Dodatne teme u srednjoškolskoj nastavi matematike - Teorija grafova

Mišolić, Monika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Monika Mišolić

DODATNE TEME U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE - TEORIJA GRAFOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, studeni 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija grafova grana je matematike kojoj je temelje dao švicarski matematičar Leonhard Euler u prvoj polovici 18. stoljeća rješivši problem sedam mostova Königsberga. Teoriju grafova nije teško povezati sa stvarnim životom budući da su nam njeni osnovni pojmovi poput puta, povezanosti, vrhova, šetnje, poznati iz svakodnevice. Također, bez obzira na to što neki problemi teorije grafova nisu nimalo jednostavni, svi se mogu lako vizualno predočiti, što daje teoriji grafova mogućnost realizacije u srednjoškolskoj nastavi matematike.

Iako nije uvrštena u obaveznu nastavu matematiku, teorija grafova lako je primjenjiva u nastavi, doprinosi razvijanju logičkog načina razmišljanja te povezivanju matematike sa stvarnim životom.
Cilj ovog diplomskog rada je upoznati nastavnike matematike s područjem teorije grafova te ih potaknuti da ju uvedu u sklopu fakultativne nastave matematike u srednjoj školi.
U zagrebačkoj XV. gimnaziji može se naći primjer dobre prakse za poučavanje teorije grafova. Za tu je nastavu osmišljena i vježbenica koja je potaknula nastanak ovog diplomskog rada.

U prvom dijelu rada predstavljena je matematička teorija uvodnih koncepata i pripadnih tvrdnji iz teorije grafova koji su prikladni za srednjoškolsku nastavu. To je podloga o teoriji grafova koju nastavnik mora imati kako bi mogao osmisliti i provesti razne učeničke aktivnosti. Drugi dio vezan je uz praktičnu primjenu, sastoji se od ideja za provedbu učeničkih aktivnosti na nastavi.

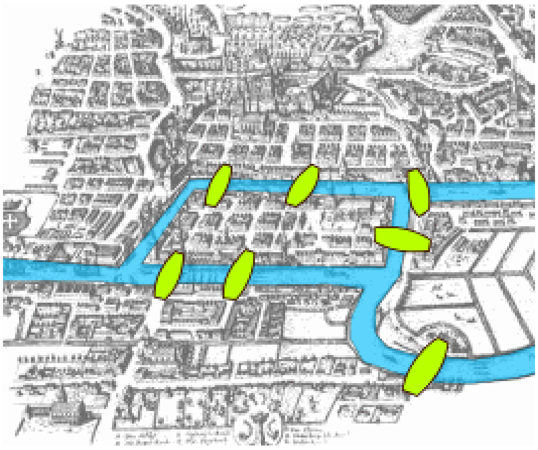
Poglavlje 1

Povijesni kontekst

U ovom odlomku nalazi se opis problema sedam mostova Königsberga čijim je rješavanjem nastala teorija grafova. Također će biti riječi o životu i djelu Leonharda Eulera, jednog od najvećih matematičara svih vremena.

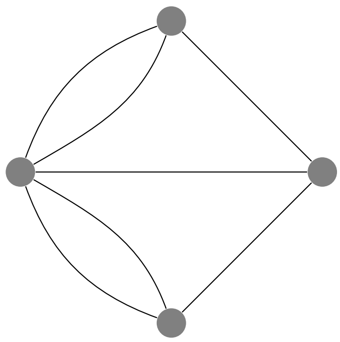
1.1 Problem sedam mostova Königsberga

Königsberg je bio glavni grad Istočne Prusije, nekadašnje njemačke provincije. Nakon Drugog svjetskog rata i Prusija i Königsberg prestaju postojati. Königsbergom je prolazila rijeka Pregel koja je grad dijelila na četiri dijela, dva otoka i dva obalna dijela. Ti dijelovi teritorija bili su povezani sa sedam mostova kako je prikazano na slici 1.1.



Slika 1.1: Königsberški mostovi

Postoje dvije varijante pitanja, ovisno o tome želi li se ispitati je li graf Eulerov ili skoro-Eulerov. Detaljnije o tome kakvi su to grafovi bit će riječi u poglavlju 3. Ukoliko se misli na Eulerov graf pitanje glasi: Može li se po Königsbergu napraviti takva šetnja da se svakim mostom prođe točno jedanput i vrati na početak? Druga varijanta pitanja glasi: Može li se po Königsbergu napraviti takva šetnja da se svakim mostom prođe točno jedanput i završi ne nužno u polaznoj točki?
U svom članku, 1736. godine, Euler je prvi ponudio rješenje problema. Iako naoko banalan problem, Euler je shvatio da za njegovo rješenje neće biti dovoljna niti geometrija niti algebra niti aritmetika. Novu granu matematike on je tada nazvao geometrijom položaja.
Pretpostavio je da je izbor puta na kopnu nebitan. Fokusirao se isključivo na slijed prelazaka preko mostova. Ta mu je pretpostavka omogućila da stvori apstraktni prikaz problema kako je prikazano na slici 1.2: kopnene površine su vrhovi, a mostovi bridovi. Vrhovi su povezani bridovima i tvore matematičku strukturu koja se naziva graf.



Slika 1.2: Pojednostavljeni prikaz problema Königsbergških mostova

Osim krajnjih točaka šetnje, dolazak na vrh i odlazak mora biti preko mosta (brida). Stoga broj puta kada se dođe do vrha, a da on nije kraj šetnje, mora biti jednak broju puta kada se izađe s tog vrha. Drugim riječima, to znači da broj mostova koji dodiruju kopno mora biti paran ukoliko most želimo prijeći samo jednom. Polovicom mostova prijeći će se kada se ide prema kopnu, a polovicom kada se ide od kopna. Budući da su svi vrhovi spojeni s neparnim brojem bridova, nije moguće proći sve mostove samo jedanput.
Euler je pokazao da šetnja po grafu u kojoj se svaki brid koristi samo jednom ovisi o stupnju vrhova. Stupanj vrha predstavlja broj bridova koji ga dotiču. Šetnja će biti moguća samo ako je graf povezan i ako nijedan ili dva vrha imaju neparan stupanj. Ovakva šetnja po grafu zove se Eulerova šetnja, a ostvariva je samo ako započinje

s vrhom neparnog stupnja i završava s vrhom neparnog stupnja. Ovime je Euler započeo s novim područjem u matematici.

1.2 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707. – 1783.) bio je švicarski matematičar, fizičar i astronom (vidi [5]). Matematici ga je podučavao Johann Bernoulli koji ujedno zaslužan za uvjeravanje Eulerova oca da sinu dopusti studij matematike. Naime Eulerov otac bio je protestantski svećenik i želio je da sin nastavi tradiciju. Već s devetnaest godina objavio je znanstveni rad, a za života je objavio preko 380 članaka. Radio je kao profesor fizike a kasnije i matematike. Oženio se i imao trinaestero djece, za koju tvrdi da su mu bila najveća inspiracija. Eulerovo zdravlje je nakon preboljene groznice 1735. postajalo sve slabije te je nakon nekoliko godina počeo imati probleme s vidom. Zanimljivo je da je pola svojih radova objavio u razdoblju kada je bio potpuno slijep. U zapisivanju su mu pomogla dva sina koja je podučavao matematici. Na sam dan svoje smrti svog je unuka učio matematici te se bavio proračunima kretanja dvaju balona.

Eulerov jedini doprinos nije samo teorija grafova. U nastavku se nalaze neki od njegovih doprinosa.
Euler je otac teorije diferencijalnih jednadžbi. Uveo je metodu multiplikatora pri njihovu rješavanju. Prilikom rješavanja diferencijalnih jednadžbi koristio je razvoje funkcija u redove potencija. Uočio je vezu između eksponencijalne funkcije i funkcija *sinus* i *kosinus* u njenom razvoju u red potencija. Danas je ta veza poznata pod nazivom *Eulerova formula*, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Autor je oznaka i i e te je još u ono vrijeme izračunao 23 decimale broja e. Također je broj e predložio za bazu prirodnog logaritma te uveo oznaku $f(x)$ za pravilo pridruživanja funkcije.
Iako još nije postojala precizna definicija funkcije, zahvaljujući Euleru, ona postaje središnji matematički pojam. Čak je i prvi tvrdio da je područje koje se bavi funkcijama matematička analiza. Isto ne u današnjoj preciznosti, no prvi put spominje neprekidne funkcije.

Provjerio je i cijeli niz Fermatovih hipoteza pa je tako dokazao Veliki Fermatov teorem (Ne postoje prirodni brojevi x, y, z i broj $n > 2$ koji zadovoljavaju jednadžbu $x^n + y^n = z^n$) za $n = 3$. Prvi je uočio da se teorija brojeva može proučavati pomoću metoda matematičke analize i time postao osnivač analitičke teorije brojeva.
Uveo je Eulerovu φ - funkciju: Za prirodan broj n funkcija $\varphi(n)$ je broj prirodnih brojeva do n i uključujući n koji su relativno prosti s n. Euler je poopćio Mali Fer-

matov teorem, danas poznat kao Eulerov teorem: Za broj a, relativno prost s n, broj $a^{\varphi}(n) - 1$ je djeljiv s n.

Poglavlje 2

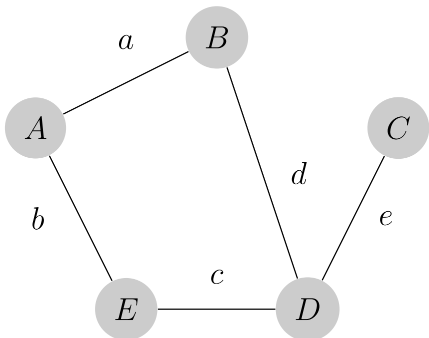
Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju bit će navedeni pojmovi potrebni za razumijevanje osnova teorije grafova.

Definicija 2.0.1. ***Graf*** *G je uređeni par $G = (V(G), E(G))$. $V = V(G)$ je neprazan konačan skup, čiji su elementi* ***vrhovi (čvorovi)*** *od G. $E = E(G)$ je konačan skup neuređenih parova iz skupa V (ne nužno različitih) koje nazivamo* ***bridovima****.*

Napomena 2.0.2. Oznake za skup vrhova i skup bridova dolaze od engleskih riječi *vertex* i *edge*.

Primjer 2.0.3. Vrhovi grafa prikazanog na slici 2.1 su A, B, C, D i E, dok su bridovi a, d, e, c i b, odnosno AB, BD, CD, DE i AE.



Slika 2.1: Primjer tipičnog grafa

Definicija 2.0.4. *Za brid $e = vw$ kažemo da spaja vrhove v i w. Tada su vrhovi v i w* ***susjedni****. Kažemo da je vrh v* ***incidentan*** *s bridom e. Vrh w je također incidentan s bridom e.*

Definicija 2.0.5. ***Stupanj vrha*** *v grafa G, u oznaci deg(v), je broj bridova koji su incidentni s v.*

Primjer 2.0.6. Stupanj vrha D prikazanog na slici 2.1 je 3 jer su s njim incidentna tri brida, c, d i e. Stupanj vrha C je 1 jer je s C incidentan samo brid e.

Kada se govori o stupnjevima vrhova, poznata je *Lema o rukovanju.*

Lema 2.0.7. (o rukovanju) *U svakom grafu je zbroj stupnjeva svih vrhova paran broj.*

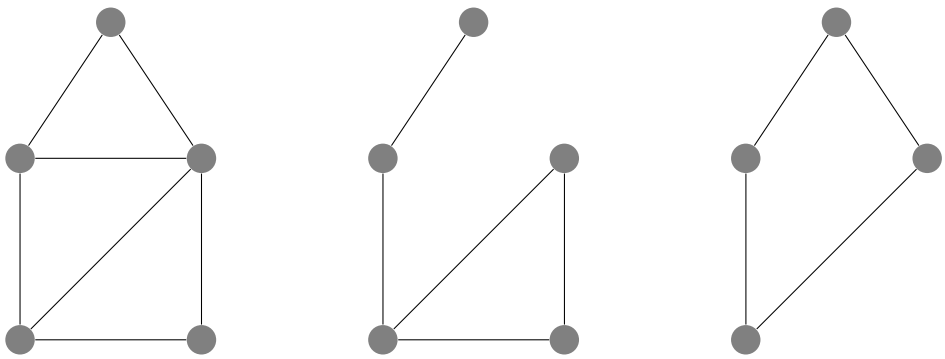
Dokaz. Kako svaki brid dva puta doprinosi zbroju stupnjeva vrhova, vrijedi $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$, gdje je $|E(G)|$ broj bridova u grafu G.
Budući da je desna strana jednakosti parna, parna mora biti i lijeva strana pa je time dokazana tvrdnja leme. □

Naziv leme dolazi iz njene interpretacije u stvarnom životu: *Broj ruku uključen u rukovanje bilokojeg broja ljudi uvijek je paran.* Iz leme proizlazi sljedeći korolar:

Korolar 2.0.8. *U svakom grafu je broj vrhova neparnog stupnja paran broj.*

Definicija 2.0.9. ***Podgraf*** *grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu V(G), a bridovi skupu E(G).*

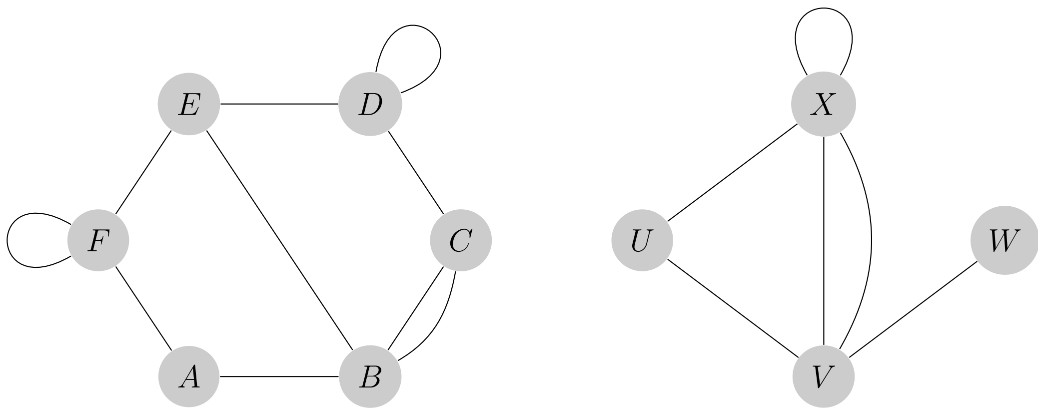
Primjer 2.0.10. Na slici 2.2 prikazani su redom graf G te njegova dva podgrafa.



Slika 2.2: Graf G i neki njegovi podgrafovi

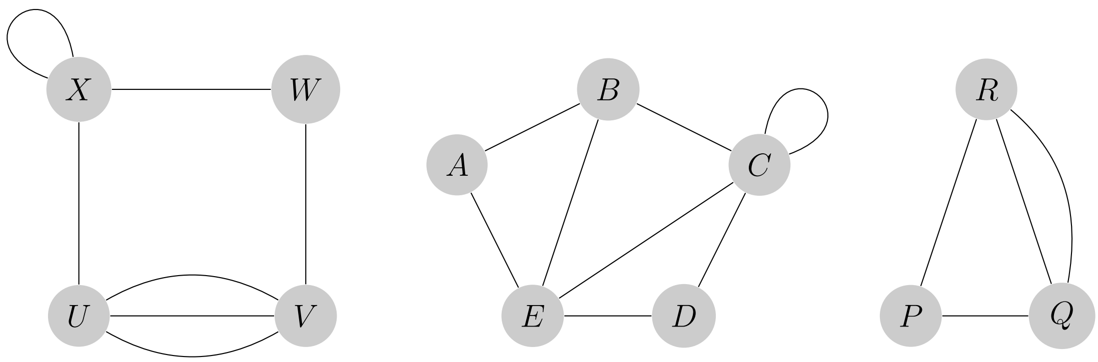
Definicija 2.0.11. ***Petlja*** *je brid koji spaja vrh sa samim sobom.* ***Jednostavni graf*** *je graf koji nema petlji i kojemu su dva vrha povezana najviše jednim bridom.*

Primjer 2.0.12. Na slici 2.3 nalaze se primjeri grafova koji sadrže petlje. Riječ je o petljama u vrhovima F, D i X.



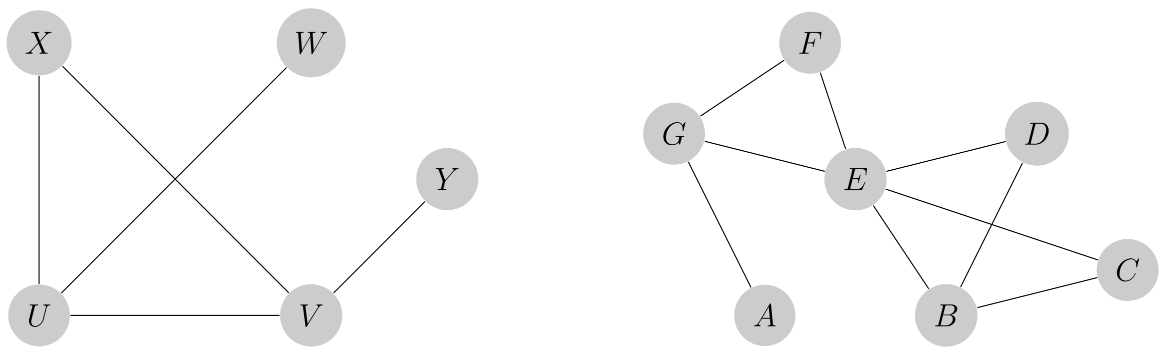
Slika 2.3: Grafovi s petljama

Primjer 2.0.13. Na slici 2.4 nalaze se primjeri grafova koji nisu jednostavni. Prvi graf nije jednostavan jer sadrži petlju pri vrhu X te su mu vrhovi U i V povezani trima bridovima. Drugi graf sadrži petlju pri vrhu C, dok posljednji graf zadrži tzv. višestruke bridove, odnosno vrhovi R i Q povezani su dvama bridovima.



Slika 2.4: Grafovi koji nisu jednostavni

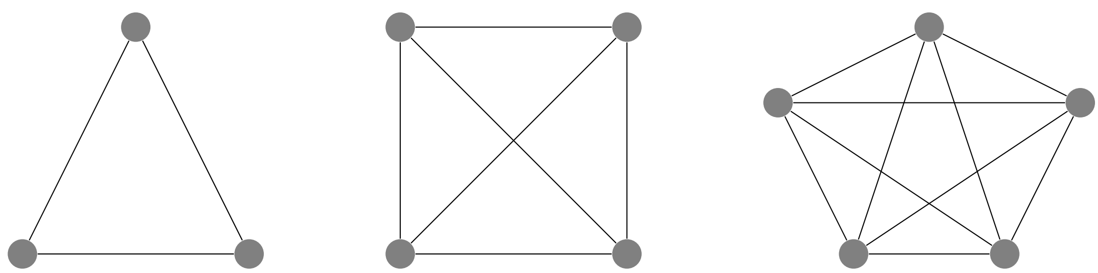
Primjer 2.0.14. Na slici 2.5 nalaze se primjeri grafova koji su jednostavni. To su grafovi koji nemaju niti petlje niti višestrukih bridova. Lako se vidi da smo od grafova sa slike 2.4 mogli dobiti jednostavne grafove uklanjanjem petlji i višestrukih bridova.



Slika 2.5: Jednostavni grafovi

Definicija 2.0.15. *Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna naziva se* ***potpuni graf****. Potpuni graf s n vrhova označava se s* K_n.

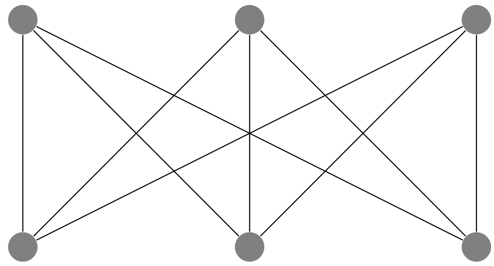
Primjer 2.0.16. Na slici 2.6 dani su primjeri grafova K_3, K_4 i K_5.



Slika 2.6: Potpuni grafovi

Definicija 2.0.17. *Graf* $G = (V, E)$ *je* ***bipartitan graf*** *ako se skup* V *može particionirati na dva disjunktna skupa* A *i* B *tako da svaki brid iz skupa* E *spaja vrh iz* A *s vrhom iz* B*. Bipartitan graf s particijom* (A, B)*, gdje je* A m*-člani, a* B n*-člani skup, označava se s* $K_{m,n}$.

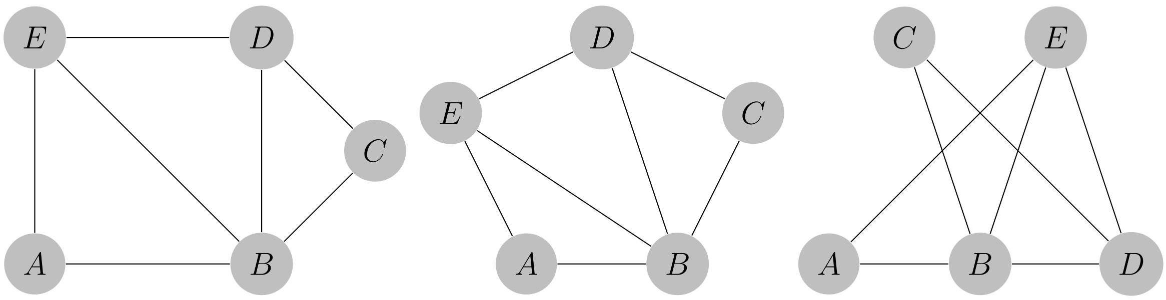
Primjer 2.0.18. Na slici 2.7 nalazi se bipartitan graf $K_{3,3}$.



Slika 2.7: Bipartitan graf $K_{3,3}$

Definicija 2.0.19. *Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su* ***izomorfni*** *ako postoji bijekcija između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva vrha iz $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju odgovarajuća dva vrha iz $V(G_2)$. Takva bijekcija naziva se* ***izomorfizam grafova****.*

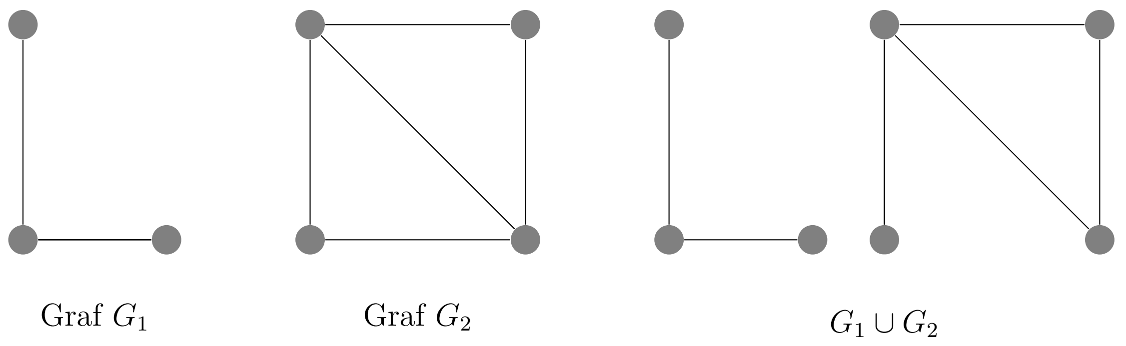
Primjer 2.0.20. Primjeri izomorfnih grafova dani su na slici 2.8.



Slika 2.8: Izomorfni grafovi

Definicija 2.0.21. *Neka su $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ disjunktni grafovi.* ***Unija*** *grafova G_1 i G_2 jest $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$.*

Primjer 2.0.22. Na slici 2.9 prikazana je unija grafova G_1 i G_2.



Slika 2.9: Unija grafova G_1 i G_2

Definicija 2.0.23. *Graf je* ***povezan*** *ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom je graf* ***nepovezan****. Svaki nepovezani graf može se prikazati kao unija povezanih grafova. Član te unije naziva se* ***komponenta povezanosti****.*

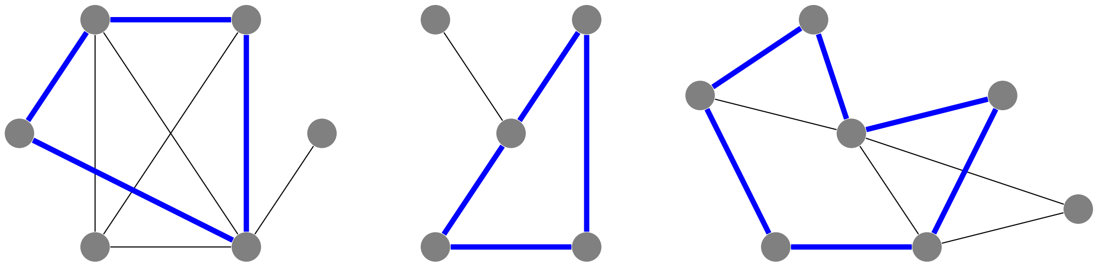
Primjer 2.0.24. Nepovezani graf je graf sa slike 2.9 nastao unijom dvaju grafova, dok se povezani grafovi nalaze primjerice na slikama 2.6, 2.5 i 2.4.

Definicija 2.0.25. *Neka je G graf.* ***Šetnja*** *u G je konačan slijed bridova oblika v_0v_1, v_1v_2, ..., $v_{n-1}v_n$ (aternativno može i $v_0 \to v_1 \to ... \to v_n$) u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedni ili jednaki.*

Primjer 2.0.26. Ako promotrimo grafove sa slike 2.5. Neki primjeri šetnje su: $U \to X \to V \to Y$, $A \to G \to E \to D \to B$ i $G \to F \to E \to G$.

Definicija 2.0.27. ***Staza*** *je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti. Ako su i svi vrhovi različiti (osim eventualno početnog i krajnjeg) tada se ta staza naziva* ***put****. Za stazu ili put kažemo da su* ***zatvoreni*** *ako je početni vrh jednak krajnjem. Zatvorena staza naziva se* ***ciklus****.*

Primjer 2.0.28. Na grafovima na slici 2.10 ciklusi su označeni plavom bojom. Valja primijetiti da ciklus označen na grafu nije uvijek i jedini ciklus tog grafa.

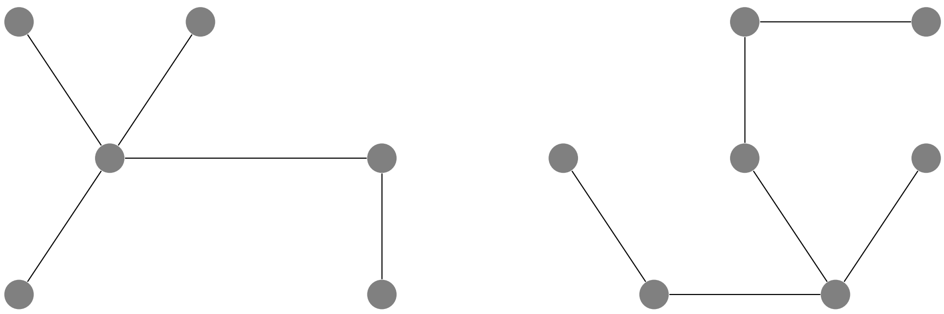


Slika 2.10: Grafovi s označenim ciklusima

Definicija 2.0.29. ***Šuma*** *je graf bez ciklusa. Povezana šuma naziva se* ***stablo****.*

Definicija 2.0.30. ***Razapinjuće stablo*** *je jednostavan povezan graf bez ciklusa.*

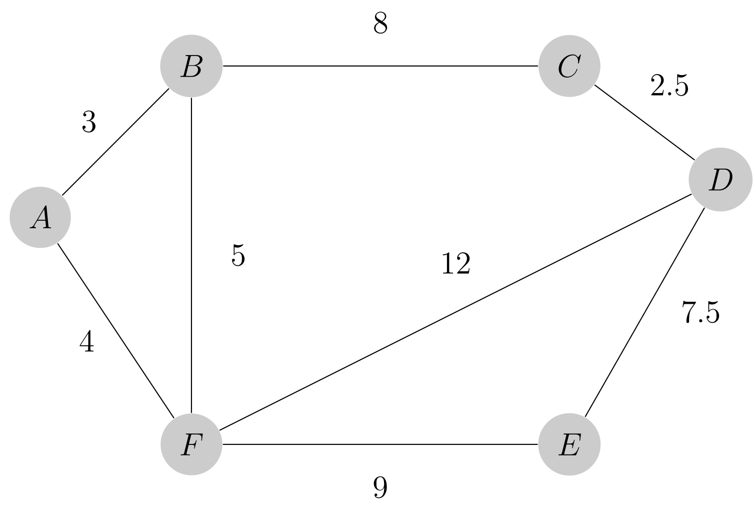
Primjer 2.0.31. Primjeri nekih razapinjućih stabala nalaze se na slici 2.11.



Slika 2.11: Razapinjuća stabla

Definicija 2.0.32. *Neka je graf G jednostavan povezan graf. Neka je svakom bridu e toga grafa pridružen realan broj $w(e)$,* ***težina*** *brida e. Takav graf G naziva se* ***težinski graf****.*

Primjer 2.0.33. Na slici 2.12 dan je primjer težinskog grafa.



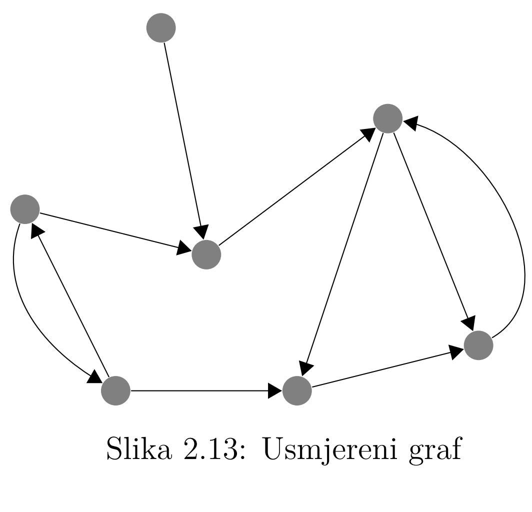
Slika 2.12: Težinski graf

Definicija 2.0.34. *Ako je podgraf $H \subseteq G$ podgraf težinskog grafa G, onda je* ***težina podgrafa*** *H definirana s*

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$$

Definicija 2.0.35. ***Usmjereni graf*** *je graf kod kojeg je svakom bridu pridružen redom njegov početni i krajnji vrh, odnosno uređeni par vrhova. Obično se taj smjer u crtanju označava strelicama.*

Primjer 2.0.36. Na slici 2.13 dan je primjer usmjerenog grafa.



Slika 2.13: Usmjereni graf

Poglavlje 3

Eulerov graf

O tome kakvi su to *Eulerovi grafovi* bit će riječi u ovom poglavlju.

Definicija 3.0.1. ***Eulerov ciklus*** *je ciklus koji sadrži sve bridove grafa. Za povezani graf G kažemo da je* ***Eulerov****, ako posjeduje Eulerov ciklus.*

Prirodno se nameće pitanje: Može li se znati je li dani graf Eulerov bez da se pronađe Eulerov ciklus? Odgovor na to pitanje daje *Eulerov teorem.* Kako bi se moglo pozabaviti teoremom, najprije je potrebno spomenuti lemu koja se koristi u dokazu tog teorema. Navedeni je teorem od izuzetne važnosti jer je njime otvoreno područje matematike koje danas nazivamo teorijom grafova.

Lema 3.0.2. *Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži Eulerov ciklus.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti moežemo pretpostaviti da G nema petlji. Neka je $v \in V(G)$. Konstruiramo šetnju $v_0 \to v_1 \to ... \to v_n$ induktivno i to tako da odabremo vrh v_1 kao susjeda od v_0, te za svaki i vrh v_{i+1} kao susjeda od v_i, $v_i \neq v_{i-1}$. Ova konstrukcija biti će moguća jer je stupanj svakog vrha barem 2. Zaustavimo se kad ponovno odaberemo vrh v_0. Tom konstrukcijom smo dobili traženi ciklus. $\square$

Teorem 3.0.3. (Euler, 1736.) *Povezani graf G je Eulerov ako i samo ako je stupanj svakog vrha paran.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je G povezan Eulerov graf. Označimo s C Eulerov ciklus u G. Po definiciji su svi bridovi u tom ciklusu različiti. Također, staza doprinosi stupnju vrha za 2, budući da jedan brid ciklusa "dođe" u vrh a jedan iz vrha "ode". Prema tome, svaki vrh mora biti parnog stupnja.
($\Leftarrow$) Neka je stupanj svakog vrha u povezanom grafu G paran. Ovaj smjer dokazat

ćemo matematičkom indukcijom po broju bridova grafa G. Kada je broj bridova jednak 1 graf je očito Eulerov budući da je tada riječ o petlji. Ovime je dokazana baza indukcije. Pogledajmo slučaj kad je broj bridova veći ili jednak 2. Po lemi 3.0.2 graf G sadrži ciklus, označimo ga s C. Ako ciklus sadrži svaki brid od G, dokaz je gotov. Ako ne sadrži, iz G izbacimo sve bridove sadržane u C. Od preostalih bridova dobijemo podgraf grafa G, označimo ga s H. H je možda nepovezan i ima manje bridova nego što je imao G, ali i dalje sa svojstvom da je stupanj svakog vrha paran broj. Po pretpostavci indukcije, svaka komponenta povezanosti grafa H ima Eulerov ciklus. Kako svaka komponenta od H ima zajednički vrh s C, Eulerov ciklus u G dobivamo slijedeći vrhove od C sve dok ne dođemo do vrha od H, prijeđemo Eulerov ciklus po toj komponenti te nastavimo ići po C. Ponavljamo postupak sve dok ne prijeđemo sve komponente u H i cijeli ciklus C. Na taj način smo dobili Eulerov ciklus za graf G. □

Kada je graf Eulerov, to znači da svakim njegovim bridom možemo proći točno jedanput i vratiti se u točku od koje smo krenuli. A što ako uspijemo ispuniti nešto slabiji uvjet, da prođemo svakim bridom grafa točno jedanput bez da se nužno vratimo u točku od koje smo krenuli? Takvi grafovi imaju svoj naziv.

Definicija 3.0.4. *Za graf G kažemo da je* ***skoro-Eulerov*** *ako posjeduje stazu koja sadrži svaki brid od G.*

Sada je jasno zašto postoje dvije varijante pitanja za problem sedam mostova Königsberga, ovisi o tome traži li se u grafu postojanje Eulerovog ciklusa ili staze koja sadrži sve bridove grafa.

Poglavlje 4

Hamiltonov graf

Analogno prethodnom poglavlju, ovdje će biti riječi o tome kakvi su to *Hamiltonovi grafovi* te može li se bez nalaženja odgovarajućeg ciklusa znati radi li se o Hamiltonovom grafu.

Definicija 4.0.1. *Ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa točno jednom naziva se **Hamiltonov ciklus**. Graf koji posjeduje Hamiltonov ciklus naziva se **Hamiltonov graf**.*

Teorem 4.0.2. (Ore, 1960.) *Ako je G jednostavan graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako je*

$$deg(v) + deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G Hamiltonov.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka navedeno svojstvo vrijedi za nesusjedne vrhove iz G i neka G nije Hamiltonov. Dodavanjem određenog broja bridova u graf G možemo postići da on postane Hamiltonov. Promotrimo korak prije dodavanja brida nakon kojeg G postane Hamiltonov. Uočimo da dodavanjem bridova nejednakost i dalje vrijedi, na lijevoj strani sada je eventualno još veći broj. Kako smo sad na korak do toga da graf bude Hamiltonov, postoji put $v_1 \to v_2 \to ... \to v_n$ koji prolazi svakim vrhom, gdje v_1 i v_n nisu susjedni. S obzirom na to da nisu susjedni, za v_1 i v_n vrijedi $deg(v_1) + deg(v_n) \geq n$. Iz toga svega možemo zaključiti da v_2 nije jedini susjedni vrh od v_1, kao što v_{n-1} nije jedini susjedni vrh od v_n. Isto tako, svaki vrh v_i $(2 \leq i \leq n-1)$ je susjedan barem jednom od vrhova v_1 ili v_n. Stoga nužno postoji neki v_i koji je susjedan vrhu v_a, takav da je v_{i-1} susjedan vrhu v_n. Dakle, postoji put $v_1 \to v_2 \to ... \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to ... \to v_i \to v_1$. Vidimo da se radi o Hamiltonovom ciklusu, što je kontradikcija s pretpostavkom. □

Teorem 4.0.3. (Dirac, 1952.) *Ako je G jednostavni graf s n ($n \geq 3$) vrhova te ako je $deg(v) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz G, onda je G Hamiltonov.*

Dokaz. Teorem slijedi direktnom primjenom Oreovog teorema budući da su ispunjene sve pretpostavke. Naime za vrhove $v, w \in V(G)$ imamo da je $deg(v) + deg(w) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ □

Poglavlje 5

Algoritmi optimizacije

U primjenama teorije grafova često se javljaju težinski grafovi. Težine pojedinih bridova tako primjerice mogu označavati cijenu konstrukcije, održavanja telekomunikacijske mreže, udaljenosti između lokacija ili pak stupanj poznanstva dvoje ljudi (vidi [4], str. 266).
U području težinskih grafova poznati su sljedeći problemi: minimalno razapinjuće stablo, problem najkraćeg puta, problem kineskog poštara i problem trgovačkog putnika. Oni se obično svode na to da se u težinskom grafu nađe podgraf određenog tipa s najmanjom ili najvećom težinom.
Ograničit ćemo se na promatranje jednostavnih grafova s težinama koji su pozitivni realni brojevi.

5.1 Minimalno razapinjuće stablo

Nekoliko kvartova treba se povezati telekomunikacijskim kablom. Ako su poznate moguće cijene postavljanja kabla, koji je najjeftini način postavljanja kabla tako da on dolazi do svih željenih kvartova?
Jezikom teorije grafova, problem se svodi na određivanje razapinjućeg stabla najmanje težine, odnosno minimalnog razapinjućeg stabla.
Primijetimo da će minimalno razapinjuće stablo grafa s n vrhova imati $n-1$ bridova.
Jedan od algoritama koji daje rješenje ovog problema je **Kruskalov algoritam** (vidi [2], str. 39):

1. Sve bridove poredaj u rastući niz s obzirom na njihovu težinu.

2. Odaberi brid najmanje težine takav da ne formira ciklus s prethodno odabranim bridovima.

3. Ponavljaj 2. korak sve dok se stablo ne sastoji od $n-1$ bridova.

Mana ovog algoritma je što nije jednostavno naći brid najmanje težine takav da s prethodno odabranim bridovima ne tvori ciklus. Zato postoji modifikacija Kruskalovog algoritma, to je **Primov algoritam** (vidi [2], str. 39):

1. Počni iz bilo kojeg vrha V.
2. Od svih bridova povezanih s V odaberi i grafu dodaj onaj koji ima najmanju težinu.
3. Od svih bridova povezanih sa stablom, odaberi onaj najmanje težine te ga dodaj u stablo.
4. Ponavljaj 3. korak sve dok se obuhvatiš sve vrhove.

Postoji još i **algoritam najbližeg susjeda** (vidi [2], str. 39):

1. Pronađi brid najveće težine čijim uklanjanjem ne bi došlo do prekidanja grafa. Ukloni ga.
2. Ponavljaj 1. korak sve dok uklanjanjem bilo kojeg brida ne dolazi do prekida grafa.

5.2 Problem najkraćeg puta

Neka su težinskim grafom prikazani gradovi povezani telekomunikacijskom mrežom s cijenama postavljanja kabla. Problem najkraćeg puta u tom slučaju glasi: Koji je najjeftiniji način povezivanja dvaju unaprijed određenih gradova? U terminima teorije grafova problem glasi: Koji je povezan podgraf danog grafa s unaprijed određenim početnim i krajnjim vrhom najmanje težine?
Najpoznatiji algoritam koji daje rješenje problema najkraćeg puta za par vrhova osmislio je 1959. godine Edsger Wybe Dijkstra, nizozemski teoretski fizičar koji se bavio i računarstvom, te se njemu u čast on naziva **Dijkstrin algoritam**:

1. Početnom vrhu V pridruži trajnu vrijednost 0, a svim drugim vrhovima ∞.
2. Pogledaj sve vrhove A kojima je vrijednost jednaka ∞ i koji su povezani s vrhom V. Vrijednost svakog od tih vrhova sada privremeno označi brojem koji je zbroj težine brida VA i vrijednosti vrha V (ako je ta vrijednost manja od njegove prethodne vrijednosti).

3. Od vrhova A koji sada imaju privremenu vrijednost, trajnu vrijednost pridruži onom vrhu A koji među njima ima najmanju vrijednost. Ako je takvih vrhova više, odaberi bilo koji.

4. Ponavljaj 2. i 3. korak sve dok svim vrhovima nije pridružena trajna vrijednost.

5. Za određivanje najkraćeg puta između dva zadana vrha vrati se po bridovima koji su pridonijeli trajnoj vrijednosti krajnjeg vrha puta.

5.3 Problem kineskog poštara

Naziva se *problem poštara* jer je riječ o problemu koji se u svakodnevnom životu lako interpretira koristeći opis posla kojim se bavi poštar. U čast kineskom matematičaru Kuanu Meiu-Kou koji se prvi, 1962. godine, bavio ovim problemom, puni naziv je *problem kineskog poštara.*

Priča je sljedeća: Poštar mora dostaviti poštu do svih ulica u susjedstvu, dakle svakom od njih mora proći barem jedanput, te se naposljetku vratiti u ulicu od koje je krenuo (vidi [11], str. 43). Koju rutu izabrati tako da poštar prevali najmanji mogući put?
Jezikom teorije grafova zapravo se traži zatvorena šetnja najmanje težine, koja svakim bridom prođe barem jedanput.

Idealna situacija je ona kada je graf Eulerov, jer tada postoji zatvorena šetnja koja sadrži sve bridove i to točno jednom, pa je upravo Eulerov ciklus onaj put kojim poštar treba ići. Duljina puta jednaka je težini cijelog grafa.

Što kada graf nije Eulerov?

Tada se koristi sljedeći algoritam:

1. Ispiši sve vrhove neparnog stupnja.

2. Ispiši sve moguće kombinacije parova tih vrhova.

3. Za svaki par vrhova pronađi šetnju najmanje težine te izračunaj zbroj S svih tako dobivenih najmanjih težina.

4. Kombinacija parova za koju je S najmanji dat će bridove kojima se mora proći dva puta. Optimalna ruta bit će duljine S + zbroj težina svih bridova danog grafa.

5.4 Problem trgovačkog putnika

Trgovački putnik treba posjetiti neke gradove te se vratiti natrag, u grad iz kojeg je započeo putovanje. Koji je najkraći put kojim pritom mora prijeći, ukoliko pretpostavimo da su svaka dva grada povezana te je poznata udaljenost među njima? Prevedeno na jezik teorije grafova, traži se Hamiltonov ciklus najmanje težine u potpunom težinskom grafu.
Za rješenja *problema trgovačkog putnika* ne postoji efikasan algoritam, kao što je to bio slučaj kod primjerice *problema najkraćeg puta*.
U ovom slučaju postoji metoda za "dovoljno dobro" rješenje, ne nužno optimalno.

Takvo rješenje daje **algoritam za određivanje donje granice**:

1. Odaberi bilo koji vrh V.
2. Odaberi dva brida najmanje težine koji su povezani s V te odredi zbroj njihovih težina.
3. Iz grafa ukloni vrh V zajedno s pripadnim bridovima.
4. Primjenom *Primovog algoritma* za preostali graf pronađi minimalno razapinjuće stablo.
5. Odredi težinu tog minimalnog razapinjućeg stabla.
6. Donja granica rješenja je zbroj težina iz 2. i 5. koraka.

Ovaj algoritam je, kao i Dijkstrin algoritam, *pohlepan* zato što se u svakoj iteraciji gleda optimalno rješenje obzirom na vrh u kojem se nalazimo. Mana je to što se to rješenje promatra na lokalnoj razini pa ono neće uvijek biti optimalno.

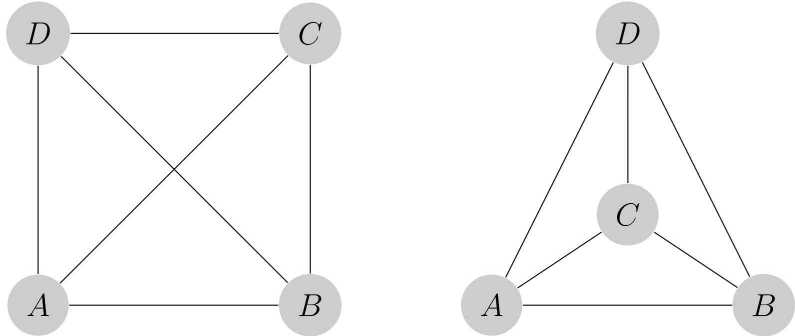
Poglavlje 6

Planarni grafovi

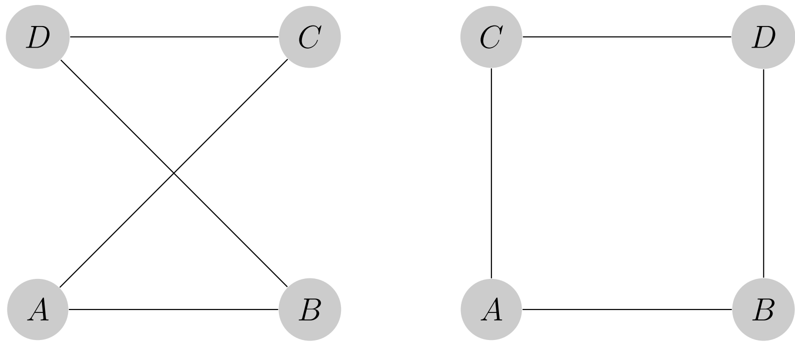
U ovom poglavlju promatraju se planarni grafovi te neka njihova svojstva. Objasnimo za početak kakvi su to grafovi.

Definicija 6.0.1. ***Planarni grafovi*** *su grafovi koji se mogu nacrtati u ravnini na način da im se bridovi ne sijeku. Planarni grafovi dijele ravninu na više konačnih zatvorenih područja i jedno beskonačno područje.*

Primjer 6.0.2. Na slikama 6.1 i 6.2 nalaze se primjeri planarnih grafova, K_4 i $K_{2,2}$, koji su nacrtani u dvije izomorfne varijante: prva je ona u kojoj se bridovi sijeku, dok se u drugoj varijanti ne sijeku. Iz te druge varijante može se zaključiti da se radi o planarnim grafovima.
Također, graf K_4 ima 4 područja, od čega 3 konačna zatvorena i 1 beskonačno područje. Graf $K_{2,2}$ ima 2 područja, od čega 1 konačno zatvoreno i 1 beskonačno područje.



Slika 6.1: Graf K_4



Slika 6.2: Graf $K_{2,2}$

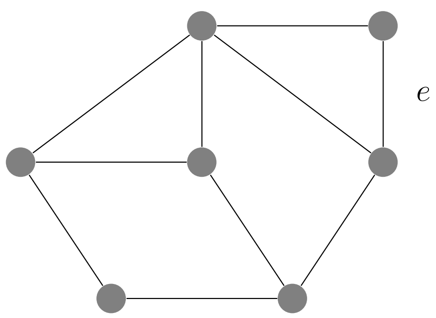
Planarni grafovi imaju razne primjene u svakodnevnom životu. Primjerice mogu predstavljati željezničku ili cestovnu mrežu (ako zanemarimo postojanje nadvožnjaka). U klasičnim elektronskim uređajima potrebne veze ostvaruju se pomoću tankog sloja provodnog materijala koji je nanesen na neprovodnu ploču (vidi [3], str. 48). Ovdje se mora paziti na to da ne dođe do ukrštavanja tih veza jer bi u tom slučaju došlo do kratkog spoja.

Osnovni rezultat vezan za planarne grafove dan je sljedećim teoremom:

Teorem 6.0.3. (Eulerova formula) *Za povezan, planaran graf s v vrhova, b bridova i p područja vrijedi*

$$v - b + p = 2.$$

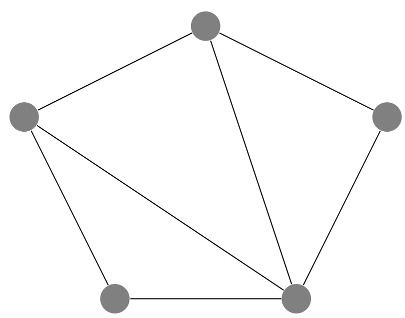
Dokaz. Ako graf ima ciklus, izbacimo jedan brid iz ciklusa. Na taj način je broj bridova smanjen za jedan, kao i broj područja (budući da smo dva područja spojili u jedno), a broj vrhova je ostao isti. Primjerice, za graf G sa slike 6.3 vrijedi $v = 7$, $b = 10$ i $p = 5$, dok za graf $G - e$ vrijedi $v = 7$, $b = 9$ i $p = 4$.



Slika 6.3: Graf G

Općenito, novi graf ima v vrhova, $b-1$ bridova i $p-1$ područja. Ovaj postupak ponavljamo dokle god postoje ciklusi. Naposljetku ćemo dobiti stablo s $v' = v$ vrhova, $b' = v-1$ bridova i $p' = 1$ područja. Dakle, $v-b+p = v'-b'+p' = v-(v-1)+1 = 2$. □

Primjer 6.0.4. Na slici 6.4 je $v = 5$, $b = 7$ i $p = 4$ pa vrijedi $v-b+p = 5-7+4 = 2$.

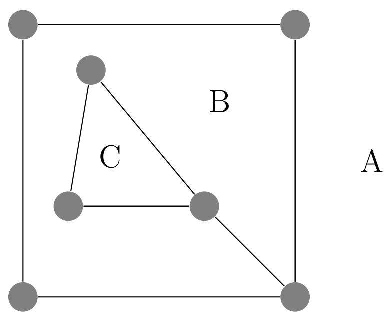


Slika 6.4: Planarni graf i Eulerova formula

Uz *Eulerovu formulu*, u provjeri planarnosti grafa od velike važnosti je i *Kuratowskijev teorem*. Najprije ćemo se pozabaviti onime što prethodi tom teoremu.

Definicija 6.0.5. ***Stupanj područja*** *planarnog grafa, u oznaci deg(p), je broj bridova koji omeđuje područje p.*

Primjer 6.0.6. Na slici 6.5 imamo da je $deg(A) = 4$, $deg(B) = 8$ i $deg(C) = 3$.



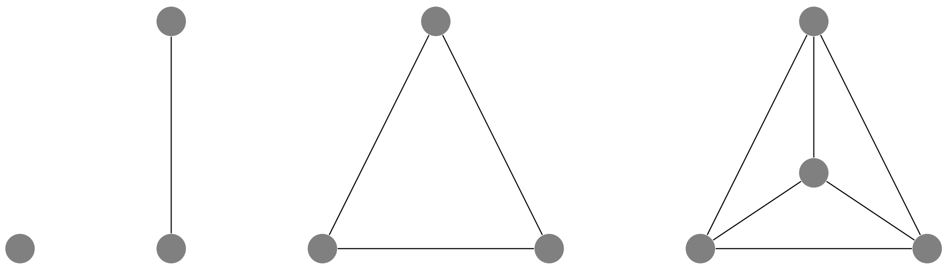
Slika 6.5: Graf G i njegova područja: A, B i C

Teorem 6.0.7. *U povezanom grafu, zbroj stupnjeva područja jednak je dvostrukom broju bridova.*

Dokaz. Svaki brid pridonosi dva puta zbroju stupnjeva područja. $\square$

Teorem 6.0.8. *Graf K_n je planaran ako i samo ako je $n \leq 4$.*

Dokaz. Očito su K_n, $n \leq 4$ planarni grafovi (Slika 6.6).



Slika 6.6: Grafovi K_1, K_2, K_3 i K_4

Još treba pokazati da K_n nije planaran za $n > 4$. Dovoljno je pokazati da K_5 nije planaran.
Kada bi K_5 bio planaran, za njega bi vrijedila Eulerova formula, što znači da on dijeli ravninu na $p = 2 - 5 + 10 = 7$ područja. Svako od tih 7 područja mora imati stupanj veći ili jednak 3, što znači da je ukupan zbroj stupnjeva područja u tom slučaju barem 21. S druge strane, prema teoremu 6.0.7, zbroj stupnjeva područja iznosi 20. Sada imamo $20 \geq 21$ čime smo došli do kontradikcije. $\square$

Teorem 6.0.9. *Graf $K_{3,3}$ nije planaran.*

Dokaz. Graf $K_{3,3}$ ima 6 vrhova i 9 bridova. Kad bi bio planaran, prema Eulerovoj formuli, dijelio bi ravninu na $p = 2 - 6 + 9 = 5$ područja. No, kod $K_{3,3}$ je svako područje omeđena barem s 4 brida. Naime, nikoja tri vrha ne zatvaraju s odgovarajućim bridovima trokut, jer od tri vrha dva odgovaraju jednoj particiji a jedan drugoj, a dva iz iste particije nemaju zajednički brid. Stoga s jedne strane imamo da je zbroj stupnjeva područja barem 20, a s druge strane da iznosi 18. Tako smo došli do kontradikcije $18 \geq 20$. $\square$

Sada se može izreći teorem:

Teorem 6.0.10. (Kuratowski) *Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od K_5 ili $K_{3,3}$ kao podgraf.*

6.1 Platonova tijela

Teorem poznat pod nazivom *Eulerova formula* je originalno bio dokazan za konveksne poliedre, tijela čije su stranice poligoni. Svakom konveksnom poliedru P pridružen je graf $G(P)$ čiji su vrhovi vrhovi poliedra, a bridovi bridovi poliedra. Tako dobiven graf G je planaran.
Naime svaki se poliedar može preoblikovati na način da mu se ne mijenja broj vrhova, bridova i stranica, a da se oko njega može opisati sfera, kako piše u [8]. Ovim se postupkom, nakon projekcije vrhova i bridova poliedra zrakama iz centra sfere, na sferi dobije graf čiji se bridovi ne sijeku. Tako dobiveni graf (poliedar) se može stereografskom projekcijom preslikati na ravninu. Pri tome je potrebno da se centar projekcije ne nalazi na nekom bridu ili vrhu grafa sa sfere. Projicirani graf u ravnini ima osobinu da mu se bridovi ne sijeku.
Stoga *Eulerova formula* $v - b + p = 2$ vrijedi i za poliedre.

Definicija 6.1.1. *Poliedar je* ***pravilan poliedar*** *ako postoje* $m \geq 3$, $n \geq 3$ *takvi da svaki vrh ima* m *bridova, a svaka stranica* n *bridova. Konveksni pravilni poliedri nazivaju se* ***Platonova tijela****.*

Primjer 6.1.2. *Npr. za kocku je* $m = 3$ *i* $n = 4$.

Sljedeći teorem govori o tome koliko ima Platonovih tijela:

Teorem 6.1.3. *Postoji točno pet Platonovih tijela.*

Dokaz. Vrijedi $mv = 2b = np$. Uvrste li se te relacije u *Eulerovu formulu* dobije se:

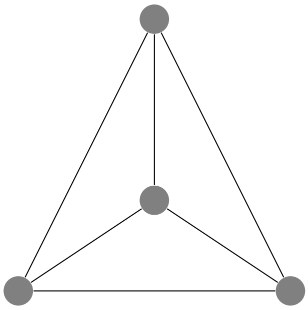
$$2\frac{b}{m} - b + 2\frac{b}{n} = 2 \Leftrightarrow (2n - mn + 2m)b = 2mn.$$

Slijedi da je $2n - mn + 2m > 0$, tj. $(m-2)(n-2) < 4$ što znači da izraz $(m-2)(n-2)$ iznosi 1, 2 ili 3. Za svaki par (m, n) možemo izračunati v, b i p.
Tako dobijemo sljedeću tablicu (6.1):

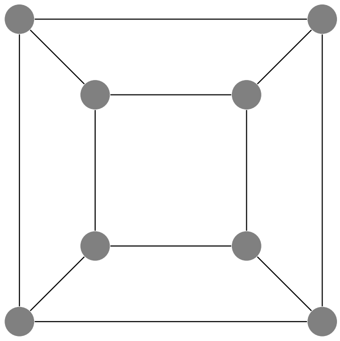
Naziv	m	n	v	b	p	Slika
Tetraedar	3	3	4	6	4	6.7
Kocka ili heksaedar	3	4	8	12	6	6.8
Oktaedar	4	3	6	12	8	6.9
Dodekaedar	3	5	20	30	12	6.10
Ikosaedar	5	3	12	30	20	6.11

Tablica 6.1: Platonova tijela

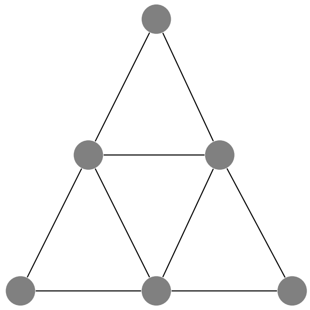
□



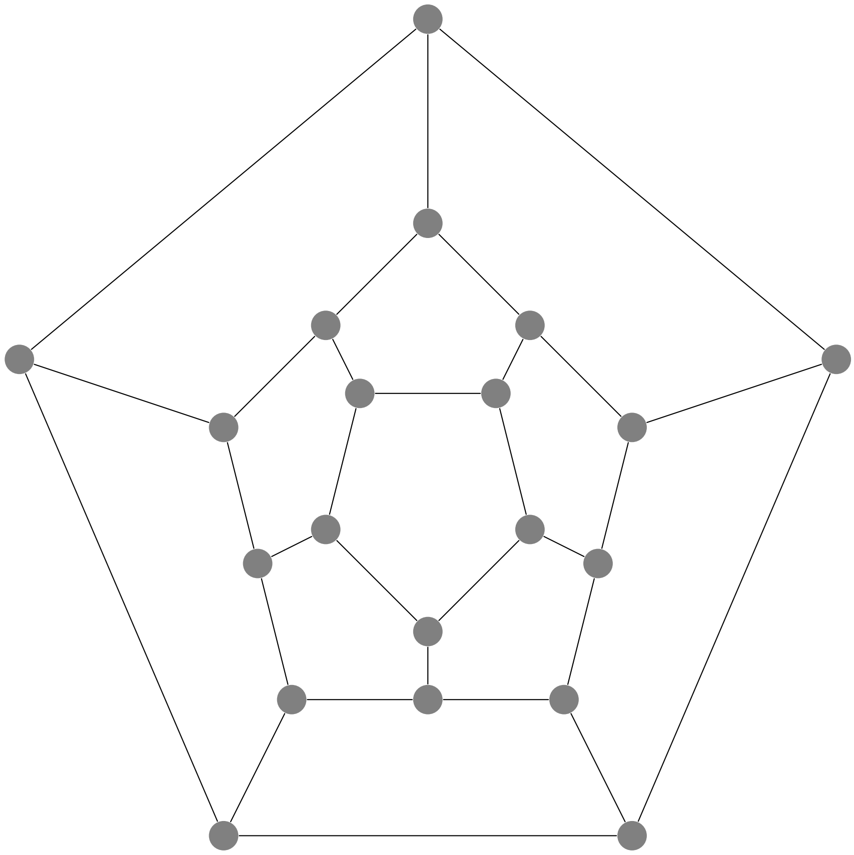
Slika 6.7: Tetraedar



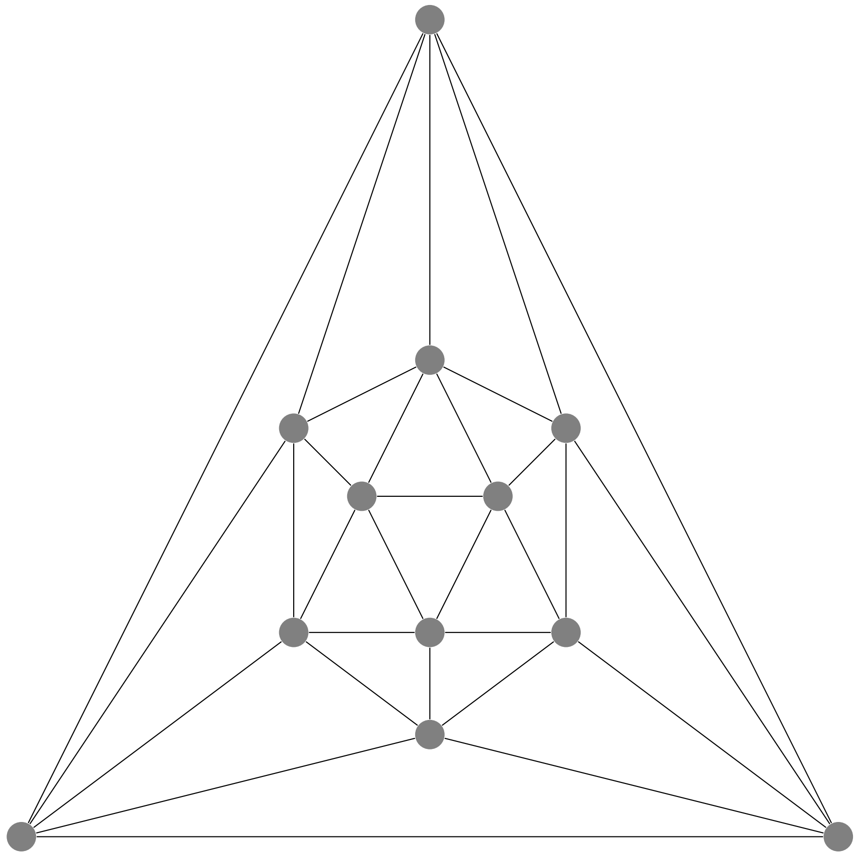
Slika 6.8: Kocka



Slika 6.9: Oktaedar



Slika 6.10: Dodekaedar



Slika 6.11: Ikosaedar

Poglavlje 7

Kako poučavati?

U poučavanju matematike najdominantnija je tzv. tradicionalna nastava. Kod tradicionalne nastave, učitelj se smatra prenositeljem znanja, "mudracem na pozornici" (engl. "sage on the stage"). Učitelj i nastavni sadržaji su u središtu nastavnog procesa, a učeniku je namijenjena uloga "pasivnog primatelja znanja". U suvremenoj nastavi matematike polazište je ipak drugačije - u središtu nastavnog procesa je učenik, a nastavnik je moderator cijelog procesa učenja. Mnogi su razlozi zašto tradicionalni pristup u nastavi treba obogatiti i napraviti iskorak prema drugačijoj nastavi. Osim što je takva nastava zanimljivija, dinamičnija, a moguće čak i uzbudljiva, znanstvena istraživanja potvrđuju da je aktivan učenik više motiviran za daljnji rad u matematici te da je njegovo "zadržavanje" znanja bolje. Jedan oblik aktivne nastave je tzv. **istraživački usmjerena nastava**. Polazište istraživački usmjerene nastave je problemski zadatak ili problemska situacija [12].

Istraživački usmjerena nastava sadrži sva četiri koraka modela za rješavanje problema u matematici, koje opisuje mađarski matematičar George Polya (prema [13]):

1. Razumjeti zadatak
2. Napraviti plan
3. Provesti plan
4. Pogledati unazad

Ali kakav je to zadatak kod kojeg se mogu kvalitetno provesti svi ti koraci? Riječ je o takozvanom "bogatom" zadatku, odnosno onom koji ima neke od sljedećih karakteristika (prema [13]):

- dostupan je širokoj skupini učenika

- njegova polazna situacija je zanimljiva ili se pak razvija tijekom rješavanja
- početak je lako ostvariv
- omogućuje različite razine izazova, ovisno o spremnosti i spretnosti učenika
- omogućuje korištenje različitih strategija
- potiče diskusiju
- potiče kreativnost
- povezuje različita područja unutar matematike
- povezuje matematiku s drugim područjima
- sadrži element iznenađenja

Bitno je naglasiti da zadatak sam po sebi nije "bogat", već bi ga nastavnik pravilnim provođenjem trebao učiniti takvim. Ovdje se misli na takozvano postavljanje "skela" (engl. scaffolding), odnosno pravih pitanja.
Primjerice na početku učeničkih aktvnosti dobrodošla su pitanja poput: Možeš li izreći zadatak svojim riječima?, Koje su informacije poznate?, Možeš li pogoditi rješenje?
Za vrijeme učeničkih aktivnosti poželjna pitanja su: Reci mi što radiš? Zašto to radiš? Jesi li sigurna da je to ispravno? i slično.
Na kraju aktivnosti bilo bi dobro pitati sljedeće: Kako glasi odgovor? Čini li ti se rješenje smislenim? Jesi li provjerio? Može li se problem poopćiti?
Svakako valja izbjegavati pitanja sljedećeg tipa: Jel' svima jasno? Jeste li to razumjeli? Znaš ili ne znaš?

Aktivnosti koje će biti opisane u sljedećem poglavlju nisu osmišljene do kraja, u smislu "bogatih" zadataka, budući da nema opisa uloge nastavnika već su to samo ideje koje nastavnik svojim pristupom treba upotpuniti.

Za kraj još jedan mali podsjetnik koliko je velika i važna uloga nastavnika, *10 zapovijedi za nastavnike*:

1. Zanimaj se za svoj predmet.
2. Znaj svoj predmet.
3. Znaj kojim se putem može naučiti ono što je nužno: najbolji način učenja je - otkrij sam.

4. Nauči čitati s lica svojih učenika. Nastoj saznati što oni od tebe očekuju i pokušaj razumjeti njihove poteškoće. Pokušaj se staviti na njihovo mjesto.
5. Nemoj učenicima pružati samo informaciju, pomozi im razviti sposobnost korištenja prikupljenih znanja i naviku sustavnog rada.
6. Nastoj ih naučiti naslućivati.
7. Nastoj ih naučiti dokazivati.
8. Ističi u svojem zadatku ono što može biti korisno pri rješavanju drugih zadataka, a za danu konkretnu situaciju nastoj otkriti opću metodu.
9. Ne odaj svoju tajnu odmah, neka učenici pokušaju pogoditi rješenje. Predloži učenicima da sami pronađu što više.
10. Savjetuj, no ne nameći nasilno svoje mišljenje.

Ovih *10 zapovijedi za nastavnike* iz djela [6] još je jedan dokaz zašto je George Polya jedan od velikih pedagoga i metodičara 20. stoljeća.

Poglavlje 8

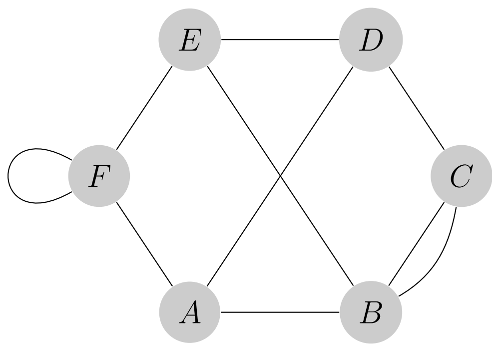
Aktivnosti za fakultativnu nastavu

U nastavku će biti dane ideje aktivnosti iz teorije grafova pogodne za provedbu na fakultativnoj nastavi matematike u srednjoj školi.

8.1 Uvod u teoriju grafova

Cilj aktivnosti: Učenici će usvojiti osnovne pojmove teorije grafova.

Zadatak 1. Na slici 8.1 dan je graf G.



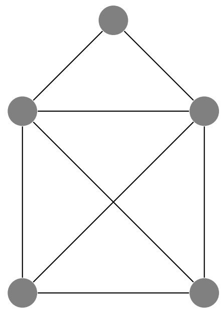
Slika 8.1: Graf G

a) Nabroji vrhove grafa G.
b) Nabroji bridove grafa G.
c) Odredi $deg(A)$, $deg(C)$ i $deg(F)$.
d) Napiši dvije šetnje grafa G.
e) Napiši dva ciklusa grafa G.

f) Nacrtaj podgraf grafa G.
g) Je li graf G jednostavan? Zašto?
h) Je li graf G povezan? Zašto?

Zadatak 2.
a) Nacrtaj graf koji ima četiri vrha i koji nije Hamiltonov.
b) Nacrtaj graf koji ima 5 vrhova, 6 bridova i točno 2 ciklusa.
c) Nacrtaj graf koji nije jednostavan.
d) Vrijedi li tvrdnja: Ako je graf povezan onda je i potpun?

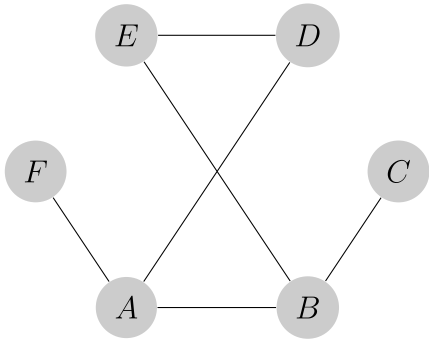
Zadatak 3. (uzeto iz [2], str. 29)
Može li se kućica sa slike 8.2 nacrtati u jednom potezu? Kakav je to onda graf?



Slika 8.2: Graf "kućica"

Rješenje i diskusija:

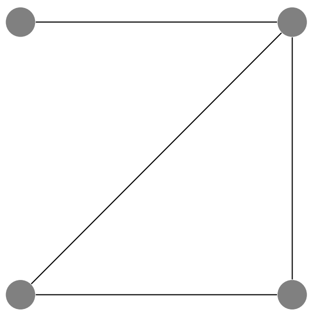
Zadatak 1.
a) Vrhovi grafa G su: A, B, C, D, E i F.
b) Bridovi grafa G su: AB, BC, CD, DE, EF i AF.
c) $deg(A) = 3$, $deg(C) = 3$ i $deg(F) = 4$.
d) Dvije šetnje grafa G: $A \to D \to C \to B$, $A \to F \to E \to B \to C$.
e) Dva ciklusa grafa G: $A \to D \to C \to B \to A$, $A \to F \to E \to B \to C \to D \to A$.
f) Podgraf grafa G nalazi se na slici 8.3.



Slika 8.3: Podraf grafa G

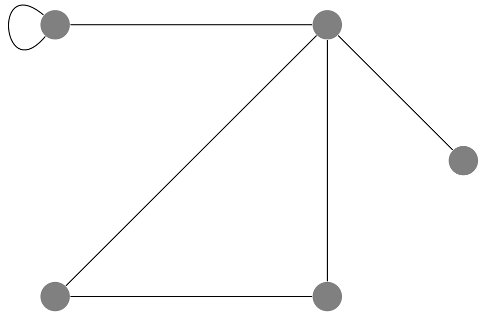
g) Graf G nije jednostavan zato što sadrži petlju pri vrhu F te ima višestruki brid koji povezuje vrhove B i C.
h) Graf G je povezan zato što se ne može prikazati kao unija dva grafa.

Zadatak 2.
a) Graf koji ima četiri vrha i koji nije Hamiltonov nalazi se na slici 8.4.



Slika 8.4: Jedno od mogućih rješenja 2.a zadatka

b) Graf koji ima 5 vrhova, 6 bridova i točno 2 ciklusa nalazi se na slici 8.5.



Slika 8.5: Jedno od mogućih rješenja 2.b zadatka

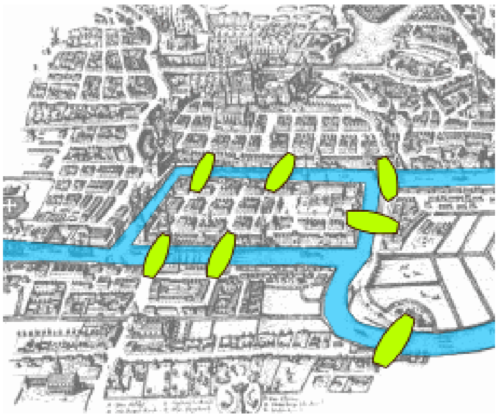
c) Graf koji nije jednostavan je graf sa slike 8.5 budući da sadrži petlju.
d) Tvrdnja ne vrijedi, na slici 8.5 i 8.4 nalaze se grafovi za koje to ne vrijedi.

Zadatak 3.
Kućica se može nacrtati u jednom potezu, što znači da je dani graf skoro-Eulerov.

8.2 Königsberški mostovi

Cilj aktivnosti: Učenici će se kroz povijesni kontekst sedam mostova Königsberga upoznati s pojmom izmorfizma grafova. Problem će pokušati riješiti te će proučiti koliko se bridova mora dodati danom grafu da bi se dobio skoro-Eulerov i Eulerov graf.

Zadatak 1.
Königsberg bio je glavni grad Istočne Prusije, nekadašnje njemačke provincije. Nakon Drugog svjetskog rata i Prusija i Königsberg prestali su postojati. Königsbergom je prolazila rijeka Pregel koja je grad dijelila na četiri dijela, dva otoka i dva obalna dijela. Ti dijelovi teritorija bili su povezani sa sedam mostova kako je prikazano na slici 8.6.

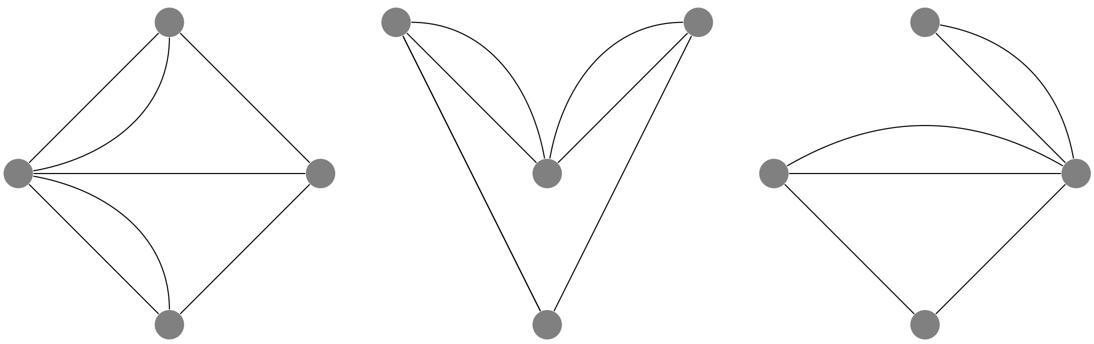


Slika 8.6: Königsbergški mostovi

Pitanje čijim je rješenjem nastala teorija grafova ima dvije varijante.
Prva: Može li se po Königsbergu napraviti takva šetnja da se svakim mostom prođe točno jedanput i vrati na početak?
Druga: Može li se po Königsbergu napraviti takva šetnja da se svakim mostom prođe točno jedanput ali da nije nužno da se vrati na početak?
Taj problem riješio je Leonhard Euler u prvoj polovici 18. stoljeća.
a) Prikaži ovaj povijesni problem pomoću grafa. (Uputa: Neka obalni i otočni dijelovi budu vrhovi, a mostovi neka budu bridovi grafa.)
b) Koje je rješenje problema? Odgovori na postavljena pitanja.
c) Može li se problem riješiti dodavanjem jednog ili više mostova?

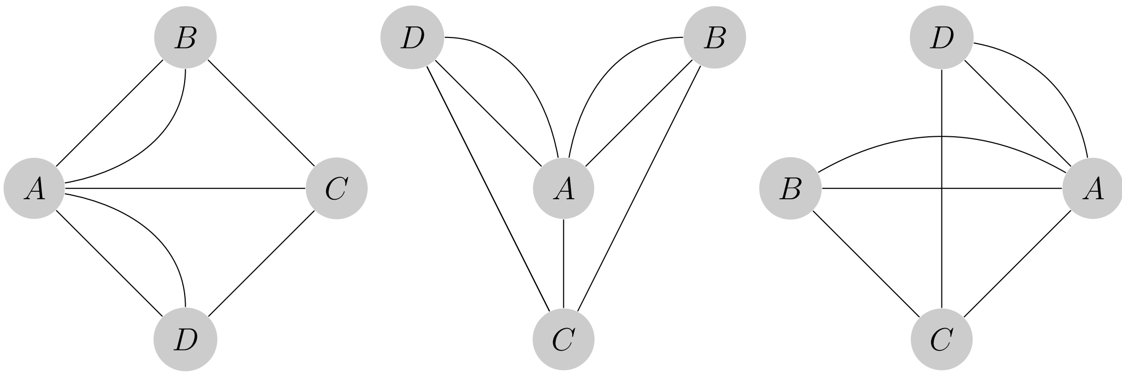
Rješenje i diskusija:

a) Moguća učenička rješenja nalaze se na slici 8.7.



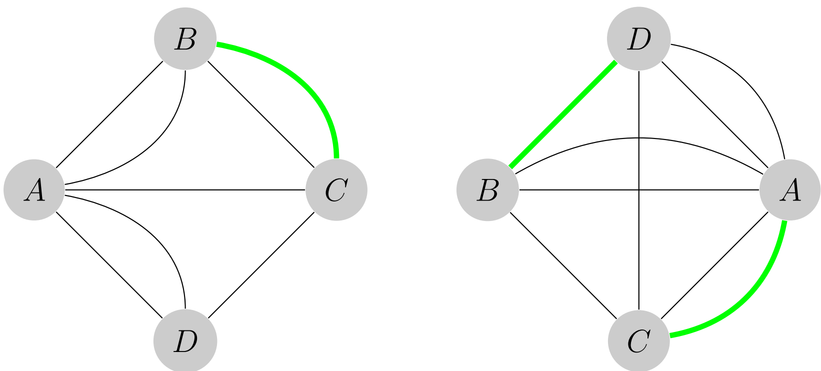
Slika 8.7: Moguća učenička rješenja

Učenička rješenja, u smislu vizualnog izgleda grafa, bit će različita. Bilo bi dobro neka od njih skicirati na ploči pa komentirati da, bez obzira na to što su naoko različita, u smislu toga što predočavaju su jednaka. Za lakše razumijevanje učenika kakvi su to izomorfni grafovi, vrhove se može označiti kako je prikazano na slici 8.8.



Slika 8.8: Izomorfni grafovi s označenim vrhovima

c) Dodavanjem jednog mosta, kako je prikazano na slici 8.9 s lijeve strane, dobije se skoro-Eulerov graf odnosno tada se postigne da se svakim mostom (bridom) prođe točno jedanput bez da se nužno vrati na početak.
Dodavanjem dvaju mostova, kako je prikazano na slici 8.9 s desne strane, dobije se Eulerov graf odnosno svakim mostom (bridom) se prođe točno jedanput te se vrati na početak.



Slika 8.9: Skoro-Eulerov i Eulerov graf

8.3 Tko je prepisivao?

Cilj aktivnosti: Učenici će primijeniti usmjerene grafove prilikom rješavanja problema iz matematičke logike.

Zadatak 1.
Profesorica je prilikom ispravljanja testova uočila da je netko od učenika prepisivao. Izbor je suzila na troje učenika, Anu, Bornu i Darka. Ana je izjavila: „Ja nisam prepisivala!", Borna: „Ana je prepisivala!" i Darko: „Ja nisam prepisivao!" Ako znamo da samo jedan učenik govori istinu, tko je prepisivao?

Zadatak 2.
Riješite isti zadatak, ali ovaj put koristeći usmjerene grafove. Neka učenici Ana, Borna i Darko budu vrhovi A, B i D. Slučaj da je Ana učenica koja govori istinu nacrtajte tako da iz vrha A povučete usmjerene bridove prema vrhovima B i D (jer ona optužuje Bornu i Darka ako tvrdi da nije ona prepisivala). U istom grafu nacrtajte i preostale slučajeve te objasnite kako smo promatrajući taj usmjereni graf mogli doći do rješenja.

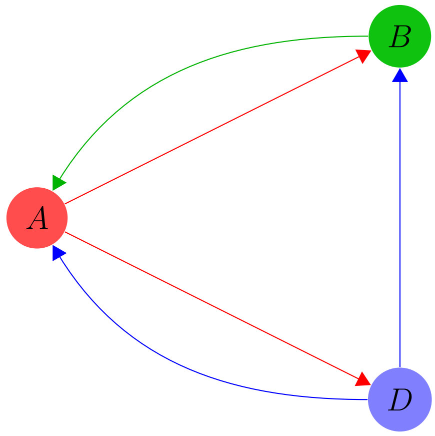
Zadatak 3.
a) Koje bi bilo rješenje zadatka kad bismo dodali još jednu učenicu, Eriku, koja kaže: „Borna je prepisivao!" Riješite zadatak koristeći usmjereni graf.
b) Koje bi bilo rješenje zadatka ukoliko su učenici i dalje Ana, Borna, Darko i Erika ali da su ovaj put dva učenika govorila istinu? Riješite zadatak koristeći usmjereni graf.

Zadatak 4.
Izmislite svoju varijantu prvog zadatka (može i s drugom pričom iz stvarnog života) te ju riješite.

Rješenje i diskusija:

Zadatak 1. Očito možemo promatrati 3 slučaja: 1) Ana je prepisivala, 2) Borna je prepisivao i 3) Darko je prepisivao. U prvom slučaju to bi značilo da su i Borna i Darko govorili istinu što je u kontradikciji sa zadanim. U drugom slučaju Ana i Darko su rekli istinu pa se opet dolazi do kontradikcije. U trećem slučaju je samo Ana govorila istinu pa je rješenje zadatka da je Darko prepisivao na testu.

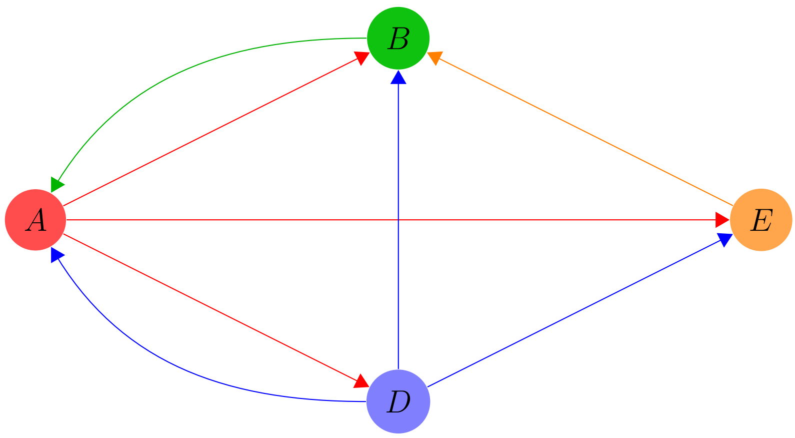
Zadatak 2.



Slika 8.10: Prikaz problema iz 1. zadatka pomoću usmjerenog grafa

Učenike Anu, Bornu i Darka se označi trima vrhovima: A, B i D. Iz A se povuku bridovi usmjereni prema B i D jer Ana svojom izjavom optužuje Bornu i Darka. (Preporuka: uzeti različite boje za svaki vrh i bridove koje idu iz njega.) Iz B se povuče brid usmjeren prema A budući da Darko optužuje Anu da je prepisivala. Iz D se povuku bridovi usmjereni prema A i B budući da Darkom svojom izjavom optužuje Anu i Bornu. S obzirom na to da samo jedna osoba govori istinu, jedino rješenje je slučaj da je Darko prepisivao što iz grafa možemo očitati promatrajući prema kojoj točki je usmjeren samo jedan brid. Graf treba izgledati kako je prikazano na slici 8.10.

Zadatak 3.



Slika 8.11: Prikaz problema iz 3. zadatka pomoću usmjerenog grafa

a) Analognim postupkom kao u 2. zadatku, iz grafa 8.11 zaključuje se da je opet Darko taj koji je prepisivao na testu.
b) Na grafu 8.11 se vidi da su prema vrhovima A i E usmjerena dva brida pa prema tome, u slučaju da dvije osobe govore istinu, rješenje je da su Ana ili Erika prepisivale na testu.

8.4 Koliko je rukovanja?

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti lemu o rukovanju kroz primjer iz svakodnevnog života. (ideja uzeta iz [7])

Zadatak 1.
Ivan slavi rođendan te na proslavu poziva svoje prijatelje: Janka, Teu, Mateja i Petru. Budući da su proslave mjesto gdje se dogodi mnogo rukovanja, Ivan odluči saznati koliko ih je bilo. Na proslavi se Janko rukovao sa svim osim s Ivanom, Matej i Petra su se međusobno rukovali, dok se Ivan od silnog brojenja rukovanja zaboravio rukovati.

a) Prikaži ovu situaciju pomoću grafa. (Uputa: Neka vrhovi grafa budu osobe te neka bridovi povezuju vrhove onih osoba čija su se rukovanja dogodila.)

b) Koliko je rukovanja bilo na proslavi? Kako smo iz grafa mogli iščitati koliko je bilo rukovanja?

c) Ivan je na proslavi išao od prijatelja do prijatelja do prijatelja pitajući svakoga koliko se je puta rukovao. Ako je zbrojio ta sva rukovanja, koji je broj u konačnici Ivan dobio? Kako smo iz grafa mogli iščitati taj broj?

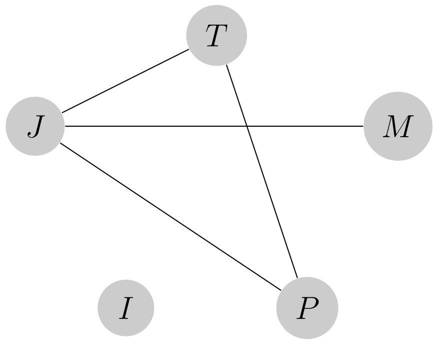
d) Kakav je odnos broja rukovanja iz zadataka b) i c)? Što misliš, je li taj odnos takav samo u ovom primjeru ili uvijek tako? Provjeri na još jednom vlastitom primjeru i objasni.

e) Kako taj odnos broja rukovanja možemo interpretirati pomoću grafa?

f) Može li se nacrtati graf koji ima samo jedan vrh neparnog stupnja? Može li se nacrtati graf kojemu su tri vrha neparnog stupnja? Što zaključuješ? Postoji li graf koji ima neparan broj vrhova neparnog stupnja? Iskaži svoj zaključak rečenicom koja u sebi nema negaciju.

Diskusija i rješenje:

a)



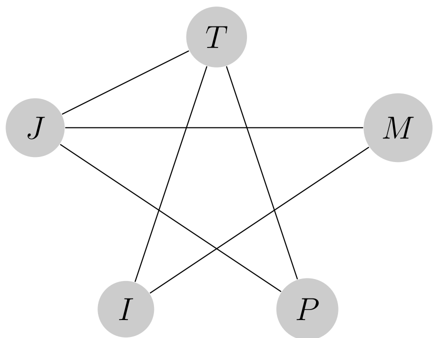
Slika 8.12: Prikaz rukovanja na Ivanovoj proslavi

Svaki vrh označimo početnim slovom imena osobe. Spojimo vrhove onih osoba koje su se rukovale na proslavi. Graf bi trebao ispasti kao što je prikazano na slici 8.12.

b) Na proslavi je bilo 4 rukovanja. Iz grafa smo to mogli iščitati brojeći bridove.

c) Janko je Ivanu rekao da se rukovao 3 puta, Tea 2 puta, Matej jednom i Petra 2 puta. Kad to zbrojimo dobije se ukupno 8 rukovanja. Iz grafa smo taj broj mogli iščitati zbrajajući stupnjeve vrhova.

d) U zadatku c) ima dvostruko više rukovanja nego u zadatku b). Uvijek je tako. Uzmimo da se Ivan rukovao još s Teom i Matejem. Tada graf izgleda kako je prikazano na slici 8.13.



Slika 8.13: Prikaz drugačijeg rukovanja na Ivanovoj proslavi

Vidimo da u ovom slučaju opet imamo isti odnos, jer je broj 12 je dvostruko veći od broja 6.
Uvijek će biti takav odnos zbog toga što je u slučaju kad je Ivan išao od prijatelja do prijatelja i brojao koliko puta koji od njih rukovao, svako rukovanje brojao 2 puta.

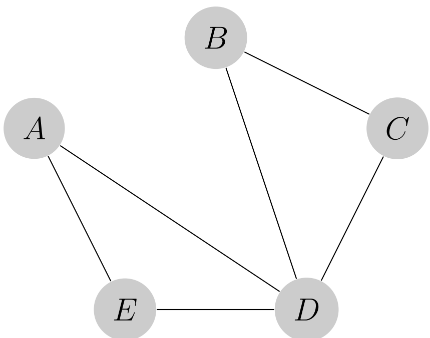
e) Zbroj stupnjeva svih vrhova grafa jednak je dvostrukom broju bridova. Učenike valja dodatno pitati: "Kakav je onda broj zbroj svih stupnjeva vrhova?" (Odgovor: Paran.) te im reći da taj zaključak naziva *Lema o rukovanju*.

f) Ne postoji graf s neparnim brojem vrhova neparnog stupnja. Broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran jer kad bi bio neparan u zbroju stupnjeva svih vrhova ne bismo dobili paran broj, što je kontradikcija s *Lemom o rukovanju*.

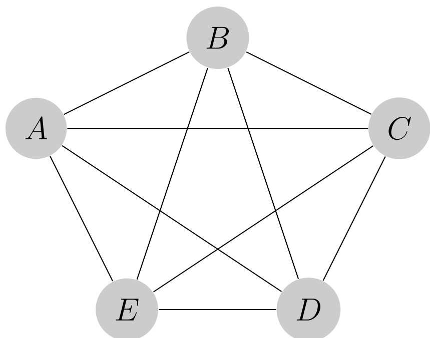
8.5 Kakvi su to Eulerovi i Hamiltonovi grafovi?

Cilj aktivnosti: Učenici će se upoznati s Eulerovim i Hamiltonovim grafom te uočiti neka njihova svojstva. Učenici će zaključiti da ako je graf Eulerov da ne mora biti Hamiltonov te obratno. (ideja uzeta iz [9])

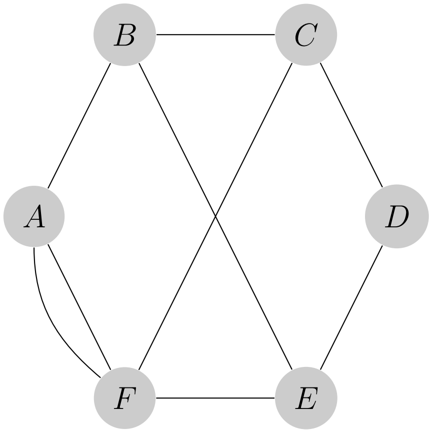
Zadatak 1.
Ako je moguće, zadanim grafovima G, H, K i L (sa slika 8.14, 8.15, 8.16, 8.17) odredi:
a) ciklus koji prolazi svim bridovima.
b) ciklus koji prolazi svim vrhovima točno jednom (osim početnog, tj. krajnjeg vrha). (Podsjetnik: U ciklusu su svi bridovi različiti)



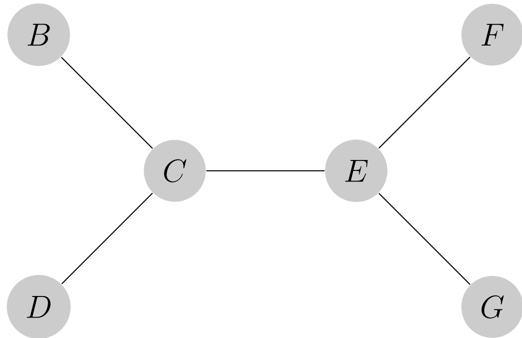
Slika 8.14: Graf G



Slika 8.15: Graf H



Slika 8.16: Graf K



Slika 8.17: Graf L

Zadatak 2.
Ciklus iz 1. zadatka koji prolazi svim bridovima naziva se *Eulerov ciklus*. Graf koji posjeduje Eulerov ciklus naziva se *Eulerov graf*. Nacrtajte nekoliko Eulerovih grafova. Neka barem jedan bude takav da je stupanj barem jednog od vrhova veći od 2.

Zadatak 3.
Promotri grafove iz 2. zadatka.
a) Što možeš reći o stupnju svakog vrha?
b) Vrijedi li obrat? Možemo li iz činjenice da su svi vrhovi parnog stupnja zaključiti da se radi o Eulerovom grafu?

Zadatak 4.
Ciklus iz 1. zadatka koji prolazi svim vrhovima točno jednom naziva se *Hamiltonov ciklus*. Graf koji posjeduje Hamiltonov ciklus naziva se *Hamiltonov graf*.
Nacrtajte nekoliko Hamiltonovih grafova takvih da imaju barem 3 vrha. Neka barem jedan bude takav da mu se stupanj barem jednog vrha veći od 2.

Zadatak 5.
a) Promotri grafove iz 4. zadatka. Provjeri vrijedi li $deg(V) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh V u grafu ako je n ukupan broj bridova grafa. Što zaključuješ, vrijedi li za svaki Hamiltonov graf dani uvjet?
b) Vrijedi li obrat? Nacrtaj nekoliko jednostavnih grafove s barem 3 vrha za koje vrijedi uvjet $deg(V) \geq \frac{n}{2}$ i $n \geq 3$ i provjeri jesu li oni Hamiltonovi. Što zaključuješ?

Zadatak 6.
a) Postoji li graf koji je i Eulerov i Hamiltonov? Ako postoji, nacrtaj ga.
b) Postoji li graf koji je Eulerov ali nije Hamiltonov? Ako postoji, nacrtaj ga.
c) Postoji li graf koji nije Eulerov ali je Hamiltonov? Ako postoji, nacrtaj ga.

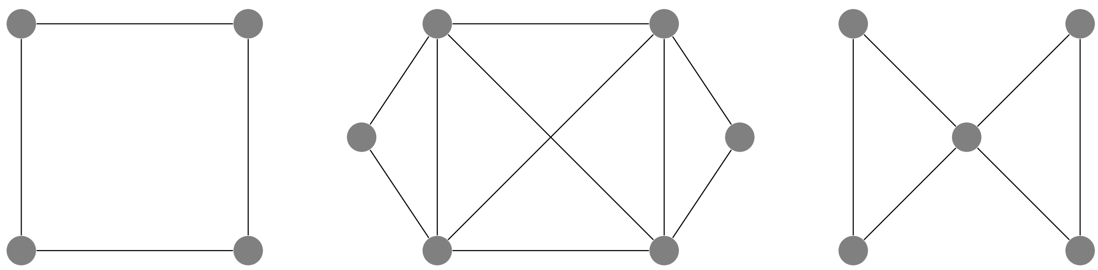
d) Postoji li graf koji nije ni Eulerov ni Hamiltonov? Ako postoji, nacrtaj ga.
e) Što zaključuješ? Ako nam je poznat podatak o tome je li graf Eulerov, možemo li zaključiti je li graf Hamiltonov? A obratno?

Rješenje i diskusija:

Zadatak 1.
a) Za graf G Eulerov ciklus je primjerice $D \to A \to E \to D \to B \to C \to D$
Za graf H Eulerov ciklus je primjerice $A \to D \to B \to E \to C \to A \to B \to C \to D \to E$.
Za graf K Eulerov ciklus ne postoji.
Za graf L Eulerov ciklus ne postoji.

b)Za graf G Hamiltonov ciklus ne postoji (vrh D se u svakom ciklusu pojavljuje više od jedanput).
Za graf H Hamiltonov ciklus je primjerice $A \to B \to C \to D \to E \to A$.
Za graf K Hamiltonov ciklus je primjerice $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$.
Za graf L Hamiltonov ciklus ne postoji.

Zadatak 2.
Neki Eulerovi grafovi su dani na slici 8.18.

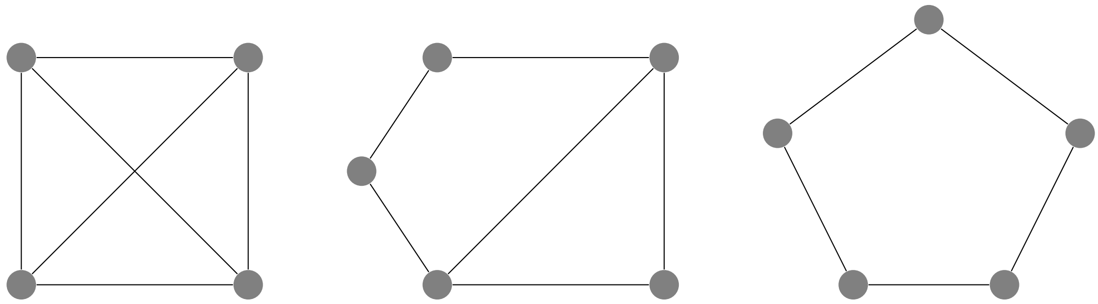


Slika 8.18: Eulerovi grafovi

Zadatak 3.
a) Stupanj svakog vrha Eulerovog grafa je paran broj.

b) Vrijedi i obrat.
Riječ je o *Eulerovom teoremu*.

Zadatak 4.
Neki Hamiltonovi grafovi su dani na slici 8.19.

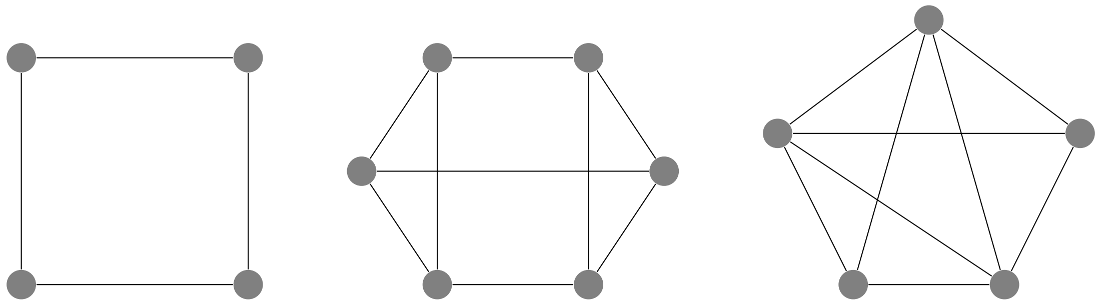


Slika 8.19: Hamiltonovi grafovi

Zadatak 5.

a) Dani uvjet ne vrijedi uvijek. Stoga možemo zaključiti da ako je graf Hamiltonov da ne mora značiti da uvjet vrijedi.

b) Neki grafovi za koje vrijedi $deg(V) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh V dani su na slici 8.20.



Slika 8.20: Jednostavni grafove za koje vrijedi $deg(V) \geq \frac{n}{2}$

Svi jednostavni grafovi koji imaju 3 ili više vrhova i za koje vrijedi $deg(V) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh V su Hamiltonovi. Taj zaključak poznat je pod imenom *Diracov teorem.*

Zadatak 6.

a) Postoji graf koji je i Eulerov i Hamiltonov, primjerice graf H iz 1.zadatka.

b) Postoji graf koji je Eulerov ali nije Hamiltonov, primjerice graf G iz 1.zadatka.

c) Postoji graf koji nije Eulerov ali je Hamiltonov, primjerice graf K iz 1.zadatka.

d) Postoji graf koji nije ni Eulerov ni Hamiltonov, primjerice graf L iz 1.zadatka.

e) Ako je poznat podatak da je graf Eulerov, ne možemo zaključiti je li graf Hamiltonov. Ne možemo ništa zaključiti niti u obratnoj situaciji.

8.6 Koji je najkraći put?

Cilj aktivnosti: Učenici će se na konkretnim primjerima iz svakodnevnog života upoznati s problemom najkraćeg puta te problemom kineskog poštara. Pokušat će pronaći rješenje te će isto provjeriti primjenom odgovarajućih algoritma. (ideja uzeta iz [1])

Zadatak 1.
Ana, Lovro, Maja, Branka, Josip, Danko, Klara i Viktor kvartovski su prijatelji. Viktor je jednog poslijepodneva odlučio pozvati svoje kvartovske prijatelje na igranje društvenih igara. U tablici 8.1 su dane udaljenosti (u metrima) među kućama prijatelja:

	Ana	Lovro	Maja	Branka	Josip	Danko	Klara	Viktor
Ana	-	150	100	-	-	-	-	-
Lovro	150	-	-	200	370	-	-	-
Maja	100	-	-	300	690	-	-	-
Branka	-	200	300	-	180	-	-	-
Josip	-	370	690	180	-	510	250	-
Danko	-	-	-	-	510	-	440	170
Klara	-	-	-	-	250	440	-	720
Viktor	-	-	-	-	-	170	720	-

Tablica 8.1: Udaljenosti među kućama prijatelja (u metrima)

a) Prikaži dane podatke grafički.

b) Koliku udaljenost Ana minimalno mora prijeći kako bi došla kod prijatelja Viktora? Kako bi u kontekstu teorije grafova glasilo to pitanje?

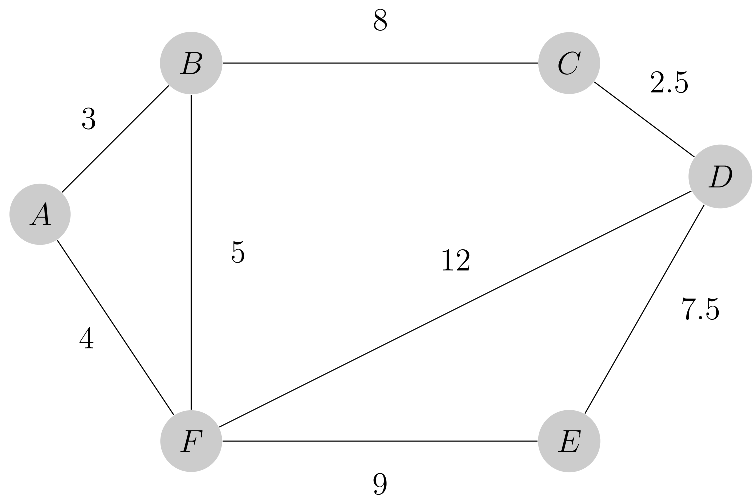
c) Ako Ana odluči ići najkraćim putem do Viktora, koje prijatelje može "pokupiti" po putu?

d) Problem iz 1.b zadatka naziva se *problem najkraćeg puta.* Provjeri točnost rješenja koristeći *Dijkstrin algoritam*:

1. Početnom vrhu V pridruži trajnu vrijednost 0, a svim drugim vrhovima ∞.
2. Pogledaj sve vrhove A kojima je vrijednost jednaka ∞ i koji su povezani s vrhom V. Vrijednost svakog od tih vrhova sada privremeno označi brojem koji je zbroj težine brida VA i vrijednosti vrha V (ako je ta vrijednost manja od njegove prethodne vrijednosti).

3. Od vrhova A koji sada imaju privremenu vrijednost, trajnu vrijednost pridruži onom vrhu A koji među njima ima najmanju vrijednost. Ako je takvih vrhova više, odaberi bilo koji.
4. Ponavljaj 2. i 3. korak sve dok svim vrhovima nije pridružena trajna vrijednost.
5. Za određivanje najkraćeg puta između dva zadana vrha vrati se po bridovima koji su pridonijeli trajnoj vrijednosti krajnjeg vrha puta.

Zadatak 2.
Građevinski inspektor dobio je zadatak da provjeri u kakvom su stanju određene ulice u gradu kako bi se za vrijeme školskih ljetnih praznika obavili potrebni radovi. Na slici 8.21 dana je mreža ulica koje insprektor mora obići. Udaljenosti su u kilometrima.



Slika 8.21: Mreža ulica s njihovim udaljenostima u kilometrima

a) Ako se inspektorov ured nalazi u vrhu A, odredi najkraći put koji inspektor mora prijeći imajući na umu da mora proći svakom ulicom te se naposljetku vratiti u svoj ured.

b) Prevedi 2.a zadatak u jezik teorije grafova te objasni hoće li taj najkraći put biti takav da svakom ulicom prođe točno jednom? Zašto?

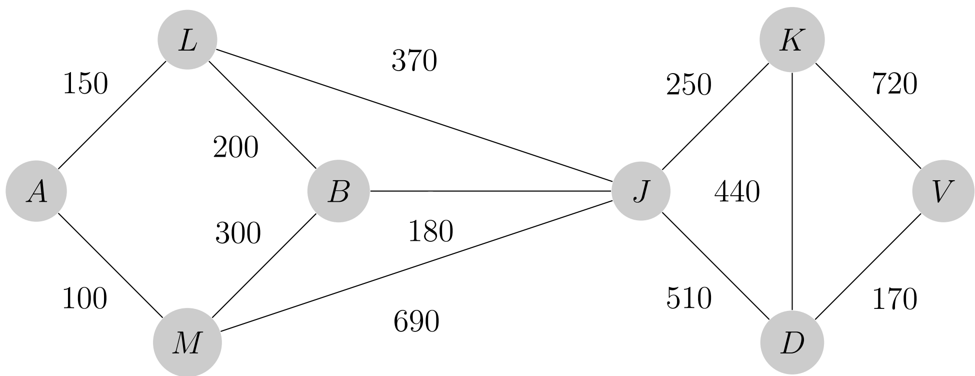
c) Kakvo bi bilo rješenje zadatka da su svi vrhovi parnog stupnja?

d) Problem iz 2.a zadatka naziva se *problem kineskog poštara*. Naziva se *kineski* u čast matematičaru Kuanu koji se ovim problemom prvi bavio. Provjeri rješenja zadatka koristeći sljedeći algoritam:

1. Ispiši sve vrhove neparnog stupnja.
2. Ispiši sve moguće kombinacije parova tih vrhova.
3. Za svaki par vrhova pronađi šetnju najmanje težine te izračunaj zbroj S svih tako dobivenih najmanjih težina.
4. Kombinacija parova za koju je S najmanji dat će bridove kojima se mora proći dva puta. Optimalna ruta bit će duljine S + zbroj težina svih bridova danog grafa.

Diskusija i rješenje:

Zadatak 1.
a) Grafički prikaz podataka iz tablice dan je na slici 8.22.

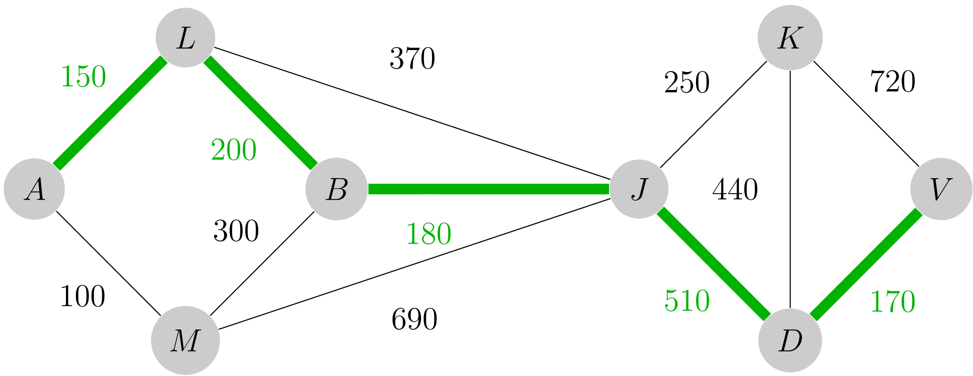


Slika 8.22: Grafički prikaz podataka iz tablice

b) Minimalna udaljenost koju je Ana morala prijeći kako bi došla do Viktora je 1210 metara. U kontekstu teorije grafova, traži se staza s početkom u točki A i krajem u točki V najmanje težine.

c) Ako Ana odluči ići najkraćim putem do Viktora, prijatelji koje može "pokupiti" su Lovro, Branka, Josip i Danko.

d) Dijkstrinim algoritmom dobiju se sljedeće trajne vrijednosti: 150 za vrh L, 350 za vrh B, 100 za vrh M, 530 za vrh J, 780 za vrh K, 940 za vrh D te 1210 za vrh V. Dakle, najkraći put kojim će Ana doći do Viktora, odnosno najkraći put od točke A do točke V, prikazan je na slici 8.23 zelenom bojom.



Slika 8.23: Najkraći put od Ane do Viktora

Zadatak 2.

a) Najkraći put, za koji vrijedi da počinje i završava u vrhu A te da prolazi svakom ulicom, je sljedeći: $A \to F \to E \to D \to F \to B \to C \to D \to C \to B \to A$.

b) Prevedeno u jezik teorije grafova zadatak glasi: Pronađi zatvorenu šetnju najmanje težine s početkom u vrhu A. Taj najkraći put nije takav da prolazi svakom ulicom točno jednom zato što stupnjevi svih vrhova nisu parni pa graf nije Eulerov.

c) Da su svi vrhovi parnog stupnja rješenje zadatka bio bi Eulerov ciklus.

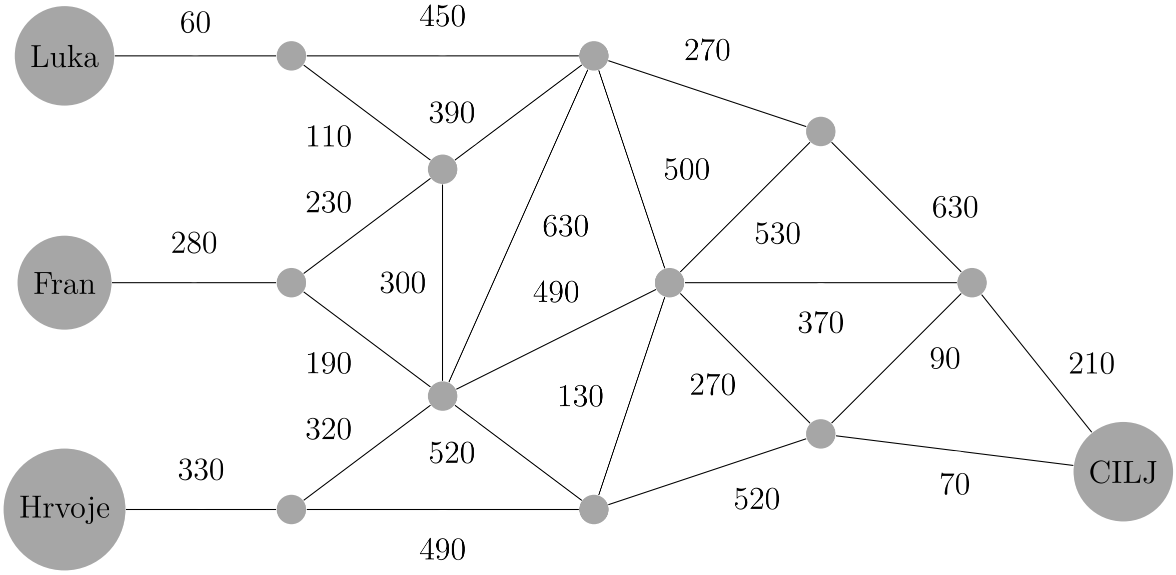
d) Vrhovi neparnog stupnja: B, D
Kombinacije parova tih vrhova: BD, DB
$S = 10.5$
Zbroj težina svih bridova $= 51$
S+zbroj težina svih bridova $= 61.5$
Duljina najkraćeg puta iznosi 61.5 kilometara.

8.7 Je li utrka pravedna?

Cilj aktivnosti: Učenici će primijeniti Dijkstrin algoritam. Problem iz stvarnog života prevest će u jezik teorije grafova i obratno.

Zadatak 1.

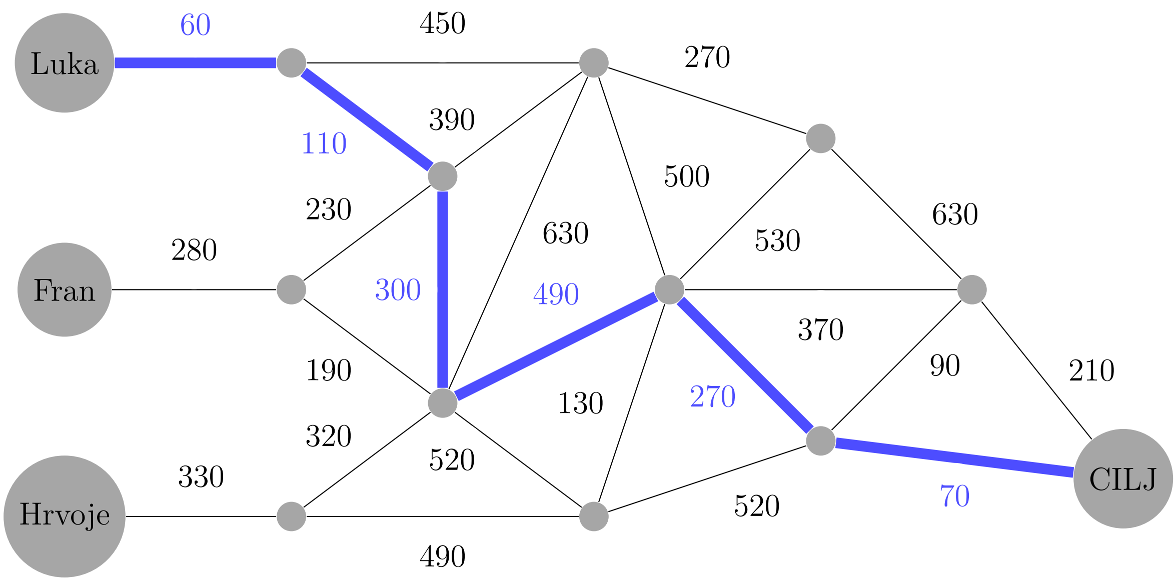
Luka, Fran i Hrvoje se utrkuju. Utrku započinju s različitih mjesta, te ju moraju završiti na istom mjestu, na cilju. Do cilja će doći trčeći kroz mrežu puteva kako je označeno na slici 8.24 (udaljenosti su u metrima). Je li utrka pravedna? Zašto? Uz pretpostavku da su svi jednako dobri trkači, tko će prvi doći do cilja?



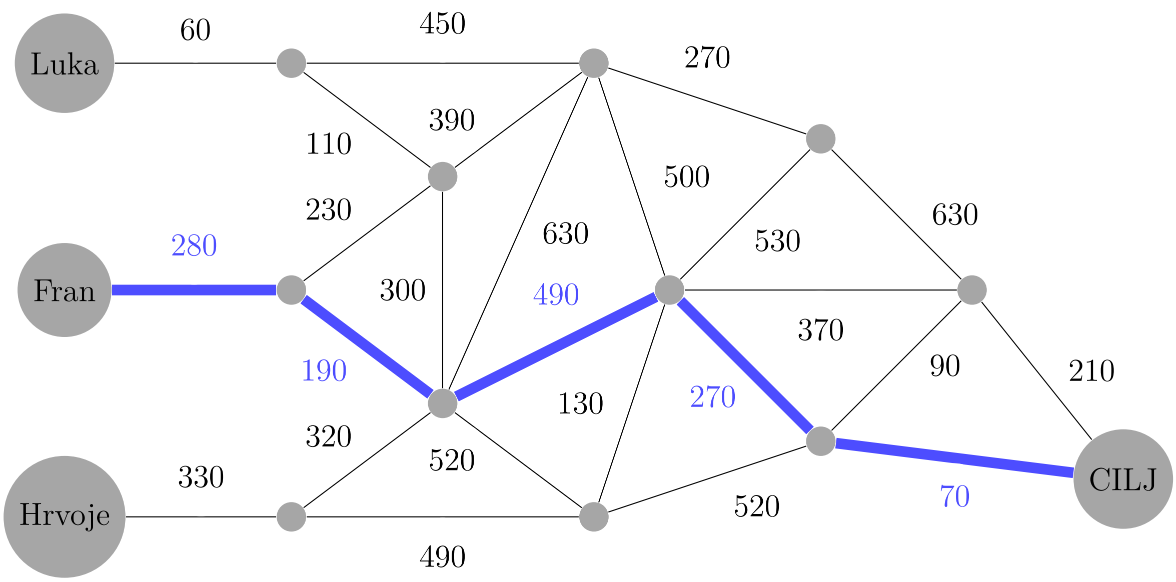
Slika 8.24: Mreža puteva kojima će se trčati

Diskusija i rješenje:

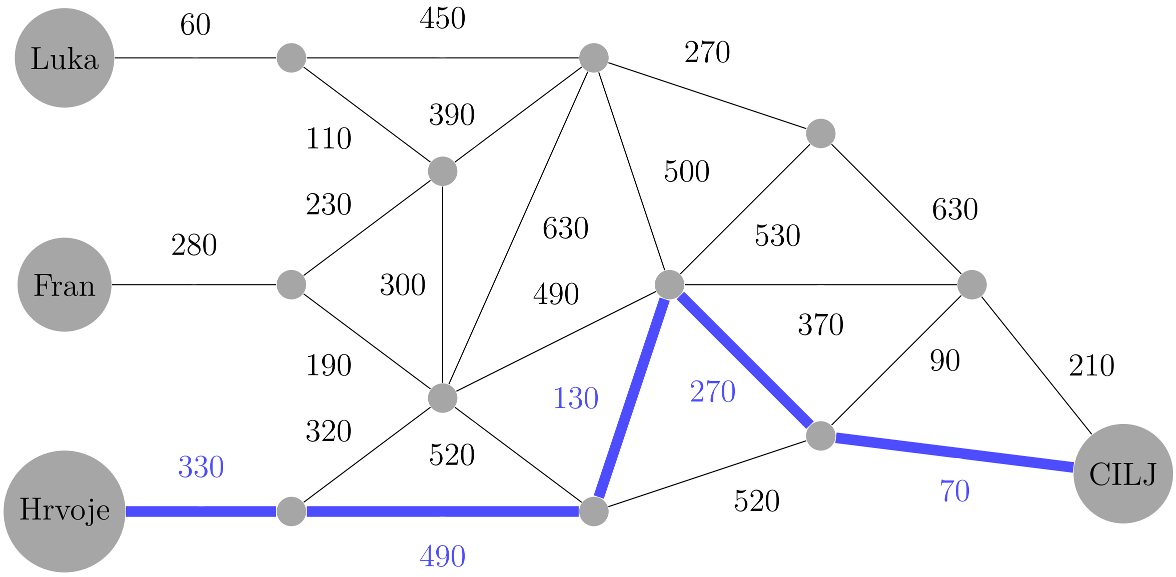
Utrka nije pravedna zato što najkraći putevi za sve trkače od starta do cilja nisu jednaki. Najkraći put koji Luka i Fran mogu otrčati iznosi 1300 metara, dok najkraći put za Hrvoja iznosi 1290 metara. Na slikama 8.25, 8.26 i 8.27 je prikazano koji je to točno nakraći put za svakog natjecatelja.
Uz pretpostavku da su svi jednako dobri trkači, Hrvoje će prvi doći do cilja budući da ima za pretrčati najmanju udaljenost.



Slika 8.25: Lukin najkraći put



Slika 8.26: Franov najkraći put

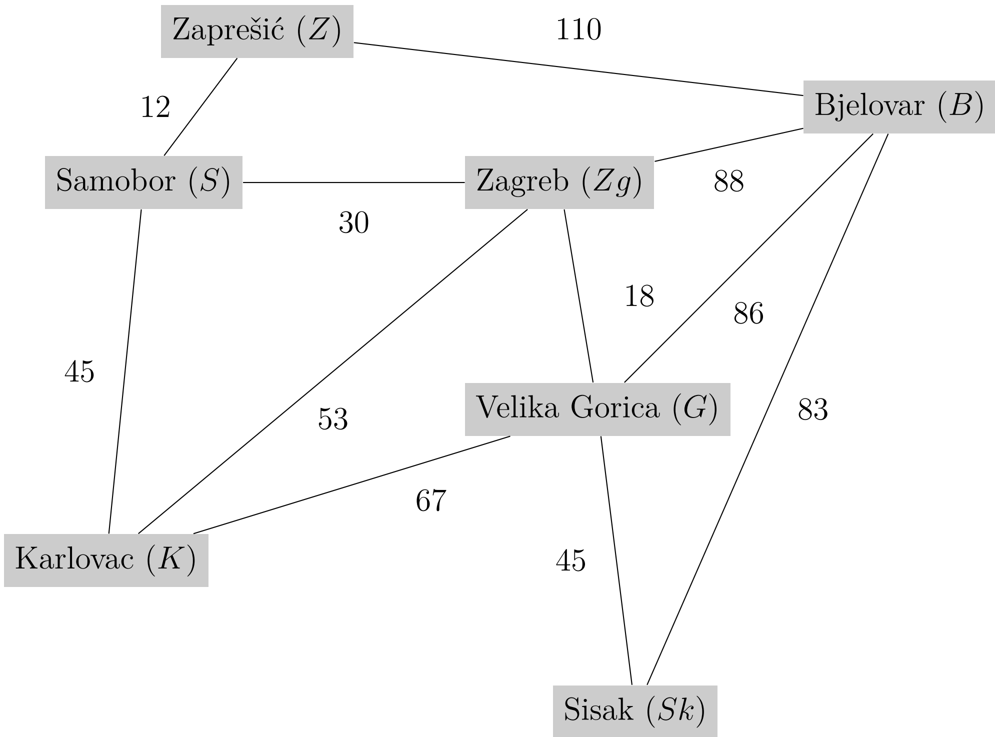


Slika 8.27: Hrvojev najkraći put

8.8 Koliko kabla će biti potrebno?

Cilj aktivnosti: Učenici će se na konkretnom primjeru iz stvarnog života susresti s problemom određivanja minimalnog razapinjućeg stabla, pokušati ga riješiti te se upoznati s algoritmima koji olakšavaju određivanje istog. (ideja uzeta iz [10])

Zadatak 1. Na slici 8.28 dana je moguća mreža telekomunikacijskih kablova (s duljinama u kilometrima) među 7 gradova.



Slika 8.28: Mreža mogućih kablova među gradovima

a) Kako potrošiti što manje kabla tako da svi gradovi budu umreženi? Koliko će se kabla minimalno morati potrošiti?

b) Prevedi problem iz 1.a zadatka u jezik teorije grafova. Što se zapravo tražilo?

c) Provjeri rješenje 1.a zadatka koristeći *Kruskalov algoritam*:

1. Sve bridove poredaj u rastući niz s obzirom na njihovu težinu.
2. Odaberi brid najmanje težine takav da ne formira ciklus s prethodno odabranim bridovima.
3. Ponavljaj 2. korak sve dok se stablo ne sastoji od $n - 1$ bridova (n označava broj vrhova.

d) Provjeri rješenje 1.a zadatka koristeći *Primov algoritam*:

1. Počni iz bilo kojeg vrha V.
2. Od svih bridova povezanih s V odaberi i grafu dodaj onaj koji ima najmanju težinu.

3. Od svih bridova povezanih sa stablom, odaberi onaj najmanje težine te ga dodaj u stablo.

4. Ponavljaj 3. korak sve dok se obuhvatiš sve vrhove.

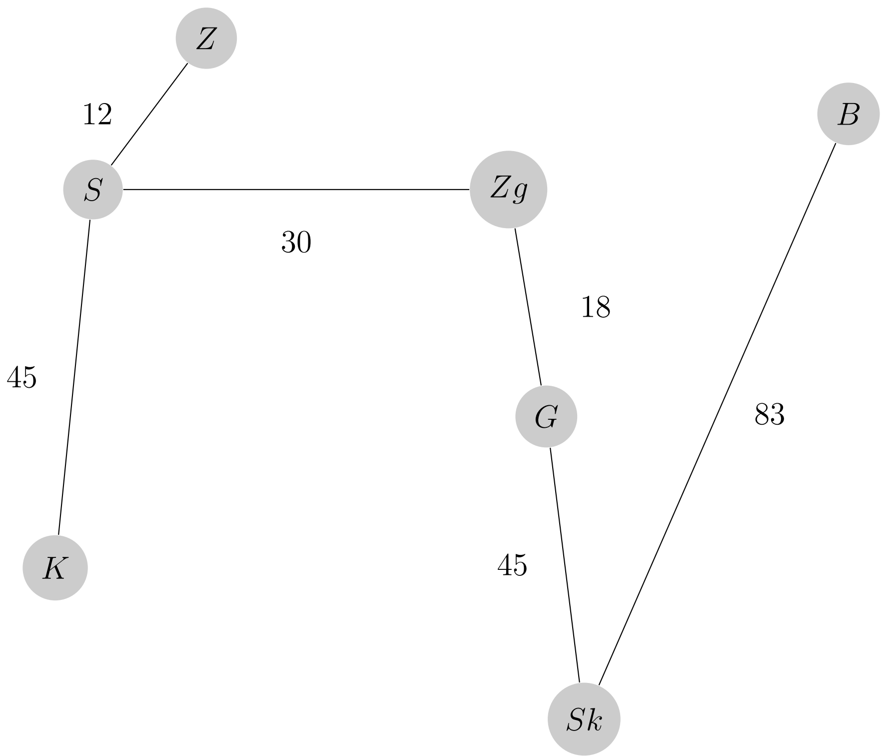
e) Provjeri rješenje 1.a zadatka koristeći *algoritam najbližeg susjeda*:

1. Pronađi brid najveće težine čijim uklanjanjem ne bi došlo do prekidanja grafa. Ukloni ga.

2. Ponavljaj 1. korak sve dok uklanjanjem bilokojeg brida ne dolazi do prekida grafa.

Diskusija i rješenje:

Zadatak 1.
a) Na slici 8.29 prikazano je kako treba povezati gradove da se potroši minimalno kabla. Minimalno će se morati potrošiti 233 kilometra kabla.



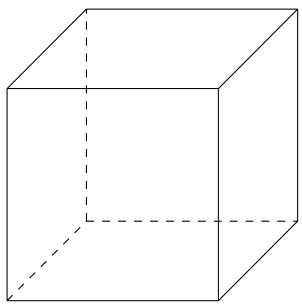
Slika 8.29: Optimalna mreža kablova

b) U kontekstu teorije grafova, zapravo se tražilo minimalno razapinjuće stablo danog grafa.

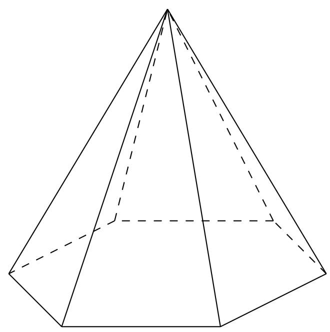
8.9 Otkrijmo Eulerovu formulu

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti *Eulerovu formulu* na konveksnim poliedrima te na grafovima Platonovih tijela.

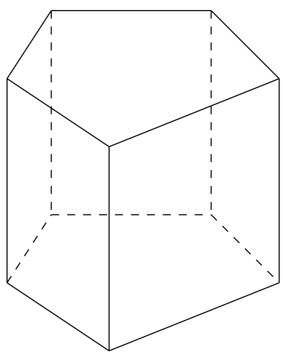
Zadatak 1. Popuni tablicu 8.2 te uoči vezu između broja vrhova v, broja bridova b i broja strana s koja vrijedi za svako od dana četiri geometrijska tijela.



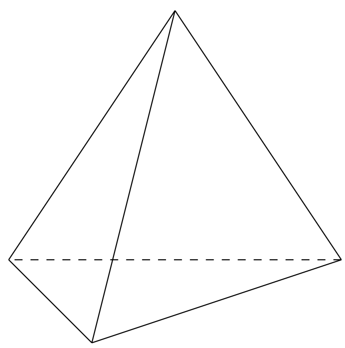
Slika 8.30: Poliedar A



Slika 8.31: Poliedar B



Slika 8.32: Poliedar C



Slika 8.33: Poliedar D

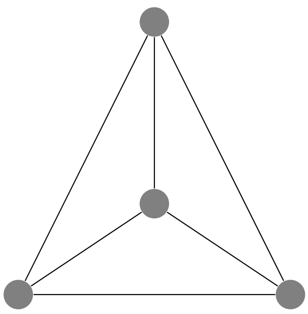
Slika	**Naziv poliedra**	v	b	s	**Veza između** v**,** b **i** s
8.30					
8.31					
8.32					
8.33					

Tablica 8.2: Zadatak 1.

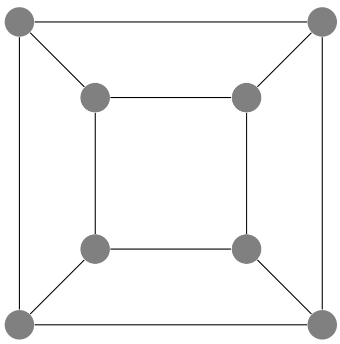
Zadatak 2. Popuni tablicu 8.3 te uoči vezu između broja vrhova v, broja bridova b i broja područja p koja vrijedi za dane planarne grafove Platonovih tijela.

Slika	**Naziv Platonovog tijela**	v	b	p	**Veza između** v**,** b **i** p
8.34					
8.35					
8.36					
8.37					
8.38					

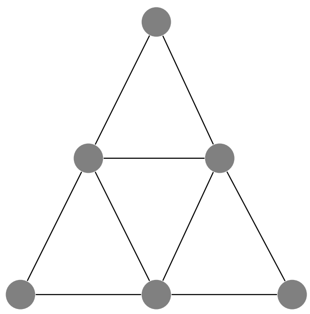
Tablica 8.3: Zadatak 2.



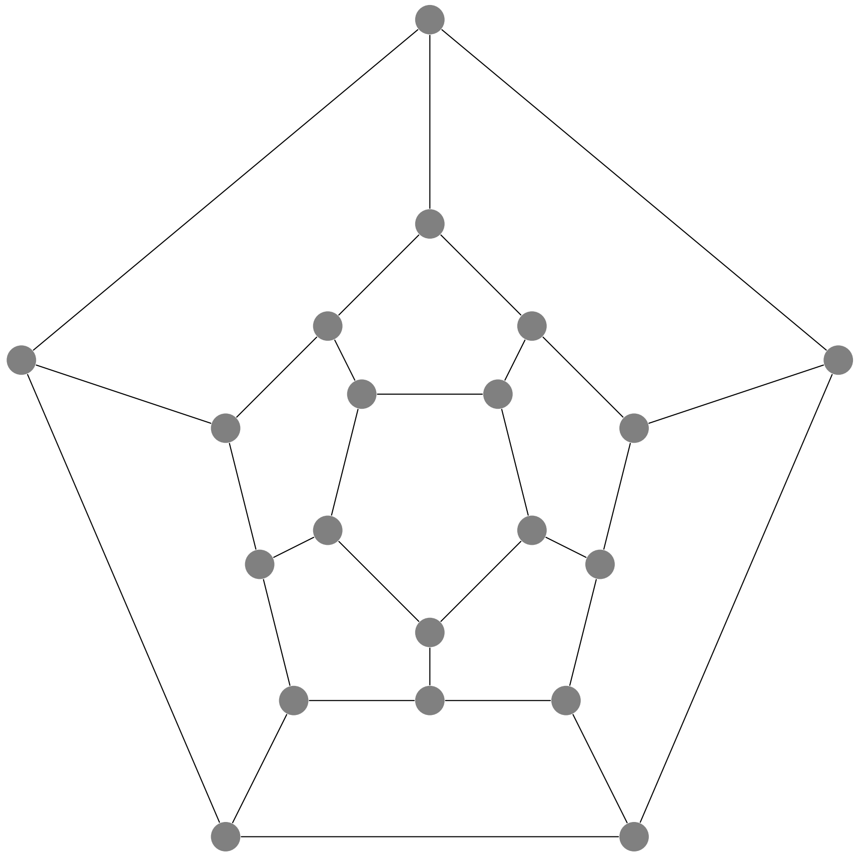
Slika 8.34: Graf A



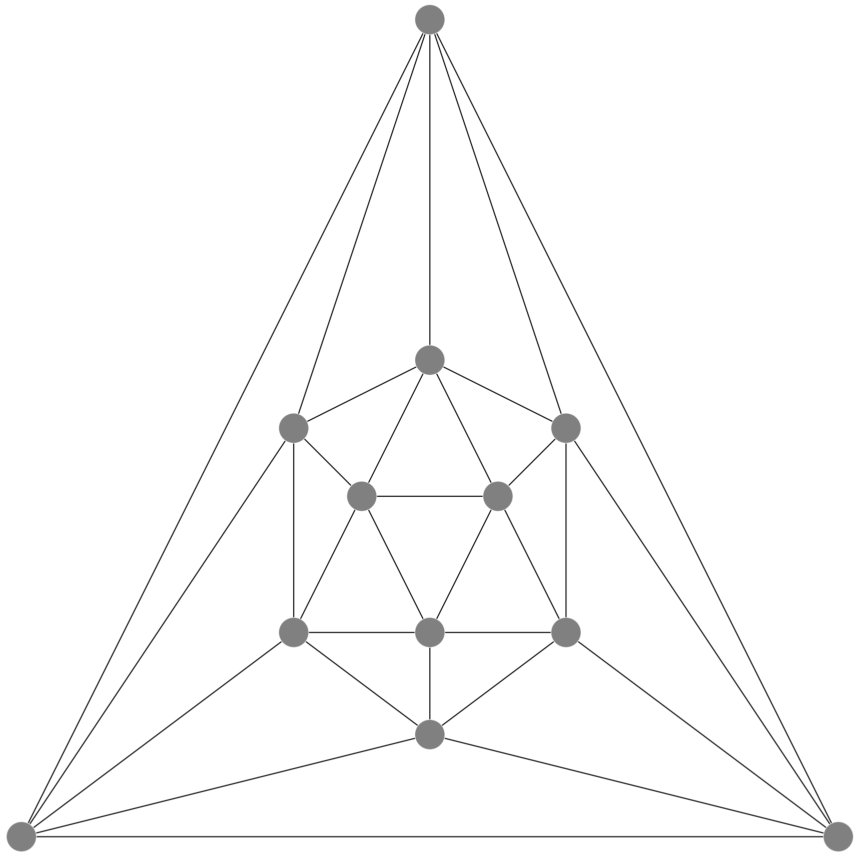
Slika 8.35: Graf B



Slika 8.36: Graf C



Slika 8.37: Graf D



Slika 8.38: Graf E

Rješenje i diskusija:

Zadatak 1. Rješenje je dano u tablici 8.4.

Slika	**Naziv poliedra**	v	b	s	**Veza između** v**,** b **i** s
8.30	kocka	8	12	6	$8-12+6=2$
8.31	uspravna pravilna 6-strana piramida	7	12	7	$7-12+7=2$
8.32	uspravna pravilna 5-strana prizma	10	15	7	$10-15+7=2$
8.33	tetraedar	4	6	4	$4-6+4=2$

Tablica 8.4: Rješenje 1. zadatka

Upravo se ta dobivena veza, koja općenitp glasi $v-b+s=2$ naziva *Eulerova formula.* Ona ne vrijedi samo za poliedre, već vrijedi i za planarne grafove, samo što će s kod planarnih grafova označavati broj područja.

Zadatak 2. Rješenje je dano u tablici 8.5.

Slika	**Naziv Platonovog tijela**	v	b	p	**Veza između** v**,** b **i** p
8.34	tetraedar	4	6	4	$4-6+4=2$
8.35	kocka (heksaedar)	8	12	6	$8-12+6=2$
8.36	oktaedar	6	12	8	$6-12+8=2$
8.37	dodekaedar	20	30	12	$20-30+12=2$
8.38	ikosaedar	12	30	20	$12-30+20=2$

Tablica 8.5: Rješenje 2. zadatka

Tražena veza je *Eulerova formula*, odnosno $v-b+p=2$.

Bibliografija

[1] *Chinese postman problem*, dostupno na http://www.suffolkmaths.co.uk/pages/Maths%20Projects/Projects/Topology%20and%20Graph%20Theory/Chinese%20Postman%20Problem.pdf (rujan 2017.)

[2] *Četvrta vježbenica za fakultativnu nastavu matematike*, dostupno na https://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/10/4_vjezbenica_USB.pdf (rujan 2017.)

[3] D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primjene*, Naučna knjiga, Beograd, 1981.

[4] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[5] F. M. Bruckler, *Povijest matematike - Matematika u Europi u prvoj polovici 18. stoljeća*, dostupno na http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/PovMat/povmat10b.pdf (rujan 2017.)

[6] G. Polya, *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, Wiley, New York, 1962.

[7] *Handshaking and chasing kids*, dostupno na http://www.math.ucla.edu/~radko/circles/lib/data/Handout-433-532.pdf (rujan 2017.)

[8] I. Nakić, *Diskretna matematika*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf (listopad 2017.)

[9] *Mathematics of touring*, dostupno na https://www.math.ku.edu/~jmartin/courses/math105-F11/Lectures/chapter6-part1.pdf (rujan 2017.)

[10] *Minimum connectors*, dostupno na https://www.pearsonschoolsandfecolleges.co.uk/Secondary/Mathematics/16plus/AdvancingMathsForAQA2ndEdition/Samples/SampleMaterial/Chp-01%20001-022.pdf (rujan 2017.)

[11] M. O. Pavčević, *Uvod u teoriju grafova*, Element, Zagreb, 2006.

[12] *Practical guide for IBMT*, dostupno na http://www.meria-project.eu/activities-results/practical-guide-ibmt (studeni 2017.)

[13] *Predavanja; Metodika nastave matematike 1*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mnm/?Materijali___Predavanja (studeni 2017.)

Sažetak

Teorija grafove grana je matematike koja je otkrivena zahvaljujući potrebi da se riješi problem sedam mostova Königsberga. Taj problem riješio je Leonhard Euler u prvoj polovici 18. stoljeća te se stoga on smatra osnivačem teorije grafova.

Ova grana matematika, iako nije dio redovne nastave matematike u srednjoj školi, lako je primjenjiva u nastavi. Jednostavno ju je povezati sa stvarnim životom budući da su njeni osnovni pojmovi, poput puta, povezanosti, šetnje, poznati iz svakodnevice te bi kao takva vrlo brzo postala i bliska učenicima.

U ovom diplomskom radu, nakon potrebne teoretske podloge kojom nastavnik mora vladati, izložene su ideje aktivnosti koje bi se mogle provesti na fakultativnoj nastavi matematike u srednjoj školi.

Summary

Graph theory is the branch of mathematics which was discovered thanks to the necessity to solve problem The Seven Bridges of Königsberg. Leonhard Euler solved the problem in first half of 18th century and that is why he is considered to be founder of the graph theory.

This branch of mathematics, although it is not a part of a regular high school program for mathematics, can be easily used in teaching. It is easy to connect it with real life considering that its basic terms, like path, correlation, walk, are well known from everyday life and that is why it would become really close to students.

In this thesis, after exposing the needed mathematical theoretical background for every teacher, we list activity ideas that could be incorporated in optional high school teaching of mathematics.

Životopis

Rođena sam 16. travnja 1991. u Zagrebu. Tu sam završila Osnovnu školu Pavleka Miškine te srednju školu, V. gimnaziju. Odluka koji ću fakultet upisati nije mi bila nimalo jednostavna, budući da me privlačilo nekoliko različitih područja. Ugrubo bih ih svrstala u četiri grupe: matematika, strani jezici, umjetnost, psihologija. Naposljetku je prevagnula matematika jer sam zaključila da se ostalim mogu nastaviti baviti u obliku hobija uz studiranje. Tako sam u slobodno vrijeme pohađala plesne škole i turnire, učila engleski, španjolski i talijanski, ponekad ručno izrađivala razne predmete i ukrase te odlazila na psihološke radionice. Kako kombinacija svih mojih aktivnosti nije uobičajena, ne čudi ni to da sam na PMF – Matematičkom odsjeku završila preddiplomski inženjerski smjer te da sam za diplomski studij odabrala nastavnički smjer.