisu poznate u analitičkom obliku.

2.6 Svojstva stabilnih distribucija

Propozicija 2.6.1. *Neka je X stabilna slučajna varijabla s parametrima $a_n \in \mathbb{R}$ i $b_n \in (0,\infty)$. Tada je $-X$ također stabilna slučajna varijabla s parametrima $-a_n$ i b_n.*

Dokaz. Ako su $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i X, tada su $-X_1, \ldots, -X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i $-X$. Prema definiciji stabilnosti, $-\sum_{i=1}^{n} X_i$ ima jednaku distribuciju kao $-(a_n + b_n X) = -a_n + b_n(-X)$. □

Slučajna varijabla sa stabilnom distribucijom ima **simetričnu stabilnu distribuciju** ukoliko je njena distribucija simetrična, tj. ako vrijedi da X i $-X$ imaju istu distribuciju. Ako slučajna varijabla ima simetričnu stabilnu distribuciju, tada je njena distribucija i strogo stabilna.

Zaista, zbog jednake distribuiranosti od X i $-X$ prvo imamo $a_n + b_n X \stackrel{d}{=} a_n + b_n(-X)$, što je prema prethodnoj propoziciji dalje jednako distribuirano kao $-a_n + b_n X$, iz čega slijedi $a_n = 0$, odnosno slijedi stroga stabilnost.

Obrat ne mora nužno vrijediti.

Vrlo važno svojstvo stabilnih distribucija je zatvorenost na konvolucije, uz uvjet da slučajne varijable koje zbrajamo imaju iste parametre b_n:

Teorem 2.6.2. *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da je X stabilna slučajna varijabla s parametrima a_n i b_n, Y stabilna slučajna varijabla s parametrima c_n i b_n. Tada je $Z = X + Y$ stabilna slučajna varijabla s parametrima $a_n + c_n$ i b_n.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $Z_1, \ldots, Z_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao Z. Tada $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ ima jednaku distribuciju kao $\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$, pri čemu su $X_1 \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X, $Y_1 \ldots, Y_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao Y. X i Y su po pretpostavci nezavisne stabilne slučajne varijable pa vrijedi $\sum_{i=1}^{n} Z_i \stackrel{d}{=} (a_n + c_n) + b_n(X + Y)$, odnosno $\sum_{i=1}^{n} Z_i \stackrel{d}{=} (a_n + c_n) + b_n Z$. □

Prema prethodnom teoremu i teoremu 2.3.5 imamo sljedeći korolar.

Korolar 2.6.3. *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s jednakom stabilnom distribucijom s parametrima a_n i c_n. Tada je $X - Y$ strogo stabilna slučajna varijabla s parametrom b_n.*

Ovaj rezultat će nam biti od velike koristi kada ćemo dokazivati svojstva vezana samo uz parametre b_n.

Primijetimo također da je distribucija slučajne varijable $X - Y$ simetrična oko 0.

Shodno (2.21), problem zbrajanja stabilnih slučajnih varijabli, odnosno problem pronalaska distribucije njihovog zbroja S_n, možemo svesti na pronalazak parametara a_n i b_n.

Za strogo stabilne slučajne varijable vrijedi $a_n = 0$ pa (2.21) možemo zapisati kao

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} b_n X. \tag{2.56}$$

Ovaj problem se lako riješi u slučaju normalne distribucije X koja ima konačnu varijancu. Uzmemo li varijancu obiju strana u (2.56), dobivamo

$$n\mathrm{Var}X = b_n^2 \mathrm{Var}X.$$

Uz $\mathrm{Var}X \neq 0$, automatski dobivamo

$$b_n \equiv b_n^G = n^{\frac{1}{2}}.$$

Promotrimo sada opći slučaj zbrajanja strogo stabilnih slučajnih varijabli.

Teorem 2.6.4. *Neka je X stabilna slučajna varijabla. Tada je parametar b_n oblika $n^{\frac{1}{\alpha}}$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \langle 0, 2]$. Parametar α zovemo* ***indeks stabilnosti*** *ili* ***karakteristični eksponent*** *stabilne distribucije.*

Dokaz. Prema prethodnom korolaru možemo zaključiti da je distribucija od X simetrična i strogo stabilna, odnosno $\sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{d}{=} b_n X$.

Neka su $X_1 \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X.

Neka je $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, za $n \in \mathbb{N}$. Uzmimo $m, n \in \mathbb{N}$ i promotrimo Y_{mn}. Zbog stabilnosti od X slijedi da je Y_{mn} jednako distribuirana kao $b_{mn}X$, tj. $Y_{mn} \stackrel{d}{=} b_{mn}X$. S druge strane, Y_{mn} možemo shvatiti kao sumu od m "blokova" gdje svaki blok predstavlja sumu od n nezavisnih slučajnih varijabli jednako distribuiranih kao i X. Shodno prethodnoj diskusiji, svaki blok ima istu distribuciju kao b_nX. Budući da su blokovi nezavisni, slijedi da Y_{mn} ima istu distribuciju kao $b_nX_1 + b_nX_2 + \ldots + b_nX_m = b_n(X_1 + \ldots + X_m)$, tj. $Y_{mn} \stackrel{d}{=} b_n(X_1 + \ldots + X_m)$. Ako ponovno primijenimo svojstvo stabilnosti, dobivamo $Y_{mn} \stackrel{d}{=} b_n b_m X$. Sada slijedi $b_{mn} = b_m b_n$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$ te iz toga proizlazi $b_{n^k} = b_n^k$, za sve $n, k \in \mathbb{N}$.

Primijenimo isti trik, ovaj puta na zbroj. Uzmimo $m, n \in \mathbb{N}$ i promotrimo Y_{m+n}. Zbog stabilnosti slučajne varijable X, direktno slijedi da Y_{m+n} ima jednaku distribuciju kao $b_{m+n}X$, tj. $Y_{m+n} \stackrel{d}{=} b_{m+n}X$. S druge strane, Y_{m+n} možemo shvatiti kao zbroj dva "bloka" - prvi je suma m nezavisnih slučajnih varijabli jednako distribuiranih kao X te je prema tome taj blok jednako distribuiran kao b_mX, drugi blok je suma n nezavisnih slučajnih varijabli jednako distribuiranih kao X te je ovaj blok jednako distribuiran kao b_nX. Budući da su blokovi nezavisni, slijedi $b_{m+n}X \stackrel{d}{=} b_mX_1 + b_nX_2$, odnosno $X \stackrel{d}{=} \frac{b_m}{b_{m+n}}X_1 + \frac{b_n}{b_{m+n}}X_2$.

Stavimo $U := \frac{b_m}{b_{m+n}} X_1 + \frac{b_n}{b_{m+n}} X_2$. Primijetimo da za svaki $x > 0$ vrijedi

$$\left\{ X_1 \geqslant 0,\ X_2 > \frac{b_{m+n}}{b_n} x \right\} \subset \{ U > x \},$$

pa vrijedi

$$P\{ U > x \} \geqslant P\left\{ X_1 \geqslant 0,\ X_2 > \frac{b_{m+n}}{b_n} x \right\} \overset{nez.}{=} P\{ X_1 \geqslant 0 \} P\left\{ X_2 > \frac{b_{m+n}}{b_n} x \right\}.$$

Zbog simetričnosti slučajne varijable X vrijedi $P\{ X_1 \geqslant 0 \} = \frac{1}{2}$, a budući da su X_2 i U jednako distribuirane kao X, imamo

$$P\{ X > x \} \geqslant \frac{1}{2} P\left\{ X > \frac{b_{m+n}}{b_n} x \right\}.$$

Slijedi da su omjeri $\frac{b_n}{b_{n+m}}$ ograničeni za $m, n \in \mathbb{N}$. Zaista, kada to ne bi bio slučaj, mogli bi naći niz indeksa takav da $\frac{b_{n+m}}{b_n} \to 0$. Iz toga bi slijedilo $P\{ X > x \} \geqslant \frac{1}{2}$, za sve $x > 0$, što je kontradikcija. Dakle, omjeri $\frac{b_k}{b_n}$ su ograničeni za $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$.

Fiksirajmo sada $r \in \mathbb{N}$. Tada postoji jedinstveni $\alpha \in (0,\infty)$ takav da vrijedi $b_r = r^{\frac{1}{\alpha}}$. Prema prvom koraku ovog dokaza, imamo $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ za svaki $n = r^j$, $j \in \mathbb{N}$. Slično, ako je $s \in \mathbb{N}$, tada postoji $\beta \in (0,\infty)$ takav da je $b_s = s^{\frac{1}{\beta}}$ i $b_m = m^{\frac{1}{\beta}}$ za $m = s^k$, $k \in \mathbb{N}$. Za nastavak dokaza potrebno je pokazati $\alpha = \beta$, što povlači $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo, ako je $m = s^k$ za $k \in \mathbb{N}$, tada postoji $n = r^j$ za $j \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $n \leqslant m \leqslant rn$. Prema tome

$$b_m = m^{\frac{1}{\beta}} \leqslant (rn)^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} n^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} b_n^{\frac{\alpha}{\beta}} \Rightarrow \frac{b_m}{b_n} \leqslant r^{\frac{1}{\beta}} b_n^{\frac{\alpha}{\beta}-1}.$$

Budući da je niz koeficijenata $b_n, n \in \mathbb{N}$ neograničen, no omjeri $\frac{b_n}{b_m}$ su ograničeni za $m, n \in \mathbb{N}, n < m$, posljednja nejednakost povlači $\beta \leqslant \alpha$. Ako zamijenimo uloge od m i n u prethodnoj raspravi, dobivamo $\alpha \leqslant \beta$. Prema tome, dokazali smo $\alpha = \beta$.

Preostalo je pokazati $\alpha \leqslant 2$. Pokazat ćemo to tako što ćemo najprije pokazati da za $\alpha > 2$ slučajna varijabla X mora imati konačnu varijancu, no propozicija 2.3.4 tada vodi do kontradikcije $\alpha = 2$. Budući da je X^2 nenegativna, imamo

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \int_0^\infty P\left(X^2 > x\right) dx = \int_0^\infty P\left(|X| > \sqrt{x}\right) dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{k-1}}^{2^k} P\left(|X| > \sqrt{x}\right) dx.$$

Ideja je naći granice integrala na desnoj strani tako da red konvergira. Primijetimo da za $t > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$P(|Y_n| > tb_n) = P(b_n|X| > tb_n) = P(|X| > t).$$

Prema tome možemo odabrati t takav da $P(|Y_n| > tb_n) \leqslant \frac{1}{4}$. S druge strane, koristeći nejednakost za simetrične distribucije, imamo $\frac{1}{2}\left(1 - e^{-nP(|X|>tb_n)}\right) \leq P(|Y_n| > tb_n)$, što povlači da je izraz $nP(|X| > tb_n)$ ograničen po n, u protivnom bi posljednje dvije nejednakosti dale $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}$. Supstituirajmo $x = tb_n = tn^{\frac{1}{\alpha}}$. Slijedi $P(|X| > x) \leqslant Mx^{-\alpha}$, za neki $M > 0$. Prema tome,

$$\int_{2^{k-1}}^{2^k} P\left(|X| > \sqrt{x}\right) dx \leqslant M2^{k(1-\frac{\alpha}{2})}.$$

Ako je $\alpha > 2$, red na desnoj strani konvergira i imamo $\mathrm{E}(X^2) < \infty$. $\square$

Za slučajnu varijablu X koja ima stabilnu distribuciju s indeksom stabilnosti α kažemo da ima **α-stabilnu distribuciju**.

Teorem 2.6.5. *Svaka stabilna distribucija je neprekidna.*

Dokaz. Neka je X stabilna slučajna varijabla. Kao u dokazu prethodnog teorema, pretpostavimo da X ima simetričnu stabilnu distribuciju s parametrima b_n, za $n \in \mathbb{N}$. Također, kao poseban slučaj iz prethodnog dokaza, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$X \stackrel{d}{=} \frac{1}{b_{n+1}}X_1 + \frac{b_n}{b_{n+1}}X_2,$$

gdje su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X.

Pretpostavimo $P\{X = x\} = p$ za neki $x \neq 0$ i $p > 0$. Tada vrijedi

$$P\left\{X = \frac{1+b_n}{b_{n+1}}x\right\} = P\left\{\frac{1}{b_{n+1}}X_1 + \frac{b_n}{b_{n+1}}X_2 = \frac{1+b_n}{b_{n+1}}x\right\} \geqslant P\{X_1 = x\}P\{X_2 = x\} = p^2 > 0.$$

Ako je indeks stabilnosti $\alpha \neq 1$, točke $\frac{1+b_n}{b_{n+1}}x = \frac{1+n^{\frac{1}{\alpha}}}{(1+n)^{\frac{1}{\alpha}}}x$, $n \in \mathbb{N}$ se ne podudaraju što nas dovodi do beskonačno mnogo točaka prekida pri čemu svaka ima vjerojatnost barem p^2 i time dolazimo do kontradikcije.

Nadalje, pretpostavimo da je jedina točka prekida $x = 0$ te $P\{X = 0\} = p$, $0 < p < 1$. Zbog stroge stabilnosti od X vrijedi $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} b_2X$, pri čemu su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane kao X. Imamo $P\{X_1 + X_2 = 0\} = P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\} = p^2$. S druge strane, $P\{b_2X = 0\} = P\{X = 0\} = p$, što nas opet dovodi do kontradikcije. $\square$

2.7 Stabilni zakoni kao granične distribucije

Problem zbrajanja stabilnih slučajnih varijabli sam po sebi nije od velikog interesa. Ono što nas zanima je slučaj kada suma dovoljno velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli, koje ne pripadaju familiji stabilnih distribucija, u nekom smislu postaje stabilna distribucija. To svojstvo zaista proširuje područje primjene stabilnih zakona.

Stabilne distribucije s indeksom stabilnosti $\alpha < 2$ igraju istu ulogu u zbrajanju slučajnih varijabli koje nemaju konačnu varijancu kao što normalna distribucija ima u slučaju konačne varijance.

Dakle, stabilne distribucije pojavljuju se kao distribucijski limesi niza centriranih i normiranih parcijalnih suma niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje nužno ne moraju imati varijancu.

Konvergenciju u Levyjevom centralnom graničnom teoremu 1.1.41 možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{(X_1 + \cdots + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\overline{X_n} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad n \to \infty. \tag{2.57}$$

Dalje taj izraz možemo zapisati na sljedeći način:

$$a_n(X_1 + \cdots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \quad n \to \infty, \tag{2.58}$$

gdje je $a_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}$ i $b_n = \dfrac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$.

Sljedeći teorem je generalizacija Levyjevog centralnog graničnog teorema. On nam kaže da ako izostavimo pretpostavku o konačnom očekivanju i konačnoj varijanci, tada dobijemo da niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli konvergira prema slučajnoj varijabli koja ima α-stabilnu distribuciju. Teorem i ideja dokaza preuzeti su iz knjige N. Sarape [11].

Teorem 2.7.1. ***Generalizirani centralni granični teorem.*** *Slučajna varijabla X je stabilna slučajna varijabla ako i samo ako postoje niz $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli i konstante $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ takve da vrijedi:*

$$\frac{1}{b_n}(X_1 + \cdots + X_n - a_n) \xrightarrow{d} X, \quad n \to \infty. \tag{2.59}$$

Dokaz. Neka je X stabilna slučajna varijabla te neka je $X_1, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli jednako distribuiranih kao i X, tj. vrijedi $F_{X_k} = F_X$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Budući da je X stabilna slučajna varijabla, za svaki n postoji $a_n \in \mathbb{R}$ i $b_n > 0$ takvi da vrijedi $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} a_n + b_n X$, odnosno $\dfrac{1}{b_n}(X_1 + \cdots + X_n - a_n) \stackrel{d}{=} X$. Označimo zbog jednostavnosti

$S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada prethodno možemo zapisati kao $\frac{1}{b_n}(S_n - a_n) \stackrel{d}{=} X$, što povlači $\frac{1}{b_n}(S_n - a_n) \xrightarrow{d} X$, $n \to \infty$.

Obratno, pretpostavimo da je $X_1, \ldots, X_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Neka je $Y_n := \frac{1}{b_n}(S_n - a_n)$. Tada vrijedi $Y_n \xrightarrow{d} X$, $n \to \infty$. Pretpostavimo da X nije degenerirana slučajna varijabla. Fiksiramo $n \in \mathbb{N}$ i stavimo

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= X_1 + \cdots + X_n, \\ S_n^{(2)} &= X_{n+1} + \cdots + X_{2n}, \\ &\vdots \\ S_n^{(r)} &= X_{(r-1)n+1} + \cdots + X_{rn}. \end{aligned}$$

$S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \ldots, S_n^{(r)}$ su nezavisne slučajne varijable.

Neka je dalje $Z_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)} - a_n}{b_n}$, $k = 1, 2, \ldots, r$. $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \ldots, Z_n^{(r)}$ su također nezavisne slučajne varijable i očito vrijedi $Z_n^{(k)} \stackrel{d}{=} Z_n^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$ i $Z_n^{(k)} \xrightarrow{d} X$ za sve $k = 1, 2, \ldots, r$.

Neka je dalje $W_n^{(k)} = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \cdots + Z_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Vrijedi $W_n^{(k)} \xrightarrow{d} Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \cdots + Z_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $n \to \infty$. Iz teorema o neprekidnosti slijedi da $W_n^{(r)} \xrightarrow{d} Z_1 + \cdots + Z_r$, pri čemu su $Z_1, \ldots, Z_n$ nezavisne i $Z_k \stackrel{d}{=} X$, za sve $k = 1, 2, \ldots, r$. Nadalje, prema konstrukciji imamo

$$W_n^{(r)} = \frac{X_1 + \cdots + X_{rn} - ra_n}{b_n} = \frac{b_{rn}}{b_n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{rn} - ra_{rn}}{b_{rn}}\right) + \frac{ra_{rn} - ra_n}{b_n} = \beta_n^{(r)} Y_{rn} + \alpha_n^{(r)},$$

gdje je $\beta_n^{(r)} = \frac{b_{rn}}{b_n} > 0$. Prema tome, slijedi $\frac{1}{\beta_n^{(r)}}\left(W_n^{(r)} - \alpha_n^{(r)}\right) = Y_{rn} \stackrel{d}{=} X$, za $n \to \infty$. Dakle, $\alpha_n^{(r)} \to \alpha_r \in \mathbb{R}$ kada $n \to \infty$ i $\beta_n^{(r)} \to \beta_r > 0$ kada $n \to \infty$ te vrijedi da je $X \stackrel{d}{=} \frac{1}{\beta_r}(Z_1 + \cdots + Z_r - \alpha_r)$, što po definiciji povlači da je X stabilna slučajna varijabla. □

Sljedeća karakterizacija nam govori kako su stabilne distribucije jedine distribucije koje se mogu dobiti kao limesi normaliziranih suma niza nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ona proizlazi iz prethodno dokazanog generaliziranog centralnog graničnog teorema.

Korolar 2.7.2. *Slučajna varijabla X je* ***stabilna slučajna varijabla*** *ako postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ te za $n \in \mathbb{N}$ postoje $a_n \in \mathbb{R}$*

i $b_n > 0$ *tako da vrijedi*

$$\frac{1}{b_n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - a_n) \xrightarrow{d} X, \quad n \to \infty. \tag{2.60}$$

Uvedimo još jedan pojam.

Definicija 2.7.3. *Kažemo da zajednička funkcija distribucije* F_X *nezavisnih slučajnih varijabli* X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *pripada* ***domeni atrakcije funkcije distribucije*** F *ako za sve* $n \in \mathbb{N}$ *postoje* $a_n, b_n > 0$ *takvi da distribucija slučajne varijable* $\frac{1}{b_n}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_i - a_n\Big)$ *konvergira prema* F.

Definicija 2.7.4. *Kažemo da zajednička funkcija distribucije* F_X *nezvisnih slučajnih varijabli* X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *pripada* ***normalnoj domeni atrakcije funkcije distribucije*** F *ako u prethodnoj definiciji vrijedi* $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Shodno prethodnoj definiciji i prethodnoj diskusiji, možemo reći da distribucija F ima domenu atrakcije ako i samo ako je F stabilna distribucija.

Poglavlje 3

Karakteristične funkcije stabilnih slučajnih varijabli

3.1 Karakteristične funkcije stabilnih slučajnih varijabli

Funkcija distribucije i funkcija gustoće u potpunosti karakteriziraju slučajnu varijablu, ali nisu pogodne kao karakteristična funkcija u problemima zbrajanja nezavisnih slučajnih varijabli. Karakteristična funkcija slučajne varijable, koju smo definirali u poglavlju s preliminarnim rezultatima, također sadrži potpune informacije o slučajnoj varijabli koju promatramo.

Najvažnija svojstva karakterističnih funkcija dana su u preliminarnim rezultatima, no valja istaknuti kako je glavna prednost korištenja karakterističnih funkcija u primjeni upravo u tome što je karakteristična funkcija zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka umnošku karakterističnih funkcija varijabli koje zbrajamo:

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t), \tag{3.1}$$

što je praktičnije za primjenu nego funkcija gustoće zbroja nezavisnih slučajnih koja je dana integralom (2.3):

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t-t')\, f_{X_2}(t')\, dt'. \tag{3.2}$$

Generalizacija prethodno spomenutog svojstva (3.1)

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t), \tag{3.3}$$

pri čemu su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, je od posebne važnosti u problemima zbrajanja velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli. Upravo iz tog razloga karakteristične funkcije, uz teorem neprekidnosti naveden u preliminarnim rezultatima, čine vrlo važnu ulogu u teoriji stabilnih distribucija.

Nevedimo još jednu karakterizaciju stabilne slučajne varijable. Ona se temelji na karakterističnim funkcijama.

Teorem 3.1.1. *Kažemo da je slučajna varijabla X* **stabilna slučajna varijabla** *ako postoje parametri $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geqslant 0$ takvi da joj karakteristična funkcija φ_X ima sljedeći oblik*

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right) = e^{it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) u_\alpha(t)\right]}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

gdje je

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln(|t|), & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

te sgn *standardna funkcija predznaka.*

Zbog opsežnosti i kompleksnosti samih dokaza, izostavljamo dokaz ove karakterizacije i druge karakterizacije temeljene na karakterističnoj funkciji koju ćemo navesti u idućem poglavlju, no njihova ideja se može pronaći u knjizi V. V. Uchaikina i V. M. Zolotareva [12].

Vidimo da su članovi familije stabilnih distribucija definirani pomoću četiri parametra. Kao što smo spomenuli ranije, parametar α je **indeks stabilnosti**. Parametar β je **parametar asimetrije**. α i β možemo smatrati **parametrima oblika**. S druge strane, μ je **parametar pomaka**, a σ je **parametar skale**.

Primijetimo da u slučaju $\alpha = 1$, imaginarni dio u (3.4) sadrži faktor $\ln(|t|)$. Pojava ovog logaritma je uzrok javljanja mnogih poteškoća povezanih upravo sa slučajem $\alpha = 1$. U nastavku rada, često će u mnogim svojstvima taj slučaj biti odvojen.

U slučaju $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, dobivamo **jediničnu stabilnu distribuciju** koja ima karakterističnu funkciju φ_X oblika:

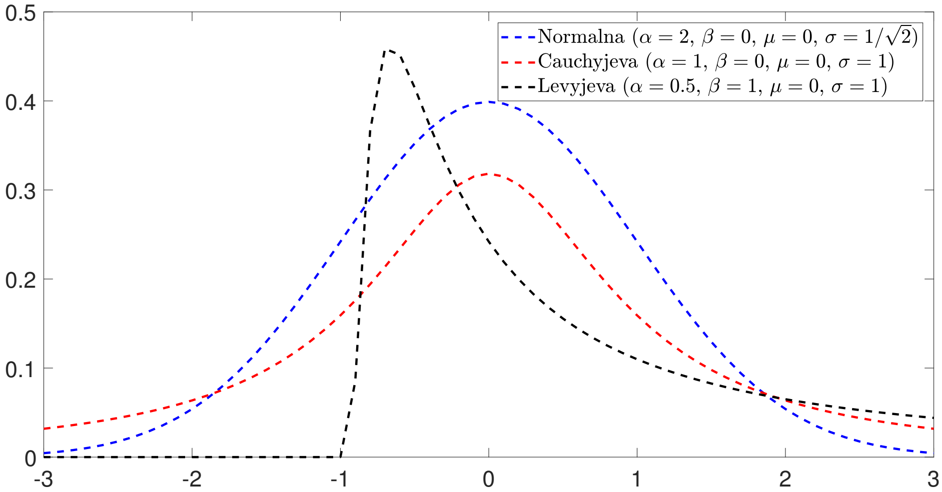
$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right) = e^{|t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) u_\alpha(t)\right]}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

gdje je $u_\alpha(t)$ definirana kao gore, sgn funkcija predznaka te $\alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1]$.

Na ovom mjestu ćemo radi jednostavnijeg navođenja svojstava stabilnih distribucija, uvesti sljedeću notaciju: stabilne distribucije ćemo označavati sa $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ i pisat ćemo $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$.

Kao što smo već rekli, stabilne slučajne varijable karakteriziramo pomoću karakteristične funkcije zato što njihove funkcije gustoće nisu poznate u analitičkom obliku osim u nekoliko iznimnih slučajeva koje smo ranije spomenuli - normalna, Cauchyjeva i Levyjeva distribucija.

Na slici (3.1) možemo vidjeti grafove funkcije gustoća jedinične normalne, Cauchyjeve i Levyjeve slučajne varijable, te odgovarajuće parametre u terminima karakteristične funkcije.



Slika 3.1: Funkcije gustoća jedinične normalne, Cauchyjeve i Levyjeve slučajne varijable

3.2 Karakterizacija stabilnosti preko karakterističnih funkcija

U ovom potpoglavlju ćemo dati još nekoliko osnovnih svojstava stabilnih distribucija koja će nam pomoći u interpretaciji parametara α, β, μ i σ.

Svojstva i ideje dokaza u ovom potpoglavlju uglavnom su preuzeti iz knjige G. Samorodnitskyja i M. S. Taqqua [10].

Karakteristična funkcija nam daje još jedan dokaz tvrdnje da su stabilne distribucije zatvorene na konvoluciju, u smislu zbrajanja nezavisnih stabilnih slučajnih varijabli, ako je indeks stabilnosti α fiksan.

Teorem 3.2.1. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable, $X_1 \sim S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$, $X_2 \sim S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$. Tada je $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, pri čemu su*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Dokaz. Pokazat ćemo tvrdnju najprije za $\alpha \neq 1$. Neka su φ_{X_1}, φ_{X_2} i $\varphi_{X_1+X_2}$ karakteristične funkcije od redom X_1, X_2 i $X_1 + X_2$.

Budući da su X_1 i X_2 nezavisne, po teoremu 1.1.37 vrijedi $\varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1}\varphi_{X_2}$.

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\ln\varphi_{X_1+X_2}(t) &= \ln\left(\varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)\right) = \ln\varphi_{X_1}(t) + \ln\varphi_{X_2}(t)\\
&= it\mu_1 - \sigma_1^\alpha\,|t|^\alpha\left[1 + i\beta_1\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] + it\mu_2 - \sigma_2^\alpha\,|t|^\alpha\left[1 + i\beta_2\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\\
&= it\mu_1 - \sigma_1^\alpha\,|t|^\alpha - i\beta_1\sigma_1^\alpha\,|t|^\alpha\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + it\mu_2 - \sigma_2^\alpha\,|t|^\alpha - i\beta_2\sigma_2^\alpha\,|t|^\alpha\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\\
&= it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)\,|t|^\alpha - i(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha)\,|t|^\alpha\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\\
&= it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)\,|t|^\alpha\left[1 + i\,\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Dokažimo sada za $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\ln\varphi_{X_1+X_2}(t) &= \ln\left(\varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)\right) = \ln\varphi_{X_1}(t) + \ln\varphi_{X_2}(t)\\
&= it\mu_1 - \sigma_1\,|t|\left[1 + i\beta_1\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right] + it\mu_2 - \sigma_2\,|t|\left[1 + i\beta_2\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right]\\
&= it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1+\sigma_2)\,|t| - \sigma_1\,|t|\,i\beta_1\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|) - \sigma_2\,|t|\,i\beta_2\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\\
&= it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1+\sigma_2)\,|t| - i(\beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2)\,|t|\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\\
&= it(\mu_1+\mu_2) - (\sigma_1+\sigma_2)\,|t|\left[1 + i\,\frac{\beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right].
\end{aligned}$$

□

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da su stabilne distribucije zatvorene na zbrajanje i množenje konstantom.

Teorem 3.2.2. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ i neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $X+a \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu+a)$. Ako je $a \neq 0$, tada vrijedi*

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\,\sigma, \operatorname{sgn}(a)\beta, a\mu), & \alpha \neq 1\\ S_1(|a|\,\sigma, \operatorname{sgn}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Dokaz. Prvu tvrdnju ćemo dokazati za slučaj $\alpha \neq 1$. Za slučaj $\alpha = 1$ dokaz ide analogno.

Neka je φ_X karakteristična funkcija od X. Dakle, $\varphi_X(t) = e^{it\mu - \sigma^\alpha|t|^\alpha\left[1+i\beta\operatorname{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]}$.

Prema prvoj tvrdnji teorema 1.1.37 navedenog u preliminarnim rezultatima, imamo

$$\begin{aligned}\ln\,\varphi_{X+a}(t) &= \ln\,(e^{ita}\varphi_x(t))\\ &= ita + it\mu - \sigma^\alpha\,|t|^\alpha\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\\ &= it(\mu + a) - \sigma^\alpha\,|t|^\alpha\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Nadalje, neka je $a \neq 0$. Pokazat ćemo drugu tvrdnju najprije za slučaj $\alpha \neq 1$. Prema istoj tvrdnji teorema 1.1.37 kao gore imamo

$$\begin{aligned}\ln\,\varphi_{aX}(t) &= \ln\,\varphi_X(at)\\ &= i(at)\mu - \sigma^\alpha\,|at|^\alpha\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(at)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\\ &= it(a\mu) - \sigma^\alpha\,|a|^\alpha\,|t|^\alpha\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Za $\alpha = 1$ imamo

$$\begin{aligned}\ln\,\varphi_{aX}(t) &= \ln\,\varphi_X(at)\\ &= i(at)\mu - \sigma\,|at|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(at)\frac{2}{\pi}\ln(|at|)\right]\\ &= i(at)\mu - \sigma\,|a|\,|t|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}(\ln(|a| + \ln(|t|)\right]\\ &= i(at)\mu - \sigma\,|a|\,|t|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|) + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|a|)\right]\\ &= it(a\mu) - \sigma\,|a|\,|t|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right] - \sigma\,|a|\,|t|\,i\beta\mathrm{sgn}(at)\frac{2}{\pi}\ln(|a|)\\ &= it(a\mu) - \sigma\,|a|\,|t|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right] - \sigma ati\beta\frac{2}{\pi}\ln(|a|)\\ &= it(a\mu - \sigma a\beta\frac{2}{\pi}\ln(|a|)) - \sigma\,|a|\,|t|\left[1 + i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(|t|)\right].\end{aligned}$$

□

Prva tvrdnja prethodnog teorema objašnjava zašto parametar μ nazivamo parametrom pomaka. Druga tvrdnja objašnjava zašto parametar σ nazivamo parametrom skale. Također, iz druge tvrdnje možemo zaključiti i da za $\alpha = 1$ množenje konstantom utječe nelinearno na parametar pomaka.

Korolar 3.2.3. *Za svaki* $0 < \alpha \leqslant 2$ *vrijedi*

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \tag{3.7}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktnom primjenom prethodnog teorema. □

Kažemo da je distribucija $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$

- **asimetrična udesno** ako je $\beta > 0$,
- **asimetrična ulijevo** ako je $\beta < 0$,
- **potpuno asimetrična udesno** ako je $\beta = 1$,
- **potpuno asimetrična ulijevo** ako je $\beta = -1$.

Parametar α utječe na repove distribucije. Kada je α mali, odnosno kada je blizu nuli, parametar asimetrije β je značajan. Kako se povećava vrijednost od α, smanjuje se efekt od β. Utjecaj parametra α na parametar β možemo vidjeti na slici (3.4).

Teorem 3.2.4. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. X ima simetričnu distribuciju ako i samo ako je $\beta = 0$ i $\mu = 0$.*

Dokaz. Neka je φ_X karakteristična funkcija od X. Kao što je navedeno u preliminarnim rezultatima, X je simetrična slučajna varijabla ako i samo ako je karakteristična funkcija φ_X realna.

Imamo

$$\varphi_X(t) = e^{it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sgn}(t) u_\alpha(t)\right]}.$$

Vidimo da je φ_X realna ako i samo ako vrijedi $\beta = 0$ i $\mu = 0$. □

Korolar 3.2.5. *X ima simetričnu distribuciju oko μ ako i samo ako je $\beta = 0$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom teorema 3.2.2 i teorema 3.2.4. □

Prethodna dva svojstva objašnjavaju zašto parametar β nazivamo parametar asimetrije.

Sljedeća dva teorema nam daju uvjete kada je stabilna slučajna varijabla i strogo stabilna. Prvi vrijedi u slučaju $\alpha \neq 1$, a drugi u slučaju $\alpha = 1$.

Teorem 3.2.6. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i neka je $\alpha \neq 1$. Tada je X strogo stabilna slučajna varijabla ako i samo ako je $\mu = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X. Neka su $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 > 0$ proizvoljne konstante.

Prema karakterizaciji stabilnosti iz teorema 2.3.5 i propoziciji 2.3.6, imamo

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 \stackrel{d}{=} a + bX,$$

za $b = (b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ i $a \in \mathbb{R}$.

Prema teoremu 3.2.2 imamo

$$b_1X_1 + b_2X_2 \sim S_\alpha\left(\sigma(b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(b_1 + b_2)\right),$$

$$a + bX \sim S_\alpha\left(\sigma(b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, \mu(b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Prema tome, $b_1X_1 + b_2X_2 \overset{d}{=} a + bX$ s uvjetom $a = 0$ vrijedi ako i samo ako je $\mu = 0$. □

Korolar 3.2.7. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ i neka je $\alpha \neq 1$. Tada je $X - \mu$ strogo stabilna.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktnom primjenom prethodnog teorema i teorema 3.2.2. □

Iz prethodnog teorema možemo zaključiti da, u slučaju $\alpha \neq 1$, svaka α-stabilna slučajna varijabla može postati strogo stabilna djelovanjem pomaka.

Teorem 3.2.8. *Neka je $X \sim S_1(\sigma, \beta, \mu)$. Tada je X strogo stabilna ako i samo ako je $\beta = 0$.*

Dokaz. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X. Neka su $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 > 0$ proizvoljne konstante.

Prema karakterizaciji iz teorema 2.3.5 i propoziciji 2.3.6, imamo

$$b_1X_1 + b_2X_2 \overset{d}{=} a + bX,$$

za $b = b_1 + b_2$ i $a \in \mathbb{R}$.

Prema teoremu 3.2.2 imamo

$$b_1X_1 + b_2X_2 \sim S_1\left(\sigma(b_1 + b_2),\ \beta,\ \mu(b_1 + b_2) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(b_1 \ln b_1 + b_2 \ln b_2)\right),$$

$$a + bX \sim S_1\left(\sigma(b_1 + b_2),\ \beta,\ \mu(b_1 + b_2) - \frac{2}{\pi}\sigma\beta(b_1 + b_2)\ln(b_1 + b_2)\right).$$

Prema tome, $b_1X_1 + b_2X_2 \overset{d}{=} a + bX$ s uvjetom $a = 0$ vrijedi ako i samo ako je za svaki $b_1 > 0$ i $b_2 > 0$,

$$\beta(b_1 \ln b_1 + b_2 \ln b_2) = \beta(b_1 + b_2)\ln(b_1 + b_2),$$

a to vrijedi ako i samo ako je $\beta = 0$. □

Prethodni teorem nam pokazuje da se, u slučaju $\alpha = 1$, α-stabilna slučajna varijabla ne može pomakom dovesti do stabilne slučajne varijable.

Korolar 3.2.9. *Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne jednako distibuirane stabilne slučajne varijable, $X_i \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ za $i = 1, \dots, n$, onda je*

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}), & \alpha \neq 1, \\ nX_1 + \frac{2}{\pi}\sigma\beta n \ln n, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Dokaz. Pokazat ćemo da tvrdnja vrijedi u slučaju $\alpha \neq 1$. Dokaz za $\alpha = 1$ ide analogno.

Uzastopnom primjenom teorema 3.2.2 dobivamo

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\sim S_\alpha(2^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \beta, 2\mu), \\ (X_1 + X_2) + X_3 &\sim S_\alpha(3^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \beta, 3\mu), \\ &\vdots \\ X_1 + \cdots + X_n &\sim S_\alpha(n^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \beta, n\mu). \end{aligned}$$

S druge strane, primjenom istog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 &\sim S_\alpha(n^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \beta, n^{\frac{1}{\alpha}}\mu), \\ n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + \mu(n - n^{\frac{1}{\alpha}}) &\sim S_\alpha(n^{\frac{1}{\alpha}}\sigma, \beta, n\mu). \end{aligned}$$

□

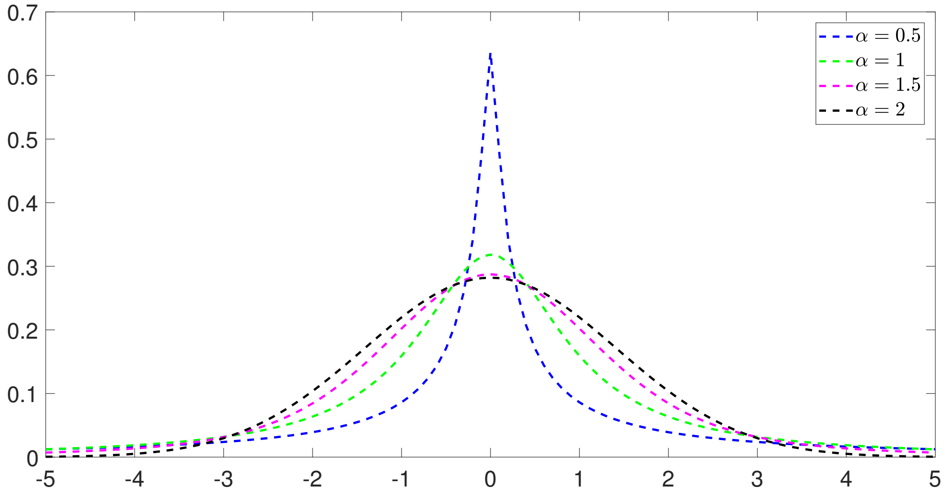
Primijetimo da, nakon svih do sada pokazanih svojstava, parametar pomaka μ je najmanje značajan te se zbog jednostavnosti često pretpostavlja da je $\mu = 0$.

Na slikama (3.2) i (3.3) vidimo utjecaj svakog od parametara α, β, μ i σ na funkciju gustoće stabilne slučajne varijable, pri čemu ostale parametre držimo fiksiranima. Funkcije gustoće, budući da smo spomenuli da one uglavnom nisu poznate u analitičkom obliku, izračunate su gotovom *pdf* funkcijom u programu MATLAB R2017b, koja koristi direktnu integracijsku metodu pomoću karakteristične funkcije.

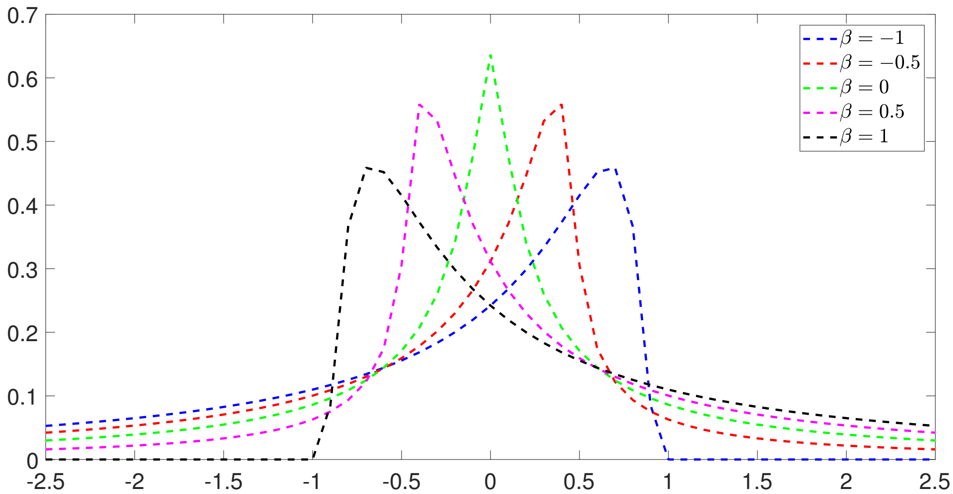
3.3 Vjerojatnosti repova stabilnih distribucija. Momenti stabilnih distribucija

Na repove stabilnih slučajnih varijabli utječe parametar asimetrije β, što ćemo vidjeti u niže navedenom svojstvu koje nam govori o asimptotskom ponašanju vjerojatnosti repova $P\{X < -\lambda\}$ i $P\{X > \lambda\}$, za $\lambda \to \infty$.

Navodimo sljedeći teorem iz knjige W. Fellera [2].



(a) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim α vrijednostima (uz $\beta = 0$, $\mu = 0$ i $\sigma = 1$)

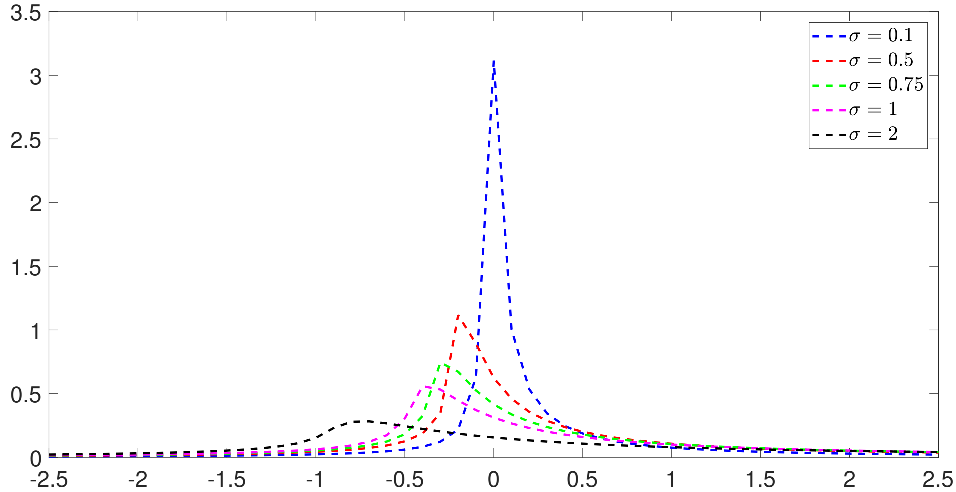


(b) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim β vrijednostima (uz $\alpha = 0.5$, $\mu = 0$ i $\sigma = 1$)

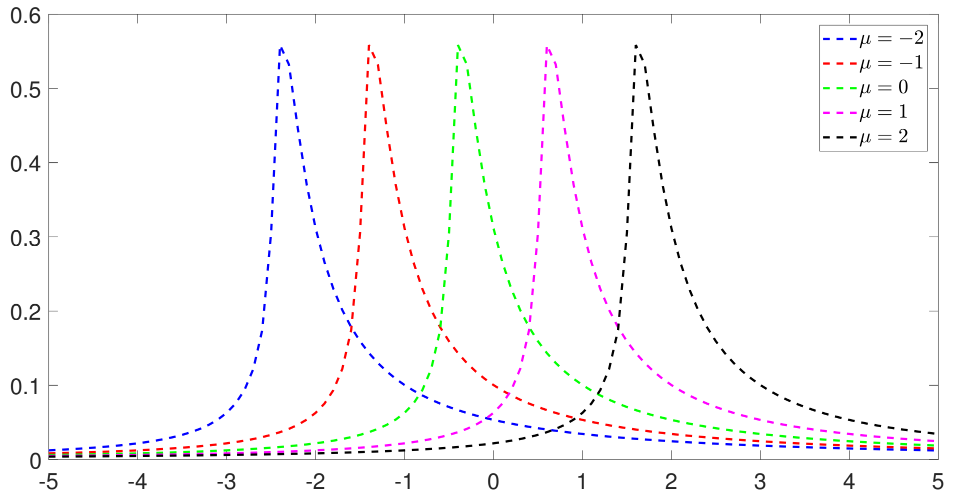
Slika 3.2: Usporedba funkcija gustoće stabilnih distribucija

Teorem 3.3.1. *Neka je $S_n \sim B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$. Neka je S_n^* reducirani broj uspjeha, $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$. Ako $\lambda \to \infty$ tako da $\frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} \to 0$, tada je*

$$P\{S_n^* > \lambda\} \approx \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}, \tag{3.9}$$



(a) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim σ vrijednostima (uz $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ i $\mu = 0$)



(b) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim μ vrijednostima (uz $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ i $\sigma = 1$)

Slika 3.3: Usporedba funkcija gustoće stabilnih distribucija

pri čemu nam $f(\lambda) \approx g(\lambda)$ *znači asimptotsku jednakost, tj.* $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda)/g(\lambda) = 1$.

Prema tome, u slučaju $\alpha = 2$, tj. u slučaju normalne slučajne varijable imamo

$$P\{X > \lambda\} \approx \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \tag{3.10}$$

Zbog simetrije imamo isto asimptotsko ponašanje i za $P\{X < -\lambda\}$.

U slučaju $\alpha < 2$, vjerojatnosti repova se ponašaju na sljedeći način.

Teorem 3.3.2. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *i neka je* $0 < \alpha < 2$. *Tada vrijedi*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} & = C_\alpha \dfrac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} & = C_\alpha \dfrac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha, \end{cases} \tag{3.11}$$

pri čemu je

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Dokaz se može pronaći u knjizi W. Fellera [2].

Korolar 3.3.3. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $0 < \alpha < 2$. *Tada je*

$$\mathrm{E}|X|^p < \infty, 0 < p < \alpha, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{E}|X|^p = \infty, p \geqslant \alpha. \tag{3.14}$$

Dokaz. Iz propozicije 1.1.26 navedene u preliminarnim rezultatima specijalno slijedi $\mathrm{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \int_0^\infty P\{X \geqslant x\}\, dx$. Iz toga slijedi, budući da je za svaku slučajnu varijablu X varijabla $|X|^r$ nenegativna, $\mathrm{E}(|X|^r) = \int_0^\infty P\{|X|^r \geqslant x\}\, dx$.

Iz toga i iz tvrdnje prethodnog teorema, slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.3.4. *Neka je* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$. *Neka je* $0 < \alpha < 2$ *i* $\beta = 0$ *u slučaju* $\alpha = 1$. *Neka je* $X_0 \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$. *Tada vrijedi*

$$\left(\mathrm{E}(|X|^p)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathrm{E}(|X_0|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \sigma. \tag{3.15}$$

Dokaz. Prema teoremu 3.2.2 imamo

$$\sigma X_0 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0),$$

odnosno, $\sigma X_0 \stackrel{d}{=} X$.

Prema tome,

$$\left(\mathrm{E}(|X|^p)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathrm{E}(|\sigma X_0|^p)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathrm{E}(|X_0|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \sigma.$$

□

Konstantu $\left(\mathrm{E}(|X_0|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$ iz prethodnog teorema ćemo označavati s $c_{\alpha,\beta}(p)$.

Propozicija 3.3.5. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$. Tada vrijedi*

$$\lim_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\mathrm{E}|X|^r = \alpha C_\alpha \sigma^\alpha, \tag{3.16}$$

gdje je C_α definirana kao u (3.12).

Dokaz. Iz korolara 3.3.3 i njegovog dokaza imamo za svaki $r < \alpha$

$$\mathrm{E}X_+^r = \int_0^\infty P\{X_+ \geqslant x^{\frac{1}{r}}\}\,dx. \tag{3.17}$$

Prema teoremu 3.3.2, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M = M(\varepsilon) \in (1, +\infty)$ takav da za svaki $t > M$ vrijedi

$$t^\alpha P\{X > t\} \in \left(C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha - \varepsilon,\, C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha + \varepsilon\right). \tag{3.18}$$

Ako fiksiramo $\varepsilon > 0$, imamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}X_+^r &= \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\int_0^\infty P\{X_+ \geqslant x^{\frac{1}{r}}\}\,dx \\
&= \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\left(\int_0^{M^\alpha} P\{X_+ \geqslant x^{\frac{1}{r}}\}\,dx + \int_{M^\alpha}^\infty P\{X_+ \geqslant x^{\frac{1}{r}}\}\,dx\right) \\
&= \left[t = x^{\frac{1}{r}}, dt = \frac{1}{r}x^{\frac{1}{r}-1}dx\right] \\
&= \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\left(\int_0^{M^{\frac{\alpha}{r}}} P\{X_+ \geqslant t\}\,rt^{r-1}dt + \int_{M^{\frac{\alpha}{r}}}^\infty P\{X_+ \geqslant t\}\,rt^{r-1}dt\right) \\
&= \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,r\int_{M^{\frac{\alpha}{r}}}^\infty \underbrace{t^\alpha P\{X_+ \geqslant t\}}_{\to C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha\ (t\to\infty)}\, t^{r-\alpha-1}dt \\
&= C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,r\int_{M^{\frac{\alpha}{r}}}^\infty t^{r-\alpha-1}dt \\
&= C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,r\left.\frac{t^{r-\alpha}}{r-\alpha}\right|_{M^{\frac{\alpha}{r}}}^\infty \\
&\overset{r<\alpha}{=} C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha\,\alpha.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Sličnu tvrdnju dobivamo za $\liminf\limits_{r\uparrow\alpha}$. Prema tome,

$$\alpha\left(C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha - \varepsilon\right) \leqslant \liminf_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}X_+^r \leqslant \limsup_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}X_+^r \leqslant \alpha\left(C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha + \varepsilon\right). \tag{3.20}$$

Zbog proizvoljnosti od ε imamo

$$\lim_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}X_+^r = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha. \tag{3.21}$$

Analogno dobivamo

$$\lim_{r\uparrow\alpha}(\alpha - r)\,\mathrm{E}X_-^r = C_\alpha \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha. \tag{3.22}$$

Sada tvrdnja slijedi iz činjenice $|X|^r = X_+^r + X_-^r$. □

Korolar 3.3.6. *Ako je $1 < \alpha \leqslant 2$, tada je parametar pomaka μ jednak očekivanju.*

Dokaz. Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $1 < \alpha \leqslant 2$.

Prema korolaru 3.3.3 , X ima konačno očekivanje za $1 < \alpha < 2$. Budući da je za $\alpha = 2$ X normalna slučajna varijabla, očekivanje je konačno i u tom slučaju.

Prema korolaru 3.2.7, $X - \mu$ je strogo stabilna slučajna varijabla. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao X. Prema karakterizaciji stabilne slučajne varijable 2.3.5 i prema propoziciji 2.3.6 imamo, za bilo koje $b_1, b_2 > 0$,

$$b_1(X_1 - \mu) + b_2(X_2 - \mu) \stackrel{d}{=} (b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(X - \mu). \tag{3.23}$$

Djelovanjem operatora matematičkog očekivanja na obje strane prethodne jednakosti dobivamo

$$b_1(\mathrm{E}X - \mu) + b_2(\mathrm{E}X - \mu) \stackrel{d}{=} (b_1^\alpha + b_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(\mathrm{E}X - \mu) \tag{3.24}$$

i prema tome slijedi $\mathrm{E}X = \mu$. □

3.4 Karakteristične funkcije simetričnih stabilnih slučajnih varijabli

Shodno teoremu 3.2.4, X je simetrična α-stabilna slučajna varijabla ako i samo ako je $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Simetrične α-stabilne distribucije označavat ćemo s $S\alpha S$.

Prema teoremu 3.1.1, primjećujemo da **karakteristična funkcija simetrične stabilne slučajne varijable** poprima znatno jednostavniji oblik:

$$\varphi_X(t) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Definicija 3.4.1. *Kažemo da je simetrična α-stabilna slučajna varijabla X* ***standardna simetrična α-stabilna slučajna varijabla*** *ako je $\sigma = 1$.*

Primijetimo da standardna simetrična α-stabilna slučajna varijabla s indeksom $\alpha = 2$, prema (2.11) ima distribuciju $N(0, 2)$.

Simetrične α-stabilne slučajne varijable imaju značajnu ulogu u teoriji stabilnih distribucija. Sljedeće svojstvo nam pokazuje da uvijek možemo transformirati $S\alpha'S$ slučajnu varijablu u $S\alpha S$ slučajnu varijablu, za $0 < \alpha < \alpha'$.

No, kako bismo mogli iskazati sljedeće svojstvo, potreban nam je izraz za Laplaceovu transformaciju stabilne slučajne varijable. Prvo ćemo, prema knjizi S. Kurepe [3], definirati Laplaceovu transformaciju.

Definicija 3.4.2. *Neka je dana funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f konvergira integral*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{3.26}$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = F$ zove ***Laplaceov transformat funkcije*** *f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ se zove* ***Laplaceova transformacija****.*

U prethodnoj definiciji, pod konvergencijom integrala $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ podrazumijevamo da funkcija f treba biti integrabilna na intervalu $[0, c]$, za svaki $c > 0$, te da limes $\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-st} f(t)\, dt$ mora biti konačan.

Još nam preostaje dati izraz za Laplaceovu transformaciju stabilne slučajne varijable potpuno asimetrične udesno. Ona je, prema knjizi G. Samorodnitskyja i M. S. Taqqua [10], dana sljedećim teoremom. Dokaz teorema se nalazi u istoj knjizi, no mi ga zbog njegove opsežnosti na ovom mjestu nećemo navoditi.

Teorem 3.4.3. *Neka je $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ stabilna slučajna varijabla potpuno asimetrična udesno, $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geqslant 0$.* ***Laplaceova transformacija slučajne varijable*** *X, definirana kao $\mathrm{E}e^{-\gamma X}$, $\gamma \geqslant 0$, dana je izrazom*

$$\mathrm{E}e^{-\gamma X} = \begin{cases} e^{-\frac{\sigma^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\gamma^\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ e^{\sigma\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.27}$$

Sada smo spremni navesti još jedno svojstvo simetričnih stabilnih slučajnih varijabli.

Propozicija 3.4.4. *Neka je $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$ simetrična α'-stabilna slučajna varijabla, $0 < \alpha' \leqslant 2$. Neka je $0 < \alpha < \alpha'$ i neka je Y $\frac{\alpha}{\alpha'}$-stabilna slučajna varijabla potpuno asimetrična udesno s Laplaceovom transformacijom $\mathrm{E}e^{-\gamma Y} = e^{-\gamma^{\frac{\alpha}{\alpha'}}}$, $\gamma > 0$. Drugim riječima, $Y \sim S_{\frac{\alpha}{\alpha'}}\left((\cos\frac{\pi\alpha}{2\alpha'})^{\frac{\alpha'}{\alpha}}, 1, 0\right)$. Pretpostavimo također da u X i Y nezavisne slučajne varijable.*

Tada vrijedi

$$Z = Y^{\frac{1}{\alpha'}} X \sim S_{\alpha}(\sigma, 0, 0). \tag{3.28}$$

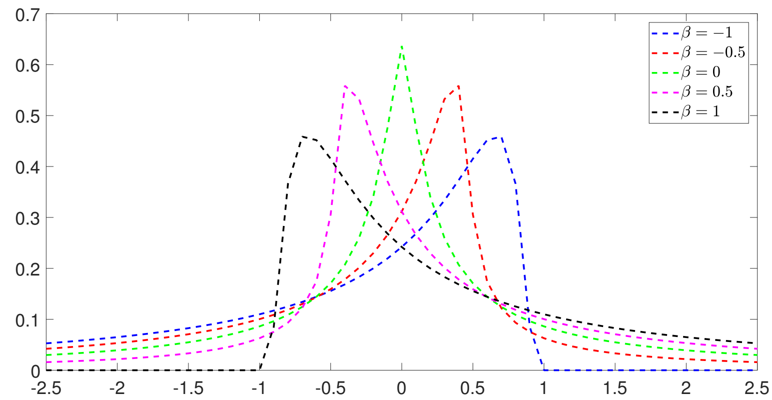
Dokaz. Za $t \in \mathbb{R}$, imamo, prema definiciji karakteristične funkcije simetrične stabilne slučajne varijable (3.25)

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \mathrm{E}e^{itZ} = \mathrm{E}e^{itY^{\frac{1}{\alpha'}}X} \\
&= [\text{X i Y nezavisne}] \\
&= \mathrm{E}\,[\mathrm{E}e^{i(tY^{\frac{1}{\alpha'}})X} | \, Y] \\
&= \mathrm{E}\,[e^{-\sigma^{\alpha'}|tY^{\frac{1}{\alpha'}}|^{\alpha'}}] \\
&= \mathrm{E}\,[e^{-\sigma^{\alpha'}|t|^{\alpha'}Y}] \\
&= [\text{Laplaceova transformacija}] \\
&= e^{(-\sigma^{\alpha'}|t|^{\alpha'})^{\frac{\alpha}{\alpha'}}} \\
&= e^{-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

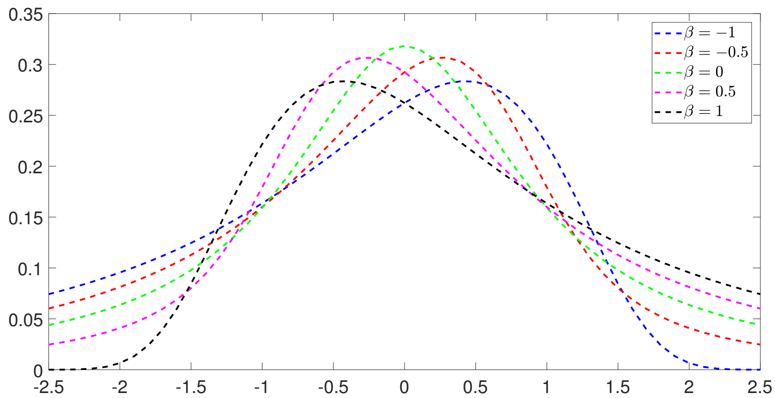
□

Posebno, to povlači sljedeće: ako je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem jednakim nuli i ako je Y pozitivna $\frac{\alpha}{2}$-stabilna slučajna varijabla nezavisna od X, tada vrijedi $Z = Y^{\frac{1}{2}}X \sim S\alpha S$.

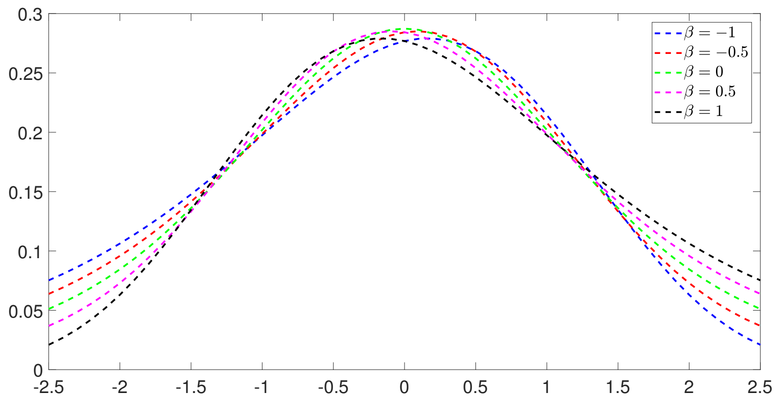
Taj zaključak nam pokazuje da je svaka simetrična stabilna slučajna varijabla $S\alpha S$ **uvjetno normalna slučajna varijabla**. To znači, ako je $X \sim N(0, \sigma^2)$, tada se simetrična stabilna slučajna varijabla $Z = Y^{\frac{1}{2}}X$ može neformalno pisati kao $N(0, \sigma^2 Y)$. Drugim riječima, Z je normalna slučajna varijabla sa slučajnom varijancom $\sigma^2 Y$.



(a) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim β uz $\alpha = 0.5$



(b) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim β uz $\alpha = 1$



(c) Funkcije gustoće stabilnih distribucija s različitim β uz $\alpha = 1.5$

Slika 3.4: Utjecaj parametra α na parametar β

Poglavlje 4

Simulacija stabilnih slučajnih varijabli. Procjena parametara

Prvi problem na koji ćemo se osvrnuti u ovom poglavlju je simulacija stabilnih slučajnih varijabli. Drugi problem je procjena parametara α, β, μ i σ stabilne slučajne varijable Y iz danog niza varijabli $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$

Postoji mnogo različitih algoritama i mnogo diskusija o simulaciji stabilnih slučajnih varijabli. Mnogi algoritmi koriste metodu inverzne funkcije koju ćemo proučiti u sljedećem potpoglavlju.

4.1 Metoda inverzne funkcije

Teorem 4.1.1. *Neka je U slučajna varijabla uniformno distribuirana na $(0,1)$ i neka je $F(x)$ monotono rastuća derivabilna funkcija na (a,b) s limesima $F(x) \to 0$, $x \to a$, i $F(x) \to 1$, $x \to b$ (slučajevi $a = -\infty$ i/ili $b = +\infty$ su također uključeni). Tada inverzna fukncija $F^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$, postoji i slučajna varijabla*

$$X = F^{-1}(U) \tag{4.1}$$

je distribuirana na intervalu (a,b) s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = F'(x). \tag{4.2}$$

Dokaz. Budući da je funkcija $F(x)$ strogo rastuća i $F_U(x) = x$, tada imamo

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{F^{-1}(U) < x\} = P\{U < F(x)\} = F_U(F(x)) = F(x),$$

te iz toga slijedi (4.2). □

Kako bismo ilustrirali neke primjene prethodnog teorema, napravit ćemo nekoliko primjera.

Primjer 4.1.2. ***Eksponencijalna slučajna varijabla*** E ***s očekivanjem 1***.

E ima funkciju distribucije $F_E(x) = 1 - e^{-x}$. *Prema prethodnom teoremu slijedi* $E = -\ln U$.

Primjer 4.1.3. ***Jedinična Cauchyjeva slučajna varijabla*** C.

C ima funkciju distribucije $F_C(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$. *Prema prethodnom teoremu imamo* $C = \tan\left[\pi(U - \frac{1}{2})\right]$. *Odnosno* $C = \tan V$, *gdje je* $V = \pi\left(U - \frac{1}{2}\right)$ *uniformna na* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Primjer 4.1.4. ***Normalna slučajna varijabla,*** $G \sim N(0,2)$.

Funkcija distribucije slučajne varijable G dana je sa $F_G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} dy$.

Taj integral ne znamo direktno izračunati. No, znamo izračunati funkciju distribucije sume kvadrata dvije nazavisne slučajne varijable G_1 *i* G_2 *jednako distribuirane kao i G. Označimo* $R^2 = G_1^2 + G_2^2$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
P\{R^2 < x\} &= P\{G_1^2 + G_2^2 < x\} \\
&= \int_{y_1+y_2<x} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{4}} dy_1 dy_2 \\
&= [\,\textit{polarne koordinate}, \; y_1 = r\cos\phi, \; y_2 = r\sin\phi) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{4}} r\, dr d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{r^2}{4}} r\, dr \\
&= [\,\textit{supstitucija; } u = r^2] \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{x} e^{-\frac{u}{4}}.
\end{aligned}$$

Odnosno, $R^2 = 4E$, *gdje je E kao u primjeru 4.1.2.*

Iz toga slijedi $R = 2\sqrt{E}$ *te* $G_1 = 2\sqrt{E}\cos V$ *i* $G_2 = 2\sqrt{E}\sin V$.

Analognim zaključkom dobivamo $R = \sqrt{2E}$ *te* $G_1 = \sqrt{2E}\cos V$ *i* $G_2 = \sqrt{2E}\sin V$, *pri čemu su* G_1 ***i*** G_2 ***jedinične normalne slučajne varijable***.

Primjer 4.1.5. ***Jedinična Levyjeva slučajna varijabla*** L_1***, Levyjeva slučajna varijabla*** L ***s parametrima*** a ***i*** b***,*** $L = a + bL_1$.

Budući da je $L_1 = G^{-2}$, pri čemu je G jedinična normalna slučajna varijabla, imamo $L_1 = \frac{1}{2E\cos^2 V}$, te $L = a + \frac{b}{2E\cos^2 V}$.

Računanje vjerojatnosti $P\{0 \leqslant X \leqslant x\}$ i $P\{X \geqslant x\}$ uglavnom se temelji na **Zolotarevljevoj integralnoj reprezentaciji α-stabilne slučajne varijable**. Ona za simetrične α-stabilne varijable, $S\alpha S$, $\alpha \neq 1$, prema knjizi V. Zolotareva [13] poprima sljedeći oblik.

Teorem 4.1.6. *Za $0 \alpha \leqslant 2$, $\alpha \neq 1$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ definiramo*

$$U_\alpha(\gamma) = \Big(\frac{\sin \alpha\gamma}{\cos\gamma}\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos((1-\alpha)\gamma)}{\cos\gamma}. \tag{4.3}$$

Neka je $X \sim S_\alpha(1,0,0)$. Tada za $x \geqslant 0$ vrijedi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} U_\alpha(\gamma)}\, d\gamma = \begin{cases} P\{0 \leqslant X \leqslant x\}, & 0 < \alpha < 1 \\ P\{X \geqslant x\}, & 1 < \alpha \leqslant 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Generiranje stabilnih slučajnih varijabli često se temelji na sljedećoj propoziciji.

Propozicija 4.1.7. *Neka je U uniformna na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i neka je E eksponencijalna slučajna varijabla s očekivanjem 1.*

Tada vrijedi

$$X = \frac{\sin \alpha U}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sim S_\alpha(1,0,0). \tag{4.5}$$

Dokaz. Kada U poprima vrijednosti u $(0, \frac{\pi}{2})$, desna strana u (4.5) se može zapisati kao

$$\left(\frac{\alpha(U)}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \tag{4.6}$$

gdje je

$$\alpha(U) = \left(\frac{\sin \alpha U}{\cos U}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4.7}$$

Promotrimo prvo slučaj $0 < \alpha < 1$. Imamo

$$\begin{aligned}
P\{0 \leqslant X \leqslant x\} &= P\{0 \leqslant X \leqslant x,\ U > 0\} \\
&= P\left\{0 \leqslant \left(\frac{\alpha(U)}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \leqslant x,\ U > 0\right\} \\
&= P\left\{E \geqslant x^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha(U),\ U > 0\right\} \\
&= 1 - 1 + \mathrm{E}e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha(U)}\mathbf{1}_{\{U>0\}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha(U)} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\, dU \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\alpha(U)}\, dU,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

te prema teoremu 4.1.6 zaključujemo $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$.

U slučaju $1 < \alpha \leqslant 2$ analognim postupkom računamo $P\{X \geqslant x\} = P\{X \geqslant x,\ U > 0\}$ i opet prema teoremu 4.1.6 zaključujemo $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$.

U slučaju $\alpha = 1$, (4.5) postaje $X = \tan U$ te prema primjeru 4.1.3 X ima jediničnu Cauchyjevu distribuciju. □

4.2 Druga parametrizacija stabilne slučajne varijable pomoću karakteristične funkcije. Dodatna svojstva stabilnih slučajnih varijabli

U teoremu 3.1.1 dali smo karakterizaciju stabilne slučajne varijable pomoću karakteristične funkcije i nju ćemo označavati sa $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_1; 1)$. Ta parametrizacija je najčešće korištena u literaturi za dokaze različitih svojstava stabilnih slučajnih varijabli.

Postoji više parametrizacija stabilnih slučajnih varijabli. Mi ćemo sada uvesti još jednu.

Teorem 4.2.1. *Slučajna varijabla X je* ***stabilna slučajna varijabla*** *ako postoje parametri $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1,1]$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \geqslant 0$ takvi da joj karakteristična funkcija φ_X ima sljedeći oblik*

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right) \tag{4.9}$$

$$= \begin{cases} e^{it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)(|\sigma t|^{1-\alpha} - 1)\right]}, & \alpha \neq 1 \\ e^{it\mu - \sigma|t|\left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(t)\frac{2}{\pi}\ln(\sigma|t|)\right]}, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

gdje je sgn *standardna funkcija predznaka.*

Prethodnu parametrizaciju ćemo označavati sa $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0; 0)$. Ova se parametrizacija uglavnom koristi u primjenama zbog svojeg boljeg numeričkog ponašanja i zbog činjenice da je neprekidna u sva 4 parametra.

Parametri α, β i σ imaju isto značenje u obje parametrizacije, jedino je lokacijski parametar μ drugačiji.

Lokacijski parametri μ_0 iz $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0; 0)$ i μ_1 iz $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_1; 1)$ povezani su pomoću sljedećih relacija:

$$\mu_0 = \begin{cases} \mu_1 + \beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \mu_1 + \beta\frac{2}{\pi}\sigma \ln \sigma, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu_0 - \beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \mu_0 - \beta\frac{2}{\pi}\sigma \ln \sigma, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Primijetimo da se u slučaju $\beta = 0$ parametrizacije $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0; 0)$ i $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu_1; 1)$ podudaraju.

Kada su $\alpha \neq 1$ i $\beta \neq 0$, parametrizacije se razlikuju za pomak $\beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ koji teži u beskonačno kada $\alpha \to 1$.

Sada, kada smo uveli i drugu parametrizaciju, iskazat ćemo još jedno svojstvo stabilnih slučajnih varijabli koje predstavlja generalizaciju definicije 2.3.1 i teorema 2.3.5, odnosno svojstvo da je linearna kombinacija nezavisnih stabilnih slučajnih varijabli s istim indeksom stabilnosti α također stabilna slučajna varijabla.

Teorem 4.2.2. *Ako su $X_j \sim S(\alpha, \beta_j, \sigma_j, \mu_j; k)$ za $j = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1$ i X_j međusobno nezavisne slučajne varijable, tada*

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n \sim S(\alpha, \beta, \sigma, \mu; k), \tag{4.13}$$

pri čemu su

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \operatorname{sgn}(a_j) |a_j\sigma_j|^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} |a_j\sigma_j|^\alpha},$$

$$\sigma^\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_j\sigma_j|^\alpha,$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \beta \sigma \tan(\frac{\pi\alpha}{2}), & k = 0, \alpha \neq 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \beta \frac{2}{\pi} \sigma \ln \sigma, & k = 0, \alpha = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j, & k = 1. \end{cases}$$

Ova generalizacija dopušta različite parametre asimetrije, lokacije i skale u slučajnim varijablama X_j, ali je nužno da je parametar α jednak u svima. Zbrajanje dvije stabilne slučajne varijable s različitim indeksima stabilnosti ne daje stabilnu slučajnu varijablu.

4.3 Prikladnost stabilnih modela

U nekoliko navrata je spomenuto da ne postoji opća formula u zatvorenoj formi za stabilne funkcije gustoće g i stabilne funkcije distribucije G iz 2.3.7, ali postoje pouzdani programi za rad sa stabilnim distribucijama.

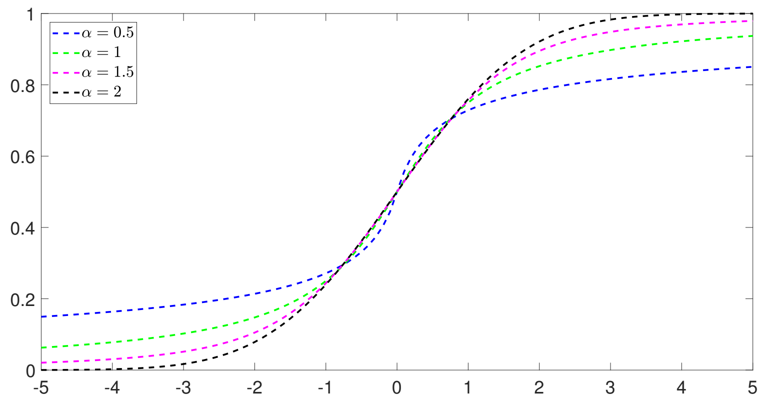
Postoji mnogo razloga za korištenje stabilnih distribucija. Jedan od njih je već spomenuti generalizirani granični centralni teorem 2.7.1 koji nam govori da je jedini mogući netrivijalni limes normalizirane sume nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli stabilna slučajna varijabla. Još jedan razlog je taj što veliki skupovi podataka, kao što smo već spomenuli, često imaju teške repove i asimetriju. Takvi podaci se uglavnom ne mogu dobro opisati modelima koji koriste normalnu distribuciju, no neki od njih se ipak mogu dobro opisati stabilnim modelom.

Postoji mnogo diskusija i argumenata protiv korištenja stabilnih modela. Najčešće je to razlog da stabilne distribucije dopuštaju beskonačnu varijancu budući da se u mnogim primjenama raznih modela upravo varijanca uzima kao mjera ”raspršenosti”. U slučaju stabilnih modela, tu ulogu preuzima upravo parametar skale σ. Još jedan razlog je taj da su se primjene stabilnih distribucija počele ozbiljnije razvijati tek u zadnjih 20-ak godina te zapravo prije toga i nismo mogli uspoređivati skupove podataka sa predloženim stabilnim modelom.

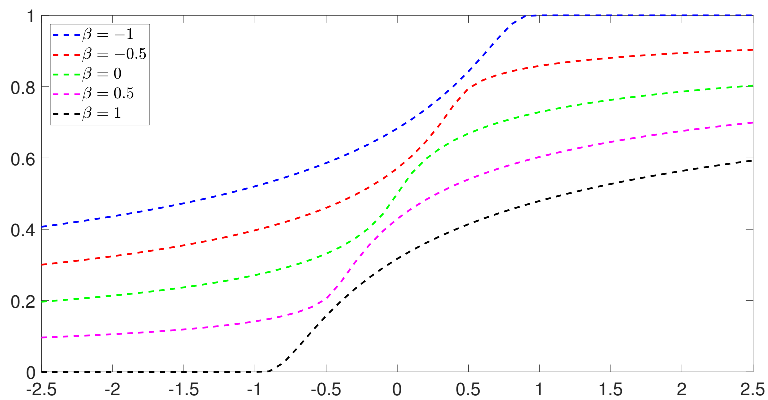
4.4 Program STABLE

Postoji javno dostupan besplatan program STABLE [8] koji računa funkcije gustoće, kumulativne funkcije distribucije, kvantile stabilnih distribucija, procjenu parametara metodom maksimalne vjerodostojnosti, i radi razne analize podataka da bi ocijenio koliko dobro su opisani podaci za koje tražimo stabilni model. Ovaj program je rješavanjem mnogih dotadašnjih numeričkih poteškoća olakšao korištenje stabilnih distribucija u praktičnim primjenama. Zbog kompleksnosti i opsežnosti samih formula, algoritama i programa, detalje nećemo navoditi u ovom radu, no mogu se pronaći u [9], [7] i [6].

Računanje funkcija gustoća i distribucija radi na isti način kao i funkcije *pdf* i *cdf* u programu MATLAB2017b.



(a) Funkcije distribucije stabilnih distribucija s različitim α vrijednostima (uz $\mu = 0, \beta = 0$ i $\sigma = 1$)



(b) Funkcije distribucije stabilnih distribucija s različitim β vrijednostima (uz $\alpha = 0, \mu = 0$ i $\sigma = 1$)

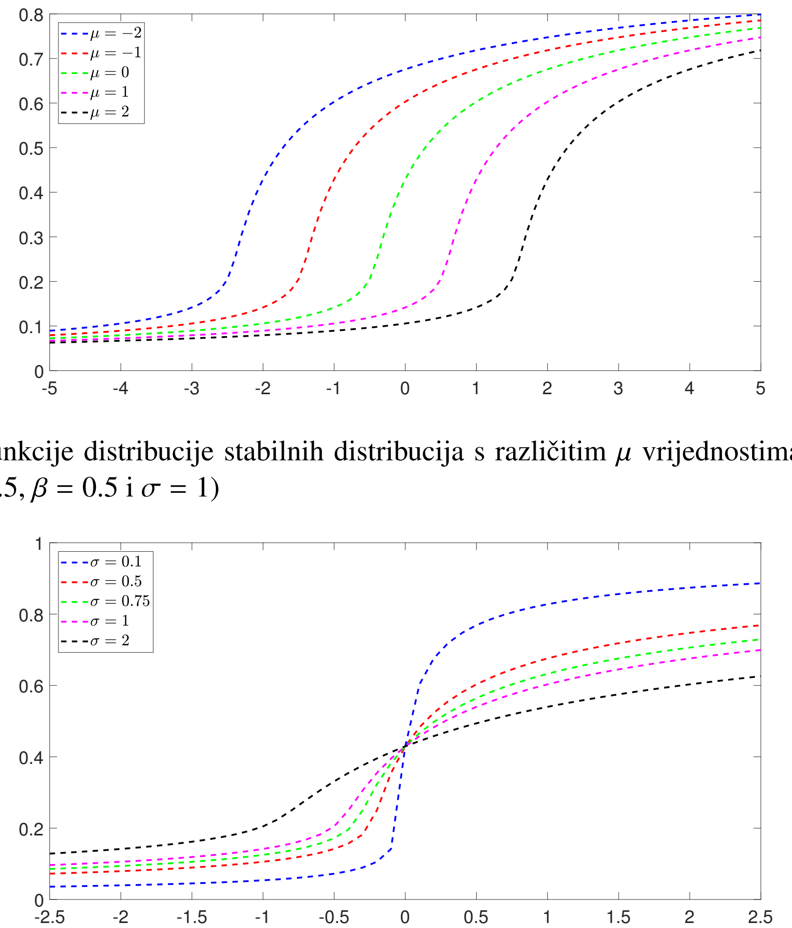
Slika 4.1: Usporedba funkcija distribucija stabilnih slučajnih varijabli

Grafove funkcija gustoća stabilnih slučajnih varijabli s raznim ulaznim parametrima α, β, σ i μ, kao i funkcije gustoća jedinične normalne, Cauchyjeve i Levyjeve distribucije, već smo prikazali na slikama (3.2), (3.3), (3.4) i (3.1) te taj dio nećemo ponavljati u ovom dijelu.

Sada ćemo pogledati utjecaj parametara α, β, σ i μ na funkcije distribucije stabilnih slučajnih varijabli.

Na slici (4.1a) vidimo utjecaj parametra α, na slici (4.1b) vidimo utjecaj parametra β na funkciju distribucije stabilnih slučajnih varijabli.

Na slici (4.2a) vidimo utjecaj parametra μ, i na kraju na slici (4.2b) vidimo utjecaj parametra σ na funkciju distribucije stabilnih slučajnih varijabli.

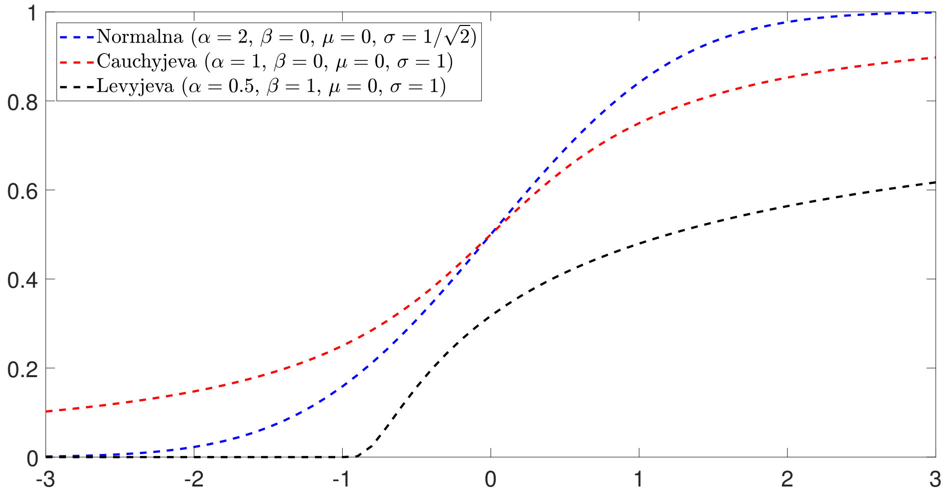


(a) Funkcije distribucije stabilnih distribucija s različitim μ vrijednostima (uz $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ i $\sigma = 1$)

(b) Funkcije distribucije stabilnih distribucija s različitim σ vrijednostima (uz $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ i $\mu = 0$)

Slika 4.2: Usporedba funkcija distribucija stabilnih slučajnih varijabli

Također, na slici (4.3) usporedbu funkcija distribucija jedinične normalne, Cauchyjeve i Levyjeve slučajne varijable.



Slika 4.3: Funkcije distribucija jedinične normalne, Cauchyjeve i Levyjeve sl. varijable

Modeliranje financijskih podataka

Primjena stabilnih distribucija u financijskom modeliranju proizlazi iz činjenice da one generaliziraju normalnu distribuciju te dopuštaju teške repove i asimetriju, što često susrećemo u financijskim podacima.

Program STABLE kao jednu od opcija nudi procjenu parametara α-stabilne distribucije za ulazni skup podataka.

Za skup podataka smo uzeli srednji tečaj u zadnjih 1000 dana (do 25. listopada 2017.) između eura i hrvatske kune.

Podatke smo najprije logaritmirali, odnosno kao ulazni skup podataka uzeli smo

$$y_t = \ln \frac{x_{t+1}}{x_t}.$$

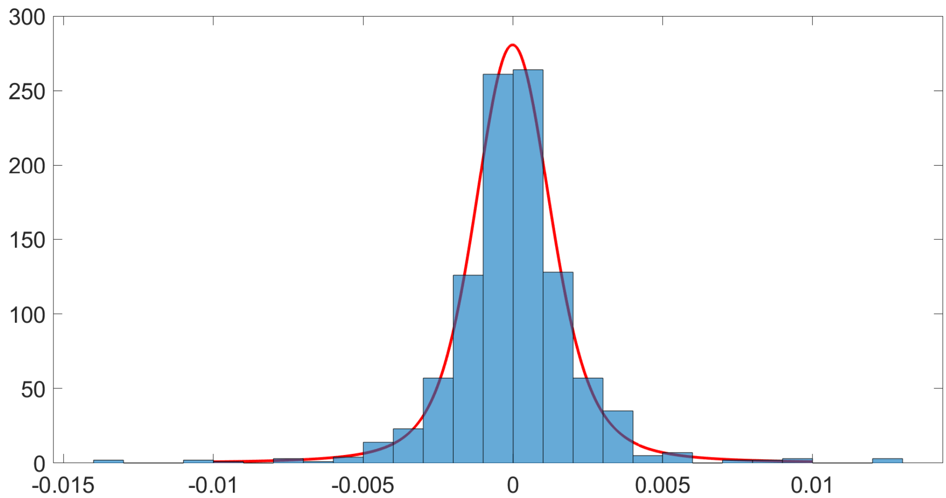
Metodom maksimalne vjerodostojnosti dobili smo procjenu 95%-tnih pouzdanih intervala sva 4 parametra:

- pouzdani interval za α: (1.4514,1.6478),
- pouzdani interval za β: (−0.1544,0.2514),
- pouzdani interval za μ: (−0.0002093,0.000012969),
- pouzdani interval za σ: (0.00095349,0.0011).

Odnosno, procjena parametara stabilne distribucije koja opisuje naše podatke je:

$$\alpha = 1.5496, \beta = 0.0485, \mu = -0.000098164, \sigma = 0.0010199.$$

Na slici (4.4) možemo vidjeti funkciju gustoće stabilne slučajne varijable s parametrima koje smo prethodno naveli te histogram ulaznih podataka.



Slika 4.4: Funkcija gustoće stabilne slučajne varijable s parametrima procijenjenima programom STABLE i histogram ulaznih podataka

Bibliografija

[1] Ash, R. B.: *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York, 1972.

[2] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, 1967.

[3] Kurepa, S.: *Matematička analiza 2 - Funkcije jedne varijable*. Tehnička knjiga Zagreb, 1971.

[4] Mathematical Sciences, UAH: *The Irwin-Hall Distribution*, 1997. `http://www.math.uah.edu/stat/special/IrwinHall.html`, posjećena 2017-08-24.

[5] Mathematical Sciences, UAH: *The Lévy Distribution*, 1997. `http://www.math.uah.edu/stat/special/Levy.html`, posjećena 2017-08-12.

[6] Nolan, J. P.: *Numerical computation of stable densities and distribution functions*, 1997. `http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/density.pdf`, posjećena 2017-10-12.

[7] Nolan, J. P.: *Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions*, 2001. `http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/mle.pdf`, posjećena 2017-10-12.

[8] Nolan, J. P.: *Information on stable distributions*, 2005. `http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/stable.html`, posjećena 2017-10-12.

[9] Nolan, J. P.: *Users guide for STABLE 4.0*, 2006. `http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/stable.txt`, posjećena 2017-10-12.

[10] Samorodnitsky, G. i M. S. Taqqu: *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Taylor & Francis, 1994.

[11] Sarapa, N.: *Teorija vjerojatnosti*. Školska Knjiga, 1987.

[12] Uchaikin, V. V. i V. M. Zolotarev: *Chance and Stability: Stable Distributions and Their Applications*. VSP, 1999.

[13] Zolotarev, V.M.: *One-dimensional Stable Distributions; Translations of Mathematical Monographs - Vol 65*. American Mathematical Society, 1986.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada bio je najprije definirati stabilnu slučajnu varijablu te iznijeti osnovna svojstva stabilnosti na primjerima slučajnih varijabli koje su nam poznate — normalne, Cauchyjeve i Levyjeve. Nakon toga smo uveli karakterizaciju stabilne slučajne varijable koja proizlazi iz generaliziranog centralnog graničnog teorema i karakterizaciju stabilne slučajne varijable pomoću karakteristične funkcije te smo pomoću njih pokazali razna zanimljiva svojstva ovih slučajnih varijabli. Konačno, pokazali smo i na koji način možemo simulirati stabilne slučajne varijable te smo ilustrirali korištenje programa STABLE za procjenu parametara stabilne slučajne varijable na danim podacima.

Summary

The aim of this diploma thesis is to define a stable random variable and to outline basic stability properties on the known random variables — the normal one, the Cauchy one and the Levy one. After that, we introduced the characterization of a stable random variable, which follows from the generalized central limit theorem and the characterization of a stable random variable in terms of its characteristic function, and consequently we showed various interesting properties of these random variables. Finally, we have demonstrated how we can simulate stable random variables and we have illustrated the use of the STABLE program for estimating parameters of a stable random variable on the given data.

Životopis

Rođena sam 6. kolovoza 1992. godine u Varaždinu, a odrasla sam u malom mjestu Makojišće Donje pored Novog Marofa.

1999. godine upisala sam Osnovnu školu Podrute u kojoj sam otkrila poseban interes za prirodne znanosti i matematiku te sam nakon završetka osnovne škole, 2007. godine, upisala Prirodoslovno-matematički smjer u Drugoj gimnaziji Varaždin, koju završavam 2011. godine.

Iste godine upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Na trećoj godini studija odabrana sam za demonstratora na kolegiju Teorija brojeva. Na istoj godini učlanjujem se u najveću studentsku udrugu u Zagrebu, eSTUDENT, u kojoj sudjelujem kao član organizacije natjecanja u data miningu i prediktivnoj analizi.

2015. godine, završetkom preddiplomskog studija, odlučujem se za upis Diplomskog studija Matematička statistika, također na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. U istoj godini preuzimam voditeljsku ulogu u organizaciji prethodno spomenutog natjecanja. Isto tako, na kraju akademske godine primljena sam na program stručne prakse u Erste banci u Zagrebu. Na zadnjoj godini studija postajem član predsjedništva eSTUDENTa te nakon odrađene prakse počinjem raditi u Erste banci na poziciji PL/SQL programera, gdje ostajem raditi i nakon završetka studija.