Određivanje vrijednosti egzotičnih opcija

Kajfeš, Nika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nika Kajfeš

ODREĐIVANJNE VRIJEDNOSTI EGZOTIČNIH OPCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, studeni 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Iako se opcije koriste već tisućama godina, još su i danas jedan od popularnijih financijskih instrumenata u koji ulažu mnogi investitori. Najčešće su dio portfelja kao zaštita od rizika te kao mogućnost spekulacije. Na primjer, investitor, koji vjeruje da će cijena jedne dionice rasti, sklapa ugovor s drugom stranom, u kojem ima pravo na kupnju te iste dionice po unaprijed dogovorenoj cijeni. Budući da vjeruje da će cijena te dionice rasti, dogovorena cijena na kraju bi trebala biti manja od tržišne cijene te bi kupac te opcije profitirao tako da kupi dionicu po unaprijed dogovorenoj nižoj cijeni te ju odmah proda na tržištu po višoj tržišnoj cijeni. Ovdje uočavamo kako postoji rizik da ta cijena ne naraste do očekivane, pa u tom slučaju kupac neće profitirati, odnosno kupio je opciju koju nema smisla iskoristiti i na taj način izgubio uloženi novac. Taj uloženi novac naziva se premija, odnosno cijena koju kupac plaća kako bi kupio određenu opciju.

Jedan je od izazova tržišta kako procijeniti fer vrijednost opcije, tj. fer premiju. Važno je napomenuti kako se modeli tržišta baziraju na nekim pretpostavkama, no najvažnija pretpostavka u modernom financijskom svijetu jest svojstvo nearbitraže, drugim riječima „no free lunch" svojstvo. Ono kaže kako ne postoji mogućnost kupnje financijskog instrumenta na jednom tržištu te njegova prodaja na drugom tržištu po većoj cijeni. Na taj način osoba bi profitirala bez ikakvog ulaganja u financijsku imovinu. Sada kada smo naveli bitno svojstvo, važno je napomenuti kako je za određivanje vrijednosti opcija bitno poznavanje referentnih imovina o kojima ovise opcije. No, nažalost, naše poznavanje kretanja cijena dionica, indeksa, tečajeva i drugih imovina vrlo je ograničeno jer ne možemo predvidjeti njihovo kretanje kroz vrijeme. Stoga trebamo postaviti neke pretpostavke o kretanju cijena imovina, koje trebaju biti zadovoljene. Takvo „umjetno" okruženje naziva se modelom tržišta. Iako postoji mnogo modela za procjenu vrijednosti opcija, najpoznatiji je Black-Scholesov model koji je uvelike pomogao u razvoju svijeta financija. Počeo se koristiti odmah nakon njegovog objavljivanja 1973. godine, no trebalo je proći određeno vrijeme kako bi model bio u potpunosti shvaćen. Iako postoje mnoge verzije Black-Scholesova modela, originalni model i dalje je jedan od najupotrebljavanijih u svijetu financija.

Model se temelji na pretpostavci da je cijena referentne imovine opisana geometrijskim Brownovim gibanjem.

Definicija 0.0.1. *BROWNOVO GIBANJE [5]*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $W = (W(t), t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

- *Putovi* $t \mapsto W(t)(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*
- $W(0) = 0.$
- *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

  $$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

  nezavisni.
- *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$

Definicija 0.0.2. *GEOMETRIJSKO BROWNOVO GIBANJE [5]*

Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajan proces $S = (S(t), t \geq 0)$*, takav da zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{1}$$

gdje je W_t *Brownovo gibanje, parametar* σ *volatilnost, a* μ *stopa povrata.*

Model je zadan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom za čiji izvod nam je potrebna Itôva lema koju ćemo navesti bez dokaza:

Lema 0.0.3. *ITÔVA LEMA [5]*

Neka je X_t *Itôv proces koji zadovoljava*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t,$$

te neka je $g \in C^2([0, \infty\rangle \times \mathbb{R})$*. Tada za* $Y_t = g(X_t, t)$ *vrijedi:*

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial x} a + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} b dW_t, \tag{2}$$

gdje je W_t *Brownovo gibanje.*

Lema 0.0.4. *VIŠEDIMENZIONALNA ITÔVA FORMULA [1]*

Neka su $W_1, \dots, W_m$ Brownova gibanja te $X = (X_1, \dots, X_m)$ slučajan proces. Pretpostavimo da je funkcija $g \in C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ te X_i Itôv proces koji zadovoljava $dX_i = a_i dt + b_i dW_i$. Tada za $Y = g(X)$ vrijedi:

$$dY = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i x_j}(X) dX_i \cdot dX_j, \tag{3}$$

gdje se $dX_i \cdot dX_j$ računa s pomoću: $dtdt = dtdW_i = dW_i dt = 0$, $dW_i dW_j = \rho_{i,j} dt$, $\forall i \neq j$, te $(dW_i)^2 = dt$.

Parcijalna diferencijalna jednadžba Black-Scholesova modela zadana je sljedećom formulom:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4}$$

Ovaj model najpogodniji je za procijenu vrijednosti europskih opcija s obzirom na to da imamo analitičko rješenje jednadžbe (4), čiji je primjer naveden u (1.2.2). Općenito određivanje vrijednosti standardnih opcija svodi se na numeričko rješavanje Black-Scholesove jednadžbe s pomoću konačnih razlika. S druge strane, procjena vrijednosti egzotičnih opcija vodi k parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje nisu jednostavne strukture kao Black-Scholesova jednadžba. One se moraju rješavati direktno, no pri tome može doći do numeričkih nestabilnosti ili neželjenih rješenja. Posebno ćemo obratiti pozornost na azijske opcije, čiju ćemo jednadžbu reducirati na konvekcijsko-difuzijsku jednadžbu te prikazati rješenje s pomoću određenih metoda, kao što su *upwind* metoda te neke metode visoke rezolucije.

Poglavlje 1

Standardne opcije

Da bismo pobliže opisali opcije, moramo prvo uvesti pojam izvedenica. Izvedenice su financijski instrument čija je vrijednost određena vrijednošću drugog financijskog instrumenta, koji nazivamo referentnim vrijednosnim papirom *(engl. underlying asset)*. Razne su podjele izvedenica, ali nas će zanimati podjela po strukturi na unaprijed ugovore *(engl. forward exchange contract)*, zamjene *(engl. swaps)* i opcije *(engl. options)*. Sada možemo preciznije definirati opcije kao financijski instrument koji nam daje pravo, ali ne i obvezu, da kupimo ili prodamo rizičnu imovinu po unaprijed određenoj cijeni u određenom periodu. Pod pojmom rizične imovine najčešće podrazumijevamo dionicu, no ona može biti valuta, neka sirovina, indeks i slično. Opcije se ugovaraju između dviju strana, pisca opcije i kupca, koji plaća premiju, odnosno tržišnu vrijednost opcije. Opcije imaju ograničeno vrijeme trajanja, tj. vrijeme dospijeća T *(engl. maturity date)*. U tom trenutku prava kupca ističu te je za $t > T$ opcija bezvrijedna. Kao što smo naveli ranije, opcija daje pravo na kupnju/prodaju rizične imovine za određenu cijenu K, odnosno cijenu izvršenja *(engl. strike ili exercise price)*. Što se tiče pisca opcije, on je obvezan izvršiti ugovor po cijeni K u slučaju da se kupac odluči iskoristiti svoje pravo kupnje ili prodaje.

1.1 Uvod u standardne opcije

Financijski instrumenti o kojima se mnogo govori u poslovnom svijetu jesu opcije. Nijih nisu stvorili močni ljudi Wall Streeta, već vuku korijene još od prije tisuću godina, davno prije nego što se službeno njima počelo trgovati 1973. godine. Prve opcije koristile su se u staroj Grčkoj za trgovinu maslinama, no moderne opcije uglavnom se odnose na dionice. Od početnih vremena, kada se trgovanje opcijama smatralo ilegalnom aktivnošću, danas se njima naširoko trguje na najpoznatijoj burzi Chicago Board of Options Exchange (CBOE).

Jedna su od osnovnih vrsta opcija standardne opcije, tzv. *Vanilla* opcije. One su obične opcije koje nemaju neko posebno i neobično svojstvo. Najpoznatije su standardne opcije američke i europske opcije, koje se razlikuju u vremenu izvršenja. Ako kupac opcije može ostvariti svoje pravo na kupnju ili prodaju referentne imovine samo po dospijeću, opcija se zove europska opcija, a ako kupac može ostvariti svoje pravo na kupnju ili prodaju referentne imovine u bilo koje vrijeme prije ili u vrijeme dospijeća, opcija se zove američka opcija. Budući da američke opcije dopuštaju kupcima opcije da kupuju/prodaju imovinu u vrijeme kada oni misle da je to profitabilno, one su barem jednako skupe kao odgovarajuće europske opcije. Postoji mnogo načina klasifikacije standardnih opcija, a najpopularnija klasifikacija dijeli opcije u dvije skupine: *call* i *put* opcije. Kao što smo već naveli, opcije daju pravo, ali ne i obvezu, na kupnju ili prodaju, a upravo nam *call* i *put* govore hoćemo li prodati referentnu imovinu ili kupiti. *Call* opcije daju pravo na kupnju imovine po određenoj cijeni. Pisac opcije, koji tu opciju prodaje, vjeruje da će cijena te imovine pasti na cijenu izvršenja za vrijeme trajanja opcije, te da će na taj način maksimizirati profit. To je u potpunoj suprotnosti onim što kupac te opcije očekuje, a to je da će cijena imovine rasti. U tom će slučaju kupac opcije kupiti tu imovinu po nižoj, dogovorenoj cijeni i istu tu imovinu prodati na tržištu po njenoj većoj tržišnoj vrijednosti, te na taj način profitirati. No u slučaju da cijena imovine bude manja od cijene izvršenja, kupac će izgubiti premiju koju je platio. *Put* opcije daju pravo na prodaju referentne imovine po određenoj cijeni, što znači da će kupac te opcije očekivati da će tržišna cijena te imovine padati. Suprotna očekivanja ima pisac te opcije, koji, naravno, želi da cijena imovine raste kako bi maksimizirao profit. Na primjer, ako je tržišna cijena imovine veća od cijene izvršenja, piscu te opcije profit će biti maksimalan, dok bi kupac te opcije profitirao samo ako bi cijena pala ispod cijene izvršenja. Tada je pisac opcije dužan kupiti imovinu po njezinoj cijeni izvršenja, koja je veća od tržišne. Ako je cijena izvršenja *call* opcije manja (veća) od tržišne cijene *(engl. spot price)*, tada opciju nazivamo *in-the-money* ili ITM opcijom (*out-of-the-money* ili OTM opcijom). Slično vrijedi za *put* opcije, odnosno ako je cijena izvršenja *put* opcije veća (manja) od tržišne cijene, tada opciju nazivamo *in-the-money* ili ITM opcijom (*out-of-the-money* ili OTM opcijom). Ako je cijena izvršenja opcije jednaka tržišnoj cijeni, tada je to *at-the-money* ili ATM opcija. Riječ *moneymess* vrlo se često koristi umjesto ITM, ATM ili OTM.

1.2 Model financijskog tržišta

Primarni je cilj procijeniti vrijednost opcije $V(S,t)$, koja ovisi o cijeni referentne imovine S te o vremenu t. Vrijednost opcije također ovisi i o drugim parametrima kao što su cijena izvršenja K, vrijeme dospijeća T, kamatna stopa r te volatilnost cijene imovine σ. Povremeno se vrijednost zapisuje kao $V(S,t;T,K,r,\sigma)$, no mi ćemo koristiti kraći zapis.

Tržište je ono koje konačno određuje vrijednost opcije, stoga nam za izračun vrijednosti opcije treba matematički model tržišta. Modeli nam služe kao aproksimacija i idealizacija kompleksne stvarnosti financijskog svijeta. Model Blacka, Mertona i Scholesa uspješan je i uvelike prihvaćen. Model je reprezentiran poznatom Black-Scholesovom jednadžbom koja je prvi puta objavljena u radu „The Pricing of Options and Corporate Liabilities” Fischera Blacka and Myrona Scholesa 1973. godine, a članak je objavljen u Journal of Political Economy.

Za izvod Black-Scholesove jednadžbe navest ćemo početne pretpostavke koje moraju biti zadovoljene:

- nema arbitraže
- tržište je savršeno
- cijena imovine prati geometrijsko Brownovo gibanje
- r i σ su konstante za $0 \leq t \leq T$
- nema isplati dividendi
- promatrana opcija je europska

Kada se za tržište kaže da je savršeno, podrazumijeva se da nema transakcijskih troškova, kamatne stope ponude i potražnje su jednake, obje strane imaju pristup svim informacijama te individualno trgovanje nema utjecaj na cijenu.

Jedna je od glavnih pretpostavki da je kretanje cijene dionica opisano geometrijskim Brownovim gibanjem. Cijena S zadana je linearnom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (SDJ) (1),

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

gdje su μ i σ konstante. Nadalje, pretpostavimo da imamo portfelj koji u trenutku t sadrži α_t dionica vrijednosti S_t te β_t obveznica vrijednosti B_t. Za nerizičnu imovinu, u našem slučaju obveznicu, vrijedi:

$$dB_t = rB_t dt. \tag{1.1}$$

U trenutku t, vrijednost portfolija iznosi:

$$\Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t. \tag{1.2}$$

Cilj nam je konstruirati α_t i β_t takve da portfelj replicira isplatu, tj.

$$\Pi_T = V_T = isplata. \tag{1.3}$$

Da bismo mogli usporediti vrijednosti V_t i Π_t te da bismo mogli primijeniti svojstvo nearbitraže, portfelj bi trebao imati sljedeće svojstvo. Pretpostavimo da je portfelj „zatvoren” za $t \in \langle 0, T\rangle$ u smislu da nema uplata niti isplata iz portfolia. To nas dovodi do svojstva samofinanciranja

$$d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \tag{1.4}$$

Dakle, promjena vrijednosti Π_t ovisi samo o promjeni cijene S_t ili B_t. Sada dolazimo do principa nearbitraže. (1.3) i (1.4) impliciraju

$$\Pi_t = V_t, \quad \forall t, \tag{1.5}$$

jer obje investicije imaju jednak slijed isplata. Stoga je replicirajući i samofinancirajući portfelj ekvivalentan rizičnoj opciji. Kako to utječe na količine α_t i β_t dionica i obveznica opisano je u nastavku.

Koristeći Itôvu lemu zajedno s pretpostavkom da je funkcija vrijednosti $V(S,t) = \Pi_t$ dovoljno glatka, možemo zaključiti sljedeće:

$$d\Pi = \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW. \tag{1.6}$$

Nadalje, uvrstimo li (1) i (1.1) u (1.4), dobijemo sljedeće:

$$d\Pi = (\alpha\mu S + \beta rB)dt + \alpha\sigma S\, dW. \tag{1.7}$$

Radi jedinstvenosti koeficijenti moraju biti jednaki. Uspoređujući koeficijente uz dW, dolazimo do izraza:

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Uspoređujući koeficijente od dt dobivamo relaciju za β:

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{rB} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{1}{rB}.$$

Uzimajući u obzir (1.2) i (1.5), dobivamo sljedeću relaciju:

$$S\frac{\partial V}{\partial S} + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\frac{1}{rB} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{1}{rB}\right)B = V$$

Ovime dolazimo do poznate Black-Scholesove jednadžbe:

Definicija 1.2.1. *BLACK SCHOLESOVA JEDNADŽBA*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1.8}$$

Jednadžba (1.8) je parcijalna diferencijalna jednadžba (PDJ) za funkciju vrijednosti $V(S,t)$. Ona nam služi kao simbol klasičnog modela tržišta. Funkcija $V(S,t)$ nije u potpunosti definirana uvjetom da je rješenje jednadžbe (1.8), već mora zadovoljavati terminalni uvjet i rubne uvjete. Terminalni uvjet za $t = T$ je

$$V(S,T) = \Psi(S),$$

gdje je Ψ funkcija isplate definirana kao $\Psi(S,T) = (S-K)^+ = max(S-K,0)$ u slučaju europske *call* opcije te $\Psi(S,T) = (K-S)^+ = max(K-S,0)$ u slučaju europske *put* opcije. Rubni uvjeti definirani su za $S = 0$ te $S \to \infty$. Navest ćemo primjer rubnog uvjeta za europsku *call* opciju:

$$V(0,t) = 0, \quad V(S,t) \to S - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{za} \quad S \to \infty.$$

Europskim opcijama cijena se može odrediti s pomoću poznate Black-Scholesove formule, kojom se premije europskih opcija mogu izračunati izravno supstituirajući vrijednosti navedenih parametara u zadane izraze. Prikazat ćemo tu formulu na primjeru europske *call* opcije:

Primjer 1.2.2. *Uz terminalni uvjet* $V(x,T) = (x-K)^+$, *rješenje jednadžbe (1.8) dano je sa*

$$V(x,t) = x\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-),$$

gdje su

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

te

$$d_\pm = \frac{ln\frac{x}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Nažalost, kompaktne formule nisu dostupne za američke opcije. Za izračun premije američkih opcije koriste se aproksimativne formule ili numeričke simulacije.

Standardne opcije imaju mnogo ograničenja koja proizlaze iz njihova nedostatka fleksibilnosti. Svaka vrsta egzotičnih opcija u određenoj je mjeri ona koja nadilazi jedno ograničenje standardnih opcija. To će se jasno vidjeti u sljedećem poglavlju.

1.3 Standardne metode za standardne opcije

Glavni je cilj ovog odjeljka upoznavanje s metodom baziranom na konačnim razlikama. Uz klasične metode konačnih razlika, standardne metode uključuju analitičke metode, čiji je veći dio baziran na numeričkim metodama. Kako bismo ukratko naveli neke od metoda za određivanje vrijednosti standardnih opcija, prvo ćemo se upoznati s problemom. Naš cilj nije riješiti PDJ (1.8) jer ona već ima analitičko rješenje, već želimo riješiti općenitiji slučaj jednadžbi. Kako bismo dopustili ranije izvršenje američkih opcije, neke se pretpostavke trebaju promijeniti, a to se odnosi na isplate dividendi, koje se moraju uzeti u obzir. U trenutku isplate cijena imovine $S(t)$ smanji se za iznos te isplate. Kontinuirani tijek isplate dividendi modeliran je padom cijene S u svakom vremenskom intervalu dt iznosom $\delta S\,dt$, gdje je $\delta \geq 0$ konstanta. Odgovarajuća Black-Scholesova jednadžba u tom je slučaju:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1.9}$$

Ova jednadžba ekvivalentna je sljedećoj:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1.10}$$

za $y(x,\tau)$, $\tau \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ekvivalencija se može dokazati sljedećim transformacijama:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad q = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2},$$

$$V(S,t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) = v(x,\tau), \tag{1.11}$$

$$v(x,\tau) = Kexp\{-\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x - (\frac{1}{4}(q_\delta - 1)^2 + q)\tau\} y(x,\tau),$$

gdje su $-\infty < x < \infty$ i $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$. Terminalni uvjet postaje inicijalni uvjet:

$$call : y(x,0) = max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)}, 0\}$$

$$put : y(x,0) = max\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)}, 0\}$$

Općenito, diferencijabilna funkcija f zadovoljava:

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h), \tag{1.12}$$

gdje je x_i jednodimenzionalna mreža točaka, $f_i = f(x_i)$ te h korak. Izraz (1.12) jest koeficijent razlika koji aproksimira f', a $O(h)$ označava grešku. U ovom poglavlju koristit ćemo ekvidistantnu mrežu točaka. Neka su $\Delta\tau$ i Δx koraci za τ i x definirani kao:

$$\Delta\tau = \frac{\tau_{max}}{\nu_{max}}, \quad \tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma^2 T.$$

U slučaju x, beskonačni interval mora se zamjeniti konačnim intervalom $a \leq x \leq b$, gdje su $a = x_{min}$ i $b = x_{max}$. Za cijeli broj m, korak je definiran kao:

$$\Delta x = \frac{b-a}{m}.$$

Dodatne varijable su sljedeće:

$$\tau_\nu = \nu\Delta\tau, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \nu_{max},$$

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

$$y_{i\nu} = y(x_i, \tau_\nu),$$

$$w_{i\nu}\ aproksimacija\ y_{i\nu}.$$

Rješenja $w_{i\nu}$ definirana su na čvorovima mreže. Greška $w_{i\nu} - y_{i\nu}$ ovisi o izboru parametara ν_{max},m,x_{min} i x_{max}. Supstituirajući

$$\frac{\partial y_{i\nu}}{\partial \tau} = \frac{y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau)$$

$$\frac{\partial^2 y_{i\nu}}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,\nu} - 2y_{i\nu} + y_{i-1,\nu}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

u jednadžbu (1.10), dobijemo

$$w_{i,\nu+1} = \lambda w_{i-1,\nu} + (1 - 2\lambda)w_{i\nu} + \lambda w_{i+1,\nu}, \tag{1.13}$$

gdje je $\lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}$. Budući da formula (1.13) daje eksplicitno rješenje, ova metoda naziva se *eksplicitna* ili *forward-difference* metoda. Što se tiče uvjeta stabilnosti, za $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ eksplicitna je metoda stabilna.

Osim eksplicitne metode, imamo i *implicitnu* metodu koja je dana jednadžbom:

$$w_{i,\nu-1} = -\lambda w_{i+1,\nu} + (2\lambda + 1)w_{i\nu} - \lambda w_{i-1,\nu}. \tag{1.14}$$

Još neke od metoda za rješavanje problema jesu Crank-Nicolsonova metoda te mnoge analitičke metode, kao što su interpolacija i kvadratična aproksimacija.

Poglavlje 2

Egzotične opcije

Nekoliko godina nakon stvaranja prve organizirane razmjene opcija na burzi CBOE 1973. godine, počela se odvijati spora i naizgled neprimjetna revolucija u razvoju koncepata opcija i trgovanja. Krajem 1970-ih, kada je trgovanje standardnim opcijama na burzama postalo normalno, počeli su se pojavljivati koncepti egzotičnih opcija. Kasnih 1980-ih i ranih 1990-ih egzotične su opcije bivale prisutne u dnevnom tisku i postajale su sve popularnije, a njihova trgovina je postala aktivnija u *over-the-counter* (OTC) tržištu. Kao što njihovo ime kaže, egzotične su opcije i dalje egzotične mnogim investitorima, profesionalcima, pa čak i onima koji imaju solidno znanje o standardnim opcijama. Ovi egzotični proizvodi opisani su u mnogim standardnim knjigama u tolikoj mjeri da mnoge financijske institucije misle da ne mogu živjeti ni s njima ni bez njih.

2.1 Uvod u egzotične opcije

Ako standardne opcije nazovemo opcijama prve generacije, sve nestandardne opcije opcije su druge generacije, koje se također nazivaju egzotičnim opcijama. Iako postoje mnoge vrste egzotičnih opcija, sve su izravni ili neizravni oblik standardnih opcija, odnosno barem je jedna od karakteristika standardnih opcija narušena. Jedna od glavnih mogućih razlika standardnih i egzotičnih opcija jest isplata. Također se razlikuju u povećanju dimenzije, od jednofaktorske do multifaktorske opcije. Na primjer, opcija *forward-start* jest opcija čije je početno vrijeme negdje u budućnosti, nakon potpisivanja ugovora, a ne u sadašnjosti. Zatim *compound* opcija je opcija na standardnu opciju, a ne na imovinu izravno, i tako dalje. Općenito, egzotičnim se opcijama gotovo isključivo trguje na OTC tržištu, a ne na burzi. Kako je izbor egzotičnih opcija velik i često ih nije lako klasificirati, teško možemo naći prikladan izvor za opće razumijevanje tih proizvoda, no u daljnjem tekstu pokušat ćemo navesti važnije vrste.

U sljedećem odjeljku opisat ćemo najpopularniju grupu egzotičnih opcija - *path-dependent* opcije - koje uključuju azijske opcije ili *average-price* opcije, opcije s barijerom, *look-back* opcije, *ladder* opcije i *forward-start* opcije. Zatim ćemo uvesti jednu veliku grupu egzotičnih opcija - korelacijske opcije *(engl. correlation options)* - koje uključuju *spread* opcije, *out-performance* opcije, *two-colour rainbow* opcije, *quanto* opcije, *exchange*opcije, *basket* opcije i mnoge druge. Za kraj uvodimo druge popularne egzotične opcije kao što su *chooser* opcije ili *as-you-like* opcije, *power* opcije, binarne i tako dalje.

1. *Path-dependent* opcije

Isplata standardnih opcija ovisi samo o tržišnoj cijeni referentne imovine u vrijeme dospijeća te o cijeni izvršenja, bez obzira na to na koji se način cijena kretala za vrijeme trajanja opcije. Intuicija sugerira da bi način na koji je dobivena postignuta cijena trebao biti od velike važnosti za vrijednost opcije. Razlika između standarnih i *path-dependent* opcija jest u tome da su *path-dependent* opcije dizajnirane da bilježe načine na koje su dobivene postignute cijene imovine. Postoje četiri popularne vrste *path-dependent* opcija: azijske opcije, opcije s barijerom *(engl. Barrier options)*, *look-back* opcije i *ladder* opcije.

Kako se isplate azijskih opcija određuju s pomoću prosječne cijene imovine tijekom unaprijed određenog vremenskog razdoblja prije isteka opcije, one se također nazivaju *average-price* ili *average-rate* opcije. Azijske opcije također uključuju *average-strike* opcije u kojima su cijene izvršenja neki prosjeci cijena imovine, a ne fiksni kao u standardnim opcijama. Azijske opcije mogu koristiti korporacije s predvidljivim novčanim tokovima u svrhu zaštite od rizika kao jeftiniju alternativu pored standardnih opcija. Također su popularne na robnim i valutnim tržištima. Iako azijske opcije mogu biti aritmetičke ili geometrijske, ovisno o tome je li prosjek aritmetički ili geometrijski, trgovci gotovo isključivo koriste aritmetičku sredinu za konstrukciju opcije. Međutim, geometrijske azijske opcije imaju svoje prednosti jer se njihove cijene mogu izraziti u obliku sličnom Black-Scholesovoj formuli. Zhang 1993. godine uvodi koncept fleksibilnih azijskih opcija koje dodjeljuju različite težine u raznim opažanjima pri izračunu aritmetičke sredine, stoga imaju prednost zbog fleksibilnosti u raspodjeli težina. Ove opcije koriste već mnoge institucije. Više o azijskim opcijama biti će opisano u kasnijem odjeljku.

Opcije s barijerom zapravo su uvjetovane nekim barijerama ili okidačima *(engl. triggers)*. One su *path-dependent* opcije čije isplate ovise o tome hoće li određene barijere biti prijeđene ili ne prije dospijeća opcije. Postoje dvije vrste opcija s barijerom: *knock-in* i *knock-out* opcije, ili jednostavno *knock-ins* i *knock-outs*. *Knock-in* opcija vrsta je opcije s barijerom, koja se izvrši samo kada cijena referentne imovine dosegne barijeru u bilo kojem trenutku života opcije. *Knock-in* opcije mogu se podijeliti u dvije podvrste: *up-and-in* i *down-and-in*. U slučaju *up-and-in* opcije, cijena referentne imovine manja je od barijere, te se treba kretati prema gore kako bi se opcija aktivirala. Suprotno, kod *down-and-in* opcije cijena referentne imovine veća je od barijere, te se mora kretati prema dolje kako bi aktivirala opciju. Na primjer, pretpostavimo da je investitor kupio *up-and-in* opciju s cijenom izvršenja \$60 te barijerom \$65 u trenutku kada je cijena dionice iznosila \$55.

Tada opcija neće vrijediti sve dok cijena dionice ne prijeđe \$65. *Knock-out* opcija prestaje vrijediti ako cijena referentne imovine dosegne barijeru u vrijeme trajanja opcije. *Knock-out* opcije također mogu biti podijeljene u *up-and-out* i *down-and-out* opcije. *Up-and-out* opcije prestaju vrijediti ako cijena imovine dosegne barijeru odozgo, dok *down-and-out* opcije prestaju vrijediti ako cijena imovine dosegne barijeru odozdo. Uzmimo za primjer europsku *down-and-out* opciju čija je isplata jednaka:

$$V_T = \begin{cases} (S_T - K)^+, & S_t > B \quad \forall t \\ 0, & S_t \leq B \end{cases}$$

Atraktivnost opcija s barijerom jest u tome što su one jeftinije od standardnih opcija, jer je zbroj premija *knock-in* opcije i pripadajuće *knock-out* opcije isti kao i odgovarajuća standardna opcija.

Look-back opcija jest opcija čija je isplata određena minimumom i maksimumom cijene referentne imovine tijekom života opcije. Na primjer, isplata *look-back* opcije je: $\max S_t - S_T$. *Look-back* opcije mogu ostvariti fantazije ulagača da kupi po najnižoj cijeni i proda po najvišoj te da minimizira gubitak. Međutim, princip „no-free-lunch" jamči da su ove opcije jako skupe. Visoke premije takvih opcija sprječavaju ih da se koristi naširoko.

Ladder opcije su opcije s unaprijed određenom isplatom. Budući da postoje različiti načini za određivanje isplata, postoje različite *ladder* opcije. Najjednostavniji način da se odredi isplata jest da se vrijednost H = *ladder* namjesti na tu razinu kako bi isplata bila $\max(H - K, M - K, 0)$, gdje je K = cijena izvršenja, M = cijena imovine po dospijeću. Na primjer, ako je cijena izvršenja $K = \$50$, $H = \$70$, a cijena imovine po dospijeću je \$65 , isplata *ladder* opcije je $\max(70 - 50, 65 - 50, 0) = 20$ umjesto $\max(65 - 50, 0) = 15$ kao u slučaju standardne opcije. Kad je vrijednost H unaprijed određena u ugovoru, opcija se naziva *ladder* opcija. Ako je H određen kao cijena imovine u nekom unaprijed određenom vremenu u budućnosti, ali prije isteka opcije, *ladder* opcija naziva se *one-clique* opcija, a ako kupac opcije može zadati H u bilo kojem trenutku života opcije, opcija se zove *shout* opcija. Jasno, *shout* opcija ima karakteristike obje vrste opcija, i američkih i europskih opcija. Ove tri vrste opcija popularnije su u Europi nego u drugim dijelovima svijeta.

Forward-start opcije opcije su sa uplatom premija koje se plaćaju u unaprijed određeno vrijeme u budućnosti, gdje je cijena izvršenja jednaka početnoj cijeni referentne imovine. *Forward-start* opcije postoje na tržištu kamatnih stopa, kada ih investitori mogu koristiti za oklade u promjenama kamatnih stopa.

2. Korelacijske opcije

Path-dependent opcije, kao što im ime govori, mogu zabilježiti ovisnost puta, te na taj način izbjeći neovisnost puta standardnih opcija. Korelacijske su opcije one čije su isplate pod utjecajem više od jedne referentne imovine. Mogu se podijeliti u opcije prvog reda i drugog reda, u skladu s načinom na koji korelacija utječe na isplate opcija. Korelacija ima učinak prvog reda ili primarni učinak ako korelacija izravno utječe na isplatu opcije, kao u *spread* opcijama te *out-performance* opcijama. Kod *quanto* opcija ono ima sekundarni utjecaj jer mijenja isplate opcija u maloj mjeri. Opcija može odražavati i primarni i sekundarni utjecaj korelacije. Uzmite, na primjer, *out-performance* opciju na DAX i CAC-40 denominiranu u sterlingu. Primarni je utjecaj na kovarijanci ta dva indeksa. Sekundarni utjecaj proizlazi iz stupnja veze između kretanja ta dva indeksa (i njihovih kovarijanci) te promjena u tečaju.

Najjednostavnije su korelacijske opcije *spread* opcije. *Spread* opcija je opcija na razliku dva indeksa, cijena ili tečaja. Na primjer, razlika između cijena rafinirane i sirove nafte varira s obzirom na međunarodne gospodarske i financijske podatke. Opcije temeljene na toj razlici mogu služiti naftnoj rafineriji kako bi se zaštitila od rizika njihove bruto dobiti. U ranoj fazi korištenja *spread* opcija, *spread* se smatrao nekom imaginarnom cijenom imovine te se poznata Black-Scholesova formula koristila za izračun cijene *spread* opcije. Ova je metoda tzv. jednofaktorski model. Garman (1989.) ukazuje na ograničenja i probleme u jednofaktorskom modelu te govori o tome kako se određuje cijena *spread* opcije s pomoću dvofaktorskog modela. Ravindran (1993) pokušava odrediti cijenu *spread* opcija s pomoću dvofaktorskog modela koristeći statističke postupke i numeričku analizu. *Spread* opcije na više od dvije imovine ili indeksa manje su poznate i mnogima koji imaju neko znanje o *over-the-counter* (OTC) trgovanju s egzotičnim opcijama. Takve *spread* opcije možemo nazvati višestrukim *spread* opcijama u usporedbi sa standardnim *spread* opcijama na dvije imovine. Višestrukim *spread* opcijama smatramo opcije između barem tri referentne imovine. Višestruke opcije koristi samo nekoliko institucija na OTC tržištu. Uz daljnji razvoj OTC izvedenica, povećavajući sofisticiranost u upravljanju rizicima i ubrzavajući globalizaciju međunarodnog tržišta kapitala, višestruka *spread* opcija steći će veću popularnost.

Outperformance opcija posebna je *call* opcija koja omogućuje investitorima da iskoriste prednost u očekivanim razlikama u djelovanju dva referentna indeksa ili financijska instrumenta. Isplata *outperformance* opcije po dospijeću jest razlika učinkovitosti obaju instrumenata pomnožena s nekim fiksnim iznosom. Učinkovitost se općenito mjeri kao povrat izražen u postocima. Referentni financijski instrumenti mogu biti bilo koja kombinacija dionica, obveznica, valuta, roba ili indeksa. Popularni *outperformance* instrumenti jesu obveznički indeks i dionički indeks ili obrnuto. *Outperformance* opcije često su korištene kako bi se kapitalizirao učinak dviju burzi, kao što su na američkom tržištu mjereni preko indeksa S&P500 u odnosu na japansko tržište mjereno indeksom Nikkei 225. Iz gornjeg opisa, *outperformance* opcija može se promatrati kao *spread* opcija prinosa dvaju financijskih instrumenata, a ne stvarnih vrijednosti tih instrumenata.

Exchange opcija omogućuje razmjenu referentne imovine za neku drugu imovinu. Te opcije prvi je proučavao Margrabe (1978). *Exchange* opcija može se interpretirati kao *call* opcija na prvu imovinu s cijenom izvršenja jednakom budućoj cijeni druge imovine u trenutku dospijeća, ili se može tumačiti kao *put* opcija na drugu imovinu s cijenom izvršenja jednakom budućoj cijeni prve imovine u trenutku dospijeća. *Exchange* opcije osnovne su opcije korelacije jer se iz njih mogu konstruirati ostale egzotične opcije kao što su textitrainbow opcije i textittwo-colour opcije. Složene opcije *(engl. complex option)* opcije su na bolji ili lošiji učinak (maksimum ili minimum) dviju referentnih imovina. Ove se opcije često nazivaju *two-colour rainbow* opcije, ili jednostavno textitrainbow opcije u praksi, jer maksimum i minimum cijena dviju imovina izgledaju vrlo slično obliku duge u dvodimenzionalnom dijagramu. Rainbow opcije mogu biti procijenjene direktno ili u smislu odgovarajućih *exchange* opcija. Vrlo su korisne u mnogim financijskim aplikacijama, kao što su procjena duga u stranoj valuti, ugovori za podjelu rizika i tako dalje. textitRainbow opcije spominjat ćemo još u sljedećem poglavlju te navesti pokoji primjer.

textitCurrency-translated opcije stvorene su da bi se zadovoljile želje ulagača za većom potražnjom na međunarodnom tržištu kapitala kako bi oni mogli povezati strani kapital i izloženost valuti. textitCurrency-translated opcije mogu biti opcije stranog kapitala s cijenom izvršenja izraženom u domaćoj valuti, opcije domaćeg kapitala s cijenom izvršenja izraženom u stranoj valuti, opcije stranog kapitala u domaćoj valuti i obrnuto. U sva su četiri slučaja valutni rizik i rizik kapitala značajni. Najpopularnija su vrsta textitcurrency-translated opcija *quanto* opcije ili jednostavno *quantos*. *Quantos* su opcije stranog kapitala s fiksnim tečajem. Sa *quantos* opcijama investitor može uhvatiti uzlazni potencijal svojih stranih vlasničkih ulaganja tako da se zaštiti od valutnog rizika kroz fiksni tečaj, a isplata će biti plaćena u domaćoj valuti. *Quantos* opcijama trguje se na *over-the-counter* (OTC) tržištu kao i na američkoj burzi.

Basket opcija je opcija na veću količinu imovine *(engl. basket of assets)*, a ne samo jednu. *Basket* opcije također se nazivaju opcije portfelja. Popularne *basket* opcije su one na više valuta. Budući da korelacija raznih komponenti „košarice“ utječe na karakteristike opcije, *basket* opcije su korelacijske opcije. Primjer *basket* opcije navest ćemo u sljedećem poglavlju.

3. Ostale egzotične opcije

Nije lako klasificirati postojeće egzotične opcije u mali broj skupina prema njihovim karakteristikama. Osim dvije skupine koje smo prethodno opisali, postoje druge vrste egzotičnih opcija. Pokušavamo uvesti te opcije u ovom odjeljku.

Zbog svojih jednostavnih obrazaca isplate i jedinstvenih karakteristika, binarne su opcije vrlo zanimljive mnogima na OTC tržištu. Binarne opcije nazivaju se i *bet* opcije jer njihove isplate ili postoje ili ne postoje. Općenito govoreći, isplata binarne opcije može biti fiksni iznos novca, neka imovina ili razlika između cijene imovine i unaprijed određene razine koja je često različita od cijene izvršenja. Ove binarne opcije nazivaju se *cash-or-nothing*, *asset-or-nothing* i *gap* opcije. *Cash-or-nothing* i *asset-or-nothing* opcije vrlo su slične klađenju u svakodnevnoj upotrebi. Ove opcije popularne su uglavnom zato što su jednostavne za korištenje.

Compound opcije jesu standardne opcije na druge standardne opcije. Kako postoje dvije vrste standardnih opcija, tako postoje i četiri vrste *compound* opcija : *call* opcija na *call* opciju, *call* opcija na *put* opciju, *put* opcija na *call* opciju, *put* opcija na *put* opciju. *Compound* opcija često se koristi kako bi se zaštitila teška ulaganja koja su zavisna o drugim uvjetima. Kupac te opcije obično plaća početnu premiju koja je unaprijed određena za opciju koju će on trebati kasnije. Kupac tada može platiti dodatnu premiju samo ako odluči da mu treba ova opcija. Ako kupac utvrdi da mu opcija nije potrebna, on se može jednostavno odreći prava.

Chooser opcije, ili *as-you-like* opcije opcije su koje dopuštaju kupcu opcije da bira između standardne *put* ili standardne *call* opcije u unaprijed određenom trenutku za vrijeme života opcije. Kupac opcije plaća unaprijed određenu premiju piscu opcije, ali ne navodi da li je opcija *call* ili *put* sve do unaprijed određenog vremena u kojem kupac može odlučiti između standardne *call* ili *put* opcije s određenom cijenom izvršenja. Dakle, *chooser* opcije nazivaju se i *pay-now-choose-later* opcijama.

Nelinearne *payoff* opcije, kao što im ime govori, opcije su s nelinearnim isplatama u odnosu na linearne isplate kod standardnih opcija. Popularne nelinearne opcije su *power* opcije koje prikazuju isplate preko funkcije potencija. Te funkcije potencija mogu biti konkavne ili konveksne. Na primjer, neka je S_T cijena referentne imovine u trenutku dospijeća te K cijena izvršenja, tada se isplata može izraziti kao $S_T^p - K$ za *in-the-money* opcije, gdje p može biti bilo koji realan broj. Očito, kada je $p = 1$, isplata postaje ista kao kod standardne *call* opcije. Kada je $p > (<)1$, isplata je konveksna (konkavna) funkcija cijene imovine u trenutku dospijeća te je uvijek veća (manja) od isplate odgovarajuće standardne *call* opcije. Budući da konveksne (konkavne) *power* opcije uvijek imaju više (niže) očekivane isplate od odgovarajućih standardnih opcija, one su u pravilu skuplje (jeftinije) od odgovarajućih standardnih opcija. Ako investitor čvrsto vjeruje da će referentna imovina biti loša, on može kupiti *power* opciju sa $p > 1$, npr. $p = 2$, i dobiti isplatu od $S_T^2 - K$ umjesto $S_T - K$ kao što bi dobio od standardne *call* opcije.

Contingent premium opcije nazivaju se i *pay-later* opcijama ili Boston opcijama. Kupci *pay-later* opcija, kako i ime implicira, ne plaćaju nikakav premiju unaprijed. Zapravo, kupci *pay-later* opcije ne plaćaju nikakav novac ako opcija istječe *out-of-the-money*, odnosno ako je cijena izvršenja viša (*call*) ili niža (*put*) od cijene imovine. Oni ipak trebaju platiti piscu opcije unaprijed određenu premiju kada je opcija *in-the-money*, odnosno ako je cijena izvršenja niža (*call*) ili viša (*put*) od cijene imovine. Jasno je da *pay-later* opcije poštuju želje investitora da bi se izbjeglo nepotrebno plaćanje za *out-of-the-money* opcije, jer oni plaćaju samo kada su opcije *in-the-money*. Međutim, to nisu opcije bez rizika, jer kupac opcije mora platiti unaprijed određenu premiju, koja je vrlo često skuplja od standardne opcije, čak i kad je opcija blago *in-the-money*.

Mid-Atlantic opcije poznate su i kao bermudske opcije i *limited exercise* opcije. Kao što izraz *mid-Atlantic* upućuje na nešto između Amerike i Europe, tako je istoimena opcija hibrid američke i europske opcije. Umjesto da se ostvaruje u bilo koje vrijeme prije dospijeća kao standardna američka opcija, može se ostvariti samo u diskretnim vremenskim trenucima prije dospijeća. Stoga su bermudske opcije kvaziameričke opcije. U početku *mid-Atlantic* opcije, osim redovitih specifikacija na standardnu opciju, moraju se specificirati i diskretna vremena opcije. Kako *mid-Atlantic* opcije sadrže svojstva obiju opcija, američkih i europskih, njihove su premije između odgovarajućih premija američkih i europskih opcija.

Instalment opcije investitorima omogućavaju plaćanje premije u ratama, čime se nudi fleksibilnost otkazivanja opcije u pravo vrijeme. *Instalment* opcija može se smatrati nizom *compound* opcija ili nizom *call* opcija na *put* opciju. Nakon plaćanja minimalne, unaprijed određene premije, investitor ima izbor plaćanja na rate ili može pričekati istek opcije. Tipična isplata premija odvija se kvartalno tako da kupac plaća jednak iznos svaki put. Ako uplata ne bude izvršena, onda opcija istječe automatski.

Proces inovacija u stvaranju novih egzotičnih opcija i dalje se nastavlja. Čini se da razvoj ide u smjeru kombiniranja dvije ili više osnovnih vrsta egzotičnih opcija u jednu, a ne stvaranja drugih, potpuno novih vrsta egzotičnih opcija. Na primjer, kombinacija svojstava binarne opcije i opcije s barijerom čini binarnu opciju s barijerom, kombinacija azijskog svojstva i opcija s barijerom rezultira opcijama s barijerom u kojima je barijera prosjek, binarno svojstvo u kombinaciji s korelacijskim svojstvom daje korelacijsko-binarnu opciju itd. Kombinacija dvije ili više osnovnih vrsta egzotičnih opcija čini egzotične opcije veće fleksibilnosti te ima bolje mogućnosti u zaštiti klijenta i njegovoj spekulativnoj naravi.

2.2 Određivanje vrijednosti egzotičnih opcija

U prethodnom poglavlju govorili smo o određivanju vrijednosti standardnih opcija. Te metode bile su bazirane na jednostavnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi (1.10),

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

koja je dobivena iz Black-Scholesove jednadžbe (1.9) za V(S,t) pomoću transformacija (1.11). Egzotične opcije vode do PDJ koje nisu jednostavne strukture kao Black-Scholesove jednadžbe. Općenito, transformacije (1.11) nisu od daljnje koristi, te se PDJ moraju rješavati direktno. Dakle, mogu se pojaviti numeričke nestabilnosti te lažna rješenja, koja nisu igrala ulogu u metodama za standardne opcije. U ovom poglavlju uvest ćemo ideje i načine koji nisu bili potrebni u prethodnom poglavlju. Egzotične opcije često podrazumjevaju višedimenzionalne probleme. Mnoge će se metode objasniti na primjerima azijskih opcija.

Nekoliko vrsta egzotičnih opcija može se reducirati na Black-Scholesovu jednadžbu. U tom slučaju, metode koje smo spominjali u prošlom poglavlju biti će adekvatne. Aproksimacije su moguće s pomoću binomijalnih metoda ili Monte Carlo simulacija.

Opcije koje ovise o više referentnih imovina

Dvije velike skupine opcija koje ovise o više imovina jesu *rainbow* opcije i *basket* opcije. Daljnja podjela unutar skupina ovisi o njihovoj isplati. Pretpostavimo da imamo n referentnih imovina s cijenama $S_1, \ldots, S_n$. Indeks nam označuje na koju se imovinu cijena odnosi. Rainbow opcije uspoređuju vrijednosti određenih imovina. Neki primjeri isplata:

$$max(S_1, \ldots, S_n) \quad n - color\ better - of\ opcija$$

$$min(S_1, S_2) \quad two - color\ worse - of\ opcija$$

$$max(S_2 - S_1, 0) \quad outperformance\ opcija$$

$$max(min(S_1 - K, \ldots, S_n - K), 0) \quad min\ call\ opcija$$

Basket opcije su opcije kojima isplata ovisi o portfelju imovine. Primjer isplate *basket* opcije:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i S_i - K \right)^+,$$

gdje su c_i težine određene iz portfelja. Za određivanje vrijednosti multifaktorskih opcija primjenjuju se četiri velike klase metoda, a to su PDJ metoda, *tree* metoda, evaluacija integrala te Monte Carlo metode. Svaka od tih metoda dijeli se na još više metoda. Za izbor odgovarajuće metode jako je važna dimenzija n. Za velike n PDJ metode imaju velikih problema sa dimenzijom. Još uvijek se ne može odrediti dimenzija n iznad koje je PDJ diskretizacija preskupa. Barem za $n = 2$ i $n = 3$ možemo reći da je PDJ pristup prihvatljiv. Općenito, u višedimenzionalnoj situaciji preporučljiva je metoda konačnih elemenata *(engl. FE = finite elements).*

PDJ metode zahtijevaju određene parcijalne diferencijalne jednadžbe te rubne uvjete. Obično se pretpostavlja da govorimo o Black-Scholesovu modelu. Da bismo proširili jednofaktorski model, treba nam pripadajuća generalizacija geometrijskog Brownovog gibanja. Započet ćemo s dvofaktorskim modelom s cijenama S_1 i S_2 određenih imovina. Geometrijsko Brownovo gibanje s konstantnim koeficijentima zadano je sa:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dW^{(1)} \\ dS_2 &= \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dW^{(2)} \\ E(dW^{(1)} dW^{(2)}) &= \rho dt \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje je ρ korelacija dviju imovina, $-1 < \rho < 1$. Napomenimo samo da je treća jednadžba ekvivalentna $Cov(dW^{(1)}, dW^{(2)}) = \rho dt$ jer je $E(dW^{(1)}) = E(dW^{(2)}) = 0$. Prednost relacije (2.1) sa koreliranim Brownovim gibanjem je ta što svaka od cijena ima svoj faktor rasta

μ i volatilnost σ, što se lako može procijeniti iz podataka. Korelacija ρ je dobivena iz korelacije povrata $\frac{dS}{S}$ jer vrijedi

$$\begin{aligned} Cov\Big(\frac{dS_1}{S_1}, \frac{dS_2}{S_2}\Big) &= Cov\Big(\sigma_1 dW^{(1)}, \sigma_2 dW^{(2)}\Big) = \\ = E(\sigma_1 dW^{(1)} \sigma_2 dW^{(2)}) &= \sigma_1\sigma_2 E(dW^{(1)} dW^{(2)}) = \rho\sigma_1\sigma_2 dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

Korelirana Brownova gibanja dana su formulom

$$dW^{(1)} = dZ_1, \quad dW^{(2)} = \rho dZ_1 + \sqrt{1-\rho^2} dZ_2, \tag{2.3}$$

gdje su Z_1 i Z_2 nezavisni normalno distribuirani procesi te neka je $V(S_1, S_2, t)$ vrijednost opcije. Konstruiramo portfelj sa određenim količinama referentnih imovina, Δ_1, Δ_2:

$$\Pi = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2,$$

$$d\Pi = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2$$

Primjenjujemo Itôvu lemu [1] u dvodimenzionalnom slučaju :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} dS_1 dS_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} dS_2 dS_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} dS_1 dS_2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 dt \\ &= \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\Big) dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Uzimajući $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}$ te $\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$ kako bismo eliminirali rizik, dobivamo sljedeće:

$$d\Pi = \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\Big) dt$$

Općenito, portfelj bez rizika zadovoljava $d\Pi = r\Pi dt$, stoga slijedi:

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2) dt$$

Tada je odgovarajuća Black-Scholesova jednadžba dana formulom:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - rV + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0 \tag{2.5}$$

Taj izraz dobiven je iz dvodimenzionalne verzije Itôve leme uz uvjet nearbitraže. Jednadžba (2.5) ima nezavisne varijable (S_1, S_2, t), no inače se varijabla vremena ne ubraja kada govorimo o dimenziji. U tom je smislu PDJ (2.5) dvodimenzionalna dok jednadžbu (1.8) smatramo jednodimenzionalnom. Analogno dolazimo do n-dimenzionalnog modela. Odgovarajući model izravna je generalizacija formule (2.1),

$$dS_i = (\mu_i - \delta_i)S_i dt + \sigma_i S_i dW^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.6}$$

$$E(dW^{(i)} dW^{(j)}) = \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

gdje su ρ_{ij} korelacije imovine i i imovine j, te δ_i označava tijek dividendi isplaćenih od i-te imovine. PDJ u Black-Scholesovu modelu izgleda ovako:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} + \sum_{i=1}^{n}(r - \delta_i)S_i \frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0 \tag{2.7}$$

Rubni uvjeti ovise o vrsti opcije. Na primjer, u dvodimenzionalnom slučaju jedan rub može biti definiran ravninom $S_1 = 0$ te drugi ravninom $S_2 = 0$.

Azijske opcije

Cijena azijskih opcija ovisi o prosječnoj cijeni referentne imovine, dakle o putu kojim se cijena kreće, S_t. Ako promatramo cijenu S_t u ekvidistantnim diskretnim vremenskim trenucima t_i s korakom $h = \frac{T}{n}$, dobit ćemo vremenski niz $S_{t_1}, \dots, S_{t_n}$. Očito je da prosječnu cijenu dobijemo iz formule aritmetičke sredine :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{t_i} = \frac{1}{T} h \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$$

Ako pak promatramo neprekidno vrijeme za $0 \le t \le T$, gornja formula odgovara sljedećoj:

$$\hat{S} = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt \tag{2.8}$$

Najčešće se koristi aritmetička sredina, no ponekad je primijenjena geometrijska sredina:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right)^{\frac{1}{n}} = exp\left(\frac{1}{n} log \prod_{i=1}^{n} S_{t_i}\right) = exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log S_{t_i}\right)$$

Dakle, iz toga slijedi geometrijska sredina u neprekidnom vremenu cijene S_t:

$$\hat{S_g} = exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T log S_t dt\right)$$

Prosjeci $\hat{S}$ i $\hat{S_g}$ se odnose na period $0 \leq t \leq T$ što se odnosi na europsku opciju. Kako bismo omogućili da se opcija izvrši za $t < T$, prosjeci se modificiraju :

$$\hat{S} = \frac{1}{t}\int_0^t S_y dy$$

S aritmetičkom sredinom kao u (2.8), isplate azijskih opcija mogu se zapisati kao:

Definicija 2.2.1. *AZIJSKE OPCIJE*
S prosjekom cijena $\hat{S}$, isplata azijskih opcija definirana je kao:
$(\hat{S} - K)^+$*, average price call*
$(K - \hat{S})^+$*, average price put*
$(S_T - \hat{S})^+$*, average strike call*
$(\hat{S} - S_T)^+$*, average strike put*

Price opcije također se zovu *rate opcije* ili *fixed strike opcije*, dok se *strike* opcije nazivaju još i *floating strike* opcijama. Gore navedeni prosjeci mogu se izraziti s pomoću slijedećeg integrala:

$$A_t = \int_0^t f(S_y, y)dy, \tag{2.9}$$

gdje funkcija f označava tip izabranog prosjeka. Na primjer, $f(S, t) = S$ odgovara konstantnom aritmetičkom prosjeku (2.8). Kod azijskih opcija vrijednost V je funkcija od S, A i t, odnosno $V(S, A, t)$. Da bismo izveli PDJ za funkciju V koristeći Itôvu lemu, trebat će nam diferencijalna jednadžba za A. No to je dano jednadžbom (2.9) kojoj nedostaje stohastički dio dW_t,

$$dA = f(S_t, t)dt + b_A dW_t, \quad b_A = 0,$$

odnosno u našem primjeru:

$$dA = S_t dt$$

Za S_t koristimo standardno geometrijsko Brownovo gibanje. Primjenjujući multidimenzionalnu verziju Itôve leme na $Y_t = V(S_t, A_t, t)$, dobivamo :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial A}dA + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S\, dt + \sigma S\, dW) + \frac{\partial V}{\partial A}f(S, t)dt + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S, t)\frac{\partial V}{\partial A}\right)dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}dW \end{aligned} \tag{2.10}$$

Derivacija Black-Scholesove PDJ dobiva se kao u prethodnom poglavlju za standardne opcije te je rezultat :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0 \tag{2.11}$$

Uspoređujući sa standardnom verzijom (1.8), jedina razlika je u članu $f(S,t)\frac{\partial V}{\partial A}$. Nedostatkom derivacije drugog reda u odnosu na A možemo doći do numeričkih grešaka. Transformacije prikazane u (1.11) ne mogu se povoljno primijeniti na (2.11).

Sada ćemo reducirati tu jednadžbu na jednodimenzionalnu jednadžbu. Rješenja izraza (2.11) definirana su na domeni

$$S > 0, \quad A > 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

trodimenzionalnog prostora. Dodatna A-dimenzija dodatno otežava numeričko rješavanje. U nekim je slučajevima moguće reduciranje dimenzije. Na primjer, koncentrirajmo se na slučaj $f(S,t) = S$. Uzmimo u obzir europsku *strike call* opciju aritmetičkog prosjeka s isplatom :

$$\left(S_T - \frac{1}{T}A_T\right)^+ = S_T\left(1 - \frac{1}{TS_T}\int_0^T S_y dy\right)^+.$$

Uvođenjem pomoćne varijable R_t, koja je definirana kao

$$R_t = \frac{1}{S_t}\int_0^t S_y dy,$$

dobivamo isplatu:

$$S_T\left(1 - \frac{1}{T}R_T\right)^+ = S \cdot H(R_T, T).$$

To nas motivira da rješenje tražimo u ovom obliku :

$$V(S,A,t) = S \cdot H(R,t), \; R = \frac{A}{S} \tag{2.12}$$

za neku funkciju $H(R,t)$. Za izvod PDJ za H potrebno nam je sljedeće:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = S\frac{\partial H}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial S} = H - R\frac{\partial H}{\partial R}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{S}R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\partial H}{\partial R}$$

Uvrštavanjem (2.12) u (2.11) dobivamo PDJ za H:

$$\begin{aligned} & S\frac{\partial H}{\partial t} + rS(H - R\frac{\partial H}{\partial R}) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(\frac{1}{S}R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}) + S\frac{\partial H}{\partial R} - rSH = 0 \\ & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Kako bismo riješili ovu PDJ, trebamo imati rubne uvjete. Njihov izbor nije jedinstven. Sljedeće pretpostavke upućuju na rubne uvjete. Desni rubni uvjet za $R \to \infty$ proizlazi iz isplate

$$H(R_T, T) = (1 - \frac{1}{T}R_T)^+,$$

što povlači $H(R_T, T) = 0$ za $R_T \to \infty$. Integral R_t je ograničen, stoga slijedi $S \to 0$ za $R \to \infty$. Za $S \to 0$ europska *call* opcija nije izvršena, što povlači

$$H(R, t) = 0, \quad za\ R \to \infty. \tag{2.14}$$

Kod lijevog rubnog uvjeta $R = 0$ dolazimo do problema. U ovom slučaju R je nezavisna varijabla. No treba primijetiti da za R_t vrijedi:

$$dR_t = -\frac{R_t}{S_t}dS_t + dt$$

Uz relaciju

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dobivamo sljedeću SDJ:

$$\begin{aligned} dR_t &= -\frac{R_t}{S_t}dS_t + dt \\ &= -\frac{R_t}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + dt \\ &= (1 - \mu R_t)dt - \sigma R_t dW_t \end{aligned} \tag{2.15}$$

Iako $R_0 = 0$, jednadžba (2.15) pokazuje da je $dR_0 = dt$ te R_t neće ostati na 0. Dakle, ne možemo očekivati da je $R_T = 0$ i ne možemo predvidjeti vrijednost isplate, stoga je potreban drugi rubni uvjet. Počinjemo s PDJ (2.13) koja je za $R \to 0$ ekvivalentna

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0.$$

Pretpostavimo da je H ograničen, možemo zaključiti da izraz $R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}$ nestaje za $R \to 0$. Dobiveni rubni uvjet je

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0, \quad za\ R \to 0. \tag{2.16}$$

Dobivamo sljedeću PDJ s rubnim uvjetima :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \\
H = 0 \; za \; R \to \infty, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0, \; za \; R = 0 \\
H(R_T, T) = (1 - \frac{1}{T} R_T)^+
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

Numeričkim rješavanjem tog problema za $0 \leq t \leq T, R \geq 0$ dobivamo $H(R, t)$ te uvrštavanjem u (2.12) dobivamo vrijednosti V.

Umjesto promatranja neprekidnog vremena za računanje prosjeka, realistično je promatrati diskretne vremenske trenutke $t_1, \dots, t_M$. Tako dobivena aritmetička sredina dana je formulom:

$$
A_{t_k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} S_{t_i}, \quad k = 1, \dots, M. \tag{2.18}
$$

Novi prosjek dobiven je od prethodnog na sljedeći način :

$$
A_{t_k} = A_{t_{k-1}} + \frac{1}{k}(S_{t_k} - A_{t_{k-1}})
$$

$$
A_{t_{k-1}} = A_{t_k} + \frac{1}{k-1}(A_{t_k} - S_{t_k})
$$

Drugi od ova dva zapisa nama će biti važniji jer integriramo unazad. A_t je konstantan u razmaku između diskretnih trenutaka te mu je skok jednak

$$
\frac{1}{k-1}(A_{t_k} - S_{t_k}).
$$

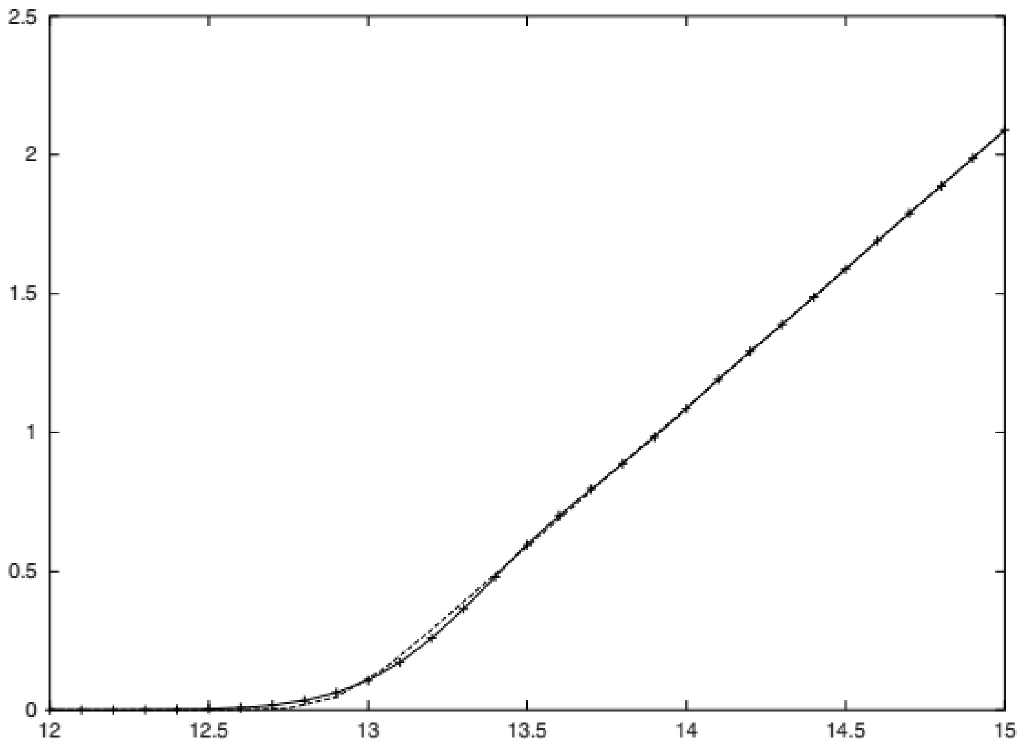
Za svaki k ovaj se skok može zapisati kao :

$$
A^-(S) = A^+(S) + \frac{1}{k-1}(A^+(S) - S), \tag{2.19}
$$

gdje je $S = S_{t_k}$. A^- i A^+ označavaju vrijednost od A neposredno prije te neposredno poslije dolaska u t_k. Princip bez arbitraže povlači neprekidnost od V u t_k u smislu neprekidnosti funkcije $V(S_t, A_t, t)$ za svaku realizaciju slučajne šetnje. Taj zahtjev zadan je kao:

$$
V(S, A^+, t_k) = V(S, A^-, t_k). \tag{2.20}
$$

Za fiksne (S, A) ova jednakost definira skok od V u trenutku t_k. Numerička primjena skoka (2.19) i (2.20) je sljedeća: A-os je podjeljena u diskretne vrijednosti A_j, $j = 1, \dots, J$. Za svaki vremenski period između dva uzastopna t_k, npr. $t_{k+1} \to t_k$, vrijednost opcije je nezavisna od A, dakle $dV/dA = 0$. Jednodimenzionalne Black-Scholesove jednadžbe integrirane su pojedinačno i nezavisno jedna od druge od t_{k+1} do t_k za svaki j. Svaki od Black-Scholesova problema ima svoje terminalne uvjete. Za svaki A_j „prvi" terminalni uvjet uzet je iz isplate za $t_M = T$. Krećući se unazad kroz vrijeme, u svakom trenutku t_k jednodimenzionalni Black-Scholesov problem zaustavljen je jer se prvo novi terminalni uvjet mora izvesti iz uvjeta skoka. Nove vrijednosti $V(S, A_j, t_k)$, koje predstavljaju terminalne uvjete (početne vrijednosti za integraciju unatrag), za sljedeći vremenski period $t_k \to t_{k-1}$ definirane su iz uvjeta skoka te su dobivene interpolacijom. Samo u tim vremenskim trenucima Black-Sholesovi problemi su spojeni, a spajanje je postignuto interpolacijom. Na taj je način redoslijed ploha $V(S, A, t_k)$ izračunat od $t_M = T, \ldots, t_1 = 0$.



Slika 2.1: Europska call opcija, $K = 13, r = 0.15, \sigma = 0.01, T = 1$. Usporedba Crank-Nicolsonove aproksimacije $V(S, 0)$ s egzaktnim rješenjem.

Numerički aspekti

Direktni numerički pristup rješavanja PDJ (2.11) po funkciji $V(S, A, t)$, koja ovisi o tri nezavisne varijable, zahtijeva više truda nego u dvodimenzionalnom slučaju, stoga ćemo se ograničiti na dvodimenzionalni slučaj PDJ kao u izrazu (2.13).

Konvekcijsko-difuzijski problem

Prije nego što započnemo raspravu o numeričkom rješavanju PDJ (2.13) bez korištenja transformacija kao u (1.11), započet ćemo s eksperimentom poznate Black-Scholesove jednadžbe (1.8). Primjenjujemo metodu konačnih razlika na (1.8) te koristimo razlike drugog reda, a zatim uspoređujemo numeričku aproksimaciju s egzaktnim rješenjem.

Slika 2.1 prikazuje rješenje $V(S, 0)$. Na grafu vidimo blage oscilacije. Takve su oscilacije financijski nerealne i ne prihvaćaju se, pa im zato trebamo naći uzrok. One su neistinite stoga što su dobivene numerički, a nisu rješenja jednadžbe.

Kako bismo shvatili zašto se ovakve lažne oscilacije događaju, trebamo spomenuti elementarnu dinamiku fluida, gdje tzv. konvekcijsko-difuzijska jednadžba ima veliku ulogu. Kod takve jednadžbe, izraz drugog reda povezan je s difuzijom, a izraz prvog reda s konvekcijom. Omjer konvekcijskog i difuzijskog izraza, skaliran korakom mreže, zovemo *Péclet-ovim brojem*, a označava parametar koji karakterizira konvekcijsko-difuzijski problem. Ispostavilo se da je Pécletov broj relevantan za razumijevanje našega problema, stoga možemo vidjeti kako ga možemo upotrijebiti u PDJ. Za prvi primjer uzmimo originalnu Black-Scholesovu jednadžbu (1.8) s :

$$difuzijskim\ dijelom \quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

$$konvekcijskim\ dijelom \quad rS\frac{\partial V}{\partial S}$$

$$duljina \quad \Delta S$$

Kako bismo izračunali Pécletov broj, nakon uvrštavanja koeficijenata dobijemo njegovu vrijednost:

$$\frac{\Delta S\, rS}{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2} = \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\Delta S}{S}.$$

U slučaju neprekidnog tijeka dividendi, zamjenjujemo r sa $(r - \delta)$. Eksperimentalni dokazi upućuju na to da što je veći Pécletov broj to je veća mogućnost da će numeričko rješenje imati oscilacije. PDJ $y_t = y_{xx}$ nema konvekcijskog izraza, pa je pripadajući Pécletov broj jednak nuli. Azijske opcije opisane izrazom (2.11) nalaze se u teškoj situaciji: gledajući po varijabli A, ne postoji difuzijski izraz pa je Pécletov broj jednak beskonačnosti. Za originalnu Black-Scholesovu jednadžbu taj broj načelno se svodi na omjer kamatne stope i volatilnosti. Za reduciranu PDJ

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

izrazi su sljedeći:

$$\begin{aligned} difuzijski\ dio \quad & \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} \\ konvekcijski\ dio \quad & (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} \\ duljina \quad & \Delta R \end{aligned}$$

Tada je Pécletov broj jednak

$$\frac{\Delta R(1 - rR)}{\frac{1}{2}\sigma^2 R^2}.$$

Ovaj opis Pécletova broja i dalje nam ne daje odgovor na pitanje zašto se te lažne oscilacije pojavljuju, no daje nam uvid u vezu između konvekcije i difuzije u različitim primjerima PDJ. Objasnimo uzroke oscilacija u problemima modela. Problem modela jest problem inicijalne vrijednosti skalarne funkcije $u(x,t)$ definirane na $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{2.21}$$

Pretpostavimo da je $b \geq 0$. Ovaj uvjet nije u kontradikciji sa (2.13) jer tamo imamo terminalni uvjet za $t = T$, dok u (2.21) imamo inicijalni uvjet za $t = 0$. Jednadžba (2.21) je problem modela koji predstavlja veliku klasu konvekcijsko-difuzijskih problema kojima naša jednadžba (2.13) pripada. U slučaju Black-Scholesove jednadžbe jednostavnom transformacijom $S = Ke^x, t = T - \tau$ dobijemo izraz (2.21) do na izraz $-rV$. Za konstantne r,σ transformirana jednadžba $y_t = y_{xx}$ pripada klasi (2.21), iako joj nedostaje uvjet konvekcije. Promatranje uvjeta stabilnosti našega modela (2.21) pomoći će nam da shvatimo kako se diskretizacije izraza (1.8) ili (2.13) ponašaju. Za analizu pretpostavimo ekvidistantnu mrežu na x-osi sa $\Delta x > 0$ te čvorovima $x_j = j\Delta x$ za cijele brojeve j. Radi jednostavnosti pretpostavimo da su a i b konstante.

Von Neumannova analiza stabilnosti

Primijenimo li na (2.21) standardnu shemu simetrične centralne konačne diferencije, dobivamo

$$\frac{w_{j,\nu+1} - w_{j\nu}}{\Delta t} + a\frac{w_{j+1,\nu} - w_{j-1,\nu}}{2\Delta x} = b\frac{w_{j+1,\nu} - 2w_{j\nu} + w_{j-1,\nu}}{\Delta x^2}. \tag{2.22}$$

Drugačiji zapis prethodnog izraza je:

$$\begin{aligned} w_{j,\nu+1} &= \frac{b\Delta t}{\Delta_x^2}(w_{j+1,\nu} - 2w_{j\nu} + w_{j-1,\nu}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(w_{j+1,\nu} - w_{j-1,\nu}) + w_{j\nu} \\ &= (1 - 2\frac{b\Delta t}{\Delta x^2})w_{j\nu} + (\frac{a\Delta t}{2\Delta x} + \frac{b\Delta t}{\Delta x^2})w_{j-1,\nu} + (\frac{b\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x})w_{j+1,\nu} \\ &= (1 - 2\lambda)w_{j\nu} + (\frac{\gamma}{2} + \lambda)w_{j-1,\nu} + (\lambda - \frac{\gamma}{2})w_{j+1,\nu} \ , \end{aligned} \tag{2.23}$$

gdje je

$$\gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \quad \lambda = \frac{b\Delta t}{\Delta x^2}, \quad \beta = \frac{a\Delta x}{b} \tag{2.24}$$

Ova shema nazvana je *Forward Time Centered Space (FTCS)*. Umjesto da provodimo analizu stabilnosti baziranu na svojstvenim vrijednostima, primijenimo Von Neumannovu analizu stabilnosti. Ova metoda aproksimira $w_{j\nu}$ u ν-tom vremenskom nivou sa svojstvenim modovima ili Fourierovim modovima:

$$w_{j\nu} = \sum_k \hat{w}_\nu e^{ikj\Delta x}, \tag{2.25}$$

gdje i označava imaginarnu jedinicu, a k broj valova. Sada za $w_{j\nu}$ uzmimo jedan član reda:

$$w_{j\nu} = \hat{w}_\nu e^{ikj\Delta x}$$

Slijedi:

$$w_{j+1,\nu} = \hat{w}_\nu e^{ik(j+1)\Delta x} \tag{2.26}$$

$$w_{j,\nu+1} = \widehat{w_{\nu+1}} e^{ikj\Delta x} \tag{2.27}$$

Faktor rasta G_k definiran je kao:

$$G_k = |\frac{\widehat{w_{\nu+1}}}{\hat{w}_\nu}|$$

Ako vrijedi $|G_k| \leq 1$, članovi e^{ikx} iz (2.25) nisu pojačani, tako da je metoda stabilna. Primijenjujući Von Neumannovu analizu stabilnosti na (2.23) dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{w_{j,\nu+1}}{w_{j\nu}} &= (1 - 2\lambda) + (\frac{\gamma}{2} + \lambda)\frac{w_{j-1,\nu}}{w_{j\nu}} + (\lambda - \frac{\gamma}{2})\frac{w_{j+1,\nu}}{w_{j\nu}} \\ \frac{\widehat{w_{\nu+1}} e^{ikj\Delta x}}{\hat{w}_\nu e^{ikj\Delta x}} &= (1 - 2\lambda) + (\frac{\gamma}{2} + \lambda)\frac{\hat{w}_\nu e^{ik(j-1)\Delta x}}{\hat{w}_\nu e^{ikj\Delta x}} + (\lambda - \frac{\gamma}{2})\frac{\hat{w}_\nu e^{ik(j+1)\Delta x}}{\hat{w}_\nu e^{ikj\Delta x}} \\ G_k &= 1 - 2\lambda + (\frac{\gamma}{2} + \lambda)e^{-ik\Delta x} + (\lambda - \frac{\gamma}{2})e^{ik\Delta x}, \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\gamma = \beta\lambda$, gdje γ nazivamo *Courantovim brojem*, a β je Pécletov broj. Za konačne vrijednosti β pretpostavimo $b > 0$. Koristeći (2.22) te

$$\sin k\Delta x = \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i}, \quad \cos k\Delta x = \frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}$$

dolazimo do

$$\begin{aligned} G_k &= 1 - 2\lambda + (\frac{\lambda\beta}{2} + \lambda)e^{-ik\Delta x} + (\lambda - \frac{\lambda\beta}{2})e^{ik\Delta x} \\ G_k &= 1 - 2\lambda + 2\lambda(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}) + \lambda\beta(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2}) \\ G_k &= 1 - 2\lambda + 2\lambda\cos k\Delta x - i\beta\lambda\sin k\Delta x \end{aligned} \tag{2.28}$$

Uz pravilo $|x + iy| = \sqrt{x^2 + x^2}$ te

$$s = \sin\frac{k\Delta x}{2}, \quad \cos k\Delta x = 1 - 2s^2, \quad \sin k\Delta x = 2s\sqrt{1 - s^2}$$

dolazimo do sljedećeg izraza:

$$\begin{aligned} |G_k|^2 &= (1 - 2\lambda + 2\lambda(1 - 2s^2))^2 + (-2\beta\lambda s\sqrt{(1 - s^2)})^2 \\ &= (1 - 4\lambda s^2)^2 + 4\beta^2\lambda^2 s^2(1 - s^2). \end{aligned}$$

Vidimo kako u polinomu po $0 \leq s^2 \leq 1$ vrijedi $|G_k| \leq 1$ za

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda\beta^2 \leq 2. \tag{2.29}$$

Nejednakost za λ daje nam kriterij stabilnosti. Druga nejednakost daje nam dodatne restrikcije za λ i β. Zbog izraza $\lambda\beta^2 = \frac{a^2\Delta t}{b}$ ta restrikcija ovisi o Δt, Δx te o parametru konvekcije a i parametru difuzije b, kao što je definirano u (2.24). Restrikcija na konveksnost postaje očita kada, na primjer, uzmemo $\lambda = \frac{1}{2}$ za maksimalni Δt. Tada je $|\beta| \leq 2$ granica definirana Pécletovim brojem koji ograničava Δx sa $\Delta x \leq \frac{2b}{|a|}$. Narušavanje ovoga uvjeta možda je i objašnjenje zašto sheme (2.23) primjenjene na Black-Scholesovu jednadžbu (1.8) prikazuju lažne oscilacije. Ograničenja na β i Δx nisu aktivna ako imamo problem bez konvekcije ($a = 0$). Primijetimo još da ograničenja daju značajne restrikcije za probleme s malim vrijednostima difuzijske konstante b. Za $b \to 0$ (bez difuzije) i $a \neq 0$ susrećemo se s velikom posljedicom da $\Delta t \to 0$, te se shema (2.23) ne može primijeniti. Iako model (2.21) s konstantnim koeficijentima nije jednak Black-Scholesovoj jednadžbi (1.8) ni jednadžbi (2.13), dosadašnja analiza opisuje jezgru problema. Naglasimo samo da male vrijednosti volatilnosti predstavljaju malu difuziju, tako da su i druge metode, uz metodu (2.23), potrebne.

Upwind shema i ostale metode

Nestabilnost za model (2.21)/(2.23) pojavljuje se kada je Pécletov broj velik te zbog simetričnog i centriranog kvocijenta koji je primijenjen na derivaciju prvog reda. Sada ćemo proučavati slučaj kada je Pécletov broj beskonačan, odnosno kada je $b = 0$. Tada jednadžba glasi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.30}$$

Standardni FTCS pristup za (2.30) ne dovodi do stabilne sheme. PDJ (2.30) ima rješenja u formi *putujućih valova*, odnosno

$$u(x,t) = F(x - at),$$

gdje je $F(y) = u_0(y)$ u slučaju početnih uvjeta $u(x,0) = u_0(x)$. Za $a > 0$, F se kreće u pozitivnom smjeru x-osi. Gledajući u slučaju čvora (j,ν), susjedni čvor $(j-1,\nu)$ leži „upwind", a čvor $(j+1,\nu)$ leži „downwind". U ovom slučaju j označava čvor x_j, a ν trenutak t_ν. Informacije putuju od lijevih prema desnim čvorovima. Prema tome, shema razlike prvog reda

$$\frac{w_{j,\nu+1} - w_{j\nu}}{\Delta t} + a\frac{w_{j\nu} - w_{j-1,\nu}}{\Delta x} = 0 \tag{2.31}$$

naziva se *upwind* diskretizacija ($a > 0$). Ova se shema također zove i shema *Forward Time Backward Space (FTBS)*. Primjenjujući Von Neumannovu analizu stabilnosti na shemu (2.31), dolazimo do faktora rasta:

$$G_k = 1 - \gamma + \gamma e^{-ik\Delta x}, \tag{2.32}$$

gdje je γ Courantov broj iz izraza (2.24). Uvjet za stabilnost je ograničenost $c_k^{(\nu)}$ za sve k te $\nu \to \infty$, stoga $|G_k| \leq 1$. Lako vidimo da vrijedi

$$\gamma \leq 1 \Rightarrow |G_k| \leq 1.$$

Uvjet $|\gamma| \leq 1$ zove se *Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet (CFL)*. Dana analiza pokazuje kako je ovaj uvjet dovoljan da bi se osigurala stabilnost *upwind* sheme (2.31) primijenjene na PDJ (2.30) sa zadanim početnim uvjetima. U slučaju kada je $a < 0$, shema (2.31) više nije *upwind* shema, a novi izraz je za tu shemu

$$\frac{w_{j,\nu+1} - w_{j\nu}}{\Delta t} + a\frac{w_{j+1,\nu} - w_{j\nu}}{\Delta x} = 0. \tag{2.33}$$

Von Neumannova analiza stabilnosti dovodi nas do uvjeta $|\gamma| \leq 1$ ili $\lambda|\beta| \leq 1$ ako je uvjet izražen preko Pécletova broja. Ovo također naglašava važnost malih Pécletovih brojeva.

Napomenimo samo da se shema FTCS za $u_t + au_x = 0$, koja je nestabilna, može popraviti zamjenom w_{jv} prosjekom njezinih susjeda. Dobivena shema je

$$w_{j,v+1} = \frac{1}{2}(w_{j+1,v} + w_{j-1,v}) - \frac{1}{2}\gamma(w_{j+1,v} - w_{j-1,v}) \tag{2.34}$$

te se zove *Lax-Friedrichsova shema*. Ona je stabilna ako i samo ako je CFL uvjet zadovoljen. Lako se pokaže da se Lax-Friedrichsova shema može zapisati i na ovaj način:

$$\frac{w_{j,v+1} - w_{jv}}{\Delta t} = -a\frac{w_{j+1,v} - w_{j-1,v}}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta t}(w_{j+1,v} - 2w_{jv} + w_{j-1,v}). \tag{2.35}$$

Ovo je FTCS shema s dodatnim izrazom

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\delta_x^2 w_{jv},$$

koja predstavlja PDJ

$$u_t + au_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}u_{xx}.$$

Stabilnost se postiže dodavanjem difuzije $\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}u_{xx}$. Shema (2.35) sadrži tzv. numeričko rasipanje *(engl. numerical dissipation)*. Vratimo se na model (2.21) sa $b > 0$. Za diskretizaciju izraza $a\frac{\partial u}{\partial x}$ primjenjujemo pripadnu *upwind* shemu iz (2.31) ili (2.33), ovisno o predznaku konstante a. Ta shema može se zapisati kao :

$$\begin{aligned} a < 0,\ w_{j,v+1} &= w_{jv} - \gamma(w_{j+1,v} - w_{j,v}) + \lambda(w_{j+1,v} - 2w_{j,v} + w_{j-1,v}) \\ a > 0,\ w_{j,v+1} &= w_{jv} - \gamma(w_{j,v} - w_{j-1,v}) + \lambda(w_{j+1,v} - 2w_{j,v} + w_{j-1,v}) \end{aligned} \tag{2.36}$$

s parametrima γ i λ definiranim kao u (2.24). Za $a > 0$, faktori rasta dobivaju se na sljedeći način:

$$\widehat{w_{v+1}}e^{ikj\Delta x} = \hat{w}_v e^{ikj\Delta x} - \lambda\beta(\hat{w}_v e^{ikj\Delta x} - \widehat{w_{v+1}}e^{ik(j-1)\Delta x}) + \lambda(\hat{w}_v e^{ik(j+1)\Delta x} - 2\hat{w}_v e^{ikj\Delta x} + \hat{w}_v e^{ik(j-1)\Delta x})$$

Dijeljenjem sa $\hat{w}_v e^{ikj\Delta x}$ dobijemo:

$$G_k = 1 - \lambda\beta(1 - e^{-ik\Delta x}) + \lambda(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})$$

Primjenjujući $e^{ik\Delta x} = \cos k\Delta x - i\sin k\Delta x$ dolazimo do:

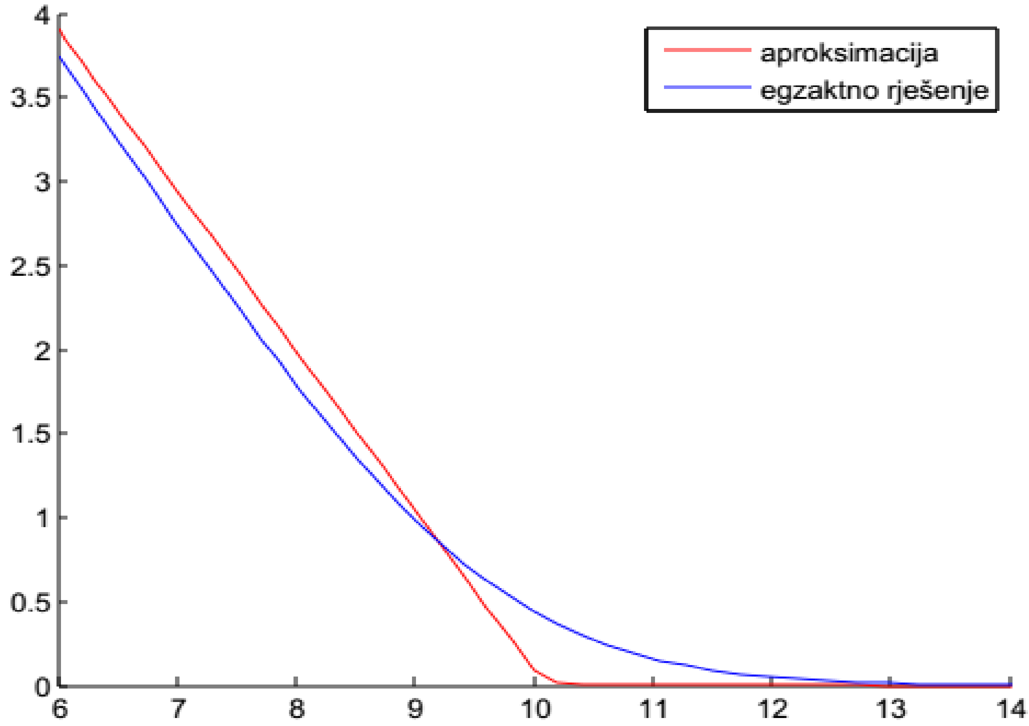
$$G_k = 1 - \lambda(2 + \beta)(1 - \cos k\Delta x) - i\beta\lambda \sin k\Delta x.$$

Analizom kao u prethodnom poglavlju dolazimo do kriterija stabilnosti

$$\lambda \leq \frac{1}{2 + |\beta|}. \tag{2.37}$$

Ova nejednakost vrijedi za svaki a. Za $\lambda \ll \beta$, nejednakost (2.37) je manje restriktivna nego (2.29). Na primjer, uzmimo $\lambda = \frac{1}{50}$. Za taj λ je ograničenje $|\beta| \leq 10$ u slučaju FTCS sheme te ograničenje $|\beta| \leq 48$ za *upwind* shemu.

Slika 2.2 prikazuje Black-Scholesovo rješenje te aproksimaciju rješenja dobivenu *upwind* shemom. Spomenuta *upwind* shema motivacija je za traženje boljih metoda.



Slika 2.2: Europska put opcija, $K = 10, r = 0.05, \sigma = 0.2, T = 0.5$. Usporedba aproksimacije $V(S, 0)$ dobivene *upwind* shemom s egzaktnim rješenjem.

Metode visoke rezolucije

FTCS pristup sheme (2.23) je prvog reda u smjeru varijable t te ima ozbiljnih ograničenja za stabilnost. Postoje pristupi drugog reda s boljim postavkama. Velika grupa shema razvijena je za tzv. Zakon sačuvanja, odnosno, u jednodimenzionalnoj situaciji:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0. \tag{2.38}$$

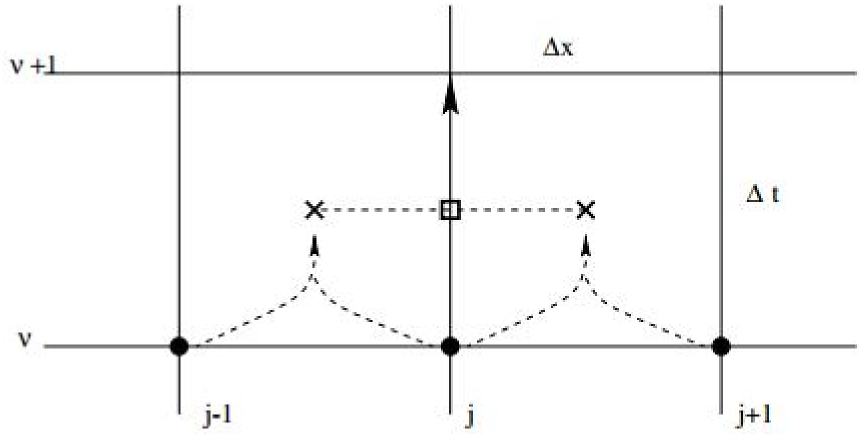
Funkcija $f(u)$ predstavlja *flux* u jednadžbi (2.38), koji su česti u dinamici fluida. Predstavit ćemo *Lax-Wendroffovu* metodu drugog reda za jednadžbu (2.38), jer je ova metoda previše cijenjena da bi se prikazala samo na jednostavnom modelu $u_t + au_x = 0$.

Lax-Wendroffova metoda

Lax-Wendroffova shema bazirana je na

$$u_{j,\nu+1} = u_{j\nu} + \Delta t \frac{\partial u_{j\nu}}{\partial t} + O(\Delta t^2) = u_{j\nu} - \Delta t \frac{\partial f(u_{j\nu})}{\partial x} + O(\Delta t^2).$$

Ovaj izraz koristi (2.38) te zamjenjuje derivaciju po t s derivacijom po x. Za pogodno odabrane indekse ova bazična shema primijenjena je tri puta na stepenastu mrežu. Stepenasta mreža kao na slici 2.3. uzima korak duljine $\frac{1}{2}\Delta x$ i $\frac{1}{2}\Delta t$ te središnje čvorove $j-\frac{1}{2}$, $j+\frac{1}{2}$, $\nu+\frac{1}{2}$. Glavni je korak centrirani korak drugog reda *(engl. second-order centered step,CTCS)* sa središtem u čvoru $(j, \nu + \frac{1}{2})$ što je označeno kvadratićem na slici 2.3. Taj korak treba funkciju f procijeniti aproksimacijama w dobivenih za dva središnja čvora $(j \pm \frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2})$, koji su označeni križićima na slici 2.3.



Slika 2.3: Stepenasta mreža za Lax-Wendroffovu metodu

Sljedeći algoritam prikazuje Lax-Wendroffovu metodu:

$$\begin{aligned} w_{j+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(w_{j\nu} + w_{j+1,\nu}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(w_{j+1,\nu}) - f(w_{j\nu})) \\ w_{j-\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(w_{j-1,\nu} + w_{j\nu}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(w_{j\nu}) - f(w_{j-1,\nu})) \\ w_{j,\nu+1} &= w_{j\nu} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(w_{j+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}}) - f(w_{j-\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}})) \end{aligned} \tag{2.39}$$

U ovom su algoritmu vrijednosti polukoraka $w_{j+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}}$ i $w_{j-\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}}$ privremene, te su odbačene nakon što je $w_{j,\nu+1}$ izračunat. Analiza stabilnosti za specijalni slučaj $f(u) = au$ u jednadžbi (2.38) vodi na uvjet CFL kao što smo prije naveli. Algoritam za slučaj kada je $f(u) = au$ glasi:

$$\begin{aligned} w_{j+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(w_{j\nu} + w_{j+1,\nu}) - \frac{1}{2}\gamma(w_{j+1,\nu} - w_{j\nu}) \\ w_{j-\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(w_{j-1,\nu} + w_{j\nu}) - \frac{1}{2}\gamma(w_{j\nu} - w_{j-1,\nu}) \\ w_{j,\nu+1} &= w_{j\nu} - \gamma(w_{j+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}} - w_{j-\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Iz prethodnog algoritma možemo zaključiti sljedeće:

$$w_{j,\nu+1} = w_{j\nu} - \frac{1}{2}\gamma w_{j+1,\nu} + \frac{1}{2}\gamma w_{j-1,\nu} + \frac{1}{2}\gamma^2 w_{j+1,\nu} - \gamma^2 w_{j\nu} + \frac{1}{2}\gamma^2 w_{j-1,\nu}$$

Lax-Wendroffov algoritam također ima lažne oscilacije u okolini velikih gradijenata. Trebamo naći način kako da maknemo oscilacije.

Smanjenje totalne varijacije

Budući da $u_t + au_x$ utječe na funkciju $F(x)$ brzinom a, monotonost funkcije F bit će očuvana za sve $t > 0$. Također je potrebno da numerička shema zadrži očuvanje monotonosti. Odnosno,

$$w_{j0} \le w_{j+1,0} \ \forall j \Rightarrow w_{j\nu} \le w_{j+1,\nu} \ \forall j, \nu \ge 1$$

$$w_{j0} \ge w_{j+1,0} \ \forall j \Rightarrow w_{j\nu} \ge w_{j+1,\nu} \ \forall j, \nu \ge 1$$

Vrlo je važno da se oscilacije smanje. Sada definiramo totalnu varijaciju aproksimativnog vektora $w^{(\nu)}$ u ν-tom trenutku kao :

$$TV(w^{(\nu)}) = \sum_j |w_{j+1,\nu} - w_{j\nu}|. \tag{2.41}$$

Cilj nam je konstruirati metodu smanjenja totalne varijacije *(engl. total variation diminishing (TVD))*, tj.

$$TV(w^{(\nu+1)}) \le TV(w^{(\nu)}), \forall \nu.$$

Prije nego što dođemo do uvjeta za TVD, primijetimo da su sheme spomenute u ovom poglavlju eksplicitne te su oblika :

$$w_{j,\nu+1} = \sum_i c_i w_{j+i,\nu}. \tag{2.42}$$

Ovisno o koeficijentima c_i, shema je ili TVD ili shema koja održava monotonost.

Lema 2.2.2. *MONOTONOST I TVD*
(a) Shema (2.42) ima svojstvo očuvanja monotonosti ako i samo ako vrijedi $c_i \ge 0, \forall c_i$
(b) Shema (2.42) je TVD ako i samo ako vrijedi $c_i \ge 0, \forall c_i$, *te* $\sum ci \le 1$.

Možemo primijetiti da TVD povlači svojstvo očuvanja monotonosti. Lax-Wendroffova shema zadovoljava $c_i \ge 0$ za svaki i, osim u posebnom slučaju kada je $\gamma = 1$. U praksi, kada koeficijent a nije konstanta, Lax-Wendroffova shema nije TVD. Za $f(u) = au$, *upwind* shema (2.31) i Lax-Friedrichsova shema (2.34) su TVD za $|\gamma| \le 1$.

Numeričko rasipanje

Spomenimo ponovno linearnu jednadžbu (2.30), $u_t + au_x = 0$, $a > 0$. U slučaju ove jednadžbe lako je supstituirati vrijednosti polukoraka Lax-Wendroffova algoritma za w. Pokaže se da se Lax-Wendroffova shema može dobiti dodavanjem difuzijskog izraza *upwind* shemi (2.31). Radi bolje notacije, definiramo sljedeće:

$$\delta_x^- w_{j\nu} = w_{j\nu} - w_{j-1,\nu} \tag{2.43}$$

Tada je *upwind* shema jednaka

$$w_{j,\nu+1} = w_{j\nu} - \gamma\delta_x^- w_{j\nu}, \ \gamma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

Također se može provjeriti kako se Lax-Wendroffova shema može dobiti dodavanjem sljedećeg izraza:

$$\begin{aligned} -\delta_x^-\{\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - w_{j\nu})\} &= -\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - w_{j\nu} - w_{j\nu} + w_{j-1,\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - 2w_{j\nu} + w_{j-1,\nu}) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Drugačije zapisana Lax-Wendroffova shema:

$$\begin{aligned} w_{j,\nu+1} &= w_{j\nu} - \gamma\delta_x^- w_{j\nu} - \delta_x^-\{\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - w_{j\nu})\} \\ &= w_{j\nu} - \gamma(w_{j\nu} - w_{j-1,\nu}) - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - 2w_{j\nu} + w_{j-1,\nu}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Tada je Lax-Wendroffova shema *upwind* shema prvog reda zajedno s uvjetom (2.44). Dodavanjem uvjeta (2.44), *upwind* shema postaje shema drugoga reda. Cilj nam je naći shemu koja nam neće dati oscilacije Lax-Wendroffove sheme ni lošu preciznost *upwind* sheme. No također želimo imati korist od *upwind* sheme i njezine mogućnosti zaglađivanja te preciznosti koju nam daje Lax-Wendroffova metoda. Ideja je da se rasap ne dodaje svuda na x-osi, nego da se doda umjetni rasap na mjestima na kojima je potreban. Odluka o tome koliko ćemo rasapa dodati ovisi o rješenju. *High-resolution* metode kontroliraju umjetni rasap preko *limitera* (granice) $l_{j\nu}$ takvog da vrijedi

$$w_{j,\nu+1} = w_{j\nu} - \gamma\delta_x^- w_{j\nu} - \delta_x^-\{l_{j\nu}\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)(w_{j+1,\nu} - w_{j\nu})\} \tag{2.46}$$

Očito je da je ova shema jednaka *upwind* shemi za $l_{j\nu} = 0$ te Lax-Wendroffovoj shemi za $l_{j\nu} = 1$. Kako bismo provjerili glatkoću rješenja, definiramo parametar glatkoće sa:

$$q_{j\nu} = \frac{w_{j\nu} - w_{j-1,\nu}}{w_{j+1,\nu} - w_{j\nu}} \tag{2.47}$$

Granica $l_{j\nu}$ bit će funkcija parametra $q_{j\nu}$. Sada nećemo koristiti indekse, pa će za $q \approx 1$ rješenje biti glatko, što zahtijeva funkciju $l(q)$ da zadovoljava $l(1) = 1$ kako bismo dobili Lax-Wendroffovu shemu. Predložene su razne strategije za odabir granice $l(q)$ tako da je shema (2.46) TVD. Jedan je od primjera granične funkcije tzv. *Leer* granica definirana sa:

$$l(q) = \begin{cases} 0, & q \leq 0 \\ \frac{2q}{1+q}, & q > 0 \end{cases}$$

Principi navedeni u gornjem tekstu uspješno su primjenjivi na financije. Metode su TVD za Black-Scholesovu jednadžbu. Metode se također mogu primjeniti na nehomogene mreže te na implicitne metode.

Bibliografija

[1] Y. Lyuu, *Itô Process*, (2012), `https://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/finance1/2012/20120418.pdf`.

[2] P.G.Zhang, *An introduction to exotic options*, European Financial Management (1995), 87–95.

[3] ______, *Exotic options*, World Scientific Publishing, Singapore, 1998.

[4] R.U. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Springer, Berlin, 2009.

[5] Z.Vondraček, *Financijsko modeliranje*, 2008.

Sažetak

U svijetu financija opcije imaju važnu ulogu kao financijski instrument koji mnogi investitori koriste u svrhu zaštite od rizika te kao sredstvo spekulacije. Kako bismo mogli govoriti o određivanju njihove vrijednosti, važno je postaviti matematički model. U ovom je slučaju taj model je jedan od najpoznatijih u svijetu financija - Black-Scholesov model.

Jedno od važnih pitanja u financijskom svijetu jest kako procijeniti fer vrijednost opcija. S obzirom na široku podjelu opcija, određivanje njihove vrijednosti razlikuje se od opcije do opcije. Kod standardnih se opcija određivanje vrijednosti svodi na numeričko rješavanje Black-Scholesove PDJ s pomoću metode konačnih razlika. U slučaju egzotičnih opcija stvar se malo komplicira. Njihove PDJ nisu jednostavne strukture poput Black-Scholesove jednadžbe, stoga se one moraju rješavati direktno.

Uz kratak uvod u standardne opcije te neke standardne metode, upoznali smo se sa svijetom egzotičnih opcija. Nakon njihove podjele na skupine i određenih primjera, posebno smo se osvrnuli na azijske opcije. PDJ kojom su opisane te opcije može se reducirati na konvekcijsko-difuzijsku jednadžbu. Koncentrirali smo se na numerički aspekt te jednadžbe te na njeno rješavanje s pomoću *upwind* sheme. Također postoje i druge metode za njezino rješavanje, primjerice metode visoke rezolucije poput Lax-Wendroffove metode.

Summary

In the world of finance, options take an important role as a financial instrument that many investors use to protect against risk, and as a mean of speculation. To be able to talk about pricing of options, it is important to set up a mathematical model. In this case, the model is one of the most famous in the world of finance, the Black-Scholes model.

One of the important issues in the financial world is how to estimate the fair value of the option. Because of many types of options, determining their values vary from option to option. With standard options, pricing is reduced to the numerical solution of the Black-Scholes PDE using finite difference method. In the case of exotic options, thing is a bit complicated. Their PDE are not simple structures such as the Black-Scholes equation, therefore they must be solved directly.

With a brief introduction of standard options and some standard methods, we deal with the world of exotic option. After their partition into groups and specific examples, we gave special consideration to Asian options. PDE which described the Asian options can reduce to the convection-diffusion equation. We are focused on the numerical aspect of this equation and its solving by *upwind* schemes. Also there are other methods for solving this king of equation, as well as some high-resolution methods such as Lax-Wendroff method.

Životopis

Rođena sam 21. rujna 1992. godine u Zagrebu. Svoje školovanje započela sam u O.Š. Ivana Gundulića, klasični smjer. Prirodno je bilo da svoje školovanje nastavim u Klasičnoj gimnaziji u Zagrebu. Zahvaljujući profesorici koja mi je ukazala na zanimljivosti svijeta matematike, 2011. godine upisala sam Matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, inženjerski smjer. Prediplomski sam završila 2014. godine te nastavila školovanje na Financijskoj i poslovnoj matematici u sklopu diplomskog studija PMF-a. Tijekom studiranja bila sam na stručnoj praksi u Merkur osiguranju kako bih nadogradila svoje znanje iz poslovnog okruženja.