Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Iva Kavčić

Euklidska, hiperbolička i sferna trigonometrija

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, veljača 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

U radu proučavamo trigonometriju u tri različita modela: modelu euklidske ravnine E^2, modelu hiperboličke ravnine H^2 te modelu sfere S^2. U svakom od navedenih modela definiramo osnovne elemente točke i pravce i međusobne odnose između njih. Na modelu S^2 dva različita pravca imaju točno dvije točke presjeka i te su točke antipodalne. U modelu E^2 dva različita pravca se ili sijeku u jedinstvenoj točki ili su paralelni. U modelu H^2 imamo tri mogućnosti: pravci se sijeku u jedinstvenoj točki, pravci su paralelni ili ultraparalelni.

Potom definiramo udaljenost i mjeru kuta, kako bismo uspostavili odnose među stranicama i kutovima. Modeli se razlikuju po zbroju kutova u trokutu. Naime, u euklidskoj ravnini zbroj kutova u trokutu je π, na sferi je veći, a u hiperboličkoj ravnini manji od π.

U svakom od modela dokazujemo Pitagorin teorem za trokut ABC sa stranicama duljina a, b, c te kutovima α, β i γ. Vrijedi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ako i samo ako vrijedi:

E^2: $a^2 + b^2 = c^2$,

S^2: $\cos a \cdot \cos b = \cos c$,

H^2: $\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$.

Slijede izvodi trigonometrijskih relacija u pravokutnom trokutu te dokazi teorema koji povezuju stranice i kutove općeg trokuta: teorem o sinusima te teorem o kosinusu.

Teorem o sinusima.

E^2: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

S^2: $$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma},$$

H^2: $$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}.$$

Teorem o kosinusu.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha,$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.$$

Naposljetku prikazujemo neutralni teorem o sinusima koji vrijedi u svakom od promatranih modela.

Zahvaljujem profesoru Vedranu Krčadincu na pomoći i savjetima oko izrade ovog rada.

Također, zahvaljujem se Lorisu, Siniši, Martini i Nataši jer su moje studentske dane učinili zanimljivijima i sretnijima.

Najveće hvala ide mojoj sestri Luciji i roditeljima Jasminki i Hrvoju jer su uvijek tu za mene. Hvala vam na potpori, brizi i ljubavi.

2 Povijesni pregled

Naziv "trigonometrija" dolazi od grčkih riječi trigonon - trokut i metron - mjera. Nastala je iz praktičnih potreba vezanih za graditeljstvo, astronomiju i navigaciju. Najjednostavnije trigonometrijske činjenice bile su poznate Babiloncima i Egipćanima još oko 18. st. pr. Kr. Već su oni promatrajući kretanja planeta, izlaske i zalaske Sunca te pomrčine Sunca i Mjeseca poznavali periodičnost te su koristili raspodjelu kruga na 360 stupnjeva. Astronomi su proučavali odnos stranica pravokutnog trokuta i kutova između njih. Uočili su da ukoliko je poznata duljina barem jedne stranice i mjera jednog kuta, tada se mogu odrediti i mjere preostalih elemenata.

Babilonci su koristili sustav s bazom 60, odnosno seksagezimalni sustav, koji i danas koristimo u mjerenju kutova i računanju vremena. Proučavali su omjere stranica sličnih trokuta i tako otkrili neka njihova svojstva, ali svoje zaključke nisu sistematizirali. Poznavali su i neke slučajeve Pitagorinog teorema, što potvrđuje tablica "Plimpton 322" iz otprilike 1800. g. pr. Kr. Njihova su znanja kasnije prenesena u Grčku.

Euklid iz Aleksandrije (330.-275. g. pr. Kr.) oko 300. g. pr. Kr., u svom djelu "Elementi" koje se sastoji od 13 knjiga, izvodi cijelu tada poznatu matematiku iz malog broja početnih pretpostavki. Logički poredani teoremi slijede iz već dokazanih ili pak osnovnih tvrdnji, odnosno 5 aksioma, 5 postulata i definicija danih na početku djela. Peti postulat, poznat kao postulat o paralelama, odnosno pitanje njegove neovisnosti o prva četiri, privlačio je posebnu pozornost. Postulat o paralelama kaže da ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca neograničeno produžena sastaju se s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta. Budući da je složeniji te se javlja pojam beskonačnosti, dugo se smatralo da je ovisan o ostalim postulatima. "Elementi", osim navedenog, sadrže teorem o kosinusu za tupokutne i šiljastokutne trokute, ali predstavljeni su više geometrijski nego algebarski.

Začetnikom trigonometrije smatra se grčki astronom i matematičar Hiparh iz Niceje (oko 180.-125 g. pr. Kr.). On je izradio prvu tablicu s duljinama tetiva za razne središnje kutove, pri čemu su tetive zapravo sinusi polukuta. Ta se tablica smatra prvom tablicom sinusa, a korištena je za rješavanje problema iz ravninske i sferne trigonometrije. Hiparh je proučavao i geometriju na sferi te je smatrao da je putanja po kojoj se Mjesec kreće oko Zemlje približno kužnica. Tako se, usporedno s ravninskom, razvijala i sferna trigonometrija.

Menelaj iz Aleksandrije (1.-2. st. n. e.) također se bavio sfernom trigonometrijom. U svom djelu "Sphaerica" proučava sferne trokute i nadovezujući se na Euklidove "Elemente" iskazuje teoreme o sukladnosti za ravninske i sferne trokute te teorem koji govori da je zbroj kutova u sfernom trokutu veći od dva prava kuta.

Njegove i Hiparhove rezultate upotpunjuje Klaudije Ptolomej (2. st.), detaljno obradivši sfernu trigonometriju. U djelu "Almagest" koristi duljinu tetive kako bi definirao trigonometrijske funkcije i iznosi detaljnu tablicu tetiva s pripadnim kutovima. Također iskazao je većinu važnih trigonometrijskih teorema o pravokutnom sfernom trokutu, među kojima je i danas poznati osnovni trigonometrijski identitet, a to je zapravo kombinacija Talesova i Pitagorina teorema:

$$tet(\alpha)^2 + tet(180 - \alpha)^2 = d^2.$$

U srednjem vijeku trigonometriju dalje razvijaju indijski i arapski matematičari. Značajan je indijski matematičar Aryabhata stariji (476.-550.) i njegovo istoimeno djelo "Aryabhatiya". Ono sadrži prvu tablicu polutetiva, odnosno sinusa, za razliku od prije navedene Ptolomejeve koja je zapravo tablica sinusa polukuta. Spominju se riječi "jya" za današnji sinus te "kojya" za kosinus. Kasnije, u 7. stoljeću najveći indijski matematičar Brahmagupta (598.-670.) preformulirao je jedan od osnovnih trigonometrijskih identiteta:

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x) = \sin^2(\tfrac{\pi}{2} - x).$$

Istaknuti indijski matematičar 12. stoljeća bio je Bhaskara II (1114.-1185.). Bavio se ravninskom i sfernom trigonometrijom, a njegov važan rezultat su adicijske formule za sinus. Trigonometrijska znanja od Indijaca preuzimaju Arapi. Želeći izgraditi logičan sustav geometrije, pokušavali su dokazati peti postulat, ali u svim su dokazima pronađene pogreške.

Od arapskih matematičara ističe se Al-Battani (850.-929.) koji je izradio tablicu sinusa, tangensa i kotangensa. Arapski matematičari prvi koriste sekans i kosekans (recipročne vrijednosti kosinusa i sinusa kuta), iskazuju teorem o kosinusu te dokazuju teorem o sinusima za ravninske i sferne trokute. Do 10. stoljeća arapski matematičari koristili su svih šest trigonometrijskih funkcija sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans te su tablično zabilježili njihove vrijednosti.

Velik doprinos dao je Nasir ad-Din al-Tusi (1201.-1274.) stvorivši trigonometriju kao zasebnu matematičku disciplinu. Bio je među prvima koji je razmatrao postojanje hiperboličke geometrije.

U Europu je trigonometrija došla preko Arapa. Johann Müller Regiomontanus (1436.-1476.), koristeći rezultate Arapa, u svom djelu "De triangulis omnimodis" sistematizira trigonometriju postavivši tako temelje moderne trigonometrije. Djelo sadrži definicije i teoreme ravninske i sferne trigonometrije.

U 16. stoljeću Georg Joachim Rheticus (1514.-1574.) prvi u Europi definira trigonometrijske funkcije kao omjere u pravokutnom trokutu te daje tablicu svih trigonometrijskih funkcija. Veliko značenje trigonometrija dobiva zahvaljujući Leonhardu Euleru (1707.-1783.) koji izgrađuje analitičku teoriju trigonometrijskih funkcija.

Početkom 19. stoljeća pojavljuju se prva razmišljanja o nezavisnosti spomenutog petog postulata. Medu prvima koji su bili uvjereni u njegovu nezavisnot bio je Johann Karl Friedrich Gauss (1777.-1855.). On je pokušavao izgraditi geometriju u kojoj bi kroz zadanu točku postojalo više od jedne paralele sa zadanim pravcem, smatrajući takvu geometriju stvarnom geometrijom prostora. Istim su se problemom bavili Janos Bolyai (1802.-1860.) i Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792.-1856.) koji su pretpostavili da je zbroj kutova u trokutu manji od dva prava kuta te tako otkrili niz teorema i trigonometrijskih identiteta neeuklidske geometrije, danas poznate kao hiperboličke geometrije. Na taj je način razvijena trigonometrija u hiperboličkoj ravnini.

Važnost trigonometrije vidljiva je iz njene svakodnevne primjene u rješavanju problema iz mnogih znanstvenih područja. Koristi se u astronomiji pri lociranju nebeskih tijela, geografiji i arhitekturi pri raznim mjerenjima, satelitskoj navigaciji, u glazbi opisivanjem zvučnih valova i drugdje.

3 Definicija trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta pravokutnog trokuta definiramo pomoću omjera njegovih stranica. Neka je ABC po volji odabrani pravokutni trokut. Ako je α mjera šiljastog kuta nasuprot kateti a, β mjera šiljastog kuta nasuprot druge katete b, a c duljina hipotenuze, onda je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Dakle, za šiljasti kut u pravokutnom trokutu vrijede sljedeće definicije.

- Sinus kuta je omjer nasuprotne katete i hipotenuze.
- Kosinus kuta je omjer priležeće katete i hipotenuze.
- Tangens kuta je omjer nasuprotne i priležeće katete.
- Kotangens kuta je omjer priležeće i nasuprotne katete.

Svaka dva pravokutna trokuta s istim kutovima α i β su slični i zato imaju iste omjere odgovarajućih stranica. Zato su gornje definicije dobre, odnosno ne ovise o izboru pravokutnog trokuta s kutovima α i β.

Koristeći Pitagorin poučak dobivamo da je:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Također, vrijedi i sljedeće:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

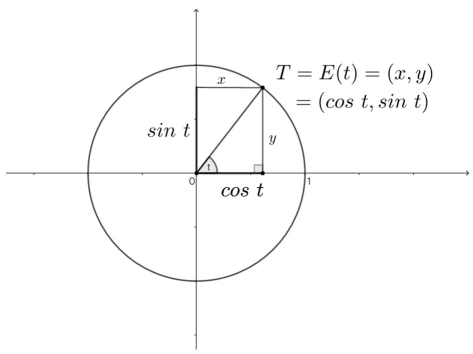
Nadalje, vrijedi:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Sinus pravog kuta je 1, a kosinus 0. Budući da je u pravokutnom trokutu $0<a<c$ i $0<b<c$, slijedi da je $0<\sin\alpha<1$ i $0<\sin\beta<1$.

Proširit ćemo definiciju trigonometrijskih funkcija na sve realne argumente, pomoću trigonometrijske kružnice. Jediničnu kružnicu k smjestimo u koordinatnu ravninu tako da joj je središte u ishodištu. Zamislimo da se brojevni pravac koji je paralelan s osi ordinata i ishodište mu je točka $(1,0)$ namata na kružnicu tako da se gornji polupravac na kojem su pozitivni brojevi namata suprotno od smjera gibanja kazaljke na satu, a donji polupravac na kojem su negativni brojevi, u smjeru kazaljke na satu. Time svakom realnom broju t, odnosno točki na brojevnom pravcu, pridružujemo točno određenu točku $T = E(t)$. Na taj način definiramo funkciju E sa skupa realnih brojeva na kružnicu k i pišemo $t \mapsto E(t)$. Kružnica k zove se brojevna ili trigonometrijska kružnica, a funkcija E eksponencijalno preslikavanje pravca na kružnicu.

Neka je t po volji odabran realni broj i $T = E(t) = (x,y)$ njemu odgovarajuća točka trigonometrijske kružnice. Kosinus broja t definiramo kao x koordinatu, a sinus kao y koordinatu točke T, dakle $\cos(t) := x$ i $\sin(t) := y$.



Slika 1: Definicija sinusa i kosinusa.

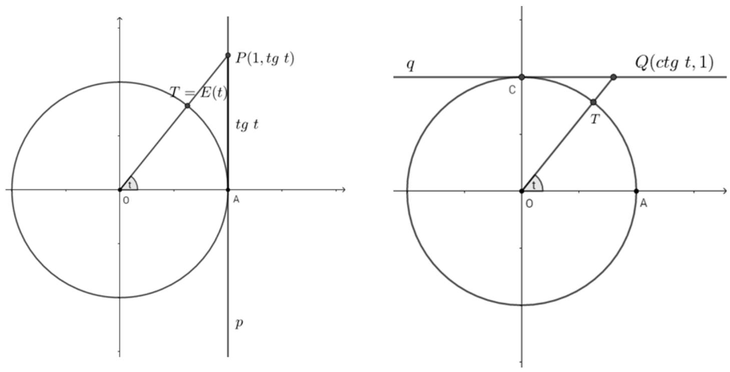
Uočimo da se za $0 < t < \frac{\pi}{2}$ definicija sinusa i kosinusa podudara s definicijom preko omjera duljina stranica pravokutnog trokuta. Iz trokuta OPT vidimo da vrijedi:

$$\cos t = \frac{x}{1} = x, \qquad \sin t = \frac{y}{1} = y.$$

Definirajmo sad tangens i kotangens realnog broja t. Tangens je kvocijent sinusa i kosinusa, a kotangens njemu recipročna vrijednost, to jest vrijedi

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

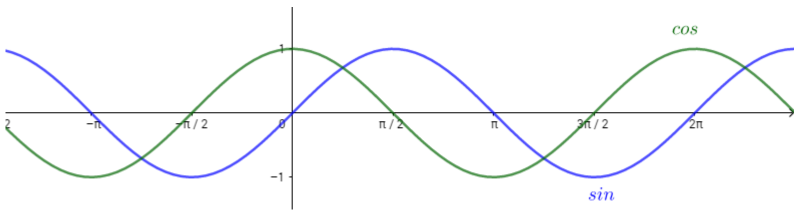
za svaki t za koji su funkcije definirane. Vrijednosti tangensa i kotangensa također možemo geometrijski interpretirati pomoću brojevne kružnice. Neka je $T = E(t)$ točka na brojevnoj kružnici pridružena broju t. Povucimo tangentu p na brojevnu kružnicu u točki $A(1,0)$ te tangentu q u točki $C(0,1)$. Tangens broja t, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je ordinata točke u kojoj pravac OT siječe tangentu p. Tangens nije definiran za $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jer je pripadni pravac OT paralelan s tangentom p pa je ne siječe.



Slika 2: Definicija tangensa i kotangensa.

Kotangens broja t, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je apscisa točke u kojoj pravac OT siječe tangentu q. Kotangens nije definiran za $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jer je pripadni pravac OT paralelan s tangentom q pa je ne siječe.

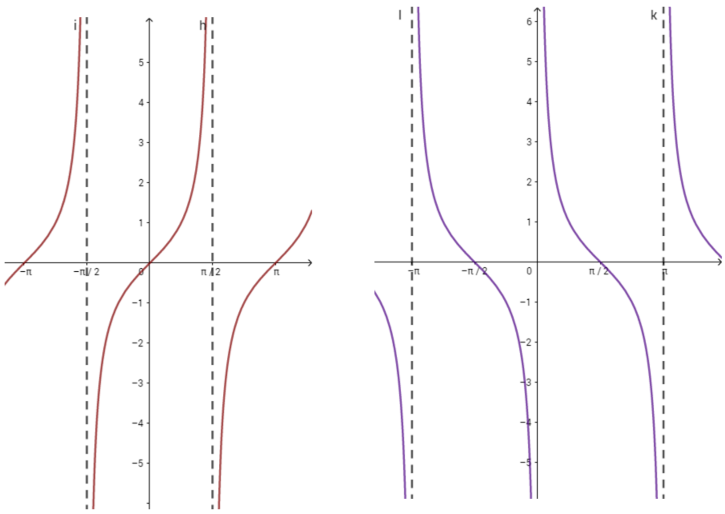
Promotrimo sada grafove i svojstva definiranih trigonometrijskih funkcija. Funkcije $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ i $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ su periodične funkcije s temeljnim periodom 2π. Nultočke funkcije sinus su $t = k\pi$, a kosinus $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nadalje, sinus je neparna, a kosinus parna funkcija.



Slika 3: Grafovi funkcija sinus i kosinus.

Funkcije $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ i $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ su također periodične, ali s temeljnim periodom π. Obje funkcije su neparne. Nultočke funkcije tangens su $t = k\pi$, a kotangens $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pravci

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ su vertikalne asimptote grafa funkcije tangens, a pravci $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vertikalne asimptote grafa funkcije kotangens.

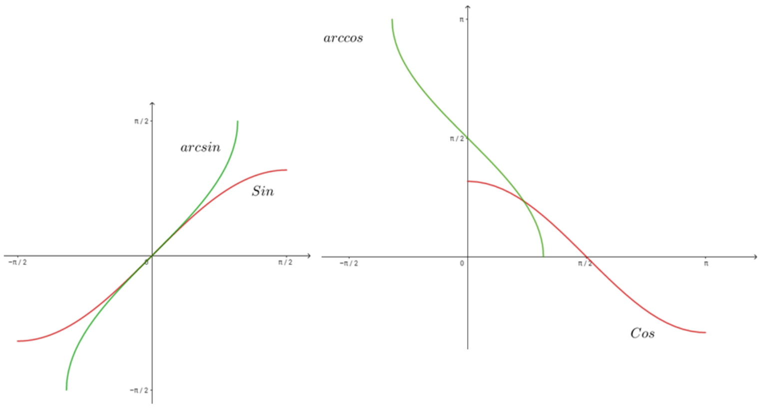


Slika 4: Grafovi funkcija tangens i kotangens.

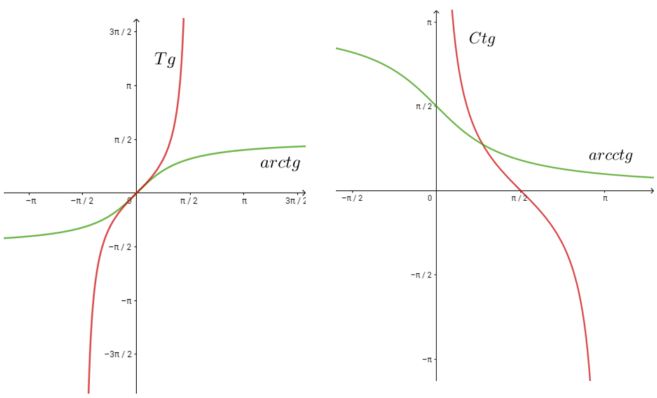
Definirajmo sada inverzne funkcije navedenih trigonometrijskih funkcija. Budući da periodične funkcije nisu injektivne, nemaju inverzne funkcije. Međutim, njihove restrikcije na dijelove domene na kojem su strogo monotone jesu injektivne.

Zbog toga definiramo $\mathrm{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, $\mathrm{Cos} = \cos|_{[0,\pi]}$, $\mathrm{Tg} = \mathrm{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$, $\mathrm{Ctg} = \mathrm{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$. Ispišimo parove inverznih funkcija te prikažimo njihove grafove.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], &&\mathrm{Sin}^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\\
&\mathrm{Cos} : [0, \pi] \to [-1, 1], &&\mathrm{Cos}^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],\\
&\mathrm{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}, &&\mathrm{Tg}^{-1} = \mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,\\
&\mathrm{Ctg} : \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}, &&\mathrm{Ctg}^{-1} = \mathrm{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi\rangle.
\end{aligned}$$



Slika 5: Grafovi funkcija arkus sinus i arkus kosinus.



Slika 6: Grafovi funkcija arkus tangens i arkus kotangens.

Funkcije arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens i arkus kotangens zovemo ciklometrijskim funkcijama.

Do sad navedene definicije su više opisne, a preciznije bi bilo trigonometrijske funkcije definirati preko redova potencija:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \text{ za sve } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

4 Euklidska trigonometrija

4.1 Model euklidske ravnine E^2

Osnovni elementi euklidske ravnine E^2 su točke i pravci. Elemente euklidske ravnine definirat ćemo pomoću vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$.

Skup $\mathbb{R}^2$ s definiranim operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom je vektorski prostor. Sa $[S]$ označavamo potprostor razapet skupom vektora S te u slučaju kad je taj skup jednočlan, to jest $S = \{v\}$, pišemo $[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Točke u E^2 su vektori iz $\mathbb{R}^2$, a pravci su skupovi oblika $l = P + [v] = \{P + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, pri čemu je P točka, a v vektor različit od nulvektora. Potprostor $[v]$ zovemo smjerom pravca l.

Za pravac u euklidskoj ravnini je karakteristično da je jednoznačno određen dvjema točkama koje mu pripadaju, a o tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 4.1. *Kroz svake dvije točke euklidske ravnine prolazi jedinstveni pravac.*

Dokaz. Neka su $P, Q \in E^2, P \neq Q$. Tada je $v = Q - P$ vektor različit od nulvektora. Neka je l pravac koji prolazi točkom P i ima smjer $[v]$. Tada je:

$$l = P + [v] = P + \{\alpha(Q - P)|\alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \alpha)P + \alpha Q|\alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Za $\alpha = 0$ vrijedi $P \in l$, a za $\alpha = 1$ vrijedi $Q \in l$. Time je dokazano postojanje i još treba dokazati jedinstvenost.

Neka je i $l' = P + [v']$ pravac koji prolazi točkama P i Q. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $Q = P + \alpha v'$. Imamo $\alpha v' = Q - P = v$ što znači da su v i v' proporcionalni. Iz tog slijedi $[v'] = [v]$, odnosno $l' = l$, čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Za pravce l i m kažemo da su paralelni ako se ne sijeku. Pišemo: $l \parallel m$.

Teorem 4.2. *Pravci su paralelni ako i samo ako su različiti i imaju isti smjer.*

Dokaz. Neka su l i m dva različita pravca. Neka su l i m paralelni, odnosno neka je $l \cap m = \emptyset$. Pretpostavimo da imaju različite smjerove: $l = P + [v]$, $m = Q + [w]$, $[v] \neq [w]$. Skup $\{v, w\}$ je linearno nezavisan te postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $Q - P = \alpha v + \beta w$. Neka je $T = P + \alpha v = Q - \beta w$. Dobili smo da je točka T zajednička točka pravaca l i m, što je u kontradikciji s pretpostavkom da l i m nemaju zajedničkih točaka.

Obratno, neka l i m imaju isti smjer $[v]$. Pretpostavimo da pravci nisu paralelni, to jest da imaju zajedničku točku T. Onda oba možemo zapisati u obliku: $l = T + [v] = m$, što je kontradikcija s time da su različiti. □

Teorem 4.3. *Za svaki pravac l i točku T koja ne leži na njemu postoji jedinstveni pravac m kroz T paralelan s l.*

Dokaz. Ako je $l = P + [v]$, jedinstvena paralela je očito $m = T + [v]$. $\square$

U $\mathbb{R}^2$ imamo standardni skalarni produkt $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. Pomoću njega definiramo normu (duljinu) vektora $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Za točke P i Q definiramo udaljenost između P i Q kao:

$$d(P, Q) = \|Q - P\|.$$

Navedimo svojstva udaljenosti u euklidskoj ravnini.

Teorem 4.4. *Neka su P, Q i R točke u E^2. Tada vrijede sljedeća svojstva:*
i. $d(P, Q) \geq 0$ *(pozitivnost).*
ii. $d(P, Q) = 0$ *ako i samo ako je* $P = Q$ *(strogost).*
iii. $d(P, Q) = d(Q, P)$ *(simetričnost).*
iv. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ *(nejednakost trokuta).*

Teorem 4.5. *(Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.) Za svaka dva vektora u, $v \in \mathbb{R}^2$ vrijedi:*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako su u i v proporcionalni.

Definicija 4.6. *Mjera kuta između vektora u i v, različitih od nulvektora, dana je s:*

$$\measuredangle(u, v) = \arccos(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}).$$

Iz nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog slijedi da je izraz za koji računamo arccos uvijek između -1 i 1, pa je mjera kuta dobro definirana.

Teorem 4.7. *Ako je $\alpha = \measuredangle(u, v)$, onda vrijedi $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha$.*

Teorem 4.8. *(O vršnim kutovima). Za svaka dva vektora u, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ vrijedi:*

$$\measuredangle(u, v) = \measuredangle(-u, -v).$$

Dokazi prethodna dva teorema slijede direktno iz definicije 4.6.

Teorem 4.9. *(O sukutima). Za svaka dva vektora u, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ vrijedi:*

$$\measuredangle(u, v) + \measuredangle(-u, v) = \pi.$$

Dokaz. U dokazu koristimo formulu iz [2] $\arccos(x) = \pi - \arccos(-x)$. Iz definicije mjere kuta imamo:

$$\measuredangle(u, v) = \arccos(\frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}),$$
$$\measuredangle(-u, v) = \arccos(\frac{-u \cdot v}{\| - u\| \cdot \|v\|}) = \arccos(\frac{-u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}).$$

Primjenjujući navedenu formulu dobivamo:

$$\arccos(\frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}) = \pi - \arccos(\frac{-u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}) \Leftrightarrow$$
$$\arccos(\frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}) + \arccos(\frac{-u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}) = \pi \Leftrightarrow \measuredangle(u, v) + \measuredangle(-u, v) = \pi.$$

□

Koristeći formulu $\arccos(x) + \arccos(y) = \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2})$ za $x + y \geq 0$ iz [2], može se dokazati sljedeće svojstvo kutne mjere.

Teorem 4.10. *(Aditivnost mjere kuta.) Za α, $\beta > 0$ i za vektore u, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vrijedi:*

$$\measuredangle(u, \alpha u + \beta v) + \measuredangle(\alpha u + \beta v, v) = \measuredangle(u, v).$$

Definicija 4.11. *Za vektore u i w kažemo da su okomiti i pišemo $u \perp w$ ako je $\langle u, w\rangle = 0$.*

Za nenulvektore u, w to je ekvivalentno s time da vektori u i w zatvaraju kut $\frac{\pi}{2}$. Skup $\{u, w\}$ jediničnih i međusobno okomitih vektora zovemo ortonormirani skup vektora.

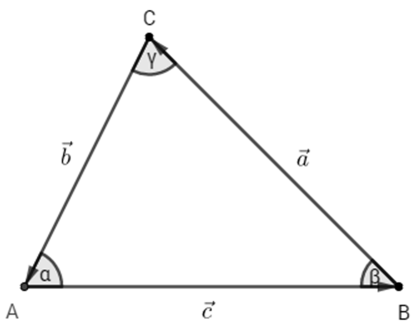
Definicija 4.12. *Pravci $l = P + [v]$ i $m = Q + [w]$ su okomiti ako su njihovi smjerovi $[v]$ i $[w]$ okomiti, a to vrijedi ako i samo ako je $v \perp w$.*

Teorem 4.13. *Za svaki pravac l i točku T postoji jedinstveni pravac m kroz T koji je okomit na l.*

Dokaz. Neka je pravac l određen točkom P te vektorom smjera $[v]$, $l = P+[v]$. Neka je $[v]^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 | \langle x, v\rangle = 0\} = [w]$. To je potprostor dimenzije 1. Zaključujemo, $m = P + [w]$ je jedinstvena okomica kroz T na l. □

4.2 Trigonometrija u modelu E^2

Uvedimo najprije oznake koje ćemo koristiti. Neka su A, B i C tri nekolinearne točke u E^2. Uvedimo vektorske stranice $\vec{a} = C - B$, $\vec{b} = A - C$ i $\vec{c} = B - A$. Vektore smo orijentirali tako da im zbroj bude nulvektor. Norme tih vektora su redom a, b i c i to su zapravo duljine stranica trokuta. Mjere kutova su $\alpha = \measuredangle(-\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \measuredangle(-\vec{c}, \vec{a})$, $\gamma = \measuredangle(-\vec{a}, \vec{b})$.



Slika 7: Trokut ABC.

Teorem 4.14. *U svakom trokutu zbroj unutarnjih kutova iznosi π.*

Dokaz. Koristeći navedene oznake, tvrdnja teorema je da u trokutu ABC vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Kutovi $\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b})$ i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ su sukuti, pa im je po teoremu 4.9. zbroj jednak π. Slijedi:

$$\begin{aligned} &\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \\ &\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b}) + \measuredangle(-\vec{c}, \vec{a}) = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) + \measuredangle(-\vec{c}, \vec{a}). \end{aligned}$$

Iz $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ izrazimo vektor $-\vec{c}$ te uvrstimo u prethodni izraz. Dobivamo:

$$\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b}) + \measuredangle(-\vec{c}, \vec{a}) = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) + \measuredangle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a}). \tag{1}$$

Iskoristimo aditivnost mjere kuta iz teorema 4.10.:

$$\begin{aligned} &\measuredangle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) + \measuredangle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \\ &\measuredangle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a}) - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{a}, \vec{a} + b). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenog u (1) te dodavanjem $\measuredangle(-\vec{b}, \vec{c}) = \measuredangle(-\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b})$ objema stranama jednakosti slijedi

$$\measuredangle(-\vec{a}, \vec{b}) + \measuredangle(-\vec{c}, \vec{a}) + \measuredangle(-\vec{b}, \vec{c}) = \pi - \measuredangle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}) + \measuredangle(-\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b}).$$

Konačno, koristeći teorem 4.8. o vršnim kutovima dobivamo:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

te je time teorem dokazan. $\square$

Sad ćemo se ograničiti na slučaj $\gamma = \frac{\pi}{2}$, odnosno na pravokutni trokut. Karakterizacija tog slučaja preko duljine stranica daje poznati Pitagorin teorem.

Teorem 4.15. ***(Pitagorin teorem).*** *Vrijedi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ako i samo ako vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.*

Dokaz. Koristeći prije uvedene oznake vrijedi:

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{c}\|^2 = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle -\vec{c}, -\vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

Stoga je $c^2 = a^2 + b^2$ ako i samo ako je $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. To znači da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti, odnosno $\gamma = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Neka je sada $\gamma = \frac{\pi}{2}$, to jest $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Teorem 4.16. $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.

Dokaz. Iz definicije 4.6. slijedi

$$\cos\alpha = \frac{\langle -\vec{b}, \vec{c} \rangle}{\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|} = \frac{\langle -\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b} \rangle}{bc} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + b^2}{bc} = \frac{b^2}{bc} = \frac{b}{c}.$$

Analogno se dokaže $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$. $\square$

Teorem 4.17. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$.

Dokaz. Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak π, odnosno $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, a kut γ je pravi, imamo da je $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Slijedi:

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Analogno se vidi $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$. $\square$

Teorem 4.18. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$.

Dokaz. Tangens kuta dobivamo kao omjer sinusa i kosinusa kuta:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}.$$

Analogno se dokazuje $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. □

Teorem 4.19. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Dokaz. Kotangens kuta je omjer kosinusa i sinusa kuta. Dakle, vrijedi:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}.$$

□

Sad se ponovno vratimo općem trokutu, koji ne mora biti pravokutan. Duljine stranica i mjere kutova povezuju sljedeća dva teorema.

Teorem 4.20. ***(Teorem o kosinusu).*** *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, tada je*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dokaz. Koristeći uvedene oznake imamo:

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{c}\|^2 = \langle -\vec{c}, -\vec{c}\rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\rangle = a^2 + b^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = a^2 + b^2 - 2\langle -\vec{a}, \vec{b}\rangle \\ &= (\text{teorem 4.7.}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo preostale jednakosti. □

Teorem 4.21. ***(Teorem o sinusima).*** *Stranice trokuta odnose se kao sinusi kutova nasuprot tih stranica, odnosno vrijedi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dokaz. Primijenjujući teorem o kosinusu i osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha &= 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4b^2c^2}.\end{aligned}$$

Dijeljenjem dobivenog izraza s a^2, $(a>0)$ dobivamo:

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Analogno bismo dobili sljedeće jednakosti:

$$\frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{c^2} = \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Dakle, vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{2abc}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}.$$

. $\square$

Vrijednost tog omjera jednaka je promjeru $2R$ trokutu opisane kružnice. Također, može se pokazati da je jednak $\frac{abc}{2P}$, gdje je P površina trokuta. Preko Heronove formule $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg, dobivamo vezu s izrazom kojeg smo izveli u dokazu teorema.

5 Sferna trigonometrija

Tvrdnje i razmatranja ovog poglavlja odnose se na točke sfere, odnosno površine kugle, a ne na točke prostora koje leže unutar ili izvan nje. Prije razmatranja sferne trigonometrije, navest ćemo potrebne definicije i svojstva.

5.1 Model sfere S^2

Elemente sfere definirat ćemo pomoću vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ koji ima analogno definiran skalarni produkt te izvedenu normu kao prostor $\mathbb{R}^2$. Svojstva vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ navedena u prethodnom poglavlju vrijede i za $\mathbb{R}^3$. Sferu S^2 definiramo kao skup vektora norme 1:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

Presječemo li sferu ravninom koja prolazi središtem sfere, kao presjek dobivamo veliku kružnicu sfere čiji je polumjer jednak polumjeru sfere.

Definicija 5.1. *Neka je n jedinični vektor. Tada je*

$$l = \{x \in S^2 \mid \langle n, x\rangle = 0\}$$

pravac s polom ili normalom n. Kažemo i da je l polarni pravac s polom ili normalom n.

Za dvije točke $P, Q \in S^2$ kažemo da su dijametralno suprotne ili antipodalne ako je $P = -Q$, to jest ako je $\overline{PQ}$ promjer sfere.

Teorem 5.2. *i. Ako je n normala pravca l, onda je i $-n$ normala pravca l.*
ii. Ako točka P pripada pravcu l, onda i njoj antipodalna točka $-P$ pripada tom pravcu.

U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ možemo definirati vektorski produkt. Pomoću njega dobivamo vektor okomit na dva zadana vektora.

Definicija 5.3. *Neka su u i v vektori u $\mathbb{R}^3$. Tada je $u \times v$ jedinstveni vektor z takav da za sve $x \in \mathbb{R}^3$ vrijedi $\langle z, x\rangle = det\ (x, u, v)$.*

Navedimo svojstva vektorskog produkta.

Teorem 5.4. *Za sve $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:*
i. $u \times v$ je dobro definiran.
ii. $\langle u \times v, u\rangle = \langle u \times v, v\rangle = 0$.
iii. $u \times v = -v \times u$.
iv. $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$.
v. $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$.

Vrijede i sljedeća svojstva vektorskog produkta.

Teorem 5.5. *Za sve vektore u, v, $w \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:*
i. $\langle u \times v, w \times z\rangle = \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle$,
ii. $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$ *(Lagrangeov identitet).*

Dokaz. Koristeći svojstvo v. iz prethodnog teorema te komutativnost skalarnog produkta, dokazat ćemo tvrdnje.

$$
\begin{aligned}
i.\ \langle u \times v, w \times z\rangle &= \langle (u \times v) \times w, z\rangle = \langle \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u, z\rangle \\
&= \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, z\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii.\ \|u \times v\|^2 &= \langle u \times v, u \times v\rangle = \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle v, u\rangle\langle u, v\rangle \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2
\end{aligned}
$$

□

Teorem 5.6. *Neka su P i Q različite točke sfere S^2 koje nisu antipodalne. Tada postoji jedinstveni pravac kojem pripadaju točke P i Q, a označavamo ga s PQ*

Dokaz. Kako bismo odredili pravac PQ, potrebna nam je normala n. To mora biti jedinični vektor okomit i na P i na Q. Budući da P i Q nisu antipodalne, možemo odabrati $n = \frac{P \times Q}{||P \times Q||}$. Očito pravac s normalom n prolazi točkama P i Q.

Još je potrebno dokazati jedinstvenost. Ako je o normala bilo kojeg pravca koji prolazi točkama P i Q, mora vrijediti:

$$\langle o, P\rangle = \langle o, Q\rangle = 0.$$

Stoga, koristeći svojstva vektorskog produkta imamo:

$$o \times (P \times Q) = 0.$$

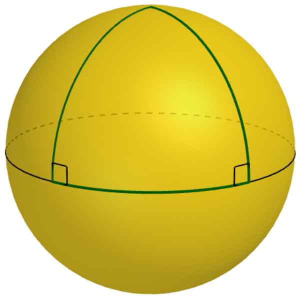
Dakle, o je višekratnik nenul vektora $P \times Q$. Budući da je $\|o\| = 1$, mora vrijediti $o = \pm n$ te je time PQ jedinstveno određen. □

Uočimo da kroz antipodalne točke prolazi beskonačno mnogo pravaca.

Teorem 5.7. *Neka su l i m dva različita pravca u S^2. Tada l i m imaju točno dvije točke presjeka i te su točke antipodalne.*

Dokaz. Pretpostavimo da su n_1 i n_2 normale pravaca l i m, redom. Budući da su l i m različiti pravci, $n_1 \neq \pm n_2$ i stoga je $n_1 \times n_2 \neq 0$. Očito su obje točke $\pm\frac{n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$ sjecišta navedenih pravaca. Bilo koja druga točka može pripadati samo jednom od pravaca l ili m zbog jedinstvenosti iz prethodnog teorema. □

Dakle, vidimo da pravci u S^2 ne mogu biti paralelni te vrijedi da se dva pravca sijeku u paru antipodalnih točaka. Čak će se i pravci koji imaju zajedničku okomicu sijeći.



Slika 8: Pravci sa zajedničkom okomicom. Slika preuzeta sa [5].

Udaljenost točaka P i Q u S^2 je duljina manjeg luka $\widehat{\mathrm{PQ}}$ velike kružnice kroz P i Q, a dana je s

$$d(P, Q) = \arccos\langle P, Q\rangle.$$

Primjetimo da je definicija udaljenosti točaka dobra zbog nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog. Navedimo svojstva udaljenosti u modelu S^2.

Teorem 5.8. *Ako su P, Q i R točke sfere S^2, tada vrijedi:*
i. $d(P, Q) \geq 0$ *(pozitivnost).*
ii. $d(P, Q) = 0$ *ako i samo ako je* $P = Q$ *(strogost).*
iii. $d(P, Q) = d(Q, P)$ *(simetričnost).*
iv. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ *(nejednakost trokuta).*

Definicija 5.9. *Za dva pravca kažemo da su okomiti ako su njihovi polovi okomiti.*

U euklidskoj ravnini skup paralelnih pravaca bio je skup pravaca sa zajedničkom okomicom. U sfernoj geometriji vrijedi sljedeće.

Teorem 5.10. *Neka su l i m dva različita pravca u S^2. Tada postoji jedinstven pravac n takav da je $l \perp n$ i $m \perp n$. Točke presjeka pravaca l i m su polovi pravca n.*

Teorem 5.11. *Neka je l pravac u S^2 i neka je P točka. Ako je P pol pravca l, svaki pravac kroz P je okomit na l. Ako P nije pol pravca l, tada postoji jedinstveni pravac m kroz točku P okomit na pravac l.*

Prethodni teorem pokazuje da kao i u euklidskoj ravnini E^2 možemo spustiti okomicu iz točke P, koja ne pripada pravcu l, na pravac l. U euklidskoj ravnini nožište okomice je točka na l koja je najbliža točki P. U sfernoj geometriji okomica m siječe l u dvjema točkama. Te točke presjeka su točke na l i pritom je jedna točka najbliža, a druga najudaljenija od točke P.

U sfernoj geometriji pojam "biti između" može biti dvosmislen. Naime, za bilo koje tri točke koje leže na istom pravcu, moguće je bilo koju od njih smatrati da je između druge dvije. S druge strane, izborom dvije točke na pravcu l, pravac se dijeli na dva dijela koje možemo poistovjetiti s dužinama u euklidskoj ravnini.

Kut u sfernoj geometriji definira se slično kao u euklidskoj ravnini.

Definicija 5.12. *Mjera kuta zadanog trima točkama P, Q i R pri čemu Q i P te Q i R nisu antipodalne, dana je s:*

$$\measuredangle PQR = \arccos\langle \frac{Q \times P}{\|Q \times P\|}, \frac{Q \times R}{\|Q \times R\|} \rangle.$$

5.2 Trigonometrija u modelu S^2

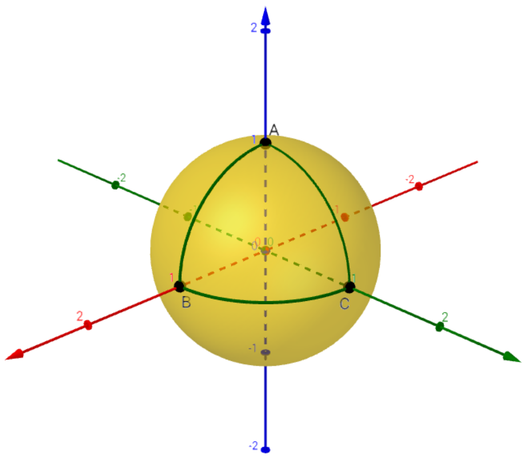
Neka su $A, B, C \in S^2$ tri točke sfere od kojih nikoje dvije nisu antipodalne i sve tri ne leže na istom pravcu u S^2. Duljine stranica trokuta ABC su: $a = d(B, C) = \arccos\langle B, C\rangle$, $b = d(A, C) = \arccos\langle A, C\rangle$ i $c = d(A, B) = \arccos\langle A, B\rangle$. Mjere kutova pri vrhovima A, B, C tog trokuta su:

$$\alpha = \angle BAC = \arccos\langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times C}{\|A \times C\|}\rangle,$$

$$\beta = \angle ABC = \arccos\langle \frac{B \times A}{\|B \times A\|}, \frac{B \times C}{\|B \times C\|}\rangle,$$

$$\gamma = \angle ACB = \arccos\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{C \times B}{\|C \times B\|}\rangle.$$

U sfernom trokutu zbroj unutarnjih kutova veći je od π. Primjer jednog takvog trokuta dan je na slici 9.



Slika 9: Sferni trokut. Slika preuzeta sa [5].

Trokut ABC zadan je točkama $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ i $C = (0, 0, 1)$. Izračunajmo kutove α, β i γ koristeći navedene formule. Prvo računamo kut α. Potrebno je odrediti vektorske produkte $A \times B$ i $A \times C$.

$$A \times B = (0, 0, 1) \text{ i } A \times C = (0, -1, 0).$$

Kako je skalarni produkt vektora $A \times B$ i $A \times C$ jednak 0, slijedi da je $\alpha = \arccos(0) = 90°$.
Na isti način računajući kut β dobivamo vektorske produkte

$$B \times A = -A \times B = (0, 0, -1),\ B \times C = (1, 0, 0)$$

čiji je skalarni produkt jednak 0 te je stoga kut $\beta = 90°$.
Preostalo je izračunati kut γ. Koristeći svojstva vektorskog produkta dobivamo

$$C \times A = -A \times C = (0, 1, 0) \text{ i } C \times B = -B \times C = (-1, 0, 0).$$

Skalarni produkt tih vektora jednak je 0, pa je $\gamma = 90°$. Konačno, uočimo da je zbroj kutova u trokutu ABC veći od π odnosno 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 90°+90°+90°= 270°.$$

Slijede teoremi koji povezuju elemente sfernog trokuta.

Teorem 5.13. *(**Teorem o kosinusu.**) Ako su a, b, c duljine stranica sfernog trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, tada je:*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Dokaz. Dokazat ćemo jednakost za $\cos \alpha$, a preostale jednakosti dokazuju se analogno. Koristeći definiciju za mjeru kuta α imamo

$$\cos \alpha = \langle \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times C}{\|A \times C\|} \rangle.$$

Primjenom teorema 5.5 dobivamo

$$\langle A \times B, A \times C \rangle = \langle B, C \rangle - \langle A, C \rangle \langle A, B \rangle = \cos a - \cos b \cos c,$$

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2 = 1 - \cos^2 c = \sin^2 c,$$
$$\|A \times C\|^2 = \|A\|^2 \|C\|^2 - \langle A, C \rangle^2 = 1 - \cos^2 b = \sin^2 b.$$

Uvrštavanjem navedenog u definiciju za mjeru kuta α dobivamo kosinusov teorem za stranice u sfernoj trigonometriji:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Množenjem slijedi

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

□

Iz teorema o kosinusu slijedi Pitagorin teorem za sferni trokut.

Teorem 5.14. ***(Pitagorin teorem.)*** *U sfernom trokutu ABC vrijedi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ako i samo ako je $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.*

Dokaz. Kut γ je pravi, to jest $\gamma = \frac{\pi}{2}$, ako i samo ako je $\cos\gamma = 0$. Uvrštavanjem toga u teorem o kosinusu dobivamo:

$$0 = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \Leftrightarrow \cos a - \cos b \cos c = 0 \Leftrightarrow \cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

□

Slično kao što je u euklidskoj geometriji kosinus kuta pravokutnog trokuta omjer priležeće katete i hipotenuze, u sfernoj je to omjer tangensa nasuprotne katete i tangensa hipotenuze.

Teorem 5.15. *U pravokutnom trokutu s $\gamma = \frac{\pi}{2}$ vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

Dokaz. Koristeći teorem o kosinusu te Pitagorin poučak dobivamo:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos a - \cos^2 b \cdot \cos a}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos a \cdot (1 - \cos^2 b)}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos a \cdot \sin^2 b}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos a \cdot \sin b}{\sin c} = \frac{\frac{\cos c}{\cos b} \cdot \sin b}{\sin c} = \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos b \cdot \sin c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}.\end{aligned}$$

Na isti način bismo dobili $\cos\beta = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$. □

Teorem 5.16. ***(Teorem o sinusima.)*** *Sinusi kutova sfernog trokuta odnose se kao sinusi nasuprotnih stranica, odnosno vrijedi:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Dokaz. Koristeći osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ te teorem o kosinusu imamo:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}.\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

Na isti bismo način dobili:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b} = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b\cdot\sin^2 c},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c} = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b\cdot\sin^2 c}.$$

Dakle, zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

□

Analogno kao u euklidskoj geometriji gdje je sinus kuta pravokutnog trokuta omjer nasuprotne katete i hipotenuze, u sfernoj je to omjer sinusa nasuprotne katete i sinusa hipotenuze.

Teorem 5.17. *U pravokutnom trokutu s* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c},\ \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Dokaz. Koristeći teorem o sinusima te pretpostavku da je kut γ pravi imamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin c} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Na isti bismo način dobili $\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin c}$. □

Sljedeća dva teorema također se odnose na pravokutni sferni trokut s pravim kutom pri vrhu C.

Teorem 5.18. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$.

Dokaz. Tangens je omjer sinusa i kosinusa pa slijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sin a}{\sin c}}{\frac{\cos a\cdot\sin b}{\sin c}} = \frac{\sin a}{\cos a\cdot\sin b} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Analogno se dokazuje $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$. □

Teorem 5.19. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin b}{\operatorname{tg} a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin a}{\operatorname{tg} b}.$

Dokaz. Kotangens računamo kao omjer kosinusa i sinusa:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos a \cdot \sin b}{\sin a} = \frac{\sin b}{\operatorname{tg} a}.$$

Na isti način dobivamo $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin a}{\operatorname{tg} b}$. □

Definirajmo sada polarni trokut i proučimo njegova svojstva kako bismo naveli još jedan teorem o kosinusu koji vrijedi u sfernoj trigonometriji.

Definicija 5.20. *Neka je ABC sferni trokut. Definiramo:*

$$A' = \frac{B \times C}{\|B \times C\|}, \; B' = \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \; C' = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}.$$

Trokut $A'B'C'$ zovemo polarni trokut trokuta ABC. Njegove stranice označavamo s a', b', c', a kutove s α', β' i γ'.

Teorem 5.21. *Za trokut ABC i njemu polarni trokut $A'B'C'$ vrijedi:*

$$\cos(a') = -\cos(\alpha), \quad \cos(b') = -\cos(\beta), \quad \cos(c') = -\cos(\gamma).$$

Dokaz. Koristeći definiciju udaljenosti točaka i mjere kuta u S^2 te antikomutativnost vektorskog produkta dokazujemo:

$$\cos(a') = \langle B', C' \rangle = \langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \rangle = -\langle \frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \rangle = -\cos\alpha.$$

Analogno bismo dokazali ostale jednakosti. □

Iz navedenog odmah slijedi

$$\sin(a') = \sin(\alpha), \quad \sin(b') = \sin(\beta), \quad \sin(c') = \sin(\gamma).$$

Uočimo da za trokut ABC i njemu polarni trokut $A'B'C'$ vrijedi

$$a' = \pi - \alpha, \quad b' = \pi - \beta, \quad c' = \pi - \gamma$$
$$\alpha' = \pi - a, \quad \beta' = \pi - b, \quad \gamma' = \pi - c.$$

Također, polarni trokut trokuta $A'B'C'$ sukladan je polaznom trokutu ABC jer je $a'' = \pi - \alpha' = \pi - (\pi - a) = a$ te analogno $b'' = b$, $c'' = c$, $\alpha'' = \alpha$, $\beta'' = \beta$ i $\gamma'' = \gamma$. Iz navedenog slijedi

$$\cos(\alpha') = -\cos(a), \quad \cos(\beta') = -\cos(b), \quad \cos(\gamma') = -\cos(c).$$

Teorem 5.22. ***(Dualni teorem o kosinusu.)*** *Uz uvedene oznake vrijedi:*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b,$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Dokaz. Primijenjujući teorem o kosinusu 5.13 na polarni trokut $A'B'C'$ slijedi

$$\begin{aligned}
&\cos(a') = \cos(b')\cos(c') + \sin(b')\sin(c')\cos(\alpha') \Leftrightarrow\\
&\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a)\\
&\Leftrightarrow \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.
\end{aligned}$$

Ostale jednakosti dokazujemo analogno. □

Korolar 5.23. *Duljine stranica sfernog trokuta su jednoznačno određene mjerama kutova.*

U euklidskoj i u sfernoj trigonometriji pomoću kosinusovog teorema, ukoliko su zadane duljine stranica a, b i c, jednostavno se izračunaju mjere kutova α, β i γ. Obrnuto, u euklidskoj ravnini iz mjera kutova ne može se jednoznačno odrediti duljine stranica zbog sličnosti trokuta, dok je u sfernoj to moguće. Za sferne trokute vrijedi KKK teorem o sukladnosti, dok u euklidskoj ravnini trokuti s istim kutovima ne moraju biti sukladni nego samo slični.

6 Hiperbolička trigonometrija

6.1 Model hiperboličke ravnine H^2

Kao i u prethodnom poglavlju, elemente hiperboličke ravnine definirat ćemo pomoću vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Hiperboličku trigonometriju promatrat ćemo na trodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru koji se sastoji od uređenih trojki $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ i na kojem je definirana bilinearna operacija

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Taj se prostor zove prostor Minkowskog ili Lorentzov prostor.

Definicija 6.1. *Za nenulvektor $v \in \mathbb{R}^3$, kažemo da je:*
i. prostorni ako je $b(v, v) > 0$,
ii. vremenski ako je $b(v, v) < 0$,
iii. svjetlosni ako je $b(v, v) = 0$.

Normu u prostoru Minkowskog definiramo s $\|x\| = \sqrt{|b(x, x)|}$, a za istu vrijede sljedeća svojstva.

Teorem 6.2. *Za $x \in \mathbb{R}^3$ i $\alpha \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:*
i. $\|x\| \geq 0$,
ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ili je x svjetlosni vektor,
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Hiperbolička ravnina H^2 je skup

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0 \text{ i } b(x, x) = -1\}.$$

Za točke hiperboličke ravnine vrijedi da im je treća koordinata pozitivan realan broj te $b(x, x) = -1$, što je ekvivalentno jednadžbi $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$. To su zapravo točke na gornjoj plohi dvoplošnog hiperboloida.

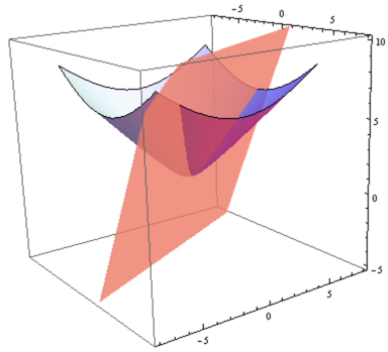
Definicija 6.3. *Za svaki jedinični prostorni vektor $n \in \mathbb{R}^3$ skup*

$$l = \{x \in H^2 \mid b(n, x) = 0\}$$

zovemo pravac s jediničnom normalom ili polom n.

Na slici možemo vidjeti pravac u hiperboličkoj ravnini, prikazan kao presjek gornje plohe dvoplošnog hiperboloida i ravnine s vektorom normale $(n_1, n_2, -n_3)$ koja sadrži ishodište koordinatnog sustava.

U prostoru Minkowskog možemo definirati vektorski produkt.



Slika 10: Pravac u hiperboličkoj ravnini. Slika preuzeta sa [8].

Definicija 6.4. *Neka su u i v vetori u $\mathbb{R}^3$. Tada je $u \times v$ jedinstveni vektor z takav da za sve $x \in \mathbb{R}^3$ vrijedi $b(z, x) = det(x, u, v)$.*

Navedimo svojstva vektorskog produkta.

Teorem 6.5. *Za sve u, v, $w \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:*
i. $u \times v$ *je dobro definiran.*
ii. $b(u \times v, u) = b(u \times v, v) = 0$.
iii. $u \times v = -v \times u$.
iv. $b(u \times v, w) = b(u, v \times w)$.
v. $(u \times v) \times w = -b(u, w)v + b(v, w)u$.

U prostoru Minkowskog vrijede i sljedeća svojstva vektorskog produkta.

Teorem 6.6. *Za sve vektore u, v, $w \in \mathbb{R}^3$ vrijedi:*
i. $b(u \times v, w \times z) = -b(u, w)b(v, z) + b(v, w)b(v, z)$,
ii. $b(u \times v, u \times v) = b(u, v)^2 - b(u, u)b(v, v)$ *(Lagrangeov identitet).*

Svaki ortonormirani skup od tri vektora je baza u $\mathbb{R}^3$. U Prostoru Minkowskog svaka ortonormirana baza sastoji se od dva prostorna i jednog vremenskog vektora.

Teorem 6.7. *Kroz svake dvije različite točke $P, Q \in H^2$ prolazi jedinstveni pravac.*

Dokaz. Neka je $v = P$ i $w = P \times Q$. Vrijedi $b(v, w) = 0$ jer je $P \times Q$ okomito na P i na Q. Vektor w je prostorni vektor jer je okomit na vremenski vektor. Neka je $n = \dfrac{w}{\sqrt{b(w, w)}}$. Tada je $b(n, n) = 1$. Pravac s jediničnom normalom n prolazi točkama P i Q. To je jedini pravac kroz te točke jer jedinična normala svakog takvog pravca mora biti okomita na P i Q i stoga mora biti kolinearna s $P \times Q$. $\square$

Kao i u sfernoj geometriji, vektorski produkt koristimo za pronalazak sjecišta pravaca. S druge strane, ako su n_1 i n_2 jedinični prostorni vektori, $n_1 \times n_2$ ne mora biti vremenski vektor te se pravci u H^2 ne moraju sijeći. Zapravo, za $n_1 \times n_2$ su moguće tri situacije.

Definicija 6.8. *Neka su l_1, l_2 pravci s jediničnim normalama n_1, n_2. Kažemo:*
i. l_1 i l_2 se sijeku ako je $n_1 \times n_2$ vremenski vektor.
ii. l_1 i l_2 su paralelni ako je $n_1 \times n_2$ svjetlosni vektor.
iii. l_1 i l_2 su ultraparalelni ako je $n_1 \times n_2$ prostorni vektor.

Teorem 6.9. *Pravci l_1 i l_2 s normalama n_1 i n_2 koji se sijeku imaju točno jednu zajedničku točku. To je jedinstvena točka iz H^2 koja je proporcionalna s $n_1 \times n_2$.*

Dokaz. Očito, točka pripada i jednom i drugom pravcu. Ako je P bilo koja druga točka koja pripada i jednom i drugom pravcu, tada je:

$$P \times (n_1 \times n_2) = -b(P, n_2)n_1 + b(P, n_1)n_2 = 0,$$

stoga je P proporcionalna s $n_1 \times n_2$. $\square$

Paralelni i ultraparalelni pravci se ne sijeku.

Definicija 6.10. *Za pravce l_1 i l_2 s normalama n_1 i n_2 kažemo da su okomiti i pišemo $l_1 \perp l_2$ ako je $b(n_1, n_2) = 0$.*

Teorem 6.11. *i. Okomiti pravci u H^2 se sijeku.*
ii. Za svaki pravac l i točku T u H^2 postoji jedinstveni pravac m kroz T okomit na l.

Dokaz. i. Neka su dani okomiti pravci l_1 i l_2 s jediničnim normalama n_1 i n_2. Tada je skup $\{n_1, n_2, n_1 \times n_2\}$ ortonormirana baza iz čega slijedi da je $n_1 \times n_2$ vremenski vektor.
ii. Neka je n_1 jedinična normala od l_1. Neka je n_2 jedinični vektor proporcionalan s $n_1 \times T$. To je moguće jer nenul vektor $n_1 \times T$ okomit na T mora bit prostorni. Pravac l_2 s jediničnom normalom n_2 očito prolazi točkom T, a okomit je na l_1. Postoji samo jedan pravac s tim svojstvom jer jedinična normala na taj pravac mora biti okomita na n_1 i T i stoga proporcionalna s njihovim vektorskim produktom. $\square$

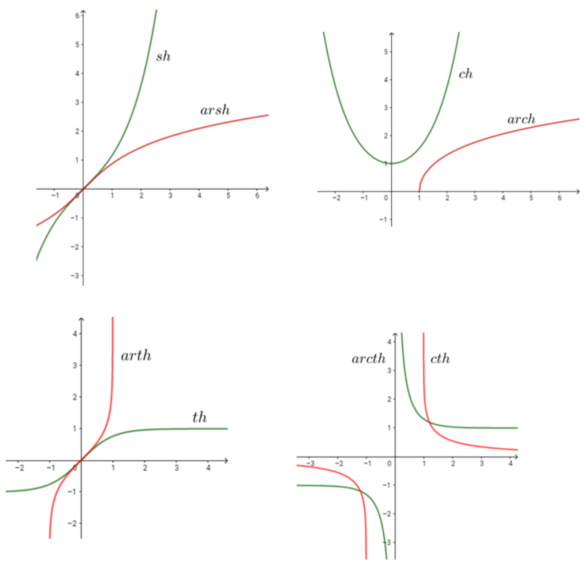
U definiciji udaljenosti dviju točaka u hiperboličkoj ravnini koristit ćemo hiperbolne funkcije stoga ponovimo njihove definicije i svojstva. Funkcije sinus hiperbolni $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i kosinus hiperbolni $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ definiramo kao:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Sinus hiperbolni je neparna, a kosinus hiperbolni parna funkcija. Funkcije tangens hiperbolni $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ i kotangens hiperbolni $\operatorname{cth} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$ definiramo kao:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Inverzne funkcije hiperbolnih su area funkcije. Sinus hiperbolni je strogo rastuća bijekcija pa je area sinus hiperbolni $\operatorname{arsh} = \operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiran s $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Kosinus hiperbolni nije injekcija pa promatramo njegovu restrikciju na interval $[0, +\infty)$. Area kosinus hiperbolni $\operatorname{arch} = \operatorname{ch}^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ definiramo s $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Area tangens hiperbolni $\operatorname{arth} = \operatorname{th}^{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definiramo s $\operatorname{arth} \mathrm{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, a area kotangens hiperbolni $\operatorname{arcth} = \operatorname{cth}^{-1} : \mathbb{R}\backslash[-1, 1] \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ s $\operatorname{arcth} \mathrm{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.



Slika 11: Grafovi hiperbolnih i area funkcija.

Definicija 6.12. *Neka su $P, Q \in H^2$. Definiramo udaljenost:*

$$d(P, Q) = \operatorname{arch}(-b(P, Q)).$$

Iz Lagrangeovog identiteta slijedi da je $|b(P, Q)| \geq 1$, a može se pokazati da je negativan kad P i Q imaju isti predznak treće koordinate te je stoga udaljenost dobro definirana.

Teorem 6.13. *Ako su P, Q i R točke hiperboličke ravnine H^2, tada vrijede sljedeća svojstva.*
i. $d(P,Q) \geq 0$.
ii. $d(P,Q) = 0$ *ako i samo ako je* $P = Q$.
iii. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
iv. $d(P,Q) + d(P,R) \geq d(Q,R)$ *(nejednakost trokuta).*

Definirajmo mjeru kuta zadanog s tri točke.

Definicija 6.14. *Neka su P, Q i R tri točke u H^2. Mjera kuta $\angle PQR$ je*

$$\measuredangle(PQR) = \arccos\left(b\left(\frac{Q \times P}{\|Q \times P\|}, \frac{Q \times R}{\|Q \times R\|}\right)\right).$$

Uočimo da su $Q \times P$ i $Q \times R$ prostorni vektori.

Teorem 6.15. *(Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog za prostorne vektore.) Ako su $u, v \in \mathbb{R}^3$ prostorni vektori takvi da je $u \times v$ vremenski vektor, onda je $b(u,v)^2 < b(u,u) \cdot b(v,v)$.*

Iz navedene nejednakosti te činjenice da je $b(Q \times P, Q \times R)$ vremenski vekotr što slijedi iz svojstva v. teorema 6.5, uočimo da je mjera kuta dobro definirana.

6.2 Trigonometrija u modelu H^2

Neka su A, B, $C \in H^2$ tri nekolinearne točke. Duljine stranica trokuta ABC su $a = d(B,C) = \operatorname{arch}(-b(B,C))$, $b = d(A,C) = \operatorname{arch}(-b(A,C))$ i $c = d(A,B) = \operatorname{arch}(-b(A,B))$. Mjere kutova pri vrhovima A, B, C tog trokuta su:

$$\alpha = \angle BAC = \arccos\left(b\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{A\times C}{\|A\times C\|}\right)\right),$$

$$\beta = \angle ABC = \arccos\left(b\left(\frac{B\times A}{\|B\times A\|}, \frac{B\times C}{\|B\times C\|}\right)\right),$$

$$\gamma = \angle ACB = \arccos\left(b\left(\frac{C\times A}{\|C\times A\|}, \frac{C\times B}{\|C\times B\|}\right)\right).$$

Za zbroj kutova u hiperboličkom trokutu vrijedi da je manji od π, a jedan primjer je trokut ABC određen vrhovima $A = (0,0,1)$, $B = (2,2,3)$ i $C = (2,-2,3)$. Izračunajmo kutove α, β i γ koristeći navedene formule. Prvo računamo kut α. Odredimo vektorske produkte $A\times B$ i $A\times C$.

$$A\times B = (-2,2,0) \text{ i } A\times C = (2,2,0).$$

Kako je $b(A\times B, A\times C) = 0$, slijedi da je $\alpha = \arccos(0) = 90°$. Analogno računamo kut β. Koristeći svojstvo antikomutativnosti vektorskog produkta dobivamo:

$$B\times A = -A\times B = (2,-2,0),\ B\times C = (12,0,8) \text{ te } b(B\times A, B\times C) = 24.$$

Norme vektora $B\times A$ i $B\times C$ jednake su $\|B\times A\| = 2\sqrt{2}$ i $\|B\times C\| = 4\sqrt{5}$, stoga je $\beta = \arccos(\frac{3\sqrt{10}}{10}) = 18°26'6''$. Preostalo je izračunati kut γ. Ponovno koristimo svojstvo antikomutativnosti vektorskog produkta i dobivamo:

$$C\times A = -A\times C = (-2,-2,0),\ C\times B = -B\times C = (-12,0,-8),$$

iz čega slijedi $b(C\times A, C\times B) = 24$. Norme tih vektora su $\|C\times A\| = 2\sqrt{2}$ i $\|C\times B\| = 4\sqrt{5}$, pa slijedi $\gamma = \arccos(\frac{3\sqrt{10}}{10}) = 18°26'6''$. Dakle, kutovi β i γ su sukladni.

Konačno, zbroj kutova u hiperboličkom trokutu manji je od π odnosno 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 90° + 18°26'6'' + 18°26'6'' = 126°52'12''.$$

Slijede teoremi koji povezuju elemente trokuta u H^2.

Teorem 6.16. ***(Hiperbolički teorem o kosinusu)***. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ njegovi kutovi, tada je:*

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha,$$
$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} c \cos\beta,$$
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma.$$

Dokaz. Koristeći definiciju udaljenosti točaka u H^2 imamo:

$$\operatorname{ch} a = -b(B, C),$$
$$\operatorname{ch} b = -b(A, C),$$
$$\operatorname{ch} c = -b(A, B).$$

Izrazimo kosinus kuta α koristeći definiciju za mjeru kuta:

$$\cos\alpha = b\left(\frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A \times C}{\|A \times C\|}\right) = \frac{1}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|} b(A \times B, A \times C).$$

Iz svojstava vektorskog produkta slijedi:

$$\begin{aligned} b(A \times B, A \times C) &= b((A \times B) \times A, C) = b(-b(A, A)B + b(B, A)A, C) \\ &= b(B, C) + b(A, B)b(A, C) = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a. \end{aligned}$$

Koristeći Lagrangeov identitet dobivamo:

$$b(A \times B, A \times B) = b(A, B)^2 - b(A, A) \cdot b(B, B) = \operatorname{ch}^2 c - 1 = \operatorname{sh}^2 c,$$
$$b(A \times C, A \times C) = b(A, C)^2 - b(A, A) \cdot b(C, C) = \operatorname{ch}^2 b - 1 = \operatorname{sh}^2 b.$$

Konačno, iz navedenog dobivamo

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c}$$

te množenjem slijedi

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha.$$

Na isti bismo način dokazali i ostale jednakosti. □

Iz teorema o kosinusu slijedi Pitagorin teorem za hiperbolički trokut.

Teorem 6.17. ***(Pitagorin poučak.)*** *Vrijedi* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *ako i samo ako vrijedi* $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b$.

Dokaz. Uvrstimo $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ u $\cos\gamma = \dfrac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}$. Kosinus pravog kuta je jednak 0, stoga imamo:

$$\frac{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b.$$

□

Teorem 6.18. *U pravokutnom trokutu s* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}.$$

Dokaz. Koristeći Pitagorin teorem te teorem o kosinusu dobivamo:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a(\operatorname{ch}^2 b - 1)}{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{sh}^2 b}{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c}\\ &= \frac{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{ch} a}{\operatorname{th} c\cdot\operatorname{ch} c} = \frac{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{ch} a}{\operatorname{th} c\cdot\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b} = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}.\end{aligned}$$

Analogno bismo dobili drugu jednakost. □

Teorem 6.19. ***(Hiperbolički teorem o sinusima.)*** *Sinusi kutova hiperboličkog trokuta odnose se kao sinusi hiperbolni nasuprotnih stranica, odnosno vrijedi:*

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}.$$

Dokaz. Dovoljno je izraziti $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a}$. Dobit ćemo izraz simetričan u varijablama a, b i c. Iz teorema o kosinusu imamo:

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c}.$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ch}^2 b\cdot\operatorname{ch}^2 c + \operatorname{ch}^2 a - 2\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh}^2 b\cdot\operatorname{sh}^2 c}.$$

Primjenjujući osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dobivamo:

$$-\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{ch}^2 b\cdot\operatorname{ch}^2 c + \operatorname{ch}^2 a - 2\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c - \operatorname{sh}^2 b\cdot\operatorname{sh}^2 c}{\operatorname{sh}^2 b\cdot\operatorname{sh}^2 c}.$$

Konačno, koristeći identitet $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ imamo:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{sh}^2 a} = \frac{1 - (\operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c) + 2\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh}^2 a\cdot\operatorname{sh}^2 b\cdot\operatorname{sh}^2 c}.$$

Isti bismo rezultat dobili za izraze $\frac{\sin^2\beta}{\operatorname{sh}^2 b}$ i $\frac{\sin^2\gamma}{\operatorname{sh}^2 c}$. Stoga vrijedi tvrdnja teorema.

□

Sljedeći teoremi odnose se na pravokutni hiperbolički trokut s pravim kutom u vrhu C, to jest $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Teorem 6.20. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}, \quad \sin\beta = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}.$

Dokaz. Koristeći teorem o sinusima te pretpostavku da je kut γ pravi imamo:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} c} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}.$$

Na isti načn dobivamo $\sin\beta = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}$. □

Teorem 6.21. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}, \ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}.$

Dokaz. Tangens je omjer sinusa i kosinusa

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}}{\frac{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}.$$

Analogno se dokazuje $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}$. □

Teorem 6.22. $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{cth} a \cdot \operatorname{sh} b, \quad \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{cth} b \cdot \operatorname{sh} a.$

Dokaz. Kotangens je omjer kosinusa i sinusa

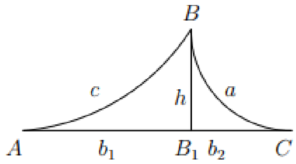
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a} = \operatorname{cth} a \cdot \operatorname{sh} b.$$

Na isti način dokazujemo $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{cth} b \cdot \operatorname{sh} a$. □

Kao u sfernoj, i u hiperboličkoj trigonometriji imamo dualni teorem o kosinusu.

Teorem 6.23. ***(Hiperbolički dualni teorem o kosinusu.)*** *Uz uvedene oznake vrijedi:*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\operatorname{ch} a,$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\operatorname{ch} b,$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch} c.$$



Slika 12: Hiperbolički dualni teorem o kosinusu. Slika preuzeta sa [7].

Dokaz. Dokazat ćemo drugu jednakost, ostale se dokazuju analogno. Promotrimo sliku. Primijenimo Pitagorin teorem na trokute BB_1A i CB_1A te pomnožimo dobivene izraze. Imamo:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c = \operatorname{ch}^2 h \operatorname{ch} b_1 \operatorname{ch} b_2.$$

Množenjem izraza s $\operatorname{ch}(b_1 + b_2) = \operatorname{ch} b$ dobivamo

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c(\operatorname{ch} b_1 \operatorname{ch} b_2 + \operatorname{sh} b_1 \operatorname{sh} b_2) = \operatorname{ch} b \operatorname{ch}^2 h \operatorname{ch} b_1 \operatorname{ch} b_2.$$

Zamijenimo $\operatorname{ch}^2 h = 1 + \operatorname{sh}^2 h$ te podijelimo obje strane s $\operatorname{ch} b_1 \operatorname{ch} b_2$:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c(1 + \operatorname{th} b_1 \operatorname{th} b_2) = \operatorname{ch} b(1 + \operatorname{sh}^2 h).$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b = - \operatorname{th} b_1 \operatorname{th} b_2 \operatorname{ch} c \operatorname{ch} a + \operatorname{sh}^2 h \operatorname{ch} b.$$

Koristeći teorem o kosinusu možemo izraz $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} b$ s lijeve strane jednakosti zamijeniti s $\cos\beta \operatorname{sh} a \operatorname{sh} c$ i dobivamo

$$\cos\beta \operatorname{sh} a \operatorname{sh} c = - \operatorname{th} b_1 \operatorname{th} b_2 \operatorname{ch} c \operatorname{ch} a + \operatorname{sh}^2 h \operatorname{ch} b.$$

Dijeljenjem jednakosti s $\operatorname{sh} a \operatorname{sh} c$ slijedi

$$\cos\beta = -\frac{\operatorname{th} b_1}{\operatorname{th} c}\frac{\operatorname{th} b_2}{\operatorname{th} a} + \frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{sh} c}\frac{\operatorname{sh} h}{\operatorname{sh} a} \operatorname{ch} b,$$

iz čega primjenom teorema 6.18 i 6.20 na pravokutne trokute BB_1A i BB_1C dobivamo tvrdnju teorema:

$$\cos\beta = - \cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \operatorname{ch} b.$$

□

Korolar 6.24. *Duljine stranica hiperboličkog trokuta su jednoznačno određene mjerama kutova.*

Za hiperboličke trokute, kao i za sferne, vrijedi KKK teorem o sukladnosti trokuta.

7 Neutralni teorem o sinusima

Jedan od otkrivača neeuklidske geometrije je mađarski matematičar Johann Bolyai iz 19. stoljeća. Proučavao je propozicije koje su neovisne o postulatu o paralelama te vrijede u euklidskoj i ostalim tada novootkrivenim geometrijama. Primjer je neutralni teorem o sinusima.

Teorem 7.1. *Omjer sinusa kuta trokuta ABC i opsega kruga s polumjerom jednakim duljini nasuprotne stranice je konstantan. Pišemo:*

$$O_a : O_b : O_c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Tako u euklidskoj ravnini gdje je opseg kruga polumjera r dan s $O = 2r\pi$, teorem 7.1 prelazi u:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

U modelu sfere prema [6] opseg kruga polumjera r dan je s $O = 2\pi\sin r$ pa teorem 7.1 prelazi u:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

U modelu hiperboličke ravnine, prema [6] opseg kruga polumjera r dan je s $O = 2\pi\operatorname{sh} r$ pa teorem 7.1 prelazi u:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}.$$

Literatura

[1] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf (listopad 2017.)

[2] I.N. Bronštejn, K.A. Semendjaev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

[3] F.M. Bruckler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] F.M. Bruckler, *Povijest matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[5] Geogebra, *Birectangular Spherical Triangle*, dostupno na https://www.geogebra.org/material/show/id/jZrH3BjC (studeni, 2017.)

[6] M.J. Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*, W.H. Freeman and Company, New York, 1980.

[7] G. Hetyei, *The hyperbolic laws of sines and cosines for general triangles*, dostupno na htps://math2.uncc.edu/ ghetyei/courses/old/S14.6118/hypsingen.pdf (siječanj 2018.)

[8] I. Novak, V. Mikulić Crnković *O modelima hiperboličke ravnine*, math.e 22, dostupno na http://e.math.hr/math_e_article/vol22/Crnkovic (studeni 2017.)

[9] B. Pavković, D. Veljan *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[10] L. Rogers, *The History of Trigonometry*, dostupno na http://nrich.maths.org/6843 (listopad 2017.)

[11] P.J. Ryan, *Euclidean and non-Euclidean geometry: an analytic approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[12] Wikipedia, *History of trigonometry*, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry (listopad 2017.)

[13] Wikipedia, *Trigonometry*, dostupno na htps://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry (listopad 2017.)

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je dokazati osnovne relacije između mjera kutova i duljina stranica trokuta u euklidskoj i hiperboličkoj ravnini te na površini sfere. Rad započinje povijesnim pregledom razvoja trigonometrije, od samih početaka u 18. st. pr. Kr. kad se razvila iz praktičnih potreba vezanih za graditeljstvo, astronomiju i navigaciju do danas kad je to zasebna matematička disciplina. Slijede definicije i svojstva trigonometrijskih funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens te njihovih inverznih funkcija. Potom proučavamo sličnosti i razlike između trigonometrijskih relacija u tri različita modela: modelu euklidske ravnine, modelu hiperboličke ravnine te modelu sfere. Svaki od modela najprije definiramo i iskazujemo svojstva istog, zatim promatramo trigonometriju u modelu. Naposljetku dolazi neutralni sinusov teorem koji vrijedi u svakom od promatranih modela.

Summary

The aim of this graduate thesis is to prove basic relations between angle measures and edge lengths of a triangle in Euclidean plane, hyperbolic plane and on the surface of the sphere. The thesis begins with a historical overview of trigonometry, from the very beginnings in the 18th century BC when it developed from practical needs and was used in engineering distinct, astronomy and navigation, until today when it is a mathematical discipline. Next are definitions and properties of trigonometric functions sine, cosine, tangent, cotangent and their inverse functions. Thereafter, we analyzed similarities and differences between trigonometric relationships in three different models: the Euclidean plane model, the hyperbolic plane model and the sphere model. Firstly we defined each model, declared properties and then we analyzed trigonometry of it. Finally, we state the neutral law of sines which is valid in each of the models.

Životopis

Rođena sam 1.4.1992. godine u Rijeci. Osnovnu školu Vladimira Nazora završila sam u srcu Istre – Pazinu. U istome gradu 2011. godine završila sam Pazinski kolegij – klasičnu gimnaziju nakon čega selim u Zagreb gdje iste godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. 2014. godine, nakon završetka preddiplomskog studija, na istome fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer.

U vrijeme studiranja pohađala sam tečaj njemačkog jezika do razine B1 te tečaj web developmenta u kojem sam naučila osnove front-end i back-end developmenta.

Od ožujka 2013. do listopada 2017. godine radila sam kao student u odjelu internih servisa u tvrtki Styria medijski servisi. U istoj sam ljeto 2013. odradila kao student u odjelu ljudskih resursa, a od listopada 2017. zaposlena sam kao koordinator operativnog i digitalnog poslovanja u odjelu digitalnog razvoja.

U slobodno vrijeme volim trčati, voziti bicikl, putovati i kampirati.