

**Marić, Dejan**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:669463>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Dejan Marić

Lévyjev let

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Dejan Marić**

Diplomski rad

**Lévyjev let**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.

Prvenstveno se zahvaljujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na ukazanom povjerenju, strpljenju i pomoći prilikom studija i izrade ovog diplomskog rada. Zahvaljujem se i Ivani bez koje bi sve ovo bilo nemoguće te svim profesorima, prijateljima i kolegama koji su vjerovali u mene i podržavali me.

## Sažetak

U ovom radu opisani su nasumični procesi, njihova svojstva te primjena u fizici i u drugim poljima znanosti. Proces nasumičnog gibanja prvi je uočio botaničar Robert Brown. Brownovo gibanje je u skladu s centralnim graničnim teoremom koji govori kako srednja vrijednost dovoljno velikog broja nasumičnih varijabli, od kojih svaka ima konačnu varijancu, slijedi normalnu (Gaussovu) raspodjelu. Opisat ćemo i procese koji odstupaju od centralnog graničnog teorema, a jedan od takvih procesa je Lévyjev let koji opisuje nasumičan hod kod kojeg duljine koraka imaju teškorepu (eng. heavy tailed) raspodjelu, odnosno raspodjelu vjerojatnosti čiji krajevi nemaju eksponencijalni pad. Takva raspodjela vjerojatnosti ima za krajnje vrijednosti puno veće vrijednosti nego normalna raspodjela. Lévyjeva raspodjela je generalizacija normalne raspodjele za sumu nezavisnih varijabli u slučajevima kada varijance varijabli divergiraju, odnosno idu u beskonačnost. Zbog svojih svojstava, ovakvi procesi pružaju izvrstan alat za opis mnogih prirodnih fenomena u fizici i drugim znanostima, što je ilustirano kroz praktične primjere u fizici te kod dinamike bankrota.

Ključne riječi: Brownovo gibanje, stohastički procesi, normalna raspodjela, teškorepa raspodjela, Lévyjev let

# Levy flight

## Abstract

This thesis gives an overview of random processes, their properties and their application in physics and in other fields of science. The process of the random movement was first observed by botanist Robert Brown. Brown's motion is consistent with the central limit theorem, which states that the mean value of a sufficiently large number of random variables, each having a finite variance, follows a normal (Gauss) distribution. Processes that deviate from the central limit theorem and one such process is the Lévy flight which describes a random walk in which the length of the steps has heavy-tailed distribution, i.e. probability distribution whose ends do not have an exponential drop. Lévy distribution is the generalization of the normal distribution for the case where variance of the sum of independent variables diverges or goes to infinity. Because of its properties, Lévy distribution provides an excellent tool for describing many natural phenomena in physics and other sciences, which is illustrated through practical examples in physics and dynamics of bankruptcy.

Keywords: Brownian motion, stochastic processes, normal distribution, heavy-tailed distribution, Lévy flight

# Sadržaj

|          |                                                    |           |
|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Uvod</b>                                        | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Brownovo gibanje</b>                            | <b>3</b>  |
| 2.1      | Model nasumičnog šetača . . . . .                  | 3         |
| 2.2      | Newtonov opis gibanja čestice . . . . .            | 5         |
| 2.3      | Difuzija . . . . .                                 | 7         |
| 2.4      | Brownovo gibanje kao nasumična varijabla . . . . . | 10        |
| 2.5      | Brownovo gibanje kao stohastički proces . . . . .  | 12        |
| 2.6      | Brownovo gibanje na financijskom tržištu . . . . . | 13        |
| <b>3</b> | <b>Lévyjev let</b>                                 | <b>16</b> |
| 3.1      | Svojstva stabilne raspodjele . . . . .             | 17        |
| 3.2      | Lévyjev let u fizici . . . . .                     | 22        |
| 3.2.1    | Difuzija čestica u tekućini . . . . .              | 23        |
| 3.2.2    | Transportna svojstva svjetla . . . . .             | 25        |
| <b>4</b> | <b>Primjena Lévyjevog leta u ekonofizici</b>       | <b>28</b> |
| 4.1      | Financijski pokazatelji . . . . .                  | 29        |
| 4.2      | Vremenska dinamika bilančanih omjera . . . . .     | 33        |
| <b>5</b> | <b>Metodički dio</b>                               | <b>40</b> |
| 5.1      | Istraživački usmjerena nastava fizike . . . . .    | 40        |
| 5.2      | Nastavna priprema: Brownovo gibanje . . . . .      | 41        |
| <b>6</b> | <b>Zaključak</b>                                   | <b>49</b> |
|          | <b>Dodaci</b>                                      | <b>50</b> |
| <b>A</b> | <b>Python kod za Lévyjevu raspodjelu</b>           | <b>50</b> |
|          | <b>Literatura</b>                                  | <b>52</b> |

# 1 Uvod

U prirodi možemo opaziti dva načina gibanja: pravilna, poput gibanja planeta i nasumična, poput Brownovog gibanja. Pravilna gibanja mogu se opisati determinističkim pristupom koji predviđa mogućnost određivanja budućih događaja na temelju određenih početnih uvjeta. Nepravilna gibanja zahtijevaju drukčiji, statistički pristup, koji se u svojoj ranoj fazi primjenjuje na distribucije s dobro definiranim vrijednostima i varijancom. Osnovni takav primjer je Gaussova raspodjela, u kojoj je srednja vrijednost mjerenih veličina predstavljena kao najvjerojatniji ishod u seriji slučajnih varijabli, a varijanca kao mjera odstupanja. Međutim, ako promatramo Maxwell-Boltzmannovu ili Planckovu raspodjelu, cjelokupna raspodjela ima određeno fizičko značenje. Udaljenost od srednje vrijednosti više nije pogreška, a izrazito velike varijance nisu pokazatelj loših rezultata mjerenja. U ovakvim slučajevima, predviđanje ishoda predstavljeno je cjelokupnom distribucijom.

Cilj ovog rada je istražiti raspodjelu s beskonačnom varijancom, a u nekim slučajevima i s beskonačnom srednjom vrijednošću. Ovakvu raspodjelu nazivamo Lévyjeva raspodjela, koja je blisko povezana s fraktalnim trajektorijama nasumičnog šetača, koje nazivamo Lévyjev let. Kao što se Brownovo gibanje može primijeniti na jednostavnijim sustavima, Lévyjev let možemo primijeniti u nelinearnim, fraktalnim, kaotičnim i turbulentnim sustavima. Konačno, u radu ćemo na što jednostavniji način opisati stohastičke procese, njihovu konstrukciju, neka zanimljiva svojstva i njihovu primjenu u fizici te na drugim poljima znanosti.

U prvom dijelu rada pobliže ćemo se upoznati s procesom nasumičnog gibanja kojeg je prvi uočio botaničar Robert Brown. Brownovo gibanje je u skladu s centralnim graničnim teoremom koji govori kako srednja vrijednost dovoljno velikog broja nasumičnih varijabli, od kojih svaka ima konačnu varijancu, slijedi normalnu (Gaussovu) raspodjelu.

U drugom dijelu rada ćemo se baviti procesima koji odstupaju od centralnog graničnog teorema, a jedan od takvih procesa je Lévyjev let koji opisuje nasumičan hod kod kojeg duljine koraka imaju teškorepu (eng. heavy tailed) raspodjelu, odnosno



raspodjelu vjerojatnosti čiji krajevi nisu eksponencijalno određeni, što znači da je vjerojatnost za krajnje vrijednosti puno veća nego kod normalne raspodjele. Lévyjeva raspodjela je generalizacija normalne raspodjele za sumu velikog broja nezavisnih varijabli u slučajevima kada varijance varijabli divergiraju, odnosno idu u beskonačnost. Zbog svojih svojstava, ovakvi procesi pružaju izvrstan alat za opis mnogih prirodnih fenomena u područjima fizike i drugih znanosti.

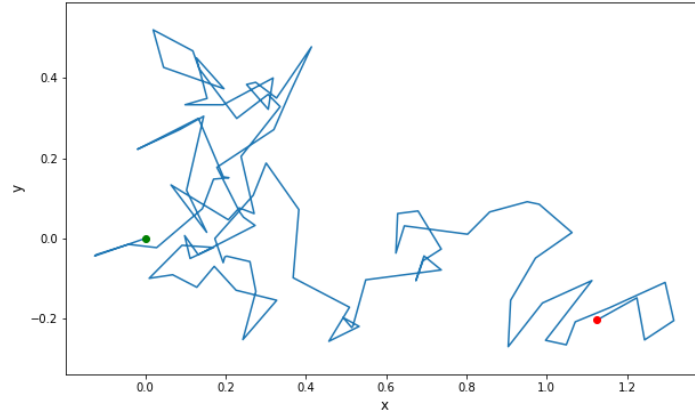
U završnom dijelu rada upoznat ćemo se s ekonofizikom i opisati primjenu Lévyjevog leta analizom dinamike vremenskih serija. Promatrajući promjenu financijskih pokazatelja u Altmanovom modelu, odnosno promjene kreditnog rejtinga poduzeća, pokazat ćemo da svaki od pokazatelja, uključujući i Altmanov Z pokazatelj, slijede Lévyjevu stabilnu raspodjelu. Na taj način ćemo primjenom teorije i metoda iz fizike pobliže opisati ponašanje određenog procesa u drugom području znanosti, odnosno ekonomiji.

## 2 Brownovo gibanje

Fizikalni fenomen Brownovog gibanja, koje je prikazano na Slici 2.1, opazio je škotski botaničar Robert Brown 1827. godine promatranjem sitnih čestica cvjetne peludi u vodi pod mikroskopom. Prateći putanju peludnog praha uočio je da se čestice nasumično gibaju, međutim nije znao objasniti uzrok takvog gibanja. Pokušao ga je objasniti postojanjem života unutar čestice i pretpostavkom da je gibanje neovisno o mediju u kojem se čestica nalazi, no nakon što je čestice peludi zamijenio neživim česticama minerala, opazio je slično kaotično gibanje te isključio svaku biološku osnovu kao uzrok ovakvog načina gibanja. Egzaktno teorijsko objašnjenje ovog fenomena dao je Albert Einstein 1905. godine. Čestice peludi se gibaju nasumično pod utjecajem sudara s manjim molekulama vode koje nailaze na nju iz svih smjerova i prilikom sudara predaju joj svoj impuls. Promatramo li učinak sudara na veliko tijelo, u svakom trenutku jednak broj čestica udara s jedne i s druge strane tijela i ukupna sila na tijelo jednaka je nuli. U slučaju kada imamo manje tijelo, poput zrnca peludi ili minerala, ukupna sila neće biti uravnotežena jer će efekti sudara s jedne strane tijela biti izraženiji. Također, pojavljuje se i sila trenja koja uzrokuje gušenje jer gibajuća čestica sudarom prenosi dio kinetičke energije na molekule vode. Sukladno tome, Einstein je razvio matematički model kojim je moguće predvidjeti gibanje Brownove čestice te povezao koncepte viskoznost i difuzije, što je omogućilo mjerenje Boltzmannove konstante  $k$  i Avogadrovog broja  $N_A$ . Premda je bilo nekoliko eksperimenata koji su nastojali dokazati Einsteinova predviđanja, konačnu potvrdu nizom eksperimenata napravio je Jean Perrin 1911. godine. Brownovo gibanje zauzima važnu ulogu u modernoj teoriji slučajnih procesa čije je otkriće značajno utjecalo na proučavanje Gaussovih i Markovljevih procesa te ima široku primjenu u mnogim područjima znanosti.

### 2.1 Model nasumičnog šetača

Matematički, Brownovo gibanje možemo opisati modelom nasumičnog šetača koji predstavlja česticu u jednodimenzionalnom prostoru koja se diskretnim koracima može gibati po pravcu. Vjerojatnost da se čestica pomakne u jednu ili drugu stranu pri svakom koraku je jednaka i ne ovisi o položaju na pravcu. U vremenskom intervalu od  $\tau$  sekundi, svaka čestica se otkloni od ravnotežnog položaja za udaljenost  $\delta$  s



**Slika 2.1:** 2D računalna simulacija putanje Brownove čestice početnog položaja (0,0) koja se giba nasumično odabranim koracima ( $n=100$  koraka). Zelenom bojom označen je početni, a crvenom bojom konačni položaj.

jednakom vjerojatnošću. Položaj  $i$ -te čestice nakon  $n$  koraka je

$$x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta. \quad (2.1)$$

Pretpostavimo da imamo  $N$  čestica. Prosječni pomak ukupnog broja čestica od ravnotežnog položaja tada je

$$\langle x(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n-1) \pm \delta = \langle x(n-1) \rangle. \quad (2.2)$$

Srednja vrijednost svakog pomaka je konstantna, a kvadrat prosječnog pomaka tada iznosi

$$\langle x^2(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2(n-1) \pm 2\delta x_i(n-1) + \delta^2] = \langle x^2(n-1) \rangle + \delta^2. \quad (2.3)$$

Predznak  $\pm$  u zagradi je u prosjeku nula zbog toga što je za polovicu čestica pozitivan, a za drugu polovicu negativan. Budući da je  $\langle x^2(1) \rangle = \delta^2$ ,  $\langle x^2(2) \rangle = 2\delta^2$ ,  $\langle x^2(3) \rangle = 3\delta^2$ , itd., možemo zapisati da je  $\langle x^2(n) \rangle = n\delta^2$ . Primjećujemo da se drugi korijen srednje vrijednosti pomaka povećava s brojem koraka  $n$ . Uzmimo da je  $t = n\tau$  iz čega slijedi

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\delta^2}{\tau} t = 2Dt, \quad (2.4)$$

pri čemu  $D$  predstavlja koeficijent difuzije koji opisuje gibanje čestica u određenom mediju pri nekoj temperaturi. Također, vidimo da prosječni kvadrat pomaka raste linearno u vremenu, odnosno pomak Brownove čestice nije proporcionalan s vremenskim intervalom, nego s njegovim drugim korijenom.

## 2.2 Newtonov opis gibanja čestice

Gibanje Brownove čestice možemo opisati i pomoću drugog Newtonovog zakona koji kaže, u slučaju da se masa čestice ne mijenja, da je zbroj svih sila koje djeluju na česticu jednak umnošku mase čestice  $m$  i rezultirajuće akceleracije čestice  $\vec{a}$ . Djelovanjem vanjske sile  $\vec{F}_v$  čestica će imati akceleraciju, međutim ona se nalazi u viskoznoj tekućini s koeficijentom trenja  $\gamma$  pa će na nju djelovati i sila trenja. Uzimajući u obzir djelovanje vanjske sile i sile trenja, jednadžba gibanja postaje

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + X, \quad (2.5)$$

pri čemu  $X$  predstavlja vanjsku silu. Pretpostavit ćemo da je otpor viskoznosti dan Stokesovim zakonom za silu trenja, tj.  $\gamma = 6\pi\eta r$ , pri čemu je  $\eta$  dinamička viskoznost fluida, a  $r$  radijus sfere, jer ćemo molekule aproksimirati sferama. Istražujemo kvadrat srednje vrijednosti pomaka čestice u nekom vremenskom intervalu  $t$ . Pomnožimo li jednadžbu (2.5) s  $x$ , ona će poprimiti sljedeći oblik

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma x \frac{dx}{dt} + xX. \quad (2.6)$$

Koristeći

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2.7)$$

i primjenjujući derivaciju  $x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$ , jednadžba postaje

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{\gamma}{2} \frac{d(x^2)}{dt} + xX. \quad (2.8)$$

Za oba člana jednadžbe uzet ćemo srednje vrijeme i član  $\langle xX \rangle$  tada u prosjeku postaje nula. Potom ćemo definirati  $z = d(x^2)/dt$  i primijeniti ekviparticijski teorem  $\langle mv^2 \rangle = kT/2$ , gdje je  $k$  Boltzmannova konstanta, koja u SI sustavu jedinica iznosi približno  $1.38 \cdot 10^{-23} \text{m}^2 \text{kgs}^{-2} \text{K}^{-1}$ , a  $T$  termodinamička temperatura. Ekviparticijski

teorem govori o tome kako je kinetička energija svakog stupnja slobode u idealnom plinu (tj. tekućini) jednaka  $kT/2$ . Budući da su čestice koje promatramo i tekućina u kojoj se ona nalazi u termodinamičkoj ravnoteži, istu energiju možemo uzeti i za kinetičku energiju čestice, tj.

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + \frac{\gamma}{2} z = kT. \quad (2.9)$$

Rješenje jednadžbe (2.9) je

$$z = \frac{2kT}{\gamma} + C \exp\left(\frac{-\gamma}{m}t\right). \quad (2.10)$$

Vremenska konstanta u eksponentu je mala stoga ju možemo zanemariti, prema tome možemo pisati

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2kT}{\gamma}, \quad (2.11)$$

i konačno rješenje jednadžbe (2.11) je

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\gamma} t. \quad (2.12)$$

Prosječni kvadrat odstupanja od početnog položaja raste proporcionalno s vremenom kao što smo pokazali i u prethodnom poglavlju. Iako ne možemo sa sigurnošću predvidjeti položaj čestice, možemo opisati koliko brzo će se gibati i na kojoj udaljenosti će se nalaziti nakon vremena  $t$ . Konačni efekt djelovanja nasumičnih sila molekula vode je kaotično gibanje veće čestice te je ukupni prijeđeni put u odnosu na početni položaj proporcionalan s  $\sqrt{t}$ , pri čemu je  $t$  vremenski interval u kojem promatramo gibanje.  $D = kT/\gamma$  je Einsteinova relacija prema kojoj jednadžba (2.12) postaje  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ . Ovakvo rješenje predstavlja rješenje u jednoj dimenziji, no s obzirom da su gibanja u svakoj dimenziji nezavisna, kvadrat srednje udaljenosti u tri dimenzije će izgledati kao

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 6Dt, \quad (2.13)$$

što ćemo i pokazati u sljedećem poglavlju.

Veličina  $\gamma$  povezuje konstantu difuzije  $D$  koja je makroskopsko svojstvo i koeficijent trenja  $\eta$  koji ovisi o mikroskopskom svojstvu čestice. Konstanta difuzije  $D$

Brownove čestice povezana je i s njenom mobilnosti  $\mu$  preko jednadžbe

$$D = \mu kT = \frac{\mu RT}{N} = \frac{RT}{6\pi\eta r N}, \quad (2.14)$$

gdje je  $R$  univerzalna plinska konstanta koja je ekvivalentna Boltzmannovoj konstanti  $k$  čija je vrijednost  $R = 8,314472 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

Da jednadžba (2.13) vrijedi za Brownovo gibanje možemo se uvjeriti i eksperimentalno mjereći male pomake difuzije polistirenskih<sup>1</sup> zrnaca u vodi. Graf kvadrata srednjeg pomaka čestice u ovisnosti o vremenu će biti linearan s nagibom određenim koeficijentom difuzije  $D$ . Poznavajući  $D$ , preko Stokesovog zakona zakona za silu trenja možemo izračunati Boltzmannovu konstantu  $k$  koristeći Einsteinovu relaciju (2.14).

## 2.3 Difuzija

Promatramo česticu u vremenskim intervalima  $k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots$  na koju nailazi veliki broj manjih molekula vode i pomiču ju po pravcu u jednoj dimenziji za određeni iznos  $h$ . Vjerojatnost da se čestica otkloni u jednu stranu je  $p$ , a u suprotnu stranu  $q = 1 - p$ . Definirat ćemo funkciju vjerojatnosti  $f(x, t)$  da se gibajuća čestica iz početnog položaja  $x = 0$  u trenutku  $t = 0$  pod utjecajem  $N$  sudara otkloni u položaj  $x$  za vrijeme  $t = N\tau$ . Tada  $f(x, t)$  zadovoljava jednadžbu

$$f(x, t + \tau) = pf(x - h, t) + qf(x + h, t). \quad (2.15)$$

Jednadžba (2.15) opisuje vjerojatnost pomaka nasumičnog šetača u jednoj dimenziji. Ukoliko je  $p = 1/2$ , kažemo da je nasumična šetnja simetrična, u suprotnom je asimetrična.

Promotrimo kako se jednadžba mijenja ako  $h$  i  $\tau$  teže u nulu, odnosno u slučaju neprekidnosti. Moramo uvesti određena ograničenja za  $h$  i  $\tau$ , jer bi u protivnom rezultiralo time da se čestica u konačnom vremenskom intervalu otkloni u beskonačno s vjerojatnošću 1, što je fizikalno nemoguće. Iz istog razloga, vrijednosti  $p$  i  $q$  ne možemo odrediti proizvoljno. Oduzmemo li  $f(x, t)$  s obje strane jednadžbe (2.15) dobit

---

<sup>1</sup>Polistiren  $(C_8H_8)_n$  - polimer stirena i jedan od najčešćih plastičnih materijala.

ćemo

$$f(x, t + \tau) - f(x, t) = p[f(x - h, t) - f(x, t)] + q[f(x + h, t) - f(x, t)]. \quad (2.16)$$

$f(x, t)$  je derivabilna po  $t$  i dvostruko derivabilna po  $x$ ,

$$\begin{aligned} f(x, t + \tau) - f(x, t) &= \tau \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau) \\ f(x - h, t) - f(x, t) &= -h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ f(x + h, t) - f(x, t) &= +h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Uvrstimo li u jednadžbu (2.16), ona će izgledati kao

$$\tau \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau) = -(p - q)h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.17)$$

Da bismo dobili konačnu granicu, moramo definirati uvjet da kada  $N$  teži u beskonačno, odnosno kada imamo iznimno veliki broj čestica i pri  $t = N\tau$ ,

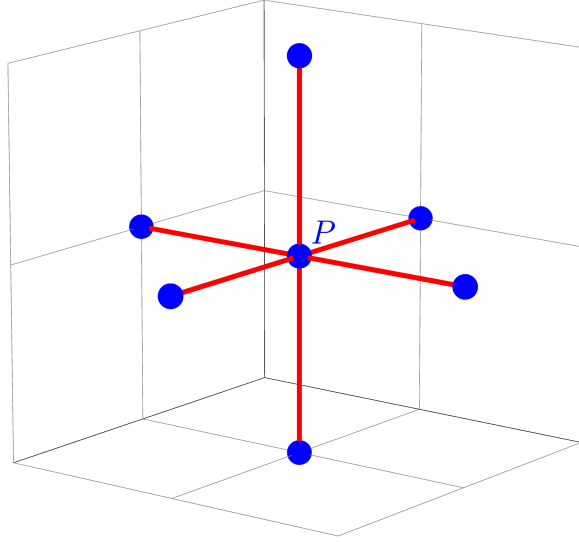
$$\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 2D \quad \text{ i } \quad (p - q) \frac{h}{\tau} \rightarrow v, \quad (2.18)$$

gdje su  $v$  i  $D$  konstante, odnosno driftna brzina i koeficijent difuzije. Uvrštavanjem granica, jednadžba (2.17) postaje

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

s početim uvjetom  $f(x, 0) = \delta(x)$ . Postavljanje problema na prethodno opisani način rezultiralo je fizikalno smislenim rezultatom koji dobro opisuje bitne značajke difuzije u prostoru. Promotrimo li nasumičnu šetnju u trodimenzionalnom prostoru u vremenskim intervalima  $k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots$  čestica u točki  $P$  s koordinatama  $r = (x, y, z)$  se za svaki interval otkloni s vjerojatnošću  $1/6$  u jednu od 6 susjednih točaka, prikazano na Slici 2.2. Vjerojatnost  $f(r, t)$  da se gibajuća čestica iz početnog položaja  $r = 0$  u vremenu  $t = 0$  pod utjecajem  $N$  sudara otkloni u položaj  $r = (N_1 h, N_2 h, N_3 h)$  u vremenu  $t = N\tau$  zadovoljava jednadžbu

$$f(r, t + \tau) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 f(r - h\hat{e}_i, t) + f(r + h\hat{e}_i, t), \quad (2.20)$$



**Slika 2.2:** 3D prostor s naznačenim početnim položajem točke  $P$  i prvim susjednim točkama

gdje je  $e_i$  jedinični vektor u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Iz toga slijedi

$$\tau \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau) = \frac{1}{6} h^2 \Delta f(r, t) + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.21)$$

$N$  ide u beskonačno iz čega slijedi da

$$\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 6D, \quad (2.22)$$

i konačno, dobivamo jednadžbu difuzije

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = D \Delta f(r, t). \quad (2.23)$$

Ako je čestica u položaju  $r = 0$  u trenutku  $t = 0$ , odnosno  $f(0, 0) = \delta(r)$ , onda je

$$f(r, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|r|^2}{4Dt}} \quad (2.24)$$

u trodimenzionalnom prostoru gdje je  $|r|$  euklidska udaljenost  $r$  od ishodišta. Prosječnu vrijednost velikog broja putanja  $\langle r^2(t) \rangle$  kvadrata pomaka Brownove čestice u



vremenskom intervalu  $t$  možemo zapisati i kao

$$\begin{aligned}\langle r^2(t) \rangle &= \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \int |r|^2 e^{-\frac{|r|^2}{4Dt}} d^3r \\ &= 3 \times \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} \int x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \\ &= 6Dt.\end{aligned}\tag{2.25}$$

te smo na ovaj način došli do istog rješenja kao i u prethodnom poglavlju, odnosno do istog oblika kao što je i jednačba (2.13).

## 2.4 Brownovo gibanje kao nasumična varijabla

Promotrit ćemo Brownovo gibanje u slučaju jednodimenzionalne simetrične nasumične šetnje.  $f(x, t)$  je raspodjela vjerojatnosti nasumične varijable

$$X_N = \sum_{k=0}^N \Delta X_k,\tag{2.26}$$

gdje je  $\Delta X$  pomak Brownove čestice između određenih vremenskih intervala. Budući je Brownova čestica okružena u prosjeku jednakim brojem molekula vode koji nailaze na nju iz svih smjerova, očekivani pomak čestice je nula jer je jednako vjerojatno da na nju naleti molekula iz bilo kojeg smjera. Kažemo da su  $\Delta X$  nasumične nezavisne varijable s prosječnom vrijednosti jednakom nula te varijancom

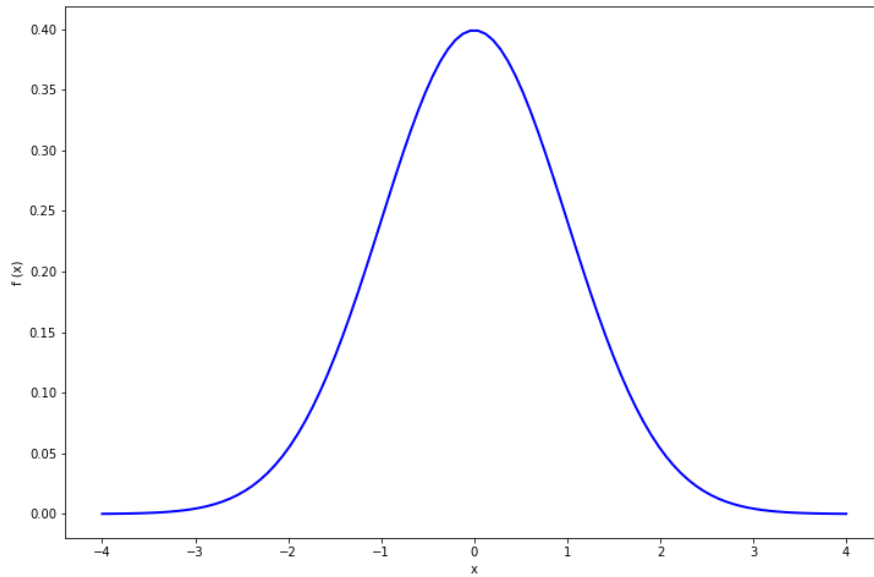
$$Var(\Delta X) = h^2 \left( \frac{1}{2} \right) + h^2 \left( \frac{1}{2} \right) = h^2.\tag{2.27}$$

U granici kada  $N \rightarrow \infty$ , odnosno kada imamo beskonačno mnogo čestica,  $t = N/\tau$  (makroskopsko vrijeme) je  $O(1)$  i budući je  $h^2/\tau$  također  $O(1)$ ,  $h^2 = O(\tau) = O(1/N)$ . Zaključujemo da je  $X_N$  suma nasumičnih varijabli s varijancom  $O(1/N)$ . Primjenjujemo centralni granični teorem koji se odnosi na granične zakone raspodjele niza nasumičnih varijabli. Suma velikog broja nasumičnih varijabli ima standardnu normalnu (Gaussovu) raspodjelu (Slika 2.3) i za  $\tau \rightarrow 0$  vrijedi

$$X^{(\tau)}(t) \equiv \sum_{k=0}^{t/\tau} \Delta X_k \rightarrow X(t),\tag{2.28}$$

pri čemu je  $X(t)$  nezavisna nasumična varijabla očekivane vrijednosti nula s varijancom  $Dt$  i gustoćom raspodjele

$$f(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}. \quad (2.29)$$



**Slika 2.3:** Graf gustoće raspodjele vjerojatnosti za Gaussovu raspodjelu s očekivanom vrijednosti 0 i varijancom 1.

Za centralni granični teorem vrijedi univerzalnost: bez obzira koja je raspodjela varijable  $\Delta X_k$ , granica jednadžbe (2.29) vrijedi. Pretpostavke da se čestice pomiču za jednake udaljenosti i da se interakcije događaju pravilno svakih  $\tau$  sekundi sada možemo zanemariti. Varijabla  $\Delta X_k$  je nezavisna i ima konačnu varijancu. Za varijablu  $\tau$  možemo reći da je nasumična te da ima eksponencijalnu raspodjelu pri čemu je  $X(t)$  nezavisna nasumična varijabla očekivane vrijednosti nula s varijancom  $Dt$  i gustoćom raspodjele

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} e^{\frac{-\tau}{\langle \tau \rangle}}, \quad (2.30)$$

koja proizlazi iz molekularno-kinetičke teorije. U granici neprekidnosti uzet ćemo  $\langle \tau \rangle \rightarrow 0$ . Ovako opisani model vjerojatnosti je mnogo realističniji opis nasumične šetnje. Uzmemo li Brownovu česticu koja se nalazi u fluidu temperature  $T$ , mase  $m$  i

$\langle \tau \rangle \sim \tau_B$ , možemo zapisati da je

$$D \sim \frac{(\Delta X)^2}{\langle \tau \rangle} \sim \langle v^2 \rangle \langle \tau \rangle \sim \frac{kT}{m} \mu m \sim \mu kT, \quad (2.31)$$

što zadovoljava Einstenovu jednadžbu (2.14). Možemo vidjeti da je vrijeme nakon sudara između dvije čestice obrnuto proporcionalno konstanti trenja i temperaturi. Veća brzina i temperatura dovode do češćih sudara između molekula i Brownovih čestica.

## 2.5 Brownovo gibanje kao stohastički proces

Promatrat ćemo jednodimenzionalno Brownovo gibanje čestice u određenom vremenskom intervalu pri čemu ćemo mjeriti položaj čestice  $x(t)$ . Ukoliko imamo  $N$  mjerenja položaja čestice, dobit ćemo skup položaja  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$  i takva raspodjela se naziva empirijska raspodjela  $x(t)$ , a skup svih mjerenja  $\mathbf{x}(t)$  zovemo nasumičnom (stohastičkom) varijablom. Niz nasumičnih varijabli s parametrom  $t$  zovemo stohastičkim procesom.

*Brownovo gibanje*  $B = \{B(t), t \geq 0\}$  je slučajni proces sa sljedećim svojstvima:

1. za proizvoljne  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$  t.d. je  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  nasumične varijable  $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  su nezavisne
2. za proizvoljne  $s, t$  t.d. je  $0 \leq s < t < \infty$  je  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
3.  $P(B_0 = 0) = 1$ , tj.  $B_0 = 0$  g.s.

Brownovo gibanje karakterizira svojstvo da ima nezavisne i stacionarne priraste te da je Gaussov proces s očekivanom vrijednosti nula i varijancom  $t$ . Također ima neprekidne i nigdje diferencijabilne trajektorije. Zbog nezavisnosti prirasta, Brownovo gibanje je Markovljev proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja koji je zadan stohastičkom diferencijalnom jednadžbom.

*Slučajni proces*  $X = \{X_t, t \in T\}$  je Markovljev proces ako vrijedi:

$$P(a < X_t \leq b \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(a < X_t \leq b \mid X_{t_n} = x_n) \quad (2.32)$$

za sve  $t_1, \dots, t_n, t \in T$  takve da je  $t_1 < \dots < t_n < t$  i za sve  $a, b, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  za koje su gornje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo (2.32) nazivamo Markovljevo svojstvo koje nam govori da buduća raspodjela vjerojatnosti procesa za dano trenutno stanje i sva prošla stanja ovisi samo o trenutnom stanju, a ne o bilo kojem prethodnom. U svakom trenutku sustav može preći u neko novo stanje ili ostati u istom. Ukoliko slijed ima Markovljevo svojstvo, svako buduće stanje vremenski je neovisno o prijašnjem stanju. Markovljev proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja i gotovo sigurno neprekidnim trajektorijama nazivamo difuzija, a najjednostavnija difuzija je upravo Brownovo gibanje.

## 2.6 Brownovo gibanje na financijskom tržištu

Brownovo gibanje ima značajnu ulogu u izradi statističkih modela koji se primjenjuju na financijskom tržištu, poglavito na tržištu dionica. Dinamika promjene vrijednosti dionica uvjetovana je raznim čimbenicima uz određeni izvor nesigurnosti kojeg ćemo modelirati Brownovim gibanjem. Za razumijevanje i izradu statističkog modela, potrebno je opisati geometrijsko Brownovo gibanje.

Stohastički proces  $S_t$  zadovoljava geometrijsko Brownovo gibanje ako zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_t = uS_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (2.33)$$

gdje je  $B_t$  stohastički dio diferencijalne jednadžbe, a  $u$  i  $\sigma$  konstante, odnosno pri-nos na dionice (eng. drift) i volatilnost<sup>2</sup>. Kako bi pronašli rješenje diferencijalne jednadžbe, primjenjujemo tehniku separacije varijabli prema kojoj jednadžba (2.33) postaje

$$\frac{dS_t}{S_t} = u dt + \sigma dB_t. \quad (2.34)$$

---

<sup>2</sup>Volatilnost - mjerilo nepredvidive promjene neke varijable u nekom vremenskom periodu. Pojednostavljeno govoreći, volatilnost nekog financijskog instrumenta nam govori o veličini promjena njegove cijene u nekom proteklom periodu, a najčešće se računa kao standardna devijacija promjene cijene u tom periodu.

Integriranjem obje strane jednadžbe dobivamo

$$\int \frac{dS_t}{S_t} = \int (u dt + \sigma dB_t) dt. \quad (2.35)$$

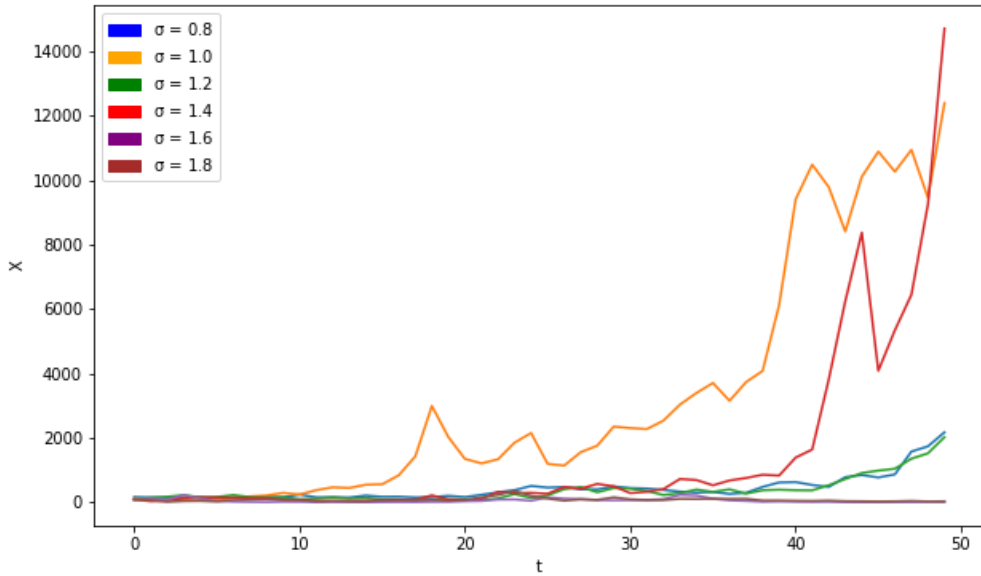
Za proizvoljan  $S_0$  i primjenom Itô leme dobivamo konačno rješenje jednadžbe (2.34)

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(u - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right). \quad (2.36)$$

Rješenje za  $S_t$  uz bilo koju vrijednost  $t$  je log-normalna raspodjela s očekivanom vrijednosti i varijancom

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= S_0 e^{ut}, \\ \text{Var}(S_t) &= S_0^2 e^{2ut} (e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned}$$

Prikaz geometrijskog Brownovog gibanja možemo vidjeti na Slici 2.4.



**Slika 2.4:** Grafički prikaz geometrijskog Brownovog gibanja za različite varijance ( $u = 1$ ).

Geometrijsko Brownovo gibanje koristi se pri modeliranju cijena dionica jer se ovaj proces u velikom dijelu slaže s realnim očekivanjima te su izračuni pomoću njega prilično jednostavni. Glavni argument za korištenje ovakvog procesa je nezavisnost očekivane vrijednosti od trenutne te pretpostavljene pozitivne vrijednosti, kao što je

slučaj i kod kretanja cijena dionica. Međutim, sam proces nije potpuno realističan jer se u stvarnom tržištu dionica volatilnost mijenja s vremenom, dok je pri Brownovom procesu ona konstantna. Također, cijene dionica često naglo variraju pod utjecajem nepredvidljivih događaja ili vijesti, dok je kod navedenog procesa putanja kontinuirana.

Očekivani prinos  $u$  mjeri se godišnjom stopom uz pretpostavku kontinuiranog prirasta. Investitori su općenito skloniji trenutnoj potrošnji i zbog toga očekuju od investicija nagradu za odgađanje potrošnje koja odgovara razini kamatnih stopa u gospodarstvu. Što su kamatne stope više, izraženija je sklonost potrošnji u sadašnjosti, pa se zahtijeva i viši očekivani prinos na bilo koju dionicu. Investitori su također osjetljivi i na rizik, stoga za preuzeti veći rizik zahtijevaju viši očekivani prinos. Na taj se način očekivani prinos javlja kao cijena kapitala koja se sastoji od cijene vremena i cijene rizika.

Volatilnost cijene dionica  $\sigma$  mjera je neizvjesnosti prinosa na dionice. Može se definirati kao standardno odstupanje prinosa od očekivane vrijednosti, a mjeri se standardnom devijacijom. Vrijednosti devijacije  $\sigma$  za dionice kreću se u rasponu od 20% do 50%. Standardna devijacija promjene cijene dionica u kratkom vremenskom intervalu jest  $\sigma\Delta t$ . U relativno dužem vremensku intervalu  $T$ , aproksimativno se može zapisati kao  $\sigma\sqrt{T}$ . Iz toga slijedi da se volatilnost može interpretirati kao standardna devijacija promjene u cijeni dionice u jednoj godini. Standardna devijacija promjene u cijeni dionice raste približno s drugim korijenom vremena. [7]

Univerzalnost zakona difuzije, odnosno Brownovog gibanja, može se objasniti preko centralnog graničnog teorema koji opisuje ponašanje sume nasumičnih varijabli. Ako je  $x_1, x_2, \dots, x_N$  serija nasumičnih  $N$  brojeva, njihova suma iznosi  $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ . Za veliki  $N$ , ona je varijabla čija je vjerojatnost određena Gaussovom raspodjelom s očekivanom vrijednosti  $\mu$  i standardnom devijacijom  $\sigma$ , Slika 2.3. Pitamo se postoji li slučaj kada ćemo morati izbjeći centralni granični teorem, odnosno kada određeni proces neće zadovoljavati Gaussovu raspodjelu. Primjer takvog procesa je ako imamo snažne fluktuacije gdje vjerojatnost promatranja atipičnih događaja nije zanemariva. Procese koji se ne ponašaju u skladu s centralnim graničnim teoremom, odnosno ne slijede normalnu raspodjelu, opisat ćemo u sljedećem poglavlju.

### 3 Lévyjev let

Promotrimo li posudu s vodom u kojoj se nalazi određena količina soli i počnemo li snažno miješati vodu u posudi, sol će se brzo raspršiti i gibanje čestice više nećemo biti u mogućnosti opisati u okvirima Gaussove raspodjele. Poveznica između matematičke ideje i fizikalnog koncepta difuzije je centralni granični teorem koji u pravilu ne možemo primijeniti ako vjerojatnost  $p(x)$  neke vrijednosti  $x$  opada sporije od  $1/x^3$  za veliki  $x$ , kao što je slučaj kod ovakvog gibanja. Generalizaciju centralnog graničnog teorema u ovakvim slučajevima opisao je Paul Lévy 1935. godine proučavajući difuzije koje se ne ponašaju u skladu s Brownovim gibanjem. Posljedica fluktuacija u prethodno opisanom i sličnim procesima je dvojaka. Suma  $X$  raste brže od drugog korijena broja članova i takva raspodjela više nije Gaussova, nego ju nazivamo stabilnom, odnosno Lévyjevom. Lévyjeve sume su posebne jer striktno prate hijerarhiju, odnosno jako mali broj članova dominira nad drugima, čiji doprinos ukupnoj sumi  $X$  postaje zanemariv. Prema tome, sumi doprinose samo dominantni članovi, za razliku od Gaussove kod koje svaki član doprinosi ukupnom rezultatu. Matematički, efekt difuzije mjerimo porastom varijance  $\sigma^2$  u vremenskom intervalu svih čestica koje se nasumično gibaju,

$$\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = 2Dt. \quad (3.1)$$

Pojedini koraci koje napravi nasumični šetač imaju različite duljine i vjerojatnost da šetač napravi korak duljine između  $l$  i  $l + dl$  je  $P(l)dl$ . Prema centralnom graničnom teoremu je

$$D = \frac{\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2}{2T}, \quad (3.2)$$

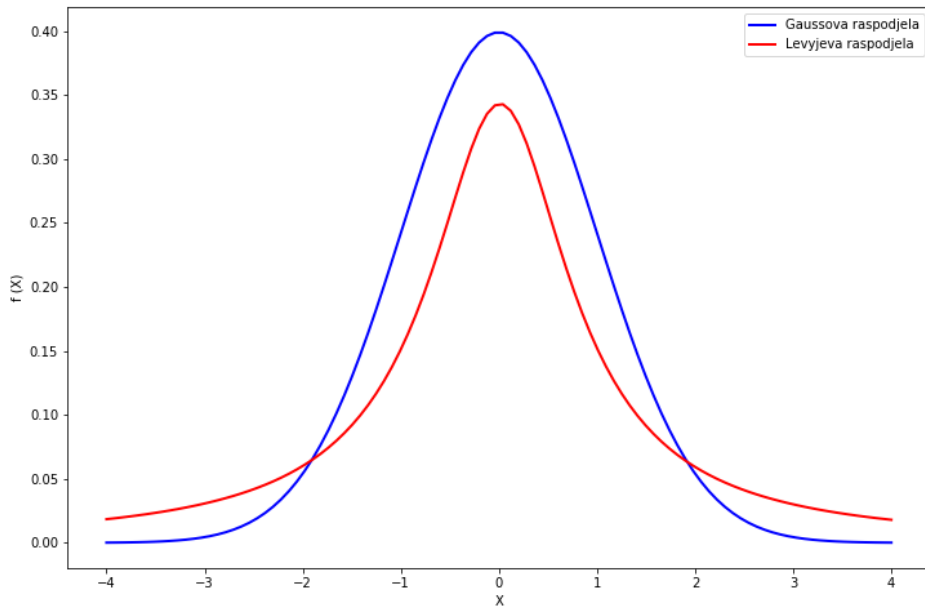
pri čemu je  $T$  vrijeme između dva koraka i

$$\langle l^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dl l^n P(l). \quad (3.3)$$

Jedina poveznica koju jednadžba (3.3) ima s konstantom difuzije je preko prva 2 člana,  $\langle l \rangle$  i  $\langle l^2 \rangle$ . Ovaj rezultat možemo primijeniti i na više dimenzija s varijancom definiranom kao  $\sigma^2 = \langle \vec{x} \cdot \vec{x} \rangle - \langle \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{x} \rangle$  i dužinom pojedinog koraka  $l$ .

U prethodna dva desetljeća, fizičari su se više zainteresirali za proučavanje procesa nasumične šetnje pri kojima drugi član u brojniku jednadžbe (3.2) pojedinog

koraka teži u beskonačno, tj.  $\langle l^2 \rangle = \infty$ . Takve nasumične šetnje nazivamo Lévyjev let (eng. Lévy flight). Lévyjev let je nasumični hod kod kojeg duljine koraka imaju teškorepu (eng. heavy-tailed) raspodjelu vjerojatnosti. Teškorepa raspodjela jest raspodjela vjerojatnosti čiji krajevi nisu eksponencijalno omeđeni, što znači da je vjerojatnost za krajnje vrijednosti puno veća nego kod normalne raspodjele, Slika 3.1.



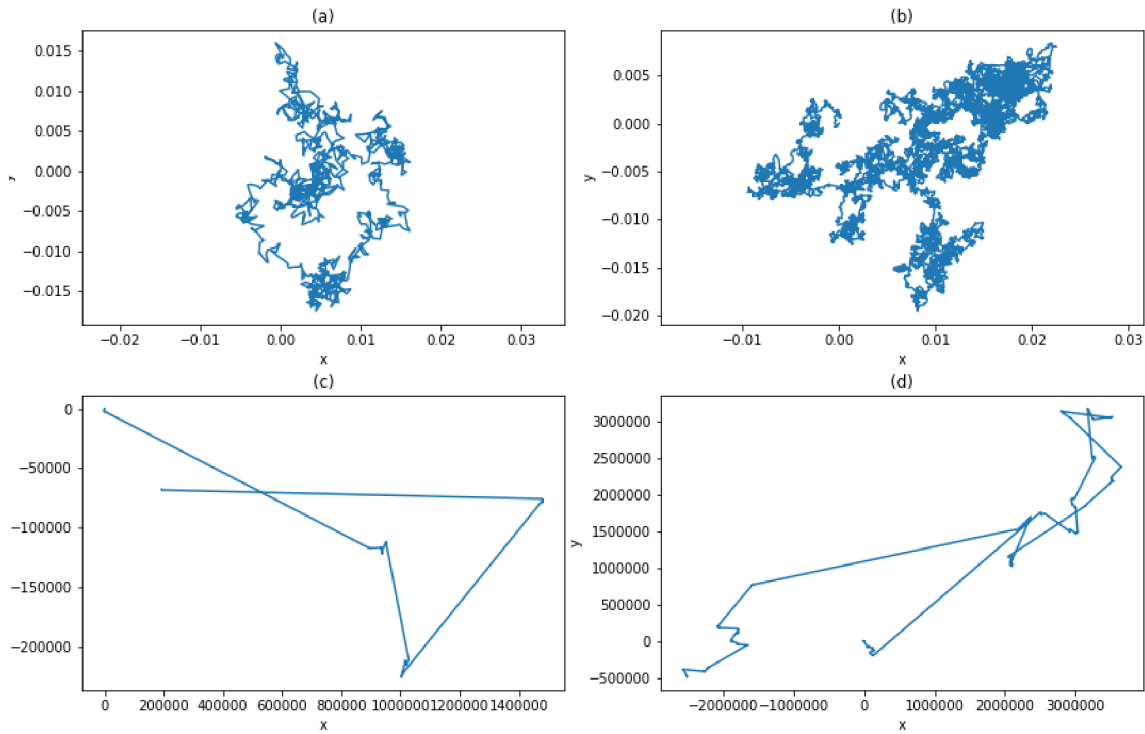
**Slika 3.1:** Grafički prikaz normalne (Gaussove) i teškorepe (Lévyjeve) raspodjele.

Ukoliko raspodjela vjerojatnosti opada s  $P(l) \sim l^{-\mu}$ ,  $\langle l^2 \rangle = \infty$  u slučaju kada je  $\mu < 3$  (integral u jednadžbi (3.3) divergira). U tom slučaju, varijanca raste brže nego linearno u vremenu:  $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$ , s uvjetom  $1 < \gamma < 2$  i takvo gibanje nazivamo superdifuznim. Ukoliko je  $0 < \gamma < 1$ , gibanje nazivamo subdifuznim. Normalna difuzija je u slučaju kada je  $\gamma = 1$ , a anomalija nastaje kada je  $\gamma \neq 1$ . Primjer normalne nasumične šetnje je na Slici 3.2a i 3.2b, dok je na Slici 3.2c i 3.2d primjer superdifuzne šetnje. U oba slučaja,  $P(l) \sim l^{-\mu}$  za veliki  $l$ ; za normalnu nasumičnu šetnju  $\mu = 3.8 > 3$ , a za superdifuznu nasumičnu šetnju  $\mu = 2.2 < 3$ .

### 3.1 Svojstva stabilne raspodjele

Pitamo se kada vjerojatnost  $P_N(X)$  za sumu  $N$  koraka nasumičnog šetača  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  ima jednaku raspodjelu  $p(x)$  kao pojedini korak. Standardni





**Slika 3.2:** Grafički prikaz nasumične šetnje za normalnu difuziju (a) nakon 1000 koraka i (b) nakon 10000 koraka te nasumične šetnje (Lévyjevog leta) za superdifuziju (c) nakon 1000 koraka i (d) nakon 10000 koraka. Na (c) i (d) primjećujemo velike skokove u oba slučaja. Za obje nasumične šetnje prosječna duljina koraka  $\langle l \rangle = 1$ , kut je proizvoljan za svaki korak, a duljina koraka je definirana distribucijom vjerojatnosti koja opada s  $P(l) \sim l^{-\mu}$  za veliki  $l$ .

odgovor bi bio da  $p(x)$  ima Gaussovu raspodjelu, jer kao što smo već naveli, suma  $N$  Gaussijana je također Gaussian, ali s  $N$  puta varijancom različitom od početne. Lévy je pokazao da postoji i drugo rješenje ovakvog problema. Sva druga rješenja naravno moraju uključivati nasumične varijable s beskonačnom varijancom. Prvo takvo rješenje pokazao je Augustin Cauchy 1853. godine transformiranjem  $x$  prostora u Fourierov  $k$  prostor

$$\tilde{p}_N(k) = \exp(-N |k|^\beta). \quad (3.4)$$

Vidimo da je Lévyjeva raspodjela generalizacija Gaussove raspodjele za sumu velikih brojeva nezavisnih varijabli u slučajevima kada varijance varijabli divergiraju, što je generalizirani centralni granični teorem. Lévy je pokazao da  $\beta$  u jednadžbi (3.4) mora biti između 0 i 2 da bi  $p(x)$  bio pozitivan za svaki  $x$  što je neophodno za prikaz raspodjele. U slučaju kada je apsolutna vrijednost  $x$  velika,  $p(x)$  je približno  $|x|^{-1-\beta}$ , što implicira da je drugi član od  $p(x)$  beskonačan kada je  $\beta$  manja od 2. Iz prethodnog vidimo da ne postoji karakteristična veličina skoka nasumičnog šetača osim u slučaju kada je  $\beta = 2$  (Gauss) i opisujemo svojstva stabilne distribucije:

1. Raspodjela sume nezavisnih identičnih stabilnih nasumičnih varijabli jednaka je raspodjeli svake varijable (do faktora skaliranja). Nasumična varijabla sa stabilnom distribucijom ima simetričnu stabilnu distribuciju ukoliko je njena distribucija simetrična. Ako nasumična varijabla ima simetričnu stalnu distribuciju, tada je njena distribucija i strogo stabilna.

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i = c_n X; \quad c_n = n^{1/\alpha}; \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.5)$$

pri čemu je  $\alpha$  Lévyjev parametar, a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  su nezavisne i jednako distribuirane nasumične varijable. Za Gaussovu raspodjelu vrijedi:  $\alpha = 2$ ,  $c_n = n^{1/2}$ .

2. Generalizirani centralni granični teorem: stabilne raspodjele su granične za raspodjele suma nasumičnih varijabli. Nasumična varijabla ima stabilnu distribuciju s parametrom stabilnosti  $0 < \alpha \leq 2$  ako i samo ako postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih nasumičnih varijabli  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Gauss:  $f(x)$  s konačnom varijancom

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx < \infty. \quad (3.6)$$

Lévy:  $f(x)$  s bekonačnom varijancom

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \infty, \quad f(x) \sim x^{-1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (3.7)$$

3. Zakon potencija  $\rightarrow$  teškorepa raspodjela. Vjerojatnost za krajnje vrijednosti je puno veća nego kod normalne (Gaussove) raspodjele.

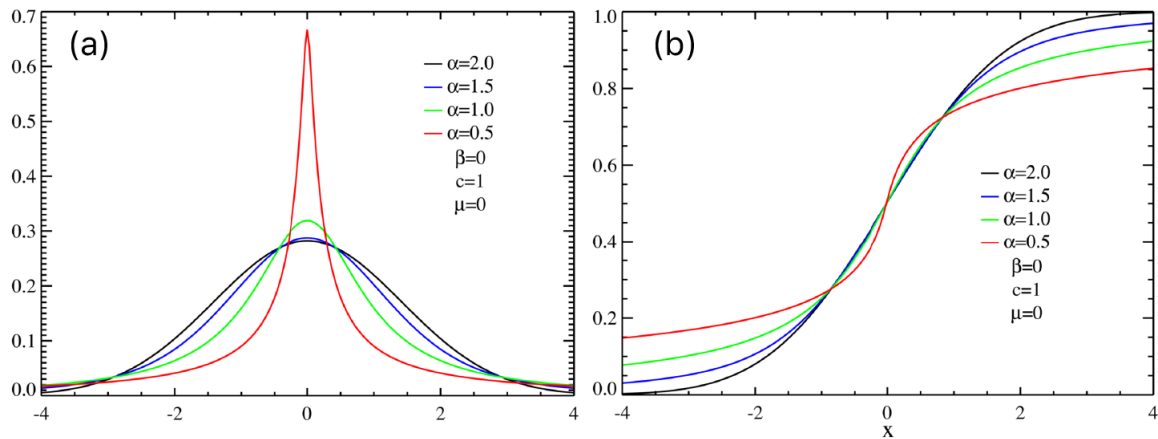
Lévyjev let spada među Markovljeve procese što znači da raspodjela vjerojatnosti budućeg procesa ovisi samo o trenutnom stanju, a ne o nizu događaja iz prošlosti. Lévyjeva alfa-stabilna raspodjela pripada stabilnim raspodjelama, uz Gaussovu i Cauchyjevu. Karakteristična svojstva takvih raspodjela mogu se opisati pomoću četiri parametra,  $\mu, c, \beta$  i  $\alpha$ .

- $\mu, \mu \in (-\infty, \infty)$  - lokacijski parametar koji određuje lokaciju ili ukazuje na pomak grafa raspodjele. Funkcija gustoće vjerojatnosti s lokacijskim parametrom  $\mu$  izgleda kao

$$f_{\mu, \theta} = f_{\mu}(x - \mu) \quad (3.8)$$

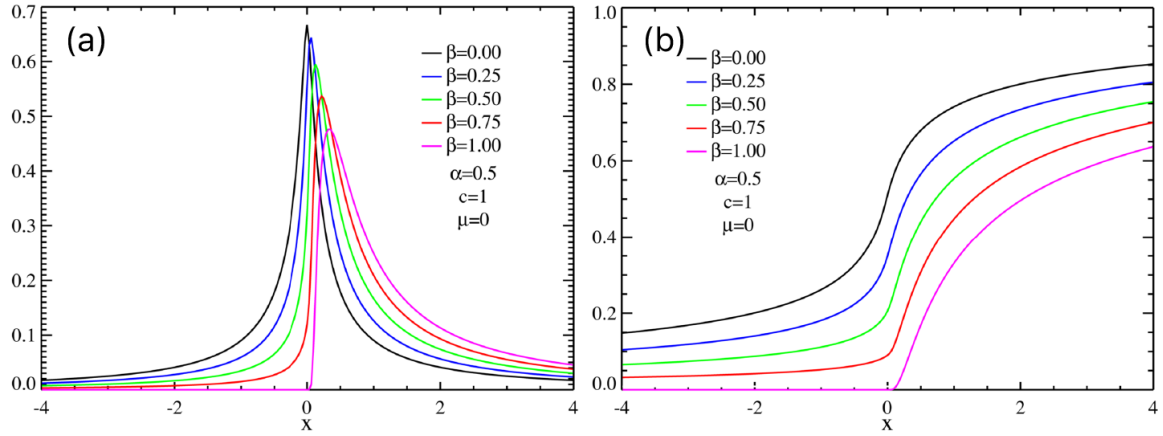
- $c, c \in (0, \infty)$  - parametar skaliranja koji opisuje raširenost raspodjele vjerojatnosti; za male vrijednosti  $c$ , raspodjela će biti više koncentrirana, a za velike vrijednosti će biti raširenija.
- $\alpha, \beta$  - parametri oblika raspodjele koji nisu niti lokacijski niti skalirajući te direktno utječu na oblik raspodjele za razliku od prethodno navedenih. Parametar  $\alpha \in (0, 2]$  naziva se parametar stabilnosti ili karakteristični eksponent. Za nasumičnu varijablu  $X$  koja ima stabilnu raspodjelu s parametrom stabilnosti  $\alpha$  kažemo da ima  $\alpha$ -stabilnu distribuciju. Ukoliko je parametar stabilnosti veći, tada će raspodjela biti stabilnija, odnosno protezat će se kroz manji interval, i obratno. Parametar  $\beta \in [-1, 1]$  nazivamo parametrom asimetričnosti koji govori o tome koliko će se razlikovati gustoća raspodjele za interval  $x > 0$  u odnosu na gustoću raspodjele za interval  $x < 0$ . Ovaj parametar može poprimiti negativne i pozitivne vrijednosti, međutim može biti i nedefiniran. Za  $\beta = 1$  raspodjela će postojati samo za vrijednosti  $x > \mu$ , a za  $\beta = -1$  za vrijednosti  $x < \mu$ .

Na Slici 3.3a prikazana je gustoća stabilne raspodjele, a na Slici 3.3b raspodjela nasumične varijable  $X$  uz različite vrijednosti parametre stabilnosti  $\alpha$ . Na Slici 3.4a



**Slika 3.3:** (a) gustoća stabilne raspodjele, (b) raspodjela nasumične varijable  $X$  za pomak nula, jedinično skaliranje, bez asimetrije, za različite parametre stabilnosti  $\alpha$ . Preuzeto iz [16].

prikazana je gustoća stabilne raspodjele, a na Slici 3.4b raspodjela nasumične varijable  $X$  uz različite vrijednosti parametra  $\beta$ . Lévyjeva raspodjela je stabilna raspodjela koja ima funkciju gustoće vjerojatnosti koja se može opisati analitički.



**Slika 3.4:** (a) gustoća stabilne raspodjele, (b) raspodjela nasumične varijable  $X$  za pomak nula, jedinično skaliranje, uz koncentriranost 0.5 za različite parametre asimetrije  $\beta$ . Preuzeto iz [16].

Funkcija gustoće raspodjele za Lévyjevu raspodjelu u području  $x \geq \mu$  je

$$f(x; \mu, c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-c}{2(x-\mu)}}}{(x - \mu)^{3/2}}, \quad (3.9)$$

gdje je  $\mu$  lokacijski parametar, a  $c$  parametar skaliranja. Funkcija raspodjele nasumične varijable  $x$  je  $F(x; \mu, c) = \text{erfc}(\sqrt{c/2(x - \mu)})$ , gdje je funkcija  $\text{erfc}(x)$  Gaussova funkcija kvantila koja se računa kao

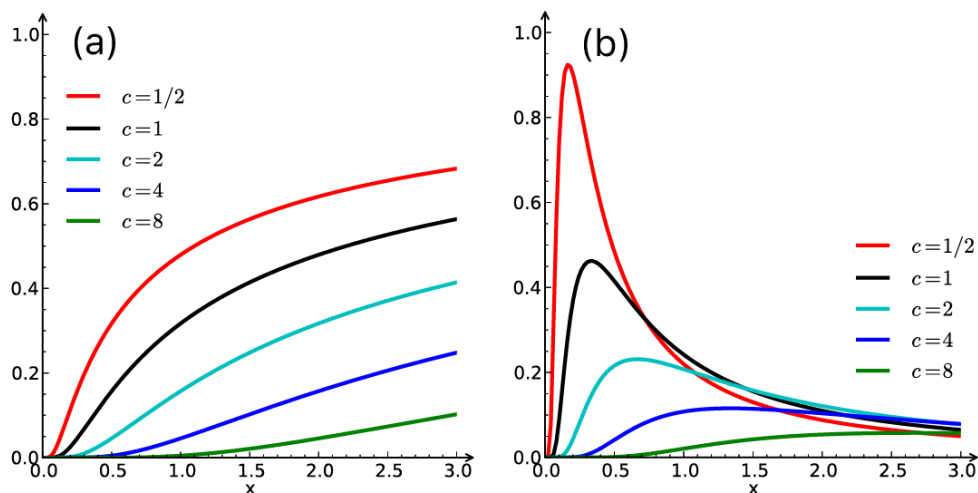
$$\text{erfc}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt. \quad (3.10)$$

Na Slici 3.5a prikazana je funkcija Lévyjeve raspodjele nasumične varijable  $x$ , a na Slici 3.5b gustoća Lévyjeve raspodjele vjerojatnosti, uz različite vrijednosti parametra skaliranja  $c$ .

$\alpha$  - stabilnu nasumičnu varijablu možemo definirati na više načina. Kažemo da je nasumična varijabla  $X$  stabilna ako za dvije nezavisne varijable  $X_1$  i  $X_2$  od  $X$  i za svaki  $a > 0$ ,  $b > 0$ , postoji  $c > 0$  i  $d \in \mathbb{R}$  t.d. je  $aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d$ , gdje  $\stackrel{d}{=}$  predstavlja jednakost u raspodjeli. Za određeni  $\alpha$ , raspodjela varijable  $X$  je simetrična  $\alpha$ -stabilna raspodjela ako je jednaka raspodjeli od  $-X$  i u tom slučaju funkciju gustoće raspodjele možemo zapisati kao

$$f_X^{\alpha, \gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\gamma q^\alpha) \cos(qx) dq, \quad (3.11)$$

pri čemu je  $0 < \alpha \leq 2$  i  $\gamma > 0$ . Za  $\alpha = 2$  dobivamo Guassovu raspodjelu, za  $\alpha = 1$



**Slika 3.5:** (a) funkcija Lévyjeve raspodjele nasumične varijable  $x$ , (b) gustoća Lévyjeve raspodjele vjerojatnosti, uz različite parametre skaliranja  $c$ . Preuzeto iz [16].

Cauchyjevu te za  $\alpha = 1/2$  Lévyjevu raspodjelu. Generalizacija centralnog graničnog teorema pokazuje da srednja vrijednost velikog broja nezavisnih nasumičnih varijabli s beskonačnom varijancom poprima oblik Lévyjeve stabilne raspodjele. Beskonačne varijance slijede raspodjelu po zakonu potencija. Općenito pravilo, kada kombiniramo dvije ili više varijabli koje slijede takvu raspodjelu,  $x^{1+\alpha}$ , je da ona varijabla s najmanjim eksponentom dominira kada  $x \rightarrow \infty$ , što vrijedi za slučaj kad čak i neke od varijabli zadovoljavaju Gaussovu raspodjelu.

### 3.2 Lévyjev let u fizici

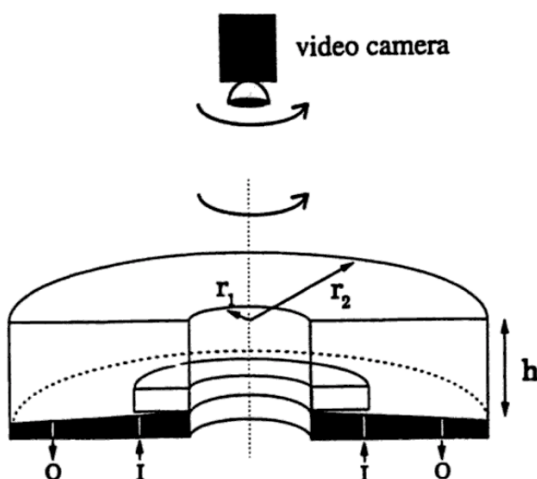
Pionir istraživanja u tom području je Benoit Mandelbrot koji je pokazao da su Lévyjeve raspodjele učestale u prirodi. Primjerice dobro opisuju način na koje se životinje kreću u potrazi za hranom, fluktuacije tržišta, ritam rada srca i dr. Lévyjev let se prvi put u fizici koristio pri objašnjenju fotovodljivosti amorfnih materijala [2]. Subdifuzno ponašanje primijećeno je u eksperimentima s vrtlozima u fluidu [3], dok se superdifuzno gibanje zapaža u slučajevima kada imamo okomito naglo titranje čestica fluida na površini. Također, ovakav način difuzije je zapažen kod gibanja oceana [4], kretanja fibroblasta<sup>3</sup> na površini kože [5] te u miješanju polimernih micela<sup>4</sup> [6].

<sup>3</sup>Fibroblast (lat. fibroblastus) - vrsta stanice vezivnog tkiva.

<sup>4</sup>Micela (lat. micella) - čestica koloidnih dimenzija u otopini.

### 3.2.1 Difuzija čestica u tekućini

Promatrane su nasumične šetnje u eksperimentu s brzorotirajućim spremnikom ispunjenim destiliranom vodom prikazanim na Slici 3.6. Spremnik je prstenastog oblika unutarnjeg radijusa 18,9 cm, vanjskog radijusa 43,2 cm i dubinom od 17,1 cm unutarnjeg cilindra te 20,3 cm vanjskog cilindra. Spremnik se giba kružnom frekvencijom 6,28 rad/s zajedno s kamerom koja snima pokus.

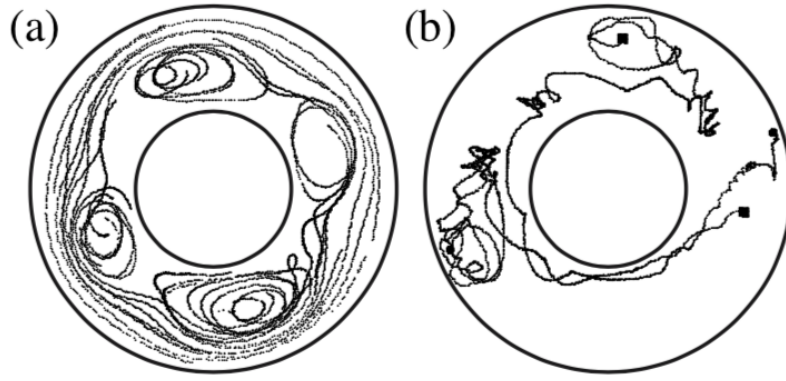


**Slika 3.6:** Spremnik rotira brzinom 1 Hz. Strujanje tekućine se postiže pumpanjem vode kroz rupe na dnu (točka I i točka O). Strujanje se promatra video kamerom koja rotira zajedno sa spremnikom. Preuzeto iz [8].

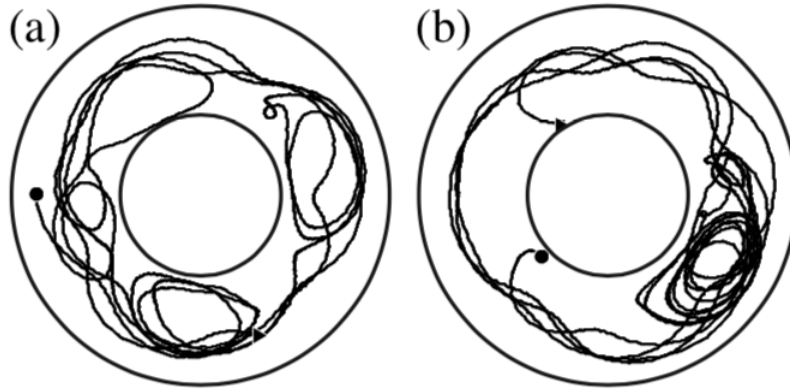
Posljedica ovako brze rotacije spremnika je dvodimenzionalno strujanje tekućine bez okomite komponente gibanja. U tekućinu se ubaci nekoliko stotina sitnih čestica voska i promatra se njihovo gibanje u vremenskom intervalu od 1000 s. Pojedinačne putanje se tumače kao trajektorije čestica, a ponašanje svih čestica kao skup nasumičnih šetnji. Strujanje tekućine postiže se ubrizgavanjem tekućine u rotirajući spremnik kroz rupe na dnu pri čemu se stvaraju 4 vrtloga koja sporo kruže oko spremnika, prikazano na Slici 3.7a.

Slika 3.8 prikazuje trajektorije dvaju čestica. Primijećeno je da se vrtlozi pomiču naprijed i nazad u odnosu jedan na drugog. Čestica koju promatramo ima složenu putanju, provodeći jedan dio vremena u jednom od vrtloga, zatim prelazeći u dio vanjskog strujanja. Kada čestica napusti vrtlog, odnosno dođe u dio vanjskog strujanja tekućine, prijeđe veliki put prije ulaska u sljedeći vrtlog.

Proučavanjem nekoliko stotina putanja čestica, može se odrediti dužina leta i njihova funkcija gustoće vjerojatnosti. Gustoća vjerojatnosti slijedi zakon potencija s



**Slika 3.7:** (a) prikazuje čestice koje se gibaju poput 4 vrtloga i strujanje tekućine u smjeru obrnutom od kazaljke na satu koja ih okružuje. Strujanje je prikazano iz sustava koji rotira zajedno s vrtlozima. (b) prikazuje dvije čestice u slabom strujanju tekućine pri kojem ne uočavamo dugoživuće koherentne strukture. Krajevi trajektorije jedne čestice označeni su krugovima, a druge kvadratima. Obje čestice se počinju gibati s desne strane. Preuzeto iz [8].



**Slika 3.8:** (a) i (b) prikazuju trajektorije dvaju čestica. Početak gibanja označen je krugom, a završetak trokutom. Preuzeto iz [8].

eksponentom  $\mu = 2.3 \pm 0.1$ . Budući je  $\mu < 3$ , drugi član koraka nasumičnog šetača je beskonačan pa je putanja čestice Lévyjev let, kao što smo i matematički pokazali u prethodnom poglavlju. Trajektorije čestica u eksperimentu na Slici 3.7b su nasumične, ali bez dugih koraka (letova). Funkcija gustoće vjerojatnosti za ovakve putanje opada eksponencijalno i svi članovi su konačni što znači da ovakvo gibanje nije Lévyjev let.

Za Lévyjev let očekujemo da varijanca raste superdifuzno, odnosno  $\sigma^2 \sim t^\gamma$ , s uvjetom  $1 < \gamma < 2$ . Račun povezuje eksponent u raspodjeli vjerojatnosti  $\mu$  s eksponentom varijance  $\gamma$ . Uz pretpostavku da se nasumični šetači gibaju konsantnom

brzinom i zadovoljavaju gustoću vjerojatnosti  $P(l) \sim l^{-\mu}$  pokazano je da vrijedi

$$\begin{aligned} \gamma &= 2, & 1 < \mu < 2, \\ \gamma &= 4 - \mu, & 2 < \mu < 3, \\ \gamma &= 1, & \mu > 3. \end{aligned}$$

Eksponencijalna funkcija raspodjele vjerojatnosti ima vrijednost parametra  $\gamma = 1$  prema centralnom graničnom teoremu. U slučaju kada je  $\gamma = 2$ , kažemo da gibanje prati balističku putanju, što možemo pokazati funkcijom gustoće raspodjele vjerojatnosti. Kada je  $1 < \gamma < 2$ , oba člana u funkciji gustoće raspodjele će biti beskonačni, kao i srednja duljina leta, tako da je u svakom trenutku nasumični šetač u sredini početnog leta. To možemo jednostavno pokazati ako zamislimo raspodjelu s beskonačnim prvim članom pri kojoj nasumični šetač napravi korak dužine 2 s vjerojatnošću  $1/2$ , dužine 4 s vjerojatnošću  $1/4$ , tj. generalno dužinu  $2^n$  s vjerojatnošću  $1/2^n$ . Prema tome svaki korak ima konačnu dužinu, ali srednja vrijednost ima dužinu  $\langle l \rangle = (1/2)(2) + (1/4)(4) + (1/8)8 + \dots = \infty$  što odgovara slučaju kada je u distribuciji  $\mu = 2$ . U slučaju kada je  $2 < \mu < 3$  imamo gibanje koje je najbliže superdifuznom. Za  $\mu > 3$  trajektorije više nisu Lévyjev let. Eksperimentom je prvi put uočeno gibanje čestica koje se mogu opisati Lévyjevim letom.

### 3.2.2 Transportna svojstva svjetla

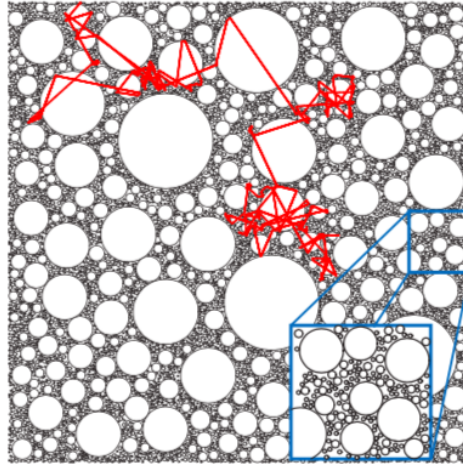
U proteklih nekoliko godina, svjetlost je čest alat u istraživanjima fenomena transporta. Promatranje transportnih svojstava svjetlosti je usko vezano s transportom elektrona i valova te su prilikom proučavanja otkriveni razni fenomeni poput Hallovog optičkog efekta, jakih i slabih lokalizacija, Blochovih oscilacija itd. Kako bi se promatrao Lévyjev let, potrebno je izraditi optički materijal u kojem je moguće proizvoljno izabrati duljine koraka u raspodjeli. Nizom eksperimenata pokazalo se da je optički transport u takvim materijalima superdifuzan ( $\gamma > 1$ ). Materijal mora imati fraktalna svojstva, poput titanijevog dioksida ( $TiO_2$ ) i potrebno je kontrolirati gustoću raspršenja, što se može postići ukoliko se materijal postavi u stakleni kalup. Nasumična šetnja u difuziji ima Gaussovu raspodjelu s prosječnom duljinom koraka. U slučaju Lévyjevog leta, materijal mora biti takav da povećava duljinu koraka prema



teškorepoj raspodjeli, odnosno

$$P(z) \rightarrow \frac{1}{z^{\alpha+1}}, \quad (3.12)$$

gdje je  $P(z)$  vjerojatnost koraka duljine  $z$ , dok je  $\alpha$  parametar koji određuje tip Lévyjevog leta te koji je povezan s eksponentom superdifuzije preko izraza  $\gamma = 3 - \alpha$ , za  $1 \leq \alpha < 2$ . Uzorci u eksperimentu su izrađeni od staklenih mikrosfera različitih promjera  $d$ , s točno određenom raspodjelom  $P_s(d)$ , između kojih se nalaze sitne čestice titanijevog dioksida. Svjetlost se propagira balistički unutar staklenih mikrosfera te se raspršuje na njihovoj granici, a trajektorije su Lévyjev let. Slika 3.9.



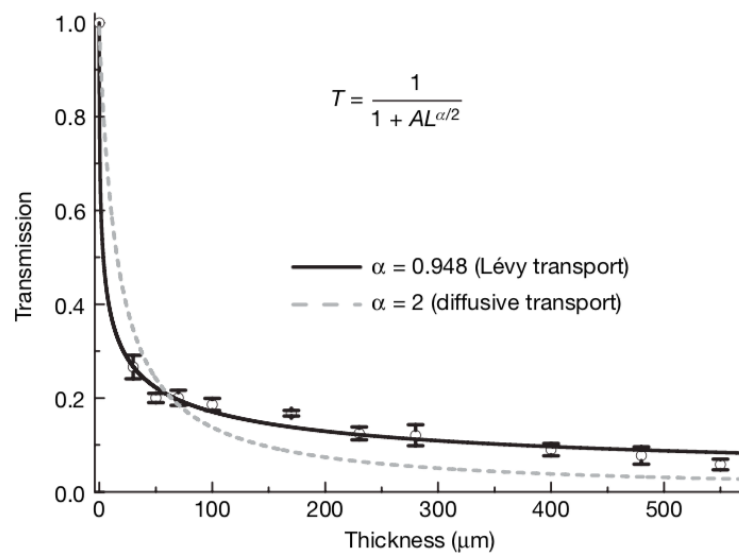
**Slika 3.9:** Putanja nasumičnog šetača. Zbog velike gustoće fluktuacija, materijal dozvoljava Lévyjev let (crvenom bojom). Plavom bojom je označen uvećani prikaz strukture materijala koji je invarijantan na skaliranje, odnosno posjeduje fraktalna svojstva. Preuzeto iz [9].

Izračunato je da raspodjela promjera mora biti  $P_s(d) = 1/d^{2+\alpha}$  kako bi putanje zadovoljile Lévyjev let. Za parametar stabilnosti uzima se  $\alpha = 1$  kako bi što jednostavnije analitički riješili problem. Izrađen je niz uzoraka debljine 30-550  $\mu\text{m}$  što omogućuje računanje ovisnosti ukupne transmisije o debljini uzorka. Helij-neonskim laserskim zrakama pogađamo uzorak na površini od 1  $\text{mm}^2$ . Ukupan emitirani snop svjetlosti u normalnoj difuziji opada slijedeći Ohmov zakon, što znači da emitirana svjetlost ovisi obrnuto proporcionalno o debljini uzorka. Kod takve superdifuzije za koeficijent transmisije  $T$  vrijedi

$$T = \frac{1}{1 + AL^{\alpha/2}}, \quad (3.13)$$

gdje je  $A$  konstanta, a  $L$  debljina uzorka. Rezultati eksperimenta prikazani su na Slici 3.10.

Ovakvi rezultati se jako dobro slažu s očekivanom vrijednošću ( $\alpha = 1$ ) za Lévyjev



**Slika 3.10:** Ukupna transmisija svjetlosti u ovisnosti o debljini uzorka. Za superdifuziju transmisija opada sporije nego u slučaju normalne difuzije, po zakonu potencija s eksponentom  $\alpha/2$ .  $\alpha = 0,948 \pm 0,09$ . Preuzeto iz [9].

let. Također, u slučaju Lévyjevog leta uočavamo teškorepu raspodjelu te velike fluktuacije, što nije slučaj kod normalne (Gaussove) raspodjele.

## 4 Primjena Lévyjevog leta u ekonofizici

Nemoguće je negirati utjecaj fizike i matematike u razvoju metoda i tehnika u ekonomskim znanostima, što smo vidjeli na primjeru Brownovog gibanja opisanog u prvom poglavlju. Također, primijećeno je kako prinosi burzovnih indeksa slijede raspodjelu koja je jako slična Gaussovoj. Ekonofizika je interdisciplinarno znanstveno područje u kojem se primjenjuju teorije i metode iz fizike radi rješavanja problema u ekonomiji. Kao disciplina formirala se 1990. godine od strane nekoliko fizičara koji su se bavili statističkom mehanikom. Nezadovoljni dostignućima u ekonomiji, pokušali su primijeniti metode iz fizike za preciznije objašnjenje ekonomskih fenomena. Ekonofizika se bavi brojnim problemima iz raznih područja ekonomije. Neki od njih su raspodjela prinosa na financijskim tržištima, raspodjela prihoda i bogatstva, ekonomskih kriza i varijacija stope rasta. Radovi u ekonofizici uglavnom se odnose na tri problema. Prvi je vremenska serija cijena dionica, stopa razmjene i cijena dobara. Veličina poduzeća, BDP i prihodi su drugi, a treći problem je mrežna analiza ekonomskih fenomena. Rezultati koje ekonofizičari postižu se vide i u njihovom radu u brojnim svjetskim kompanijama, a to su pretežito teorijski fizičari.

Sredinom dvadesetog stoljeća znanstvenici poput Simona i Mandelbrota su nastojali razriješiti kompleksne probleme koji su se javljali u brzo rastućim tržištima zapadnih zemalja nakon drugog svjetskog rata. U proteklih 30 godina, fizičari su postigli značajne rezultate na polju faznog prijelaza, statističke mehanike, nelinearne dinamike i neuređenih sustava. Veliki dio razumijevanja i opisa problema u navedenim poljima temelji se na statističkim konceptima kao što su skaliranje, nepredvidljive (stohastičke) vremenske serije i zakon potencija. Još prije stotinu godina talijanski ekonomist Pareto je statistički proučavao bogatstvo pojedinaca u stabilnoj ekonomiji modelom koji opisuje raspodjelu  $y \sim x^{-v}$ , gdje je  $y$  broj pojedinaca koji imaju prihod  $x$  ili veći od  $x$ , a  $v$  je eksponent koji iznosi 1,5 te je uočio da je ovaj račun primjenjiv i na druge zemlje. Još jedan koncept koji je sveprisutan u prirodnim znanostima je nasumična šetnja, koju je opisao Einstein 1905. godine. U narednim godinama Wiener detaljnije opisuje procese nasumične šetnje te se taj koncept počinje primjenjivati skoro u svim područjima istraživačkih znanosti. Kretanja cijena dionica na tržištu se godinama nastojalo objasniti raznim modelima. Jedan od njih je i geometrijsko

Brownovo gibanje pri kojem je razlika logaritama cijena dionica Gaussova raspodjela. Ovakav model funkcionira samo u prvoj aproksimaciji kada se primjeni na financijske vremenske serije, stoga su predloženi razni alternativni modeli.

Među predloženim modelima, najviše se izdvaja Mandelbrotova hipoteza da cijena pamuka slijedi Lévyjevu stabilnu raspodjelu koja je stohastički proces i zadovoljava generalizirani centralni granični teorem. Također, nalazimo da je asimetrična Lévyjeva funkcija gustoće raspodjele, koja ima beskonačnu varijancu, pouzdan model za računanje raznih kreditnih omjera koji se koriste u procjeni stabilnosti kompanija. Jedan od takvih omjera je Altmanov Z pokazatelj koji predstavlja multivarijantno istraživanje odnosa financijskih pokazatelja i vjerojatnosti za stečaj.

#### 4.1 *Financijski pokazatelji*

Kako bismo pobliže objasnili navedene modele, potrebno je opisati neke od osnovnih financijskih pokazatelja potrebnih za računanje određenih financijskih omjera. U ovom radu prikupljeni su podaci za 297 kompanija u SAD-u koje se bave proizvodnjom kroz proteklih 9 godina, u kvartalnim vremenskim serijama. Ključni podaci se nalaze u *bilanci* poduzeća, koja predstavlja prikaz imovine i obveza poduzeća na određeni dan, najčešće 31. 12. tekuće godine. Pomoću *balance* moguće je prikazati financijsku sliku poduzeća i na takav način odrediti misiju i viziju za daljnje poslovanje. Također, pomoću imovine prikazane u *bilanci* može se uočiti koji su financijski potencijali koje poduzeće posjeduje i na koji se način može najbolje iskoristiti u daljnjem poslovanju kako bi se ostvarila što veća dobit. *Bilanca* se može prikazati i promatrati kao sustav jednadžbe u kojoj se sa jedne strane prikazuje aktiva koja pokazuje imovinu poduzeća, a s druge strane pasiva koja pokazuje obveze poduzeća i glavicu. Shodno tome, između aktive i pasive mora postojati jednakost. Neki od osnovnih stavki u *bilanci* koje su nam potrebne za računanje kreditnog rejtinga u ovom radu su:

- *Obrtni kapital* (eng. *working capital*) - predstavlja razliku između kratkotrajne imovine i kratkoročnih obveza poduzeća. On je uvjet likvidnosti i financijske stabilnosti poduzeća te daje odgovor o tome koliko je likvidne imovine poduzeću na raspolaganju za održavanje i širenje poslovanja. Može imati pozitivnu ili negativnu vrijednost, a ovisi o strukturi imovine i dugovima poduzeća.

- *Ukupna aktiva (eng. total assets)* - označava vrijednost ukupne imovine poduzeća. Imovina se sastoji od dugotrajne i kratkotrajne, a ukupna aktiva je njihov zbroj.
- *Zadržana dobit (eng. retained earnings)* - je dio vlasničke glavnice poduzeća koji je nastao akumuliranjem dijela ostvarene dobiti iz prethodnih obračunskih razdoblja. Nalazi se u pasivi bilance stanja i pokazuje vrijednost kapitala vlasnika običnih dionica.
- *Tržišna kapitalizacija (eng. market capitalization)* - predstavlja ukupnu tržišnu vrijednost dionica poduzeća umanjenu za trezorske dionice. Računa se na način da se ukupan broj dionica pomnoži s trenutnom tržišnom cijenom.
- *Ukupne obveze (eng. total liabilities)* - odnose se na zbroj svih dugova poduzeća. Ukupne obveze poduzeća mogu se podijeliti na tri osnovna dijela: kratkoročne, dugoročne i druge obveze.
- *Prihod (eng. revenue)* - predstavlja povećanje neto vrijednosti koje nastaje kao rezultat financijskih transakcija.
- *Neto dobit (eng. net income)* - predstavlja višak ukupnih prihoda nad ukupnim rashodima koje poduzeće realizira u određenom razdoblju.
- *Tekuća (obrotna) sredstva (eng. current assets)* - imovina kojom raspolaže poduzeće, a koja traje manje od jedne godine i u proizvodnom procesu mijenja svoj oblik te se poslije završenog ciklusa ponovno pojavljuje u prvobitnom obliku, tj. prelazi iz jedne poslovne faze u drugu.
- *Tekuće obveze (eng. current liabilities)* - predstavljaju obveze ili dugove poduzeća koje dospijevaju unutar jedne godine ili unutar normalnog operativnog ciklusa. Uključuju kratkoročne obveze, obveze prema dobavljačima, obračunate obveze i slične dugove.
- *EBIT (eng. earnings before interest and taxes)* - odnosi se na iskazivanje operativne dobiti prije umanjivanja za kamate i poreza na dobit. Jedna je od mjera koja ukazuje na uspješnost poslovanja poduzeća te na taj način mjeri profitabilnost ne uzimajući u obzir troškove kapitala, odnosno financiranja ili porezne implikacije.

Edward I. Altman proveo je prvo multivarijantno istraživanje odnosa financijskih pokazatelja i vjerojatnosti za stečaj, čijim je istraživanjem nastao model nazvan Altmanov Z pokazatelj. [11] Nastao je na temelju analize podataka za 66 sjevernoameričkih proizvodnih kompanija za razdoblje od 1945. do 1965. godine. Formirane su dvije jednake grupe poduzeća: 33 poduzeća koja su bankrotirala i 33 uspješna poduzeća. Za potrebe istraživanja izračunata su 22 pokazatelja koja su postupkom multivarijantne diskriminacijske analize reducirana na pet pokazatelja s najvećom diskriminacijskom snagom. Diskriminacijska funkcija glasi

$$Z = 1,2X_1 + 1,4X_2 + 3,3X_3 + 0,6X_4 + 1,0X_5. \quad (4.1)$$

Kao rezultati dobiveni su sljedeći financijski omjeri:

1. *obrtni kapital / ukupna aktiva* ( $X_1$ ) - mjera neto likvidnosti u odnosu na ukupnu kapitalizaciju. Tako će tvrtka s negativnim omjerom  $X_1$  vjerojatno imati problema s podmirivanjem svojih kratkoročnih obveza jer je njena kratkotrajna imovina premala.
2. *zadržana dobit / ukupna aktiva* ( $X_2$ ) - mjereći relativnu veličinu reinvestirane zarade, ovaj pokazatelj odražava stupanj financijske poluge poduzeća. Nizak omjer upućuje na poslovnu politiku financiranja poslovanja zaduživanjem, a ne vlastitim financiranjem. Visok omjer sugerira profitabilnost poslovanja društva i sposobnost preživljavanja kroz periode nepovoljnih okolnosti.
3. *EBIT / ukupna aktiva* ( $X_3$ ) - omjer dobiti prije troška kamata i poreza prema ukupnoj imovini, koji je varijanta povrata na imovinu (eng. ROA, return on assets), koristi se za ocjenu sposobnosti tvrtke da iz svoje imovine ostvari zaradu. Ovaj omjer je naročito prikladan za zaključivanje o mogućnosti bankrota poduzeća.
4. *tržišna vrijednost dionica / ukupne obveze* ( $X_4$ ) - omjer pokazuje koliko sredstva poduzeća gube na svojoj vrijednosti prije no što obveze premaše imovinu. Veći omjeri se tumače postojanjem povjerenja ulagača u uspješno poslovanje društva, dok niski omjeri ukazuju na nepovjerenje i očekivanje slabih rezultata.
5. *neto prodaja / ukupna imovina* ( $X_5$ ) - iz ovog omjera iščitavamo sposobnost menadžmenta za uspješnost među konkurencijom, kao i uspješnost u ostvarivanje

prodaje uporabom vlastite imovine. Niski ili opadajući omjer znači da tržišni udio kompanije stagnira ili, što je vrlo nepovoljno, opada.

Zaključak istraživanja modela je bio da navedeni model najbolje razdvaja financijski uspješna poduzeća od onih poduzeća nad kojima je pokrenut stečajni postupak. Naime, poduzeća koja imaju Z pokazatelj veći od 3 smatraju se uspješnim i financijski zdravim poduzećima. Ukoliko imaju Z pokazatelj u intervalu od 1,81 do 2,99 smatraju se poduzećima koja posluju u sivoj zoni, a podložna su bankrotu te se karakteriziraju kao financijski ugrožena s mogućnošću ozdravljenja. Poduzeća čiji je pokazatelj manji od 1,80 su poduzeća koja će vrlo vjerojatno otići u stečaj. Pouzdanost modela prilikom korištenja podataka jednu godinu prije bankrota iznosila je 95%, za dvije godine 75%, za tri godine 48%, za četiri 36%, a za pet godina samo 29%. Na temelju izloženih podataka može se zaključiti da je veća vjerojatnost pogreške modela s produljenjem vremena predviđanja.

Budući da je prvotni model za predviđanje stečaja izveden korištenjem podataka proizvodnih poslovnih subjekata čije su vrijednosnice izlistane na burzi, Altman je 1993. godine revidirao izvorni model kako bi se mogao odrediti pokazatelj za privatna poduzeća, zamjenjujući tržišnu vrijednost knjigovodstvenom vrijednosti prilikom izračuna pokazatelja  $X_4$  te prilagodbom pondera<sup>5</sup>. Rezultat toga je Z' pokazateljski model

$$Z' = 0,717X_1 + 0,847X_2 + 3,107X_3 + 0,42X_4 + 0,998X_5. \quad (4.2)$$

Prilikom tumačenja ovog modela potrebno je obratiti pozornost na nove kritične vrijednosti koje iznose 2,90 i 1,23.

I pored uočavanja osnovnih nedostataka početnog Z pokazatelja modela i formuliranja modificirane verzije modela namijenjene poduzećima čijim se dionicama ne trguje na burzi, ovaj model se nije mogao primjenjivati na poduzeća koja se ne bave proizvodnjom. Uvidjevši ovaj nedostatak, Altman je izvršio još jedno revidiranje modela kako bi smanjio utjecaj grane djelatnosti kojim se poduzeće bavi. Naime, iz početnog modela je isključen pokazatelj  $X_5$ , jer su kod njega uočena najveća odstu-

---

<sup>5</sup>Ponderiranje (eng. ponderation) - postupak dodjeljivanja odgovarajuće važnosti pojedinim veličinama prilikom izračuna srednjih vrijednosti.

panja za pojedine djelatnosti. Revidirani model ima sljedeći oblik

$$Z'' = 6,56X_1 + 3,26X_2 + 6,72X_3 + 1,05X_4. \quad (4.3)$$

Dobiveni model je pogodan za analizu kreditnog boniteta proizvodnih i neproizvodnih industrijskih poduzeća, kao i za poduzeća koja posluju na tržištima u razvoju. Financijski uspješna poduzeća imaju  $Z''$  pokazatelj veći od 2,6. Poduzeća koja posluju u sivoj zoni imaju  $Z''$  pokazatelj u intervalu od 1,11 do 2,59, dok financijski neuspješna poduzeća imaju  $Z''$  pokazatelj manji od 1,10.

Pored Altmanovog, razvijeni su i drugi modeli za ocjenu rizičnosti. Jedan od njih je 1984. godine razvio Mark E. Zmijewski. U svom izračunu uključuje pokazatelje koji mjere uspješnost poslovanja, zaduženost i likvidnost poduzeća. Model Zmijewskog temelji se na podacima 800 poduzeća koja pripadaju financijski stabilnim poduzećima i 40 poduzeća čije je poslovanje završilo stečajem [10]. Multivarijantnom analizom dobiven je sljedeći model

$$Y = -4,5 - 4,5Y_1 + 5,7Y_2 - 0,004Y_3. \quad (4.4)$$

Kao rezultati dobiveni su sljedeći financijski omjeri:

1. *neto dobit / ukupna aktiva* ( $Y_1$ )
2. *ukupne obveze / ukupna akitva* ( $Y_2$ )
3. *obrtna sredstva / tekuće obveze* ( $Y_3$ ).

Odluka se donosi izračunavanjem vjerojatnosti za postizanje statusa neispunjavanja obveza na sljedeći način

$$P = \frac{1}{1 + e^{-Y}}. \quad (4.5)$$

Ovaj model ima granicu od 0,5, odnosno 50%. Ukoliko je dobivena vrijednost manja od 0,5, radi se o zdravom poduzeću, a ako je veća od 0,5 tada poduzeće ima veliku vjerojatnost za stečaj. Ukupna pouzdanost modela je 95,29%.

## 4.2 Vremenska dinamika bilančanih omjera

Kako bi prikazali proces Lévyjevog leta u području ekonofizike, primijenit ćemo ga na analizu dinamike vremenskih serija. Centralni granični teorem govori kako srednja

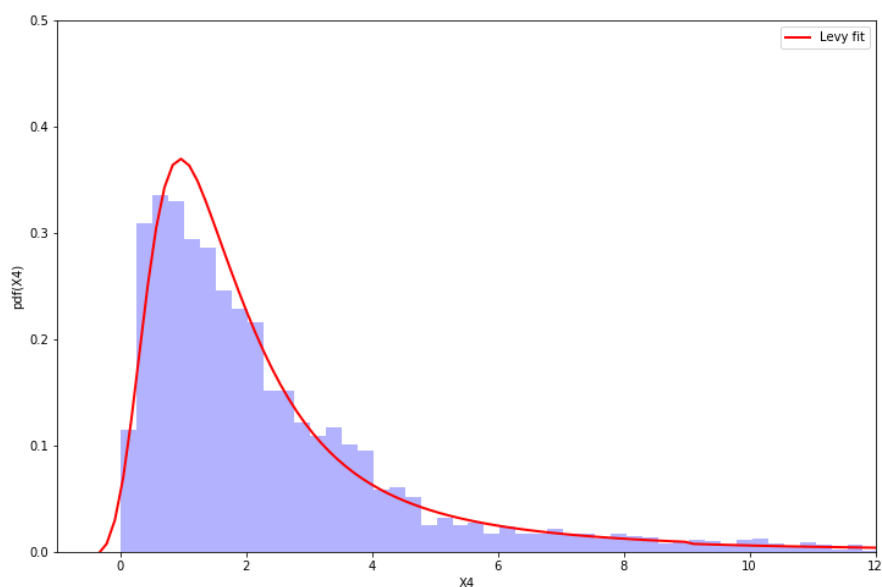


vrijednost dovoljno velikog broja nasumičnih varijabli, od kojih svaka ima konačnu varijancu, slijedi normalnu raspodjelu. Generalizacija navedenog teorema govori kako će srednja vrijednost dovoljno velikog broja nasumičnih varijabli koje imaju beskonačnu varijancu slijediti stabilnu Lévyjevu raspodjelu. Beskonačna varijanca je povezana sa zakonom potencija tako da vrijedi pravilo: ukoliko kombiniramo dvije ili više varijabli  $X^{1+\alpha}$ , ona varijabla s najmanjim eksponentom će dominirati u slučaju kada  $x \rightarrow \infty$ , što vrijedi čak i ako neke od varijabli slijede normalnu raspodjelu. Budući da se u ovom radu bavimo kreditnim rejtingom koji je opisan raznim finansijskim pokazateljima, kako i vidimo u jednadžbi (4.1), potrebno je naglasiti da će, ukoliko bilo koji od pokazatelja slijedi raspodjelu zakona potencija, kreditni rejting također slijediti takvu raspodjelu.

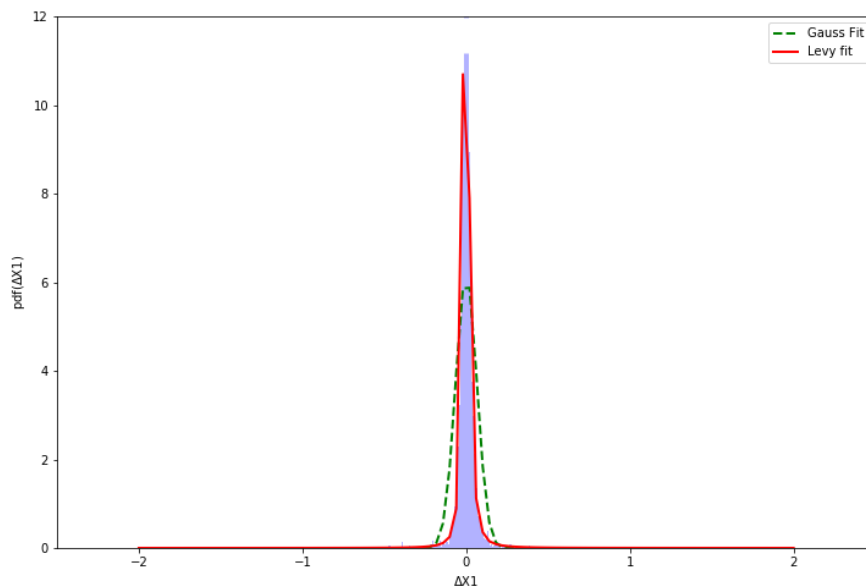
Za proučavanje kreditnog rejtinga preko Altmanovog modela, bilo je potrebno prikupiti podatke iz bilanci poduzeća te izračunati navedene finansijske pokazatelje. Podaci su prikupljeni iz Bloombergovog terminala za 297 poduzeća čije su dionice uvrštene u indeks S&P500 te koja se bave proizvodnjom. Naime, za poduzeća koja se bave proizvodnjom je karakteristično da zadržavaju stabilnost bankrota prilikom finansijske krize te sukladno tome Altmanov model računamo prema izrazu (4.1). S obzirom da fizikalnim metodama analiziramo dinamiku vremenskih serija, za svako poduzeće smo uzeli kvartalna izvješća od 2009. do 2018. godine, zaključno s prvim kvartalom 2018. godine, što čini ukupno 37 vremenskih intervala.

Analizom podataka smo ustanovili kako jedino pokazatelj  $X_4$  u Altmanovom modelu slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,03$  i  $\beta = 1,0$  što možemo vidjeti i na Slici 4.1. Kako bi proučavali dinamiku kreditnog rejtinga, nećemo se fokusirati na pokazatelje, nego na njihovu promjenu u vremenu. Promatrajući promjenu pokazatelja u vremenu  $\Delta X_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , koja je povezana s promjenom kreditnog rejtinga, a samim time i kreditnog rizika, pokazat ćemo da svaki od pet pokazatelja u vremenu slijede asimetričnu Lévyjevu raspodjelu. Prosječna vrijednost parametara za promjenu pokazatelja  $\Delta X_i$  je  $\alpha = 1,18 \pm 0,12$  i  $\beta = 0,10 \pm 0,09$ . Grafičke prikaze pojedinih promjena pokazatelja možemo vidjeti na Slikama 4.2-4.6.

Primjećujemo da svaki od pokazatelja, odnosno njihove promjene u vremenskim intervalima dobro slijede Lévyjevu raspodjelu, s tim da promjena pokazatelja  $\Delta X_4$  ima najbližu vrijednost predviđenom parametru  $\alpha = 1$ . Sukladno tome, zaključujemo kako će i Altmanov model u vremenskim serijama također slijediti Lévyjevu

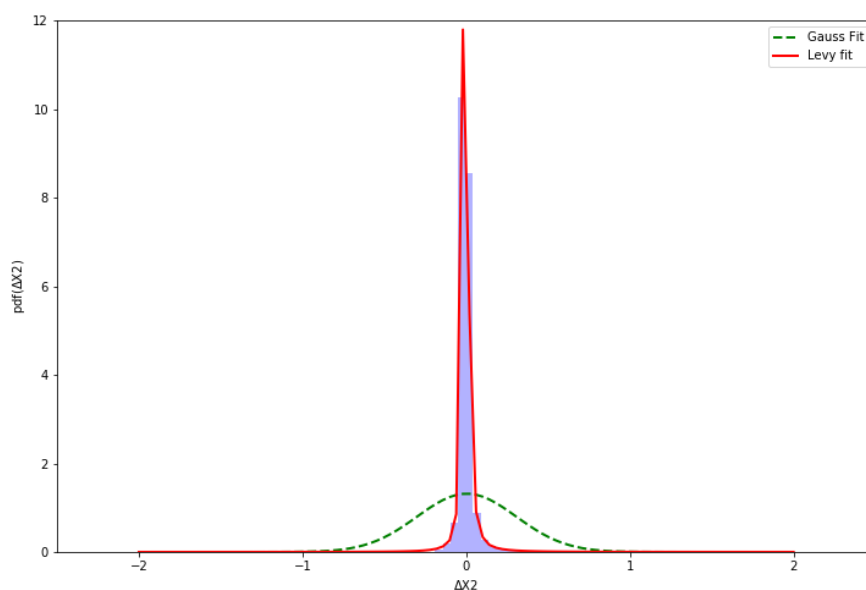


**Slika 4.1:** Pokazatelj  $X_4$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,03$  i  $\beta = 1,0$

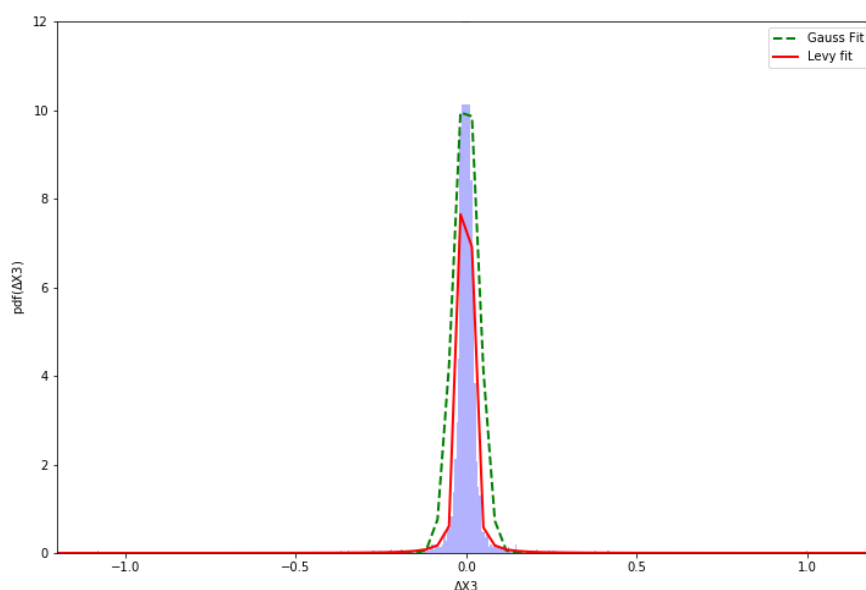


**Slika 4.2:** Promjena pokazatelja  $\Delta X_1$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,25$  i  $\beta = 0,20$ .

raspodjelu, što možemo vidjeti na Slici 4.7. Prikupljeni podaci se sastoje od 4134 vrijednosti Altmanovog Z pokazatelja. Parametri dobivene raspodjele su  $\alpha = 1,19$  i  $\beta = 0,59$ .

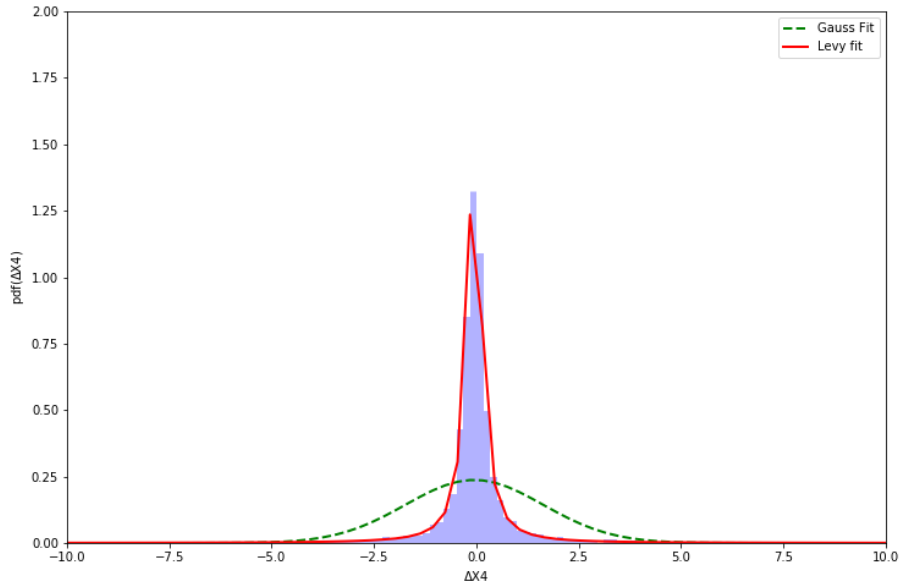


**Slika 4.3:** Promjena pokazatelja  $\Delta X_2$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,11$  i  $\beta = 0,21$ .

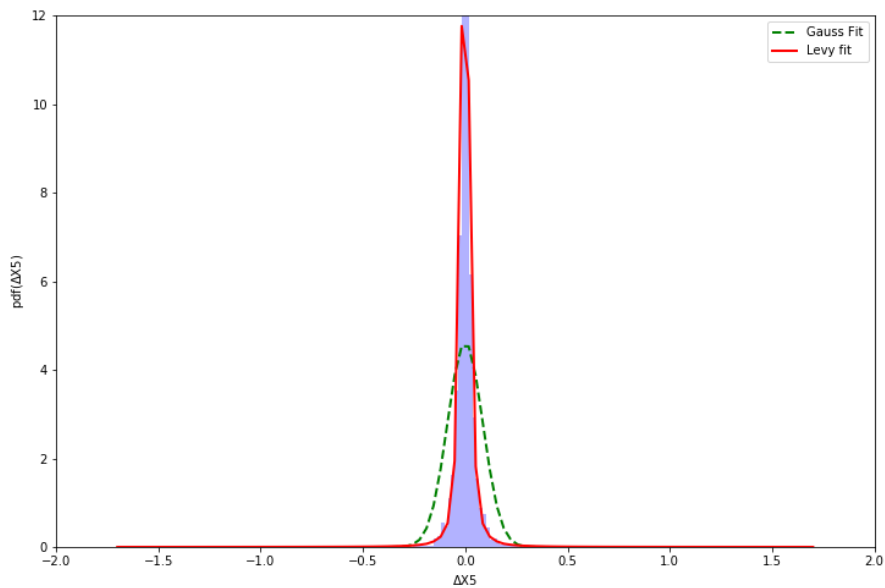


**Slika 4.4:** Promjena pokazatelja  $\Delta X_3$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,25$  i  $\beta = -0,04$ .

Parametri u Altmanovom modelu kreditnog rejtinga predstavljaju ponašanje modela za podatke prikupljene u proteklih 9 godina. Stabilnost parametara distribucije, poglavito  $\alpha$  parametra u Altmanovom modelu ćemo promatrati za svaki od kvartalnih razdoblja. Budući da imamo 37 kvartala, prikazat ćemo podatke za svaki od parame-

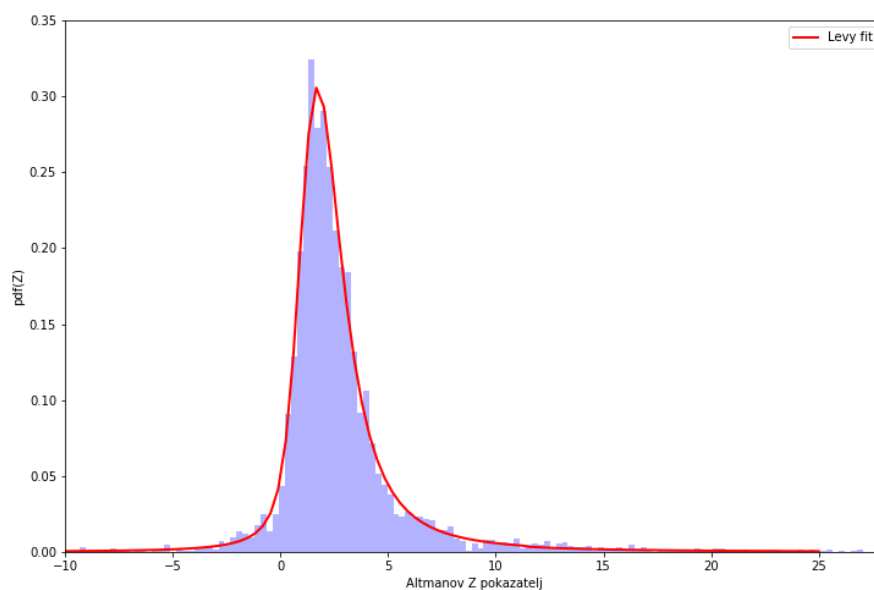


**Slika 4.5:** Promjena pokazatelja  $\Delta X_4$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,01$  i  $\beta = -0,03$ .



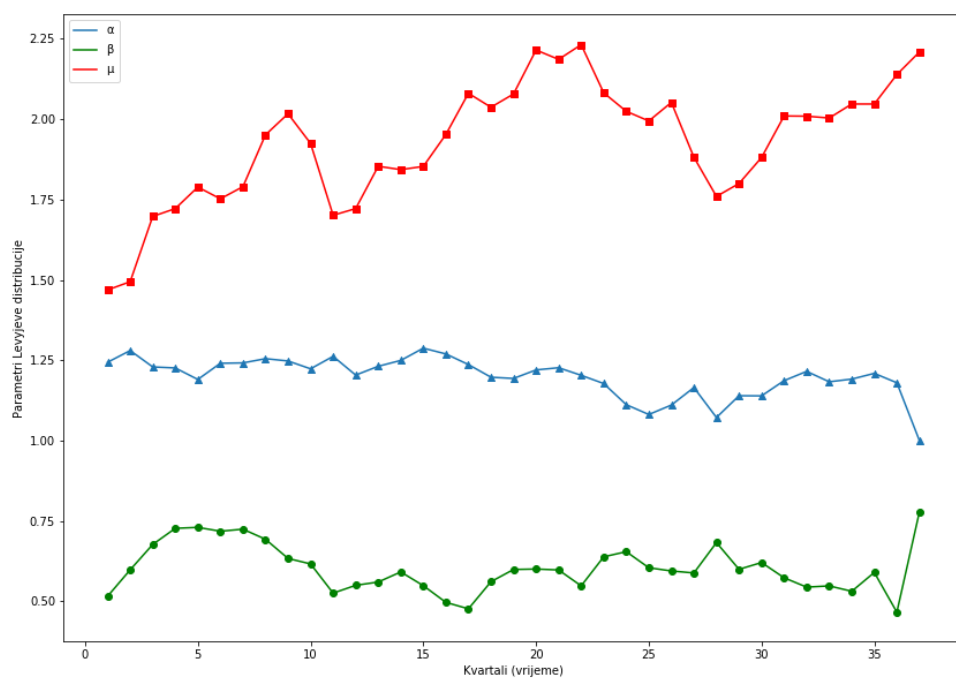
**Slika 4.6:** Promjena pokazatelja  $\Delta X_5$  u Altmanovom modelu koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,31$  i  $\beta = 0,03$ .

tara distribucije u svakom navedenom razdoblju. Rezultati su prikazani na Slici 4.8. Primjećujemo da se  $\alpha$  parametar nalazi u granicama stabilne distribucije za svako kvartalno razdoblje. Vrijednosti parametara su  $\alpha = 1,19 \pm 0,06$ ;  $\beta = 0,60 \pm 0,07$ ; i  $\mu = 1,92 \pm 0,19$ . Iz navedenoga vidimo da Lévyjeva raspodjela opisuje raspodjelu



**Slika 4.7:** Altmanov model kreditnog rejtinga koji slijedi Lévyjevu raspodjelu s parametrima  $\alpha = 1,19$  i  $\beta = 0,59$ .

svih omjera  $\Delta X_i$  bolje nego normalna raspodjela. Parametri stabilne distribucije dobiveni iz empirijskih podataka upućuju da dinamiku promjene svih omjera možemo opisati jedinstvenom distribucijom.



**Slika 4.8:** Vrijednosti parametara distribucije Altmanovog Z pokazatelja u svim kvartalima. Samo u zadnjem kvartalu vidimo značajniji pomak parametra  $\alpha$  prema kritičnoj vrijednosti 1.

## 5 Metodički dio

### 5.1 *Istraživački usmjerena nastava fizike*

U vrijeme kada se promjene na znanstvenoj razini odvijaju vrlo brzo, nastava u školama bi trebala odražavati te promjene i prilagoditi se novim očekivanjima. Nažalost, unatoč brojnim prijedlozima i različitim mogućnostima pristupa učenicima i gradivu, velik broj profesora i dalje se drži tradicionalnog, predavačkog načina iznošenja gradiva. Takav pristup ima mnoge nedostatke poput jednosmjernosti predavanja, pasivnosti i nezainteresiranosti učenika. [14]

Pomoću istraživačkog oblika nastave razvija se i razumijevanje fizike, znanje o funkcioniranju znanosti te brojne važne učeničke sposobnosti, a ne samo činjenično znanje. Interaktivna nastava ima naglasak na razvijanju kognitivnih sposobnosti jer učenici nisu pasivni kao u tradicionalnom načinu predavanja nego aktivno sudjeluju u nastavi. Da bi se to postiglo, učenike je potrebno staviti u situacije u kojima im je omogućeno samostalno razmatranje problema koje će trebati analizirati, usporediti s prethodno poznatim situacijama i razmisliti o mogućim rješenjima. Nastavnik vodi učenike kroz razmišljanje i zaključivanje. Kroz razgovor s učenicima nastavnik može identificirati učeničke pretkoncepcije i pomoći im u ispravljanju krivih ideja i pojednostavljenog zaključivanja. Na taj način učenici sami mogu primijetiti pogreške te ih shodno tome ispraviti, umjesto da pokušavaju novo znanje prilagoditi svojim postojećim konceptima. Za uspješno održavanje interaktivne istraživački usmjerene nastave potrebno je zainteresirati i motivirati učenike za sudjelovanje u nastavi. To se može postići na više načina: usmjerenom raspravom, pomoću konceptualnih pitanja s karticama, kooperativnim rješavanjem zadataka u grupama, interaktivnim izvođenjem pokusa te uporabom računala u nastavi. [14] Kako bismo ostvarili istraživački pristup nastavi, nastavni sat treba imati određenu strukturu koja se sastoji od uvoda, središnjeg istraživačkog dijela i završnog dijela.

Uvodni dio sata započinje otvaranjem problema s ciljem ostvarenja interakcije s učenicima. Problem se može otvoriti uvodnim pitanjem koje je vezano za svakodnevno iskustvo, a nova pojava demonstrirati opservacijskim pokusom.

Središnji dio sata započinje postavljanjem istraživačkog pitanja. Cilj istraživačkog pitanja je fokusirati istraživanje i analiziranje nove pojave koju smo uveli u uvodnom dijelu sata. Istraživanje provodimo učeničkim ili frontalnim istraživačkim pokusima. I u ovom dijelu sata koristimo navedene interaktivne nastavne metode kako bismo angažirali te navodili i usmjerili učenike pri njihovom zaključivanju. Prije izvođenja pokusa, bitno je zatražiti od učenika zapisivanje vlastitih predviđanja, a nakon izvođenja, opis zapaženog. Nakon izvedenih zaključaka, interaktivnim metodama dolazi se do konstrukcije modela i matematičkog opisa.

Završni dio sata služi za primjenu i procjenu novostečenog znanja. Stječe se uvid u učeničko razumijevanje novih koncepata i povezivanje određenog dijela gradiva. To se može ostvariti raznim interaktivnim metodama poput konceptualnih pitanja na koja učenici odgovaraju podizanjem kartica, rješavanjem zadataka u malim skupinama, aplikacijskim pokusima i dr.

## **5.2 Nastavna priprema: Brownovo gibanje**

Fizikalni fenomen Brownovog gibanja opazio je škotski botaničar Robert Brown 1827. godine promatranjem sitnih čestica cvjetne peludi u vodi pod mikroskopom. Prateći putanju peludnog praha uočio je da se čestice nasumično gibaju. U nastavi koristimo Brownovo gibanje u svrhu zaključivanja o nasumičnom gibanju molekula kako bi uspješno izgradili čestični model tvari. Nastavna jedinica Brownovo gibanje se izvodi u drugom razredu srednje škole. Predviđeno vrijeme izvođenja nastavne jedinice je jedan školski sat.

### **Obrazovni ishodi:**

Nakon održane nastave, učenici će moći:

- opisati Brownovo gibanje
- objasniti Brownovo gibanje pomoću čestičnog modela tvari
- objasniti povezanost nasumičnog gibanja molekula i temperature.

Sposobnosti koje će učenici razvijati tijekom sata su:

- osmišljavanje pokusa



- hipotetičko-deduktivno zaključivanje
- argumentiranje zaključaka i stavova
- kritičko razmišljanje

### **Odgojni ishodi:**

Vrijednosti koje će učenici usvajati tijekom sata su:

- razvijanje interesa za znanost
- aktivno sudjelovanje u raspravi
- izražavanje vlastitog mišljenja
- uvažavanje tuđeg mišljenja.

### *Uvodni dio*

UVODNI PROBLEM: Zamislimo misaoni eksperiment. Pretpostavimo da sjedimo na stadionu i gledamo nogometnu utakmicu. Zamislimo da su igrači nevidljivi i promatramo samo loptu.

### **Kakvo ćemo gibanje lopte primijetiti?**

Učenici iznose svoje ideje i razmišljanja te ih navodimo na opis nasumičnog gibanja.

Botaničar Robert Brown 1827. godine je proučavajući zrnca peludi u vodi pod mikroskopom uočio da se ona kreću nasumično i bez očitog uzorka. Gibanje je nazvao Brownovo gibanje, ali nije znao objasniti njegov uzrok.

**Da ste vi bili na njegovom mjestu, kako bi objasnili taj eksperiment? Biste li pretpostavili da su čestice peludi žive i da se zbog toga gibaju? Kakav biste još eksperiment osmislili kako biste provjerili svoje pretpostavke?** Robert Brown je ponovio pokus s drugim, neživim materijalima i uočio jednako ponašanje čestica. Pogledat ćemo slične primjere.

Upoznat ćemo učenike s dimnom komorom pomoću koje ćemo promatrati čestice dima u zraku. Dimna komora je smještena u crnu plastičnu kutiju u kojoj se nalazi

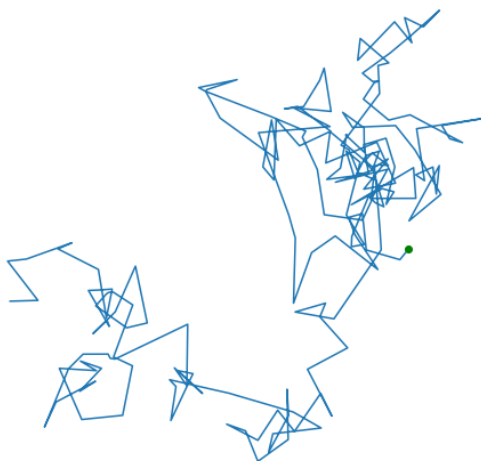
žarulja te cilindrična leća koja nam služi za bolje promatranje čestica dima. Kutiju pričvrstimo na stolić mikroskopa koji ima povećanje 10 puta. Odvrnemo čep s plastične boce za dim na koji je pričvršćena dovodna cjevčica i fitilj. Zapalimo donji kraj fitilja i pustimo da gori nekoliko sekundi, zatim ugasimo plamen i vratimo cjevčicu i fitilj u bocu koju zatvorimo. Nakon što se boca napunila dimom, lagano ju pritišćemo kako bi oblak dima izašao iz cjevčice. Cjevčicu stavimo u dimnu komoru te pritisnemo bocu, a nakon toga uklonimo cjevčicu te zatvorimo poklopac koji se nalazi na kutiji. Potom pozivamo učenike da se približe mikroskopu kako bi pogledali čestice dima ili projiciramo sliku na zastor.

### Što uočavate?

Učenici izlažu svoja zapažanja da su opažene svijetle točke zapravo čestice dima koje se gibaju u zraku.

### Skicirajte putanju jedne od čestica. Kako se čestice dima gibaju?

Učenici primjećuju da ne postoji pravilnost u gibanju čestice, odnosno da se čestice gibaju nasumično.



**Slika 5.1:** Putanja nasumičnog gibanja čestice.

Sličan primjer možemo pogledati i na filmu koji prikazuje gibanje čestica masti u mlijeku ([https://www.youtube.com/watch?v=Uz1\\_u8q9Svc](https://www.youtube.com/watch?v=Uz1_u8q9Svc)).

### **Što uočavate, kako se čestice masti gibaju?**

Učenici nakon pregleda filma uočavaju nepravilno gibanje čestica masti te gibanje uspoređuju s gibanjem čestica dima u zraku.

Takvo gibanje naziva se Brownovo gibanje. Robert Brown je prvi uočio takvo nasumično gibanje koje je dobilo naziv po njemu.

*Uvodimo naslov i temu nastavne jedinice: **Brownovo gibanje***

*Središnji dio sata*

### **ISTRAŽIVAČKO PITANJE 1: Kako biste objasnili opaženo Brownovo gibanje čestica dima u zraku ili masti u vodi?**

Izvodimo pokus s grafoskopom. U drveni okvir 30x30cm stavimo čelične kuglice promjera 4mm i pluteni čep promjera 1cm te sve zajedno postavimo na grafoskop. Izvodimo kružno gibanje drvenog okvira pri čemu okvir udara čelične kuglice koje se sudaraju međusobno i s plutenim čepom. Usmjerenom raspravom navodimo učenike na zaključak kako pluteni čep u ovom pokusu predstavlja česticu dima, a kuglice predstavljaju molekule zraka u pokusu s dimnom komorom. Okvir gibamo kako bismo postigli nasumična kretanja čeličnih kuglica kojima prikazujemo nasumično gibanje molekula zraka.

### **Što uočavate?**

Učenici opažaju sudaranje malih čeličnih kuglica s plutenim čepom te kao razlog gibanja plutenog čepa navode sudare s čeličnim kuglicama.

Ponovimo pokus i proučavamo broj sudara čeličnih kuglica sa suprotnih strana plutenog čepa.

### **Koliki je iznos i smjer ukupne sile koja djeluje na čep?**

Učenici iznose svoja razmišljanja te zaključuju da je broj sudara s jedne strane plute-

nog čepa veći od broja sudara s druge strane. Iz toga zaključuju da iznos ukupne sile na čep nije jednak nuli te da se zbog stalne promjene smjera sudara mijenja i smjer ukupne sile na čep, što uzrokuje promjenu smjera gibanja čepa.

### **Što se događa prilikom sudara čeličnih kuglica i plutenog čepa?**

Usmjerenom raspravom navodimo učenike da povežu impuls sile s promjenom količine gibanja. Prisjetimo se drugog Newtonovog zakona

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (5.1)$$

pri čemu akceleraciju možemo zapisati kao  $a = \Delta\vec{v}/\Delta T$ , iz čega proizlazi

$$\vec{F} \cdot \Delta T = m \cdot \Delta\vec{v}. \quad (5.2)$$

Promjena brzine plutenog čepa koji ima masu  $m$  proporcionalna je sili koja ju uzrokuje i vremenskom intervalu u kojem sila djeluje. Tijelu veće mase (tromijem tijelu) teže ćemo promijeniti brzinu nego tijelu manje mase.

### **Što možemo zaključiti na temelju mehaničkog modela o gibanju čestica zraka ili vode u pokusima s dimnom komorom ili masti u mlijeku?**

Molekule zraka i vode se poput kuglica u modelu gibaju nasumično i sudaraju međusobno te s česticama dima ili masti (predstavljenima plutenim čepom u modelu). Usporedbom gibanja većih i manjih čestica masti ili dima učenici zaključuju da se manje čestice gibaju brže i imaju veće pomake zbog svoje manje mase. Nakupina dima ili masti, koju pod mikroskopom vidimo, giba se nasumično zbog sudara s molekulama okolnog zraka ili vode, koje ne vidimo. Zbog razlike u broju sudara s različitim strana nakupina dima ili masti stalno mijenja svoj smjer gibanja.

**Zašto taj efekt ne primjećujemo za makroskopske objekte (npr. stol koji je također okružen molekulama zraka koje udaraju o njega sa svih strana)?**

Učenici iznose svoja razmišljanja te zaključuju kako na stol iz svih smjerova nalijeću manje čestice zraka i sudaraju se s njim djelujući pri tom silom na stol. Kao i kod

slučaja s česticama dima, postoje male razlike u silama s različitih strana, no one su premale da bi izazvale primjetno ubrzanje stola. Zbog toga se Brownovo gibanje može primijetiti samo kod čestica vrlo male mase, kao što su čestice dima, masti ili peludi.

Sada ćemo promotriti kako temperatura utječe na nasumično gibanje molekula.

## **ISTRAŽIVAČKO PITANJE 2: Kako je temperatura povezana s nasumičnim gibanjem molekula?**

Pokus: Dvije jednake posude napunimo toplom i hladnom vodom. U svaku posudu stavimo kocku šećera i promatramo brzinu otapanja bez miješanja.

Učenici zapisuju svoja predviđanja u bilježnicu te iznose svoja opažanja nakon izvođenja pokusa.

Učenici primjećuju da se kocka šećera puno brže otopila u toploj, nego u hladnoj vodi.

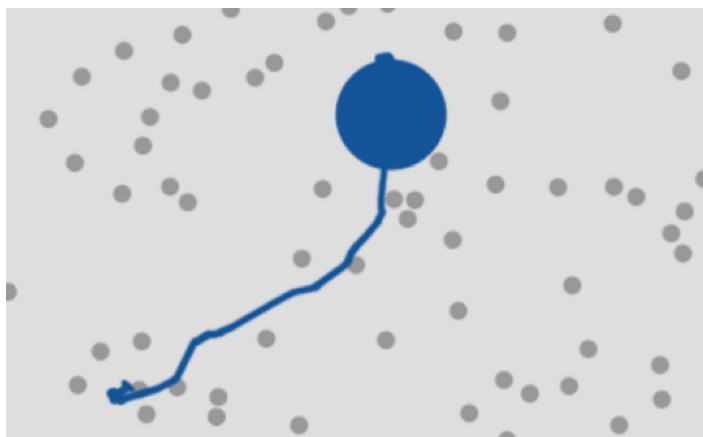
Raspravom potičemo učenike na zaključak o povezanosti temperature s prosječnom brzinom molekula vode, što utječe na broj i intenzitet njihovih sudara s kockom šećera.

### **Zašto se kocka šećera brže otopila u toploj vodi?**

Učenici zaključuju da se u posudi s toplom vodom čestice vode brže gibaju što je uzrok većem broju sudara. Veći broj sudara uzrokuje brži proces topljenja šećera.

Kako bi povezali broj sudara s brzinom čestice, koristit ćemo računalnu simulaciju (<http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/>) na kojoj su prikazane veće i manje čestice kojima možemo mijenjati energiju i veličinu. Promatrat ćemo gibanje čestice i broj sudara pri promjeni energije.

### **Što se događa prilikom povećanja energije sitnih čestica?**



**Slika 5.2:** Prikaz simulacije Brownovog gibanja. Preuzeto iz [17].

Učenici zaključuju da se povećanjem energije povećava brzina čestica te uočavaju da je ta energija kinetička energija.

### **Što se događa s brojem sudara prilikom povećanja energije?**

Učenici uočavaju da se povećava broj sudara čestica povećanjem njihove energije.

### **Što iz pokusa i simulacije možemo zaključiti o nasumičnom gibanju čestica?**

Povećanjem temperature povećava se brzina nasumičnog gibanja molekula te se povećava broj sudara česticom.

### *Završni dio sata*

U završnom dijelu koristit ćemo konceptualno pitanje s karticama kako bi provjerali usvojeno znanje.

U dvije posude, s hladnom i toplom vodom, stavit ćemo kapljicu tinte.

**Što očekujete, u kojem slučaju će kapljica brže doći do dna posude?** Ponuđeni odgovori su:

- (a) U toploj vodi
- (b) U hladnoj vodi

**(c) Jednako brzo u obje vode**

Učenici obrazlažu svoja predviđanja. Potom se izvede pokus.

Rješenje: U hladnoj vodi. Molekule vode se nasumično gibaju i sudaraju s kapljicom tinte koja se također nasumično giba. Kada vodu zagrijemo, molekule vode se počnu gibati brže i time raspršuju kapljicu te joj sprječavaju neometan prolazak na dno posude. U hladnoj vodi je prosječna brzina molekula vode manja te će kapljica tinte biti manje ometena i prije će pasti na dno posude.

Dodatno zamolimo učenike da navedu ili osmisle primjer gdje mogu uočiti nasumično gibanje makroskopskih čestica u svakodnevnom životu.

Neki od primjera su čestice prašine obasjane snopom svjetlosti (ukoliko nema strujanja zraka, koje više doprinosi gibanju prašine), širenje mirisa kroz prostor itd.

## 6 Zaključak

U ovom radu opisali smo Lévyjev let i njegovu primjenu u fizici i interdisciplinarnim područjima. Prvo smo razmotrili matematički formalizam vezan uz Brownovo gibanje te svojstva bitna za primjenu u fizici, ali i u drugim područjima znanosti. Brownovo gibanje smo opisali kao Gaussovski proces koji proizlazi iz centralnog graničnog teorema, njegovu vezu s jednadžbom difuzije te primjenu geometrijskog Brownovog gibanja na financijskom tržištu. Proučavajući procese koji nisu u skladu s centralnim graničnim teoremom, opisali smo Lévyjev let koji predstavlja nasumičan hod kod kojeg dužine koraka imaju teškorepu raspodjelu. Zatim smo opisali svojstva stabilne raspodjele kao i njihovu primjenu u fizici i ekonomiji te pokazali kako Altmanov  $Z$  pokazatelj ne slijedi normalnu, nego teškorepu raspodjelu. Pokazali smo kako vremenska dinamika sastavnica Altmanovog  $Z$  pokazatelja, kao i promjena kreditnog rejtinga, slijedi navedenu raspodjelu te smo na taj način ilustrirali kako primjenom teorija i metoda iz fizike možemo pristupiti rješavanju problema u ekonomiji.



# Dodaci

## Dodatak A Python kod za Lévyjevu raspodjelu

---

```
// Levy.py

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
import numpy as np
import levy

# Ucitavanje prikupljenih podataka
data = pd.read_csv('podaci.csv', index_col=0)
lista1 = data["X1"].values

# Parametri za normalnu Gaussovu distribuciju
parametri_gauss = norm.fit(lista1)

x = np.linspace(-4,4,100)

# Fit normalne raspodjele
fitted_pdf = norm.pdf(x, loc = parametri_gauss[0], scale = parametri_gauss[1])

# Fit Levyjeve raspodjele
parametri_levy = levy.fit_levy(lista1)
levy_fitted = levy.levy(x, *parametri_levy[:4])

# Prilagodba grafa za prikaz distribucija
plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot(x, fitted_pdf, "green", label="Gaussova
        raspodjela", linestyle="dashed", linewidth=2)
plt.plot(x, levy_fitted, "red", label="Levyjeva raspodjela", linewidth=2)

# Prikaz histograma za listu vrijednosti
```

```
plt.hist(lista1,density=1,color="blue",alpha=.3, bins=400)

plt.xlabel(r'$\mathrm{\Delta}X_1$')
plt.ylabel('pdf($\mathrm{\Delta}X_1$)')
plt.axis([-2,2,0,12])
plt.legend()

# Prikaz grafa
plt.show()

# Ispis parametara Levyjeve distribucije (alpha, beta, mu, sigma)
print(parametri_levy)
```

---

## Literatura

- [1] Mandelbrot, B. B.; The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman & co., 1983.
- [2] Scher, H.; Montroll, E.W.; Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids // Phys. Rev. B., (1975), str. 12.
- [3] Cardoso, O.; Gluckman, B.; Parcollet, O.; Tabeling, P.; Dispersion in a quasi-two-dimensional-turbulent flow: An experimental study // Phys. Fluids, (1996), str. 8.
- [4] Osborne, A. R.; Kirwan, A. D.; Provenzale, A. Bergamasco, L.; Fractal drifter trajectories in the Kuroshio extension // Tellus, (1989), str. 41A.
- [5] Ghosh, R. N.; Webb, W. W.; Automated detection and tracking of individual and clustered cell surface low density lipoprotein receptor molecules //Biophys. J., (1994), str. 66.
- [6] Ott, A.; Bouchaud, J. P.; Langevin, D.; Urbach, W.; Anomalous diffusion in "living polymers": A genuine Lévy flight? //Phys. Rev. Lett., (1990), str. 65.
- [7] Dedi, L.; Mogućnost primjene geometrijskog Brownovog gibanja za vrednovanje opcija //Ekonomski pregled: mjesečnik Hrvatskog društva ekonomista Zagreb, (2004), 1009.
- [8] Weks, E. R.; Swinney, H. L.; Random walks and Lévy flights observed in fluid flows // University of Texas at Austin: Center for Nonlinear Dynamics and Department, 1998.
- [9] Barthelemy P.; Bertolotti J.; Wiersma D.S.; A Lévy flight for light // Delft University of Technology // Nature vol. 453, (2008), str. 495-498.
- [10] Šodan, S.; Financijska analiza poslovanja // Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, ak. godina 2015./2016., predavanja br.4.
- [11] Žager, K.; Žager, L.; Analiza financijskih izvještaja, 2008.; str.269.
- [12] Galli, D. Magnetic fields in star-forming regions : theoretical aspects. // Dense molecular gas around protostars and in galactic nuclei : European workshop

on astronomical molecules 2004 / edited by Baan and Hagiwara. Dordrecht : Springer, 2004. Str. 43-51.

- [13] Brownian motion and single particle tracking, Advanced bioengineering methods laboratory, École Polytechnique fédérale de Lausanne, <https://lben.epfl.ch/files/content/sites/lben/files/users/179705/Brownian%20Motion%20Handout.pdf>, 22.1.2006.
- [14] Planinić, M.; Istraživački usmjerena nastava fizike - kako je približiti školskoj zbilji?; // Zbornik XII. hrvatskog simpozija o nastavi fizike, 2015.; Zagreb: HDF, Str. 8-15.
- [15] Bloomberg Professional Services; Podaci prikupljeni iz Bloomberg terminala na dan 11.05.2018.
- [16] Nolan, J.P.; Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data // Math/Stat department, American University, (2018)
- [17] Minute Labs simulacija Brownovog gibanja; <http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/>