Učenje rješavanjem problema na sadržajnom području geometrije

Ursa, Andrea Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Andrea Ivana Ursa

UČENJE RJEŠAVANJEM PROBLEMA NA SADRŽAJNOM PODRUČJU GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, studeni, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Draga mentorice, prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš, od srca Vam hvala na pomoći i velikodušnoj potpori pri izradi ovog rada, ali i na pomoći koju ste mi pružali tijekom cijelog mog visokoškolskog obrazovanja.

Veliko hvala mojim prijateljima!

I za kraj, najveće hvala mom dečku, bratu, roditeljima te baki i djedu na bezuvjetnoj podršci i ljubavi tijekom cijelog mog obrazovanja!

Sadržaj

Uvod

Ukoliko se zapošljavate moraju Vas krasiti vještine poput kritičkog mišljenja i kreativnog razmišljanja, morate biti sposobni raditi u timu te biti informatički pismeni. Koje od navedenih vještina je moguće razviti uz pomoć današnjeg obrazovanja? Želimo li kreativne i inovativne radnike, ne smijemo proizvoditi robote. Odgovor na pitanje trebamo li osuvremeniti obrazovanje je jasan, a prvi koji mogu pokrenuti promjenu su nastavnici.

"Zrno po zrno pogača, kamen po kamen palača!"

- Velimir Milošević

Cilj ovog rada je prikazati jednu strategiju suvremenog poučavanja. Strategija se zove učenje rješavanjem problema i njezina implementacija u nastavi matematike je sasvim prirodna. Barem je matematika puna (matematičkih) problema! Valja ipak napomenuti da takva nastava nosi sa sobom cijeli niz izazova za nastavnika o kojima treba voditi brigu.

U prvom dijelu rada bit će opisana spomenuta strategija. Bit će navedeni njeni elementi te koraci uz pomoć kojih se realizira u nastavnom procesu. Uz učenje rješavanjem problema, bit će opisane i neke druge strategije poučavanja. Uz to, u ovom dijelu bit će prikazani stavovi nastavnika matematike izvučeni iz ankete o istraživačkoj nastavi.

U drugom dijelu rada bit će navedeni matematički problemi koji se mogu primijeniti pri takvom načinu poučavanja. Problemi su iz sadržajnog područja geometrije, a pokrivaju matematička znanja iz sljedećih tema: opisana kružnica, geometrijska preslikavanja (translacija i osna simetrija), mnogokuti (konveksni i konkavni mnogokuti, svojstva paralelograma, tetivni četverokut), sličnost trokuta te elipsa i neka njena svojstva.

Poglavlje 1

Učenje rješavanjem problema

1.1 Matematički problemi

Prije proučavanja novih strategija i metoda u suvremenoj nastavi matematike, treba razmotriti čime se učenici najviše bave. Najčešća djelatnost učenika pri učenju matematike je rješavanje matematičkih zadataka koje još zovemo i matematičkim problemima. S kakvim se sve matematičkim zadatcima učenici susreću?

Prema [11], matematički zadatci se mogu podijeliti u dvije skupine:

- Standardni zadatci
- Nestandardni zadatci

Standardne zadatke možemo nazvati i rutinskim zadatcima. U takvim zadatcima nema nepoznatih sastavnica. Uvjeti zadatka su jasno i precizno postavljeni, a cilj je očigledan. Teorijska osnova se lako uočava i bez dublje analize, a način rješavanja je učenicima poznat i teče prirodno prema očekivanjima. Jasno je, takvi zadatci ne doprinose mnogo razvoju kreativnih sposobnosti učenika, ali su važni kao sredstvo boljeg razumijevanja i bržeg usvajanja novih matematičkih sadržaja. ([11])

Primjeri standardnih zadataka su:

- Izračunaj: $14 + (54 - 6) : 6 - 30 : 2$
- Riješi kvadratnu jednadžbu $4x^2 - 4x - 3 = 0$ pomoću formule.
- Odredi obujam kocke s bridom duljine $3cm$.

Za razliku od standardnih zadataka, kod **nestandardnih zadataka** je barem jedna sastavnica nepoznata. U slučaju da su nepoznate dvije sastavnice ili više njih, nestandardni zadatci nazivaju se još i **problemski zadatci**. Rješavanje nestandardnih zadataka je višestruko jer omogućuje razvijanje logičkog mišljenja i provođenje nevelikih samostalnih istraživanja. Za rješavanje takvih zadataka potreban je pojačan umni napor, dublja analiza, veća koncentracija, ustrajnost i dosjetljivost. ([11])

Primjeri nestandardnih zadataka su:

- Izračunaj količnik zbroja i razlike brojeva 678 i 666.
- Za koju vrijednost parametra a jednadžba $ax = (a-2)x^2 + 2$ nema realna rješenja?
- Odredi obujam kocke kojoj je površina dijagonalnog presjeka $25cm^2$.

Iako **problemski zadatci** spadaju pod nestandardne zadatke valja ih posebno izdvojiti kada dijelimo vrste matematičkih zadataka.
Dugogodišnje praćenje matematičkih natjecanja pokazuje da se i naši najbolji učenici često ne snalaze dobro u rješavanju složenijih problemskih zadataka te na njima postižu slabije rezultate. ([11])

Primjeri problemskih zadataka su:

- U nekog su seljaka fazani i kunići. Ako je broj glava svih ovih životinja 35, a broj nogu 94, koliko je kojih životinja u seljaka?
- Užetom zadane duljine $d = 100m$ treba omeđiti zemljište pravokutnog oblika koje će imati najveću moguću površinu. Kolike će biti stranice tog pravokutnika?
- Bazen oblika kocke, širine 3.4 metara, napunjen je vodom do dvije trećine svoje visine. Koliko je potrebno vode u njega uliti da bi se bazen napunio do vrha?

Mnogi problemski zadatci mogu se riješiti na više načina. Jedan način je složeniji, a drugi je jednostavniji. Naravno, među svim načinima postoji onaj najbolji način rješavanja koji je jednostavan i racionalan, ali njegovo otkrivanje i nije najvažnije na početku postupka rješavanja. Ljepši način rješavanja se izdvaja na kraju, a na početku je važan svaki način rješavanja. ([11])

Nadalje, kada govorimo o matematičkim problemima podrazumijevamo nestandardne problemske zadatke.

1.2 Nastava matematike prije i poslije

Pokušajte se prisjetiti svojih đačkih dana u osnovnoškolskim i srednjoškolskim klupama. Točnije, nastavnih satova matematike. Kako biste opisali način na koji se odvijala nastava matematike? Koji su bili ključni zadatci pri obrađivanju određene cjeline?

Kada se mnogi prisjećaju svog obrazovanja matematike, najčešće se sjete suhoparnog učenja činjenica, pravila i formula te mnoštvo standardnih, rutinskih zadataka koja su na kraju svakog poglavlja popraćena sa samo nekoliko nestandardnih problemskih zadataka. ([18])

Uz eksponencijalni rast znanja, informacija i razvitka tehnologije, povećava se i broj činjenica koje se mogu naučiti. Upravo zbog sve veće količine znanja, škole nisu više u mogućnosti prenijeti svojim učenicima sve važne informacije za život. Umjesto toga, nova najvažnija zadaća škole jest naučiti učenike samostalnom učenju i rješavanju problema u svrhu njihovog individualnog razvoja i samoostvarenja. ([8])

Stoga u suvremenoj nastavi matematike, problemski zadatci mijenjaju svoju ulogu. Oni nisu više van fokusa, na kraju svake cjeline samo za "*one koji žele znati više*" već se nalaze na samom početku procesa učenja.

Svaki proces učenja počinje pričom ili situacijom za čije je rješavanje potrebno naučiti određene činjenice, primijeniti neko istraživanje ili razviti određene vještine [18]. Važna stavka takve nastave je i učenička samostalnost pri istraživanju, učenju i rješavanju problema.

Upravo je takva struktura temelj suvremene nastave, a iz nje se razvijaju mnogi novi, kvalitetniji pristupi nastavnom procesu i učenju.

1.3 Učenje kroz ”...”

Mnogi novi pristupi učenju i poučavanju imaju nazive oblika ”učenje kroz *nešto*” ili na engleskom ”*something*”-based learning. Prema [12], u Buckovom institutu za obrazovanje navode čak četrnaest pristupa. Neki od pristupa su:

- Učenje kroz igru
- Učenje kroz izazov
- Učenje kroz skupinu

Čak se i spominje učenje kroz Zombi apokalipsu. Nastavnik David Hunter je osmislio novi kurikulum za poučavanje geografije koji je zapravo po propisanim standardima isti kao i prethodni kurikulum, ali je pisan u duhu Zombi apokalipse s mnogim aktivnostima koje uključuju učenje rješavanjem problema i učenje kroz projekte. (http://zombiebased.com)

Svaki od suvremenih pristupa možemo staviti pod ”veću” kategoriju iskustvenog učenja ili učenja kroz istraživanje. Svaki pristup je varijacija iskustvenog učenja, a detaljnije ćemo proučiti pristupe koji se najviše spominju. To su:

- Učenje istraživanjem, propitivanjem (eng. *Inquiry-based Learning*, short: IBL)
- Učenje kroz projekt (eng. *Project-based Learning*, short: PjBL)
- Učenje rješavanjem problema (eng. *Problem-based Learning*, short: PBL)

Primjenjujući nove strategije uloga nastavnika se nužno prebacuje na osmišljavanje istraživanja, projekata i problema prikladnih učenicima kroz koje stječu nova znanja i vještine umjesto uloge primarnog izvora znanja u nastavnom procesu. Pomoću tehnologije olakšano je smišljanje takvih problema, pristup raznim postojećim problemima pa i obrada informacija i prikaz rezultata. Takvi pristupi učenju predstavljaju novi izazov za sve nastavnike koji nastoje uspostaviti veze između samog sadržaja i procesa učenja. ([2])

Zašto nove strategije?

Samostalnim istraživanjem, osmišljavanjem projekata te rješavanjem problema iz svakodnevnog života učenik je potaknut na razvijanje vještina rješavanja problema i matematičkog mišljenja. Učenik treba tražiti potrebne informacije, analizirati i sintentizirati, uspostaviti početne pretpostavke te primijeniti deduktivne zaključke u dokazivanju postavljenih hipoteza. ([6])

Takav pristup poučavanju je učenicima posebno zanimljiv jer na zabavan i samostalan način stiječu nova znanja i vještine. Učenici su time aktivni sudionici nastavnog procesa. Također, jedna od prednosti takvog poučavanja je direktna primjena matematike u svakodnevnom životu pa time odgovara na slavno postavljeno pitanje: "*Što će mi to u životu?*".

1.4 Učenje istraživanjem

Početci učenja istaživanjem, odnosno iskustvenog učenja nalaze se još u Sokratovo doba koji je poticao svoje studente da dolaze do znanja postavljanjem pitanja. No najveće zasluge u razvoju takvog pristupa učenju nosi John Dewey koji je naglašavao kako učenje počinje znatiželjom učenika i potiče se kroz njihovo novostečeno iskustvo i refleksiju učenika. ([2])

Temelj svakom učenju kroz istraživanje je *početno pitanje* koje je produkt određenih situacija, problema, projekata ili izazova. Takvo postavljeno pitanje predstavlja početnu poziciju iz koje učenici smišljaju dodatna pitanja te započinju potragu za odgovorima. Učenici su stoga aktivni subjekti procesa učenja, a nastavnici imaju ulogu olakšavanja tog procesa i usmjeravanja učenika umjesto prijenosa svih potrebnih informacija i traženog odgovora. ([2])

Dakle, možemo reći da je učenje istraživanjem nadskup učenju kroz projekt i učenju rješavanjem probema te ostalim, sličnim pristupima koji nisu ovdje navedeni. Svaki od tih pristupa spada pod iskustveno učenje gdje učenici samostalno otkrivaju nova znanja i vještine, odnosno samostalno istražuju.

1.5 Učenje kroz projekt

Deweyjevo usmjerenje na iskustvo i refleksiju kao izvor učenja se može laički i jednostavno izreći u frazi *učenje čineći/radeći* (eng. *learning by doing*). Iz te ideje razvija se učenje kroz projekt, odnosno učenje kroz razvoj značajnog modela ili produkta. ([2])

Takvi projekti moraju biti zanimljivi učenicima kako bi ih kvalitetno odradili. Također, poželjna je njegova direktna primjena u njihovom svakodnevnom životu (školi, gradu, zajednici...), ali ne smije se izostaviti iz fokusa njegova edukacijska svrha. Za odrađivanje projekata treba imati na umu da je potreban dulji vremenski period.

Primjerice, projekt može biti iz sadržajnog područja vjerojatnosti i statistike. Učenici imaju oko tjedan dana da u grupi osmisle prezentaciju i plakat na temu *Koliko je naš život* *slučajan?*. Nakon što su na satu matematike odradili osnove na temu vjerojatnost, učenici u grupama osmišljavaju neke životne situacije za čije ishode mogu izračunati vjerojatnost, a plakati mogu biti izloženi u učionici ili hodnicima škole. Poželjno je, da učenici sami istražuju kako se računaju određene vjerojatnosti, a za usputna pitanja vezana uz sadržaj, mogu pitati nastavnika na satu matematike.

Svaka grupa učenika može odabrati situacije koje su im u spektru osobnog interesa. Primjerice iz sporta. Na taj način, učenici imaju mogućnost približiti matematiku svakodnevnom životu te ju na zanimljiv način mogu naučiti.

1.6 Učenje rješavanjem problema

Učenje rješavanjem problema se prvenstveno razvijalo u sjevernoj Americi u medicinskom obrazovanju prije 40-tak godina te se sada primjenjuje u cijelom svijetu u edukaciji medicine, pedagogije, prirodnih znanosti, arhitekturi i drugim profesijama. ([17])

Kao što i sam naziv kaže, učenje rješavanjem problema je pristup u kojem se koristi problem kao polazna točka u cilju stjecanja i integriranja novog znanja. ([6]) Na početku nastavnog procesa nastavnik učenicima postavi problem, a učenici kroz njegovo rješavanje dolaze do novih spoznaja i znanja.

Učenje rješavanjem probema može se definirati kao iskustveni proces učenja koji razrješava pitanja, znatiželje, sumnje i nesigurnosti vezane za neke složenije životne situacije. Učenici su potpuno uključeni ulozi otkrivanja novih znanja, odnosno u potrazi odgovora na vlastita pitanja, a potraga se ne svodi samo na čitanje udžbenika ili ispitivanje nastavnika. ([5])
Uloga nastavnika u ovom pristupu je fleksibilno graditi probleme oko postavljenog kurikuluma. ([2]) Matematički koncepti i procesi koji su propisani u kurikulumu mogu se izgraditi rješavanjem zanimljivih problema iz svakodnevnog života. Takav pristup učenju djeluje na razvijanje učeničke samostalnosti te pokreće interes i stvaralačko mišljenje. Učenik postaje aktivan subjekt i istraživač u nastavnome procesu. Rješavanje problemskih zadataka najviši je oblik učenja jer se sastoji od otkrivanja odnosa između danih podataka i rješenja problema, a aktivira učenikovo prethodno usvojeno znanje i stečeno iskustvo. ([10])

Primjerice, učenici otkrivaju formulu za volumen stošca i piramide te vezu sa volumenom valjka i prizme jednakih baza. Pri tome, učenici samostalno izrađuju modele i biraju način otkrivanja formule. Moguće je računati volumen algebarski, a vezu je moguće i eksperimentalno otkriti uz pomoć punjenja modela kamenčićima ili vodom.

1.7 Usporedba strategija

Sumirat ćemo bitne značajke svake strategije u tablici kako bismo bolje uočili sličnosti i razlike. U tablici ćemo koristiti kratice: UI - *Učenje istraživanjem*, UKP-*Učenje kroz projekt* i URP - *Učenje rješavanjem problema*.

	UI	UKP	URP
Cilj pristupa	Odgovori na pitanja	Stvaranje opipljivog proizvoda	Rješenje problema
Načelo	Učenje direkto iz zapažanja postavljajući deduktivna pitanja	Rad na životnim problemima u svrhu stvaranja opipljivih proizvoda	Učenje kroz istraživanje, objašnjavanje i zaključivanje na životnim problemima
Uloga nastavnika	Voditelj. Podučava i pruža potrebne informacije	Voditelj i mentor. Uz znanje i potrebne informacije, daje savjete	Pruža informacije, ali ne vodi
Uloga učenika	Radi individualno ili u grupi. Interpretira, objašnjava, postavlja pretpostavke. Osmišljava i usmjeruje svoje zadatke. Dijeli odgovore s nastavnikom	Radi u timu. Dublje istražuje. Osmišljava i prati plan rada i raspored. Stvara proizvod.	Radi individualno ili u grupi. Razjašnjavanja problem, određuje ciljeve učenja i potrebne podatke. Istražuje i stvara plan za rad.
Područje	Za sva područja, posebice za osnovnu školu	Za sva područja, posebice za arhitekturu, marketing i dizajn	Za sva područja, posebice za medicinu i pravo
Stupanj obrazovanja	Za sve stupnjeve, posebice one ranije	Za sve stupnjeve, posebice one kasnije	Za sve stupnjeve, posebice one kasnije

Tablica 1.1: Usporedba pristupa ([15])

Sve suvremene strategije poučavanja, uključujući navedene tri, imaju zajedničko poticanje učenika da istražuje, prikuplja i primijenjuje znanja umjesto pasivnog primanja znanja od strane nastavnika. ([2]) No, ono najvažnije što treba promatrati kod ova tri pristupa je koje ishode učenja želimo postići.

Naime, učenje istraživanjem (UI) je najučinkovitije u razumijevanju prirode znanstvenog istraživanja i pruža konceptualno razumijevanje. Svrha učenja rješavanjem problema (URP) je razvitak vještine rješavanja problema i vještine rada u timu, suradnje dok učenje kroz projekt (UKP) omogućuje razvitak znanstvenog procesa istraživanja, organizacijskih vještina te planiranje vlastitog vremena uz stvaranja vlastitog, autentičnog proizvoda.([15])

Iako su navedeni pristupi vrlo slični, najbolji je onaj koji najviše odgovara određenim učenicima odnosno razrednom odjelu. Nastavnici najčešće variraju od jednog do drugog pristupa, no najbolje se odabire pristup ovisno o tome koji nastavni cilj se želi postići. Primjerice, učenje kroz projekt je najbolje iskoristiti za opsežnije teme te se najčešće projekt planira kroz veće vremensko razdoblje za razliku od učenja rješavanjem problema koje se može realizirati kroz jedan ili dva nastavna sata.

U ovom radu, bazirat ćemo se na učenje rješavanjem problema. Takav pristup poučavanju može se iskoristiti gotovo na svakom nastavnom satu. U suvremenoj nastavi matematike često se spominje *motivacijski zadatak* na početku nastavne teme. Takav zadatak predstavlja početak nastavnog sata uz pomoć kojeg učenici dobivaju uvid u nastavnu temu ili se nastavnik tek na kraju nastavnog sata vraća na zadatak kako bi učenici dobili bit odnosno cilj naučenog u nastavnom procesu. U učenju rješavanjem problema taj motivacijski zadatak predstavlja uvijek neki problemski zadatak.

1.8 Elementi učenja rješavanjem problema

Prema [5] u procesu učenja rješavanjem problema nalazimo sljedeće elemente:

- **Postavljen problem**. Najčešće se problemi postavljaju koristeći metodu igranja uloge. Primjerice; "Otišli ste na kampiranje i našli ste se u sljedećoj situaciji..." "Gradonačelnik ste grada Zagreba i trebate odabrati najkraći put..." i sl.
- **Različite uloge** koje preuzimaju učenici
- Mogućnost **analize** problema, postavljanja pitanja
- **Istraživanje**. Najčešće provedena unutar skupina u svrhu traženja odgovora na postavljena pitanja.

- Kritičko **prosuđivanje** dobivenih rezultata i **skice** racionalnih rješenja i zaključaka.
- **Prezentacija**. Izlaganje dobivenih rezultata, mogućih rješenja ostalim skupinama.
- **Formativna** vrednovanja.

1.9 Koraci učenja rješavanjem problema

Gore navedeni elementi mogu se implementirati u šest osnovnih koraka procesa učenja rješavanjem problema. Prema [12], koraci su:

1. Postavljanje još nejasnog, zamršenog problema kao polazne točke
2. Razjašnjavanje što se traži u problemu i što treba dobiti
3. Određivanje što je poznato i nepoznato te što je potrebno za rješavanje problema
4. Postavljanje ciljeva učenja matematičkih sadržaja u svrhu usmjeravanja individualnog ili grupnog istraživanja
5. Dijeljenje dobivenih informacija u grupi u svrhu konstruiranja mogućih rješenja
6. Prezentacija prijedloga rješenja i provjera istog

Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje problema. No, ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Za nalaženje rješenja problema potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa problemom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje zadatka na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan problem aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanja se podrubljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da problemi s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku. ([11])

"Definicija dobrog matematičkog problema leži u matematici koju on izaziva, a ne u samom problemu.[1]

Andrew Wiles ([1])

[1]prijevod: A.I.U

1.10 Učenje rješavanjem problema u Hrvatskoj

Koliko je takav pristup poučavanju popularan među nastavnicima u Hrvatskoj, a koliko primjenjiv u nastavi matematike?

Odgovore na ta pitanja i još neke informacije o stanju u našim školama možemo izvući iz ankete provedene za potrebe projekta Meria. ([9])

Nastavnici smatraju da postoji nekoliko poteškoća u implementaciji takvog pristupa u nastavi, a navedeni nedostaci su:

× Kurikulum ne ohrabruje istraživačku nastavu

× Nema dovoljno dostupnih materijala te istraživački pristup nije uključen u udžbenicima

× Nedostatak vremena (što u kurikulumu, što za planiranje nastave)

× Učenici prolaze kroz vrednovanje koje ne nagrađuje istraživanje

Što se tiče učenika, nastavnici smatraju da učenici rijetko na nastavnim satovima:

× planiraju i rade vlastite eksperimente,

× testiraju vlastite ideje i izvode zaključke iz eksperimenata,

× rade na modelima i simulacijama.

Međutim, učenici na nastavnim satovima:

✓ pokazuju sposobnost istraživanja,

✓ rade zajedno kako bi objasnili ideje i rješenja jedni drugima,

✓ uključeni su u rasprave, debatiraju i dijele ideje.

Generalni zaključak o stavu ispitanih nastavnika bio bi:

Kurikulumi ne podupiru istraživačku nastavu (niti vremenski niti potrebnim materijalima), **nastavnicima** manjka potrebno vrijeme za planiranje i izvođenje istraživačke nastave, a **učenici** pokazuju interes, ali nemaju motivaciju za istraživačkom nastavom zbog sustava vrednovanja koji ne nagrađuje israživanje.

Poglavlje 2

Primjeri matematičkih problema

2.1 Odabir i struktura problema

Problemi koji slijede bit će iz sadržajnog područja geometrije. Neki problemi će imati više načina rješavanja. Naravno, te druge metode rješavanja se mogu staviti u fokus ovisno o cilju koji nastavnik želi postići, a poželjno je s učenicima proći više metoda rješavanja.

Strategija učenja rješavanjem problema se odlično može implementirati u nastavi matematike. Bar je matematika puna problema koje treba riješiti! U ovom radu, probleme smo podijelili u tri vrste, ovisno o cilju koji se želi postići. Te tri vrste problema su:

- **Problemi za motivaciju**
- **Problemi za provjeru i proširivanje znanja**
- **Problemi otvorenog tipa**

Na početku, problemi su predstavljeni za perspektivu učenika. Stoga, neće biti prikazana rješenja već smjernice koje vode kroz rješavanje problema. Svaki problem bit će razrađen kroz već navedenih šest koraka ove strategije:

- Postavljanje zamršenog problema ili situacije,
- Pojašnjavanje i shvaćanje problema,
- Određivanje poznatih i nepoznatih sastavnica,
- Što i kako treba istražiti,

- Skupljanje bitnih informacija za konstrukciju rješenja,
- Prezentacija dobivenog rješenja, provjera i diskusija.

Svaki od koraka bit će razrađen kroz sljedeće podnaslove:

- ? Kako glasi problem?
- Kako krenuti?
- Što znamo, a što ne znamo?
- Istražimo!
- Pretpostavimo!
- Pokažimo!
- Primjenimo!

U dijelu *Pokažimo!* će biti napisani prijedlozi tema koje učenici mogu istražiti u svrhu rješavanja problema. Na nastavniku je da odabere hoće li i koje će teme obraditi s učenicima.

Odmah iza postavljenog problema slijedi njegova razrada. Na početku svakog problema pod naslovom *Matematika iza problema* je napisan cilj koji se želi postići te su napisane teme koje se mogu obraditi, ishodi učenja te potrebno vrijeme za obradu problema. Ostali naslovi su identični kao u postavljenom problemu te je za svaki dio predložen oblik rada, potreban materijal te rješenja.

Ovisno o situaciji na nastavnom satu, nastavnik odlučuje koliku samostalnost i koje smjernice daje učenicima. U nekim situacijama neće biti potrebne smjernice dok će u nekim drugim situacijama sigurno trebati i više smjernica od navedenih. To je prirodno te ovisi o mnogo faktora, primjerice o uzrastu učenika, predznanju, razini koncentracije, itd.

2.2 Problemi za motivaciju

Problemi ove vrste služe za uvođenje i otkrivanje novih matematičkih znanja, npr. novih pojmova, formula, svojstava itd. Naravno, učenici pri rješavanju bilo kojeg problema uče nešto novo, ali za razliku od ostalih problema za rješavanje ovih nije potrebno veliko predznanje učenika. Ovakve probleme možemo promatrati kao *motivacijske probleme* prije svake cjeline, gradiva, odnosno teme koja se obrađuje.

1. Problem: Medicinski centar

? Kako glasi problem?

Dugo Selo, Vrbovec i Ivanić Grad su tri gradića kontinentalne Hrvatske. Iako svaki grad ima svoj dom zdravlja za manje potrebe i hitne slučajeve, za naprednije medicinske zahvate stanovnici moraju putovati do glavnog grada Zagreba. Zajedničkim snagama, gradonačelnici ova tri grada uspjeli su dobiti potrebna sredstva iz europskih fondova te time planiraju sagraditi zajedničku, bližu bolnicu koja će svima služiti. Gradonačelnici su stoga unajmili vas kako biste odredili najbolju lokaciju za novi medicinski centar. Najbolja lokacija bi bila takva da je udaljenost između svakog grada i centra jednaka.

Kako krenuti?

- Putem interneta, potražite interaktivnu kartu Hrvatske i nađite spomenute gradove.
- Postoje li između ta tri grada neki veći gradovi u kojima bi bilo logično smjestiti medicinski centar?
- Na što treba obraditi pažnju, a da svi gradovi budu zadovoljni određenom lokacijom?

Što znamo, a što ne znamo?

- Intuitivno, što bi ste rekli gdje bi se medicinski centar trebao nalaziti?
- Ima li smisla gledati lokacije van trokuta Dugo Selo - Vrbovec - Ivanić Grad? Obrazložite.
- Postoje li neke situacije gdje je pogodnije medicinski centar sagraditi van trokuta od tri grada? Ako da, skicirajte nekoliko takvih situacija i obrazložite.

Istražimo.

- Snimite fotografiju dijela interaktivne karte koja vam je potrebna i implementirajte fotografiju u programu dinamične geometrije.

- Čime možemo obilježiti gradove u programu dinamične geometrije? Označite ih te konstruirajte trokuta Dugo Selo - Vrbovec - Ivanić Grad. Napomena: Točke možete označiti početnim slovom odgovarajućeg grada.
- Na što se svodi rješavanje problema, ako ga želimo riješiti konstrukcijski?
- Odredite proizvolju točku M koja će predstavljati položaj novog medicinskog centra.
- Koje veličine trebate promatrati kako biste znali je li lokacija pogodna za sve gradove? Ispišite sva potrebna mjerenja.
- Eksperimentalno, odredite najpovoljniji položaj točke M.

Pretpostavimo!

- Razmislite o drugačijoj metodi nalaženja pogodnog položaja točke M.
- Možete li iskoristiti neka znanja o kružnicama ili simetralama dužina? Razmislite i raspravite u skupini.

Dokažimo!

- Ako mislite da ste uspjeli odrediti metodu nalaženja pogodnog položaja medicinskog centra, pokušajte metodu konstruirati u programu dinamične geometrije. Provjerite mjerenja. Je li metoda valjana?
- Provjerite vrijedi li vaša metoda i u drugim situacijama. Mijenjajte položaje gradova i ponovite postupak. Je li metoda valjana u svim situacijama?
- Provedite diskusiju u skupini ili razredu koji su prednosti i nedostaci takvog određivanja idealnog položaja. Koji faktori iz stvarnog života mogu utjecati na određivanje položaja?

Primjenimo

- Isti problem interpretirajte na proizvoljno odabrana dva grada Hrvatske. Što je tada potrebno konstruirati da bismo dobili pogodnu lokaciju medicinskog centra?
- Isti problem interpretirajte sada na proizvoljno odabrana četiri grada Hrvatske i prezentirajte svoja rješenja ostalim skupinama.
- Hoće li se uvijek moći naći pogodna lokacija za četiri grada? Što to znači matematički?

Razrada 1. problema: Medicinski centar

Koja matematika leži iza problema?

Učenici će rješavajući problem iz stvarnog života uočiti potrebu za konstrukcijom središta opisane kružnice trokuta.

Vrijeme izvođenja aktivnosti: Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata.
Potreban materijal: Računala, pristup internetu, program dinamične geometrije ili nastavni listić s kartom, prozirna folija, markeri za prozirne folije, trokuti i šestar

Učenici će:

- konstruirati središte trokutu opisane kružnice
- obrazložiti metodu nalaženja središta trokutu opisane kružnice
- konstruirati polovište dužine
- otkriti pojam tetivnog četverokuta
- otkriti svojstvo tetivnog četverokuta

Kako krenuti?

Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama. Frontalni.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu. (Nije nužno)

Učenici će putem interneta ili na nastavnom listiću promatrati kartu koja prikazuje tri navedena grada. Zatim provode diskusiju s nastavnikom koji ih vodi po pitanjima kako bi svim učenicima bilo jasno što se očekuje kao rješenje problema.

Što znamo, a što ne znamo?

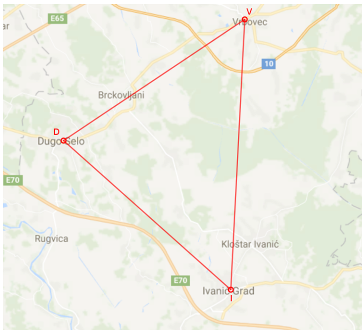
Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama. Frontalni.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu. (Nije nužni)

Nastavnik i za ovaj dio provodi diskusiju s učenicima. Potrebno je naglasiti kako će učenici vjerojatno reći kako je uvijek pogodno medicinski centar staviti unutar trokuta triju gradova. S obzirom da se traži da su udaljenosti između centra i svakog grada jednake, postojat će mogućnosti gdje neće biti slučaj da je medicinski centar unutar trokuta (sve situacije kada su središta trokutu opisanih kružnica izvan unutrašnjosti trokuta). Diskusija ovog dijela je jako bitna te ukoliko učenicima to nije jasno, nastavnik može prikazati nekoliko takvih situacija na ploču te mjerenjem potkrijepiti takve situacije.

Istražimo.

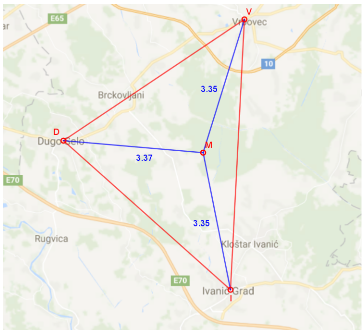
Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu (Nije nužno)

Učenici će snimiti fotografiju karte i implementirati ju u nekom programu dinamične geometrije. Obilježit će navedene gradove i prikazati trokut. Kako bi se troku jasnije vidio, nastavnik može dati učenicima uputu da pod *svojstvima slike* namjeste manju *neprozirnost*.



Slika 2.1: Konstrukcija postavljenog problema

Učenici će zatim odrediti točku M koja će predstavljati lokaciju novog medicinskog centra. Prikazat će udaljenost točke M od točaka D, V i I te pomicanjem točke M odrediti najpogodni položaj, odnosno položaj gdje su sve tri udaljenosti jednake.



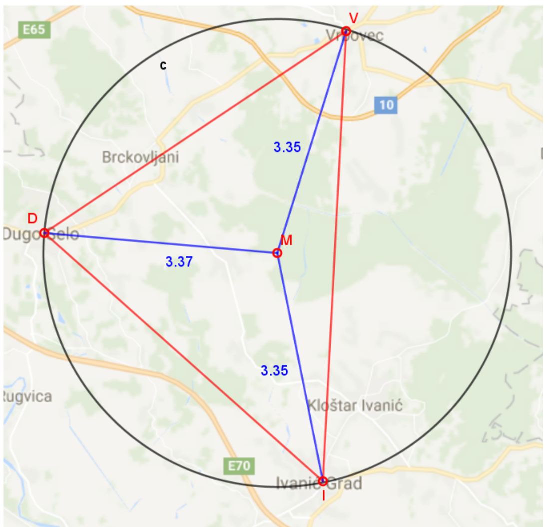
Slika 2.2: Konstrukcija postavljenog problema

Pretpostavimo!

Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu. (nije nužno)

Učenici će primjetiti da mogu iskoristiti znanja o kružnici. Kružnica je skup točaka koje su jednako udaljene od jedne fikse točke, u ovom slučaju od točke M. Stoga, treba konstruirati Trokutu opisanu kružnicu. To se lako može napraviti u programu dinamične geometrije. No što ako ta znanja želimo iskoristiti za nalaženje središta takve kružnice? Postoji li metoda nalaženja središta trokutu opisane kružnice?

Učenici zatim dolaze do zaključka kako bi mogli tražiti presjeke simetrala dužina trokuta. Nastavnik može pripomoći potpitanjima tako da učenici dođu do tog zaključka. Ukoliko su učenici već radili karakteristične točke trokuta, ovo nebi trebalo biti prezahtjevno.



Slika 2.3: konstrukcija trokutu opisane kružnice

Dokažimo!

Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu (nije nužno)

Učenici će u ovom dijelu aktivnosti konstruirati središte trokutu opisane kružnice te provjeriti mjerenjem jesu li dobili pogodan položaj za medicinski centar. Isto će ponoviti na nekoliko različitih primjera. Poželjno je da učenici sami odaberu neka tri grada Hrvatske i ponove postupak. Dobivena rješenja prezentiraju ostalim skupinama.

Ukoliko nastavnik s učenicima ne koristi računala, konstrukcija točke može se izvesti na zanimljiv način i pri tom ne koristiti trokute i šestar. Učenici savijaju nastavni listić s kartom na način da, u prvom slučaju, točka D "padne" na točku V. Na taj način učenici dobivaju simetralu dužine $\overline{DV}$. Postupak ponavljaju za preostale točke te se na presjeku dobivenih simetrala nalazi tražena točka M.

Nakon toga nastavnik provodi diskusiju u razredu o ostalim faktorima koji utječu na određivanje lokacije takvog centra. Primjerice, za slučaj Dugo Selo - Vrbovec - Ivanić Grad na dobivenom položaju se nalazi šuma. Također, manjka brzih cesta i autocesta za brži prolazak hitne pomoći itd.

Primjenimo

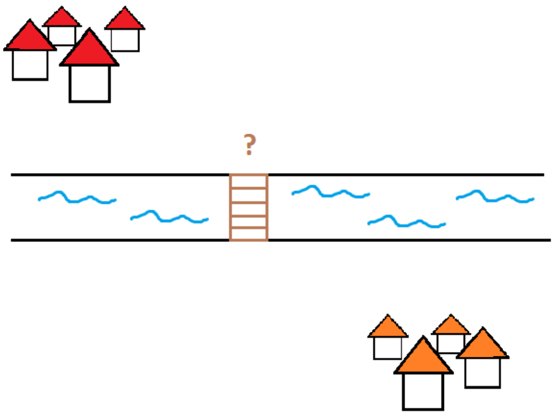
Oblik rada: Rad u tročlanim skupinama. Frontalni.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu (nije nužno)

Učenici će lako zaključiti kako se isti problem za dva grada rješava nalaženjem njihovog polovišta. Kod problema s četiri grada vjerojatno većina učenika neće uspjeti naći četiri grada Hrvatske koja čine tetivni četverokut stoga slijedi diskusija s nastavnikom u kojoj učenici otkrivaju pojam tetivnog četverokuta.

2. Problem: Mostovi

? Kako glasi problem?

Inženjer ste prometa i angažirao vas je župan u planiranju izgradnje mosta. Između dva grada izgrađen je kanal određene širine. Gdje treba postaviti most preko kanala pa da put između dva grada bude najkraći?



Slika 2.4: Skica problema

Kako krenuti?

- Pokušajte u programu dinamične geometrije konstruirati problem. Gradove označite točkama M i N, a kanal kao par paralelnih pravaca $a \parallel b$.
- Konstruirajte jedan od mogućih putova. Označite točkama položaje gdje počinju i završavaju mostovi.
- Razmislite o tom putu između dva grada. Od koliko dijelova se sastoji put?

Što znamo, a što ne znamo?

- Razmislite koji su mogući, smisleni položaji svih objekata.
- Možemo li put podijeliti na nekoliko dijelova? Ako da, označite te dijelove puta.
- Koja veličina nas zanima? Koja mjerenja je potrebno napraviti?
- Postoji li neki podatak koji nam je poznat?

Istražimo.

- Pokušajte smisliti nekoliko specijalnih situacija.
- Zamislite da se oba grada nalaze na pravcu koji je okomit na kanal. Koji je onda najkraći put?
- Zamislite da je širina kanala jednaka 0 (pravci rubova kanala se poklapaju). Koji je onda najkraći put između gradova? Nacrtajte ovaj slučaj u programu dinamične geometrije.
- Promotrite prethodnu situaciju te pomaknite jedan pravac ruba kanala i drugi grad za određenu udaljenost od prvog ruba kanala. Što je tada najkraći put između gradova?

Pretpostavimo!

- Možete li odrediti metodu nalaženja najkraćeg puta?
- Provjerite vrijedi li vaša metoda u svim situacijama.
- Provjerite vrijedi li metoda u nekim kompliciranijim situacijama.

Dokažimo!

- Pokušajte raspisati dokaz metode nalaženja najkraćeg puta koji je matematički potkrijepljen te ga prezentirajte ostalim skupinama.

Primjenimo

- Pokušajte naći najkraći put između dva grada ako su između njih dva kanala različitih širina.

Razrada 2. problema: Mostovi

Koja matematika leži iza problema?

Učenici će rješavajući problem iz stvarnog života uočiti potrebu za translatiranjem objekata.

Vrijeme izvođenja aktivnosti: Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata.
Potreban materijal: Računala, pristup internetu, program dinamične geometrije ili prazan bijeli papir, prozirna folija, markeri za prozirne folije, ravnalo i škare

Učenici će:

- translatirati dužine za vektor
- obrazložiti metodu nalaženja najkraćeg puta koristeći svojstva paralelograma
- konstruirati problem u programu dinamične geometrije

Ukoliko nastavnik mislim da je početni problem prejednostavan za razred, moguće je odmah krenuti od složenije varijacije problema sa dva paralelna kanala različitih širina. Također, ako nastavnik ne raspolaže s računalima, problem je moguće izvesti koristeći papir, prozirne folije i markere u boji.

Kako krenuti?

Oblik rada: Rad u parovima.
Potreban materijal: Računalo za svaki par učenika. (Nije nužno)

Učenici u parovima konstruiraju problem u programu dinamične geometrije te jedan od mogućih putova označavajući sve potrebne elemente (Točke, dužine, duljine dužina). Nastavnik može potaknuti učenike pitanjem od koliko se dijelova sastoji put te da te dijelove proizvoljno označe.

Što znamo, a što ne znamo?

Oblik rada: Rad u parovima.
Potreban materijal: Računalo za svaki par učenika. (Nije nužno)

Neka učenici proučavaju smislene položaje svih objekata. Većina će zatim krenuti mjeriti sve dijelove puta, ukupni put te, mijenjajući položaj mosta pokušati minimizirati ukupnu duljinu puta. Nastavnik može potaknuti učenike da naprave tablicu koja će prikazivati sve dijelove puta te njihove duljine koje se mijenjaju za različite položaje mosta. Tada učenici mogu zaključiti da je duljina drugog dijela puta, odnosno mosta uvijek fiksa. To je zato što je širina kanala uvijek fiksna. Dakle taj podatak je uvijek poznat.

🔍 **Istražimo.**

Oblik rada: Rad u parovima.
Potreban materijal: Računalo za svaki par učenika. (Nije nužno)

Dobro je ostaviti prvo učenike da sami istražuju različite položaje, odnosno situacije. Ukoliko nastavnik primjeti da učenici nemaju ideju za nalaženja najkraćeg puta, može im pomoći uz napisane smjernice. Najbolja je smjernica da učenici zamisle kako je širina kanala jednaka 0 te se postepeno širi. Moguće je čak napraviti i animaciju širenja kanala u programu dinamične geometrije. Tada će učenici uočiti kako se zapravo koriste translacijom pri nalaženju najkraćeg puta.

🤔 **Pretpostavimo!**

Oblik rada: Natjecateljski. Frontalni.
Potreban materijal: Računalo za svaki par učenika. (Nije nužno)

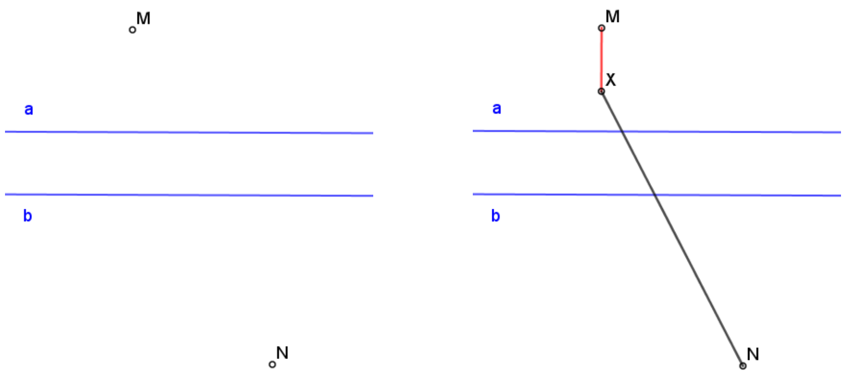
Nastavnik može razred podijeliti u dvije skupine koje se međusobno natječu. Jedna skupina na ploču crta jednu varijaciju početnog problema. Druga skupina ima zadatak na tu varijaciju koristeći translaciju naći najkraći put. Ovdje učenici mogu smisliti više paralelnih kanala, više gradova, itd.

🤓 **Dokažimo!**

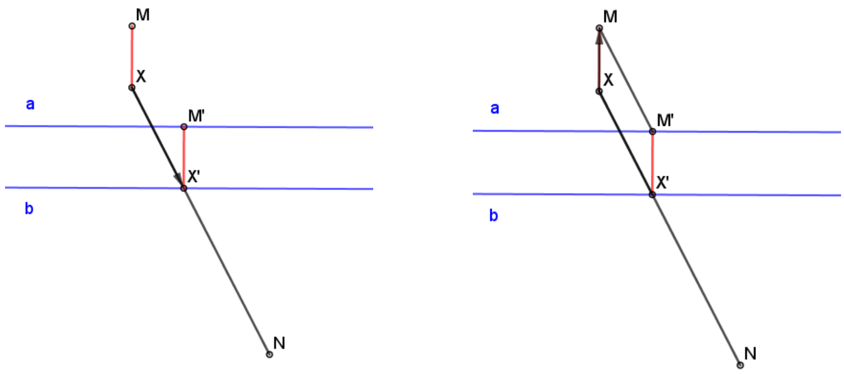
Oblik rada: Natjecateljski. Frontalni.
Potreban materijal: Papir, olovka i trokuti.

Učenici najprije crtaju konstrukciju početnog problema na listu papira.

S obzirom da je širina kanala, odnosno udaljenost između pravaca a i b konstantna (označimo ju sa m), potrebno je konstruirati okomitu dužinu iz točke M ili N na pravce a i b duljine m. Drugu točku te dužine označimo sa X. Tada je najkraći put između točaka X i drugog grada, u ovom slučaju točke N zapravo dužina $\overline{XN}$. Na kraju je potrebno samo translatirati most, odnosno dužinu $\overline{MX}$ na položaj gdje treba biti most i prvi dio puta.



Slika 2.5: Konstrukcija problema



(a) Translacija mosta (b) Translacija prvog dijela puta

Slika 2.6: Translacije za dobivanje najkraćeg puta

Primjenimo

Oblik rada: Rad u parovima.
Potreban materijal: Računalo za svaki par učenika. (Nije nužno)

Analogno, primjenom translacije, učenici otkrivaju najkraći put i u slučaju kada su između dva grada dva kanala različitih širina.

2.3 Problemi za proširivanje znanja

Za razliku od problema za motivaciju problemi za proširivanje znanja su mnogo složeniji. Dok je kod problema motivacije cilj bio jasan i fokusiran na određeno matematičko znanje, ovi problemi su šireg spektra. U ovim problemima učenici koriste neka već stečena znanja, ali ga dodatno proširuju. Rješavajući ove probleme moguće je više istraživati i primjenjivati razne metode rješavanja. Rad u skupini je poželjan te ako su skupine različito riješile zadatak, dobro je na kraju provesti diskusiju i razmijeniti različite metode rješavanja.

3. Problem: Sigurnosne kamere

? Kako glasi problem?

U vašoj školi se nedavno dogodila provala. U školi imate jednu sigurnosnu kameru koja, zbog lošeg položaja, nije mogla snimiti provalnika. Vi i vaš tim morate odrediti minimalan broj kamera te položaje gdje ih trebate postaviti u hodnicima škole kako bi se u buduće mogla nadzirati cijela škola.

Kako krenuti?

- Kakve sigurnosne kamere postoje? Mogu li se kamere rotirati? Koliki kut prostorije može jedna kamera snimiti?
- Gdje se postavljaju kamere? Koji su najidealniji položaji u prostoriji za postavljanje sigurnosne kamere? Obrazložite na primjeru učionice.
- Koji su nedostaci sigurnosnih kamera?

Što znamo, a što ne znamo?

- Što je potrebno napraviti za planiranje postavljanja kamera?
- Kako se crtaju mape odnosno tlocrti? Koje sve informacije su potrebne za crtanje?
- Jesu li tlocrti jedinstveni? Obrazložite.

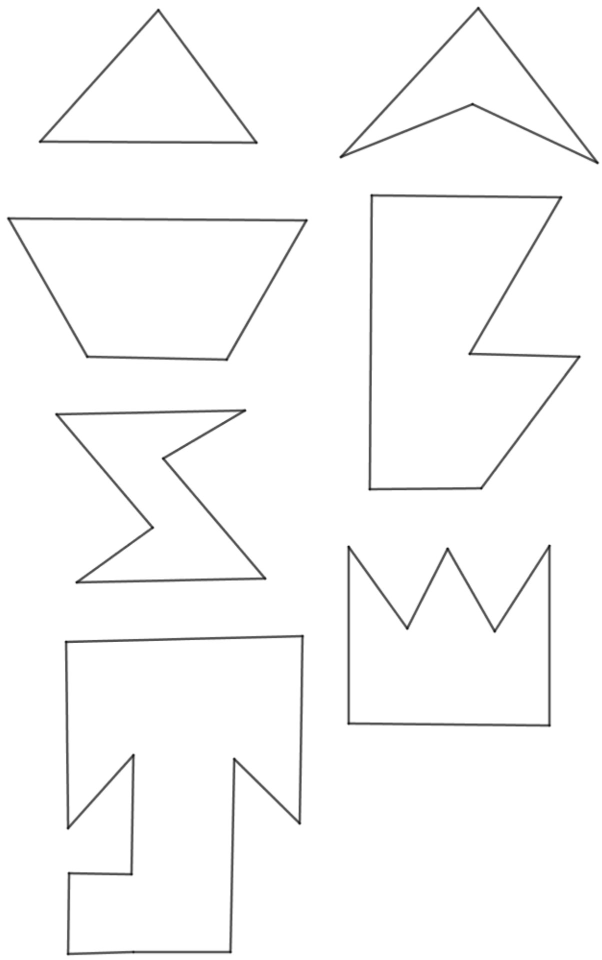
Istražimo.

- Podijelite zadatke u timu i izmjerite sve veličine koje su vam potrebne za crtanje tlocrta školskog hodnika.
- Odlučite kako ćete nacrtati tlocrt. Kakve su veličine na tlocrtu s obzirom na stvarne veličine? Obrazložite.

- ◇ Prije nego što odredite broj i položaje sigurnosnih kamera na tlocrtu škole, promotrite prvo neke jednostavnije situacije. (Nastavni lisitć)

Primjer nastavnog listića:

Dani su tlocrti različitih soba. Zadatak je u svakoj sobi postaviti minimalan broj sigurnosnih kamera kako bi se mogli pratiti svi dijelovi prostorije. Označite za svaku sobu gdje treba postaviti kameru te zapišite koliko kamera ste postavili. Riješite zadatak samostalno pa na kraju usporedite i diskutirajte rješenja s ostalim članovima skupine.



🤔 Pretpostavimo!

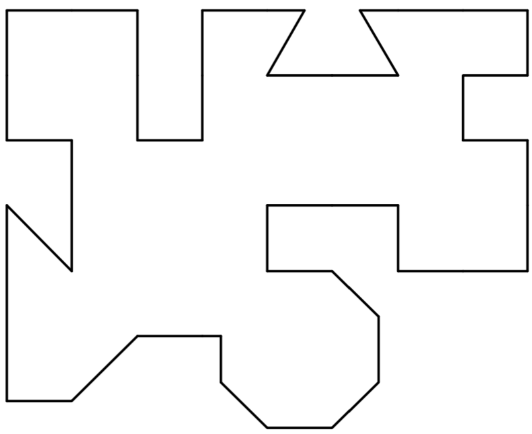
- ⋄ Što pretpostavljate? Koliko kamera je potrebno za jednu sobu?
- ⋄ Možete li odrediti vezu između broja vrhova poligona odnosno kutova sobe te broja potrebnih kamera?
- ⋄ Možete li odrediti minimalan broj potrebnih kamera da se pokrije cijela soba? Napomena: Za shvaćanje dijela minimalnog broja potrebnih kamera, pokušajte nacrtati sobu u više različitih oblika.

🤓 Dokažimo!

- ⋄ Pokušajte vezu pokazati na nekoliko različitih primjera. Nacrtajte dodatne primjere.
- ⋄ Određuje li formula gdje se trebaju postaviti kamere?
- ⋄ Znate li gdje je uvijek pogodno postaviti kamere? Obrazložite.
- ⋄ Postoje li neke situacije gdje možemo na različita mjesta postaviti jednu kameru, a da je pokrivena cijela prostorija? Razmislite i pokažite na primjerima.

🎓 Primjenimo

- ⋄ Vratite se na tlocrt škole te odredite koliko kamera i na kojim mjestima je potrebno postaviti kamere kako bi bio pokriven cijeli školski hodnik.
- ⋄ Prezentirajte svoje rješenje ostatku razreda. Provjerite različita rješenje te provedite diskusiju čije riješenje je najbolje.



Slika 2.7: Primjer složenijeg tlocrta

Razrada 3. Problema: Sigurnosne kamere

Koja matematika leži iza problema?

Rješavajući ovaj problem, učenici istražuju svojstva poligona pokušavajući postaviti najmanji broj sigurnosnih kamera u raznim prostorijama na način da se cijelo područje može pratiti. Učenici će otkriti formulu za minimalan broj potrebnih sigurnosnih kamera. Na kraju problema, učenici koriste stečeno znanje u analizi raznih tlocrta.

Vrijeme izvođenja aktivnosti: Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata.
Potreban materijal: Bojice, nastavni listić s tlocrtima prostorija

Učenici će:

- crtati tlocrte u stvarnom mjerilu
- istražiti karakteristike mnogokuta
- otkrivaju pojam zatvorenih poligonalnih linija
- uspostaviti vezu između broja vrhova poligona i broja kamera potrebnih za pokrivanje cijele prostorije
- otkriti formulu za minimalan broj kamera potrebnih za pokrivanje cijele prostorije poligona s n vrhova
- primijeniti znanje na kompliciranije poligone

Kako krenuti?

Oblik rada: Frontalni.

Prije nego što učenici krenu na rješavanje problema, nastavnik može provesti diskusiju. Nastavnik može tražiti učenike da ispričaju što sve znaju o sigurnosnim kamerama. Uz diskusiju, moguće je i provesti mala istraživanja u učionici. Na primjer, nastavnik može uzeti kameru sa širokim kutom snimanja i pokazati koliku širinu učionice može uloviti od mjesta gdje se nalazi ploča te iskoristiti *povećanje* (eng. *zoom in*) u postavkama kamere i pokušati snimiti najudaljeniji kraj učionice. Također, nastavnik može diskutirati s učenicima o ograničenjima koje se javljaju kod snimanja. Na primjer, sigurnosna kamera ne može snimati kroz zidove ili oko uglova.

S obzirom da učenici imaju mnogo iskustva s digitalnim kamerama sigurno će ih ova tema potaknuti na diskusiju. Za kraj rasprave, nastavnik daje uputu učenicima da se za navedeni problem koriste kamere koje se mogu rotirati za 360° te imaju jako veliki raspon snimanja udaljenosti. Kamere s kojima raspolažu su jako kvalitetne te čak mogu prepoznati lice sumnjivog provalnika. Za položaj kamera učenici će intuitivno odgovoriti da ih je najbolje postaviti na stropu prostorije. Najbolje je raspravu provesti na promjeru učionice.

Što znamo, a što ne znamo?

Oblik rada: Frontalni.

Ovaj dio aktivnosti je također dobro provesti kroz diskusiju. Dobro je da su se učenici već susreli s kartama i mjerilima na predmetu geografije te će onda diskusija proći jednostavnije. Najveći naglasak nastavnik treba staviti na proporcionalnosti veličina na karti i u stvarnom životu te da ovisno kako definiraju tu proporcionalnost, karte će se razlikovati.

Istražimo.

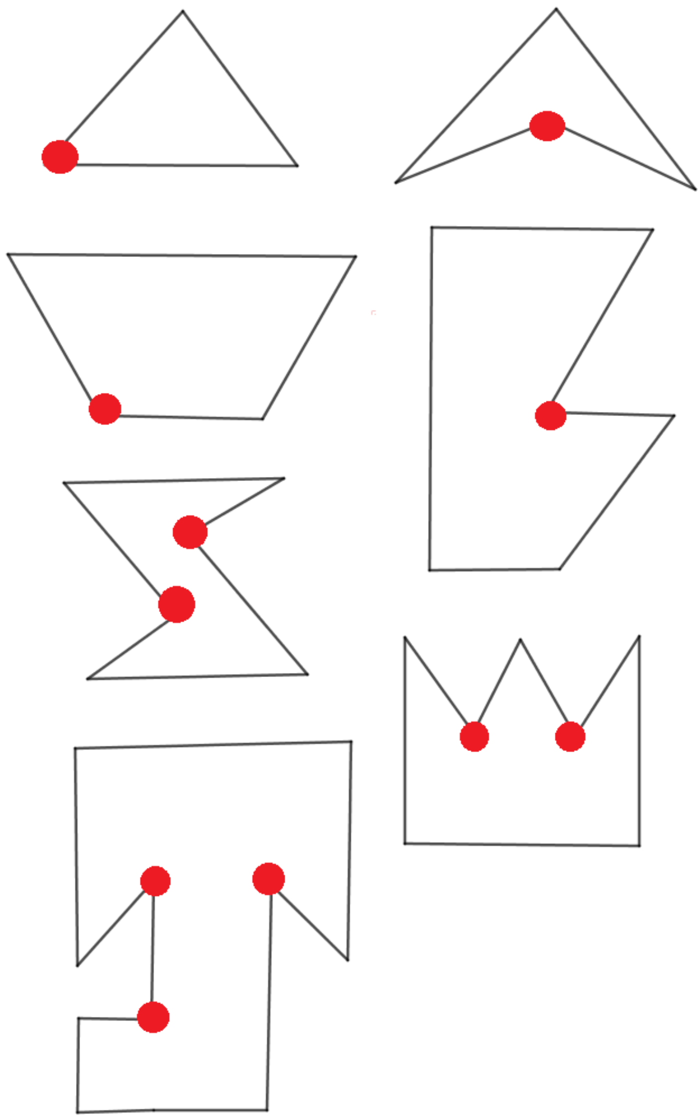
Oblik rada: Rad u skupinama
Potreban materijal: Metar za mjerenje, bilježnica, olovka i milimetarski papir za crtanje tlocrta

Nastavnik u ovom dijelu aktivnosti podijeli učenike u skupine. Svaka skupina međusobno podijeli sebi zadatke. Primjerice, jedna osoba zapisuje potrebne mjere zidova za tlocrt, dvije osobe mjere metrom duljine zidova, a treća osoba očitava mjerenja. Nakon što su učenici zabilježili sva bitna mjerenja, vraćaju se u učionicu i provode diskusiju na koji način će nacrtati tlocrt škole. Ukoliko nekoj skupini treba pomoć, nastavnik uskače, ali je poželjno pustiti da učenici samostalno nacrtaju tlocrt školskog hodnika.

Nakon što je svaka skupina nacrtala svoj tlocrt, međusobno razmjenjuju tlocrte, provode diskusiju jesu li tlocrti ”realni” i u skladu sa stvarnim veličinama.

Nastavnik zatim svakom učeniku podijeli nastavni listić na kojem pišu upute za daljnji rad. Nastavnik dodatno može naglasiti da su tlocrti soba zapravo zatvorene poligonalne linije. Svaki učenik samostalno rješava nastavni listić.

Prikazano je jedno od mogućih učeničkih rješenja listića. Crveni krugovi simboliziranju postavljenu sigurnosnu kameru:

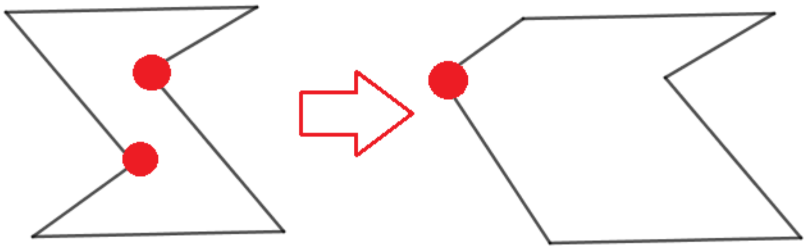


Slika 2.8: Moguće rješenje nastavnog listića

Pretpostavimo!

Oblik rada: Rad u skupinama. Frontalni.

Učenicima neće biti teško uočiti kako kamere treba postaviti na ispruženim unutarnjim kutovima mnogokuta te ih treba onoliko koliko ima ispruženih kutova. No pitanje oko minimalnog broja potrebnih kamera bi moglo biti malo nejasno učenicima stoga je najbolje pitanje objasniti na jednom primjeru.



Slika 2.9: Transformacija sobe

Dakle, kao što je vidljivo na slici, soba ima 6 vrhova te smo "pokrili" cijelu sobu sa 2 kamere. No, ako promijenimo položaje vrhova i malo modificiramo sobu kao primjerice na slici desno, dovoljna je samo jedna kamera da pokrije cijelu sobu, a soba i dalje ima 6 vrhova. Dakle, situacija ovisi o obliku sobe, ali bitno je da učenici razumiju kako je za sobu od 6 vrhova, sigurno dovoljno 2 kamere da se pokrije cijela soba, ali u nekim situacijama će trebati manje. Nakon što nastavnik to objasni učenicima, može im zadati da crtaju različite tlocrte soba s različitim brojem vrhova i da pokušaju odrediti vezu između broja vrhova sobe i minimalnog broja potrebnih kamera. Učenicima će tada biti jasno da se minimalan broj kamera za svaku prostoriju dobije s maksimalnim brojem izbočenih kutova u mnogokutu. Stoga dobivaju sljedeću formulu:

Minimalan broj kamera za prostoriju od n vrhova iznosi $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ zato što je to maksimalan broj izbočenih kutova u mnogokutu.

Nastavnik može ostaviti učenicima da sami otkriju kako odrediti maksimalan broj izbočenih kutova u mnogokutu. Valja naglasiti kako će taj minimalan broj sigurno broj kamera da se "pokrije" cijela soba, no nekad će biti dovoljno i manje ovisno o izbočenim kutovima mnogokuta.

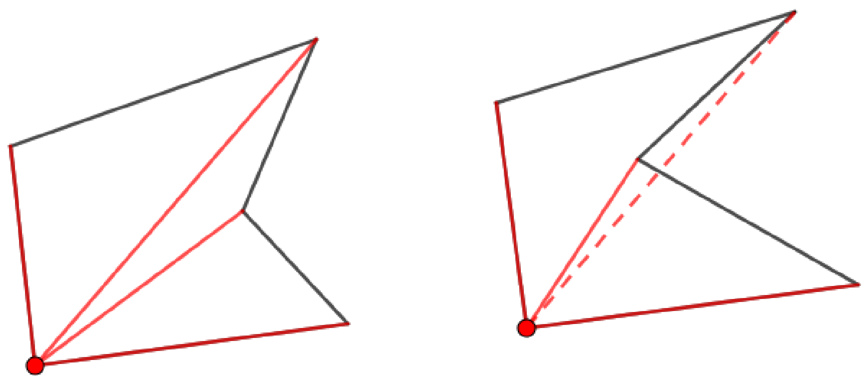
Dokažimo!

Oblik rada: Rad u skupinama. Frontalni.

Ovdje je najvažnije da učenici shvate kako je najidealnije kameru postaviti na izbočeni kut mnogokuta, no nekad će se moći postaviti i u drugom, šiljastom kutu mnogokuta i svejedno pokriti cijelu prostoriju (vidi 2.9). Nastavnik učenike može poučiti što su konveksni i konkavni mnogokuti. Takve situacije bit će moguće u svim konveksnim, ali i u nekim konkavnim mnogokutima.

Učenici će lako uočiti da je uvjet za takvo postavljanje kamere da se vrh mnogokuta gdje se postavlja kamera može spojiti dužinom sa svim ostalim vrhovima, te da je dužina element unutrašnjosti mnogokuta.

Na slici 2.10 lako se uoči kada kamera može "pokriti" cijelu sobu. Zamislimo zrake (dužine crvene boje) koje idu iz kamere (crvena točka mnogokuta). Ukoliko se sve dužine nalaze u unutrašnjosti mnogokuta, kamera pokriva cijelu sobu, a u suprotnom kamera ne pokriva cijelu sobu što je vidljivo na drugoj slici (iscrtkana dužina se ne nalazi u unutrašnjosti mnogokuta).



Slika 2.10: Pogodan položaj sigurnosne kamere

2.4 Problemi otvorenog tipa

Ove situacije mogu služiti nastavniku za vrednovanje jako širokog spektra matematičkih znanja. Problemi ovog tipa uvijek imaju više načina rješavanja te su stoga i najzahtjevniji za nastavnika. Ovi problemi su često jako ”životni” te nemaju propisano jedno jedinstveno rješenje.

4. Problem: Šator i vatra

? Kako glasi problem?

Dok ste jednog dana kampirali, otišli ste istraživati šumu. Zbog iznenadne vatre kod šatora, morate se vratiti u kamp. Trebate zahvatiti vodu u obližnjoj rijeci te dojuriti do šatora. U kojoj točki rijeke trebate zahvatiti vodu da ukupno prijeđete najkraći put?

Kako krenuti?

- Pokušajte u programu dinamične geometrije konstruirati problem. Vaš položaj i položaj šatora označite točkama T i S, a položaj rijeke pravcem p.
- Razmislite o putu kojeg morate prijeći. Prvo morate ići do rijeke, a zatim do šatora. Prikažite nekoliko mogućih putova.
- Označite položaj na rijeci gdje ćete zahvatiti vodu točkom R.

Što znamo, a što ne znamo?

- Razmislite koji su mogući, smisleni položaji svih objekata.
- Koja veličina nas zanima?
- Kako možemo saznati koliki je to put? Koja mjerenja je potrebno napraviti?

Istražimo.

- Mijenjajte položaj točke na rijeci i zabilježite nekoliko mjerenja. Postavite točku na položaj za koji dobivate da je put najkraći. Napomena: Za precizniji položaj, prikažite mjerenja zaokružena na više decimalnih mjesta.
- Prikažite veličine kutova koje zatvaraju dužine $\overline{TR}$ i $\overline{RS}$ s pravcem rijeke. Pomičite točku R i promotrite kako se veličine kutova mijenjaju.
- Ponovite postupak uz mijenjanje položaja svih objekata. Što primjećujete?

🤔 Pretpostavimo!

- ⋄ Pokušajte zapisati pretpostavku.
- ⋄ Provjerite vrijedi li pretpostavka u raznim situacijama.

🤓 Pokažimo!

U zadatku ste eksperimentalno našli pogodni položaj točke R takav da je put najkraći te ste došli do pretpostavke:

Kada je put najkraći, kutovi omođeni putom i rijekom su sukladni.

⋄ Pokušajte razmisliti o metodi nalaženja najkraćeg puta koja nije eksperimentalna već matematički potkrijepljena.

⋄ Uz pomoć udžbenika ili interneta proučite:

- Osnu simetriju
- Fermatov princip i zakon loma
- Elipse
- Sličnost trokuta

Možete li neke informacije iskoristiti u konstrukciji rješenja? A u dokazivanju pretpostavke?

⋄ Prezentirajte svoje zaključivanje ostalim skupinama. Ako mislite da vam je pretpostavka točna, potkrijepite ju na raznim primjerima te uvjerite druge učenike. Potkrijepite vašu pretpostavku logičnim objašnjenima ili dokazom. Ukoliko primjetite da nečija pretpostavka nije uvijek točna, pokažite to kontraprimjerom.

🎓 Primjenimo.

Razmotrite i sljedeće moguće situacije:

- ⋄ Nalazite se kod šatora. (Točke T i S se poklapaju)
- ⋄ Kamp se nalazi između dvije paralelne rijeke, a morate stići prvo do jedne rijeke, do druge pa zatim do šatora. Vi ste u šumi, dalje od šatora.
- ⋄ Zamislite prethodnu situacija sa dvije rijeke, ali se rijeke ovaj put sijeku. Kamp se nalazi između dvije rijeke, a vi ste u šumi, dalje od šatora.

Razrada 4. Problema: Šator i vatra

Koja matematika leži iza problema?

Rješavajući problem, učenici eksperimentalno nalaze najkraći put te otkrivaju vezu između kuta upada i kuta odbijanja. Učenici otkrivaju metodu nalaženja najkraćeg puta te dokazuju sukladnost upadnog kuta i kuta odvijanja koristeći znanja iz fizike i geometrije. Na kraju problema, učenici koriste stečeno znanje u rješavanju sličnih, ali kompliciranijih problema.

Vrijeme izvođenja aktivnosti: Za odvijanje aktivnosti predviđena su dva školska sata.
Potreban materijal: Nije nužno, ali je pogodna primjena računala, točnije korištenje programa dinamične geometrije. Primjerice, Geogebra ili Sketchpad.

Problem *Šator i vatra* se može obraditi uz sljedeće teme:

- Osna simetrija
- Zakon refleksije, Fermatov princip
- Elipsa
- Sličnost trokuta

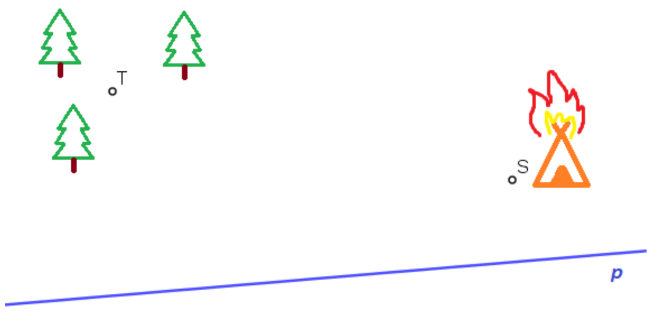
U ovoj aktivnosti učenici će:

- odrediti sve moguće položaje objekata iz problema
- riješiti problem uz pomoć programa dinamične geometrije
- predvidjeti vezu kuta upada i kuta odraza
- dokazati pretpostavku uz pomoć osne simetrije, zakona refleksije, elipse ili sličnosti trokuta

😭 **Kako krenuti?**

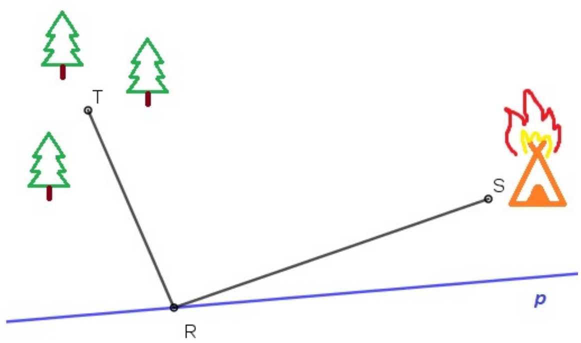
Oblik rada: Individualni.
Potreban materijal: Računalo za svakog učenika.

Učenici će prema uputama konstruirati točke T i S te pravac p.



Slika 2.11: Konstrukcija problema

Zatim će učenici proizvoljno odrediti točku R na rijeci i prikazati put dužinama $\overline{TR}$ i $\overline{RS}$.



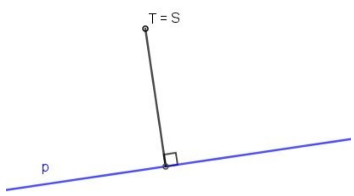
Slika 2.12: Traženje puta

Što znamo, a što ne znamo?

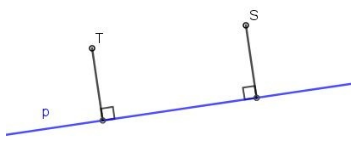
Oblik rada: Frontalni. Nastavnik provodi diskusiju s učenicima.
Potreban materijal: Ploča, kreda i računala.

Prvo, učenici samostalno na svojim računalima u programu dinamične geometrije crtaju moguće položaje točaka T, S i pravca p. Zatim, uz diskusiju s nastavnikom, učenici uočavaju sve moguće položaje te ih nastavnik skicira na ploču.

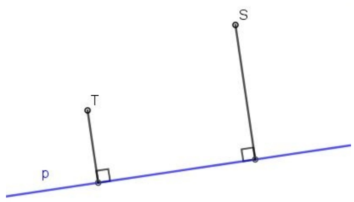
- Točke T i S se poklapaju. (Iako ovaj slučaj nije moguć prema tekstu problema, poželjno je spomenuti ga)
- Točke T i S su jednako udaljene od pravca p
- Točke T i S su različito udaljene od pravca p



(a) Točke se poklapaju



(b) Točke su jednako udaljene od pravca



(c) Točke su različito udaljene od pravca

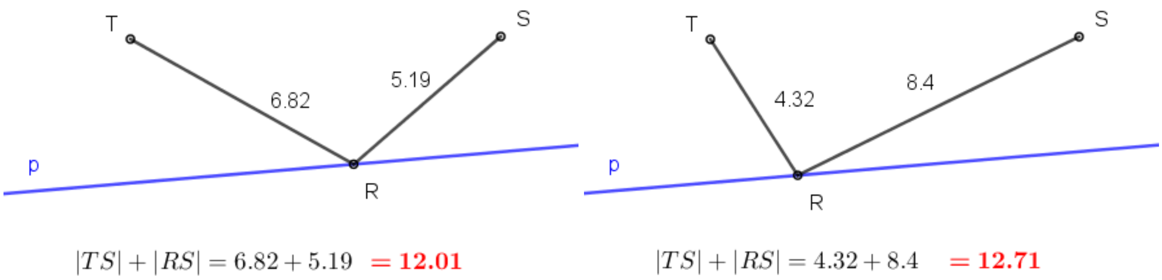
Slika 2.13: Mogući položaji objekata

Učenici zaključuju da će se ukupni put dobiti kao zbroj $|TR| + |RS|$. U programu dinamične geometrije učenici prikazuju duljine dužina te zbroj tih duljina.

Istražimo.

Oblik rada: Individualni.
Potreban materijal: Računalo za svakog učenika.

Učenici samostalno na računalu prikazuju mjerenja za različite položaje točke R. Nekoliko mogućih mjerenja:



(a) Prvo mjerenje (b) Drugo mjerenje

Slika 2.14: Mjerenja za dva različita položaja točke R

Učenici potom, prateći mjerenja, pokušavaju odrediti položaj točke R takav da je ukupan put najmanji. Nastavnik, u svrhu preciznosti, može dati uputu učenicima da u postavkama programa prikažu mjerenja na više decimalnih mjesta.
Nakon što su učenici eksperimentalno odredili pogodan položaj točke R, prikazuju veličine kutova koje zatvaraju dužine $\overline{TR}$ i $\overline{RS}$ s pravcem p.
Postupak ponavljaju za nekoliko različitih položaja točaka T i S.
Potrebno je naglasiti učenicima kako su prikazani podatci u programu aproksimativni te je korisno gledati mjerenja zaokruženih na više decimalnih mjesta. Također, pretpostavku donose isto aproksimativno.

Pretpostavimo!

Oblik rada: Individualni.
Potreban materijal: Računalo za svakog učenika.

Učenici zapisuju svoju pretpostavku te provjeravanju njenu istinitost u raznim situacijama.

Pokažimo!

Oblik rada: Rad u skupinama.
Potreban materijal: Računalo za svaku skupinu, pristup internetu, udžbenik/knjiga, papir i olovka.

Nastavnik podijeli učenike u jednakobrojne skupine. Učenici u skupinama uspoređuju svoje pretpostavke. Zatim nastavnik provjerava u skupinama dobivene pretpostavke. Ukoliko postoje različite pretpostavke, nastavnik provodi diskusiju s učenicima.

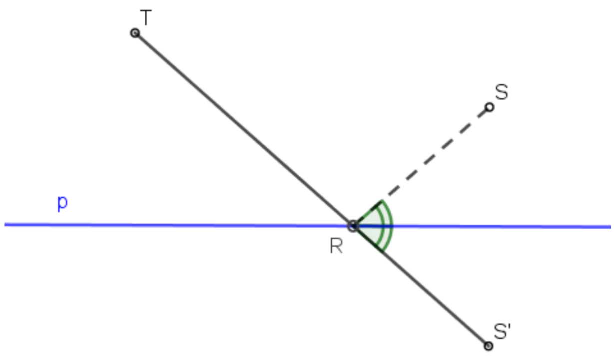
Kada se svi učenici slože za pretpostavku, nastavnik zadaje učenicima da u skupini pokušaju dokazati pretpostavku. Nije loše za početak pustiti učenike da sami probaju dobiti ideju za dokazivanje pretpostavke pa postupno, po potrebi, davati učenicima upute i smjernice. Korisno je uputiti učenicke da razmisle i o metodi traženja najkraćeg puta koja je matematički potkrijepljena.

Osna simetrija

Dokaz. Potrebno je preslikati točku S (ili točku T) preko pravca p. Na taj način smo dobili točku S' (Slika 2.15). Znamo da je najkraći put od točke T do točke S' je dužina $\overline{TS'}$.

Presjek dužine $\overline{TS'}$ označimo točkom R. Vidimo da je dužina $\overline{RS'}$ osna simetrija dužine $\overline{RS}$ preko pravca p. Stoga je i put $|TR| + |RS|$ jednak putu $|TR| + |RS'|$ pa su oba puta najkraća. Time smo konstruirali najraći put od točke T do točke S.

Pokažimo sada da su kutevi koje zatvaraju dužine $\overline{TR}$ i $\overline{RS}$ s pravcem p sukladni. Kutovi označeni na slici 2.15 su sukladni jer su osno simetrični. Sada je dovoljno primjetiti da imamo par vršnih kutova. To su kutevi koje zatvaraju dužine $\overline{TR}$ i $\overline{RS'}$ s pravcem p. Time smo pokazali da, kada je put najkraći, traženi kutovi su sukladni.



Slika 2.15: Dokaz preko osne simetrije

Zakon odbijanja i Fermatovovo načelo

Dokaz koji koristi optiku može se iskoristiti u korelaciji predmeta matematike i fizike. Učenici samostalno mogu istražiti optiku te tako doći do korisnih informacija u konstrukciji rješenja problema šator i vatra. Najvažnije činjenice iz tog sadržajnog područja geometrijske optike su Fermatov princip ili načelo te treći zakon geometrijske optike kojeg još zovemo zakon odbijanja ili refleksije.

Tri zakona geometrijske optike mogu se izvesti iz jednog općenitog načela nazvano prema njegovom tvorcu, francuskom matematičaru **Pierreu de Fermatu**. Načelo tvrdi da pri prijelazu svijetlosti iz jedne točke A u drugu točku B svjetlost bira onaj put za koji joj treba najmanje vremena. ([3])

Istražujući ovo načelo, učenici već mogu uspostaviti poveznicu s problemom. U problemu je potrebno naći najkraći put, a svijetlost se uvijek giba pravocrtno, po najkraćem putu.

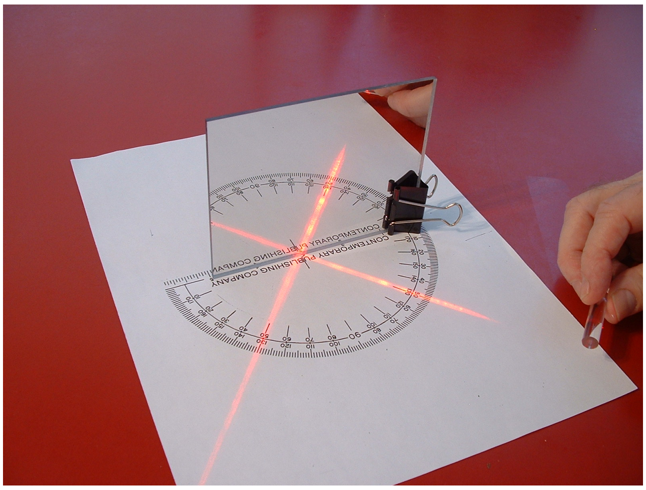
Treći zakon geometrijske optike ili **zakon odbijanja** kaže da se svjetlost od površine na koju pada odbija na sljedeći način:

- odbijena zraka, okomica i upadna zraka su na istoj ravnini
- kut odbijanja je jednak kutu upada ([3])

Dakle, učenici put iz problema mogu promatrati kao zraku svijetlosti koja putuje iz točke T, odbija se od pravca p te stiže do točke S.

Problem se tada može postaviti koristeći baterijsku lampu koja šalje svijetlo iz određene točke u razredu, odbija se od razvnog zrcala koje predstavlja rijeku, te dolazi do šatora, to jest do druge točke u razredu. Preostaje još dokazati da je kut odbijanja jednak kutu upada, a to je najbolje eksperimentalno pokazati koristeći navedene materijale.

Eksperiment je moguće izvesti slično kao što je vidljivo na slici 2.16:[1]



Slika 2.16: Zakon refleksije

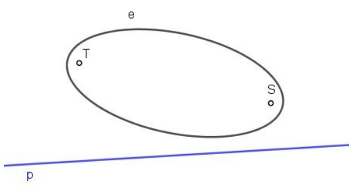
Elipsa

Učenici će se prisjetiti definicije elipse:

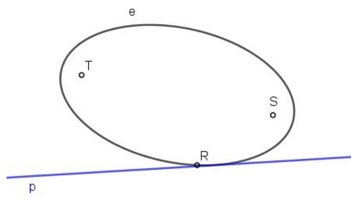
Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine i neka je a pozitivan realan broj, $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti do točaka F_1 i F_2 jednak $2a$ nazivamo **elipsa** sa žarištima F_1 i F_2 i duljinom velike poluosi a. ([19])

Promatrajući problem, učenici mogu točke T i S zamisliti kao žarištima elipse. U programu dinamične geometrije, učenici mogu promotriti cijelu familiju elipsa sa žarištima T i S. Sada je važno odrediti koja elipsa je pogodna za dani problem. Odredimo nekoliko elipsi sa žarištima T i S takve da je svaka elipsa u drugačijem položaju s obzirom na pravac p.

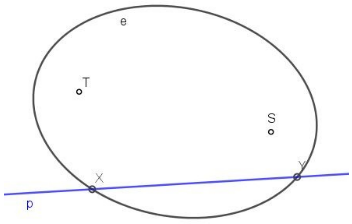
[1] Preuzeto sa: http://boson.physics.sc.edu/ rjones/phys153/lab02.html (06.11.2017.)



(a) Elipsa i pravac se ne dodiruju



(b) Elipsa i pravac se dodiruju



(c) Pravac siječe elipsu u dvije točke

Slika 2.17: Mogući položaji elipse i pravca

Učenici će uočiti da je ukupni put koji moraju prijeći upravo put $|TR| + |RS|$ gdje je R točka elipse i pravca p. Nakraži takav put dobivamo kada se elipsa i pravac dodiruju u točki R, odnosno kada je pravac p tangenta elipse. U programu dinamične geometrije se lako može namjestiti takva elipsa.

Dakle, učenici su našli metodu nalaženja najkraćeg puta konstrukcijom elipse te sad samo treba pokazati da su određeni kutovi sukladni. Učenici se nakon istraživanja mogu pozvati na propoziciju koja se i lako dokaže:

Propozicija. Tangenta p u točki R elipse raspolavlja vanjski, a normala unutarnji kut što ga tvore dva radij-vektora točke R. ([19])

Dokaz. Radij-vektor $r_1 = F_1R$ produljimo preko točke T za $|F_2R|$. Tako dobivenu točku označimo sa S. Očito je trokut F_2RS jednakokračan s osnovicom F_2S. odnosno u tom slučaju tangenta p raspolavlja traženi kut. Također, vrijedi:

$$|F_1S| = |F_1R| + |TR| = |F_1R| + |F_2R| = 2a$$

Dakle, pravac p je simetrala dužine F_2S, a time i simetrala kuta $\angle F_2RS$. Pokažimo da je p

tangenta elipse.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji točka P na pravcu p koja je ujedno i točka elipse i koja je različita od R. U trokutu F_1PS vrijedi nejednakost trokuta:

$$|F_1P| + |PS| > |F_1S|$$

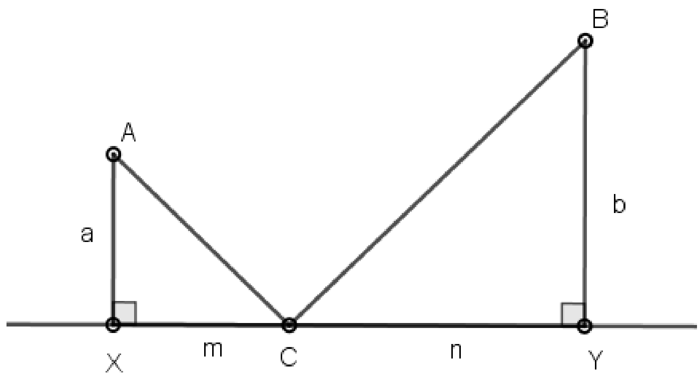
S obzirom da točka P leži na simetrali dužine F_2S, vrijedi $|PS| = |F_2P|$ Uvrštavajući to u gornju nejednakost trokuta dobivamo:

$$|F_1P| + |F_2P| > |F_1S| = 2a$$

Iz toga slijedi da točka P ne leži na elipsi, a to je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, pravac p je tangenta elipse, čime je početna tvrdnja dokazana.

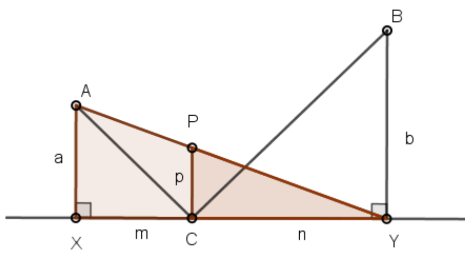
Sličnost trokuta

Za dokaz preko sličnosti trokuta potrebno je odrediti "pomoćne" slične trokute. Za početak, potrebno je konstruirati sliku sa sljedećim oznakama:

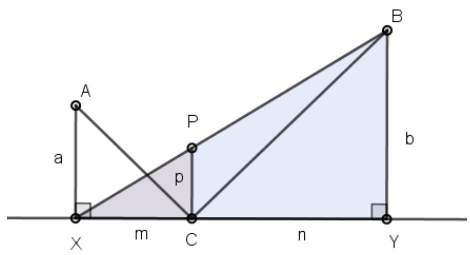


Slika 2.18: Konstrukcija problema s oznakama

Zatim je potrebno konstruirati dužine $\overline{AY}$ i $\overline{BX}$. U oba slučaja će učenici konstruirati okomicu iz točke C na pravac te presjek s dužinama označiti točkom P. Radi preglednosti, dobro je konstruirati dvije odvojene slike.



(a) Prvi pomoćni trokuti



(b) Drugi pomoćni trokuti

Slika 2.19: Konstrukcija pomoćnih trokuta

Prema KKK poučku o sličnosti trokuta učenici uočavaju da su $\triangle AXY$ i $\triangle PCY$ te $\triangle BYX$ i $\triangle PCX$ slični. Iz toga, koristeći Talesov teorem o proporcionalnosti, dobivaju se sljedeće jednakosti:

$$\frac{p}{a} = \frac{n}{m+n}$$
$$\frac{p}{b} = \frac{m}{m+n}$$

Cilj je pokazati da su $\triangle AXC$ i $\triangle BYC$ slični (vidi 2.18). Odnosno, uz to što su kutovi u točkama X i Y sukladni, treba pokazati da vrijedi i jednakost:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$$

Unakrsno množeći jednakosti 2.4 dobivamo:

$$an = p(m+n)$$
$$bm = p(m+n)$$

Iz prethodnih jednakosti očito slijedi $an = bm$. Podijelimo li prethodnu jednakost sa mn dobivamo jednakost koju je bilo potrebno pokazati. Dakle, prema SKS poučku o sličnosti trokuta, dobivamo da su trokuti $\triangle AXC$ i $\triangle BYC$ slični.

Iz pokazane sličnosti trokuta, znamo da su im svi unutarnji kutovi sukladni pa su sukladni i kutovi $\angle ACX$ i $\angle BCY$ što je i trebalo pokazati u početnom problemu.

Bibliografija

[1] *Matematicke izreke*, dostupno na: https://www.brainyquote.com, (rujan 2017.).

[2] P. Albion, *Project-, problem-, and inquiry-based learning*, https://eprints.usq.edu.au/27878/1/Albion_Ch19_AV.pdf, (rujan 2017.).

[3] T. Andreis, M. Plavčić i N. Simić, *Fizika 4 - udžbenik za 4. razred gimnazije i srodnih škola s četverogodišnjim programom (varijanta "B")*, Profil International, Zagreb, 2009.

[4] M. Artigue, J. Dillon, W. Harlen i P. Lena, *Learning through inquiry*, dostupno na: http://www.fibonacci-project.eu/, (rujan 2017.).

[5] J. Barell, *Problem-Based Learning: An Inquiry Approach (Volume 2)*, Corwin; 2nd edition, 2006.

[6] H. S. Barrows, *Problem-Based Learning Applied to Medical Education*, SIU School of Medicine, Springfield, IL, 2000.

[7] M. D. De Villiers, *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*, Key Curriculum Press, 2003.

[8] R. Delisle, *How-to Use Problem-Based Learning in the Classroom*, Association for Supervision & Curriculum Deve, 1997.

[9] Mathematics Education, *Relevant, Interesting and Applicable*, http://www.meria-project.eu/, 20.10.2017.

[10] V. Kadum, *Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike*, Metodički ogledi **2** (2005.), br. 12, 31–60.

[11] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

[12] J. Larmer, *Project Based Learning vs. Problem Based Learning vs. XBL*, dostupno na: `http://www.bie.org/blog/project_based_learning_vs._problem_based_learning_vs._xbl`, (listopad 2017.).

[13] S. MacMath, J. Wallace i X. Chi, *Problem-Based Learning in Mathematics - A tool for Developing Students' Conceptual Knowledge*, dostupno na: `http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/WW_problem_based_math.pdf`, (listopad 2017.).

[14] The National Council of Teachers of Mathematics, *Illuminations*, dostupno na: `https://illuminations.nctm.org/Lessons-Activities.aspx`, (rujan 2017.).

[15] A. Oguz-Unver i S. Arabacioglu, *Convex functions*, Academia Journal of Educational Research **7** (2014.), br. 2, 120–128.

[16] V. Poljak, *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[17] J. R. Savery, *Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions*, Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning **1** (2006.), br. 1, 9–20.

[18] S. Tipps, *Guiding Children's Learning of Mathematics, 12th Edition*, Wadsworth Publishing; 12 edition, 2010.

[19] S. Varošanec, *Krivulje drugog reda*, Materijali s predavanja na kolegiju Nacrtna geometrija, Zagreb, 2015./2016.

[20] Materijali za nastavnika, *Nrich project, University of Cambridge*, dostupno na: `https://nrich.maths.org/teachers`, (rujan 2017.).

Sažetak

U suvremenoj nastavi matematike primijenjuju se različiti načini i pristupi u poučavanju, a svima im je zajedničko utemeljenje na aktivnoj nastavi. Jedan takav pristup je i učenje rješavanjem problema. U nastavi utemeljenoj na rješavanju problema, u fokus se stavlja motivacijski zadatak kao polazna točka procesa učenja. Primjenom navedenog pristupa motivacijski zadatak postaje problemski te učenici stječu nova znanja i vještine njegovim rješavanjem.

U ovom diplomskom radu, detaljnije opisujemo navedeni pristup te njegovu moguću primjenu u nastavi matematike na konkretnim, životnim problemima.

Summary

In contemporary mathematics education a variety of teaching approaches and methods are used, most of them based on active students' learning. One of them is the problem-based learning. The focus of each mathematics lesson is put on a motivational task that represents a starting point for learning. Thus, in problem-based learning, a motivational task becomes a problem. By solving the problem students gain new knowledge and skills.

In this diploma thesis, we explain the problem based teaching method in more details. We present its possible implementation in mathematics class using real-life problems.

Životopis

Rođena sam 06. svibnja 1993. godine u Zürichu, Švicarska. Godine 1999. selim se na otok Pag i upisujem osnovnu školu u Kolanu. Godine 2005. selim se u grad Dugo Selo gdje završavam osnovnu školu, a istovremeno završavam i Osnovnu glazbenu školu Zlatka Grgoševića u Sesvetama svirajući klavir. Godine 2007. upisujem Opću gimnaziju Dugo Selo. Od početka školovanja pokazujem veći interes za matematiku i njeno poučavanje te zbog toga 2011. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom studija zapošljavam se u tvrtki Photomath gdje do današnjeg dana radim na razvoju aplikacije, odnosno kreiranju matematičkog sadržaja. Godine 2015. završavam preddiplomski studij, te nastavljam školovanje na diplomskom sveučilišnom studiju Matematike; smjer: nastavnički.