SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Elma Đaferović

HIJERARHIJA KONVEKSNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici prof.dr.sc. Sanji Varošanec na velikoj pomoći i podršci pri izradi ovog diplomskog rada. Zahvaljujem joj na brojnim korisnim savjetima i idejama, što je uvijek imala strpljenja i vremena za moje upite.

Najveće hvala mojoj obitelji, dečku i prijateljima na bezuvjetnoj podršci i razumijevanju tokom studiranja.

Sadržaj

Uvod

Pojmom konveksnosti bavili su se starogrčki matematičari poput Euklida i Arhimeda. Euklid je u svojoj zbirci knjiga Elementi napisao prvu poznatu definiciju konveksnosti, a dopunio ju je Arhimed dajući dvije definicije koje su korištene sve do 20. stoljeća. S pojmom konveksnih funkcija susrećemo se nešto kasnije. Prvi radovi vezani uz konveksne funkcije javljaju se krajem 19. i početkom 20. stoljeća. Pojam konveksne funkcije prvi je uveo francuski matematičar Charles Hermite (1822.-1901.) u svome radu iz 1881. godine. Međutim, početak proučavanja konveksnih funkcija vezan je uz danskog matematičara Johana Ludwiga Williama Valdemara Jensena (1859. - 1925.). On je u svojim člancima iz 1905. i 1906. godine definirao konveksnu funkciju pomoću nejednakosti

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

odnosno na način kako je danas uobičajeno definirati konveksnu funkciju.
Konveksne funkcije imaju važnu ulogu u analizi, teoriji nejednakosti, u različitim područjima primijenjene matematike, u optimizaciji, geometriji te u ostalim granama matematike.

Učenici se s pojmom konveksnih funkcija susreću u 4. razredu srednje škole. Tada učenici konveksne funkcije upoznaju u problemima ispitivanja tijeka funkcije i crtanja grafa funkcije. Pri ispitivanju tijeka funkcije, učenici računaju drugu derivaciju funkcije. U udžbenicima za 4.razred srednje škole konveksnost funkcije opisuje se jednostavnim geometrijskim svojstvom: diferencijabilna funkcija f je konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako se njezin graf nalazi iznad tangente u po volji odabranoj točki tog intervala.

U ovome radu bit će riječ o hijerarhiji konveksnih funkcija. Opisat ćemo različite klase realnih funkcija: konveksne, zvjezdaste, superaditivne i m-konveksne te dokazati neka njihova svojstva i ispitati odnose između klasa promatranih funkcija. Rad se sastoji od pet poglavlja.

U prvom poglavlju bit će iznesene osnovne definicije, svojstva i karakterizacije konveksnih funkcija potrebni za razumijevanje tematike o kojoj se govori.

Prvi odjeljak ovog poglavlja bit će posvećen konveksnim funkcijama, definirat ćemo konveksne funkcije, opisati neka svojstva te na nekoliko konkretnih primjera prikazati kriterij za provjeru konveknosti funkcija. Nakon definicije konveksne funkcije i njene geometrijske interpretacije slijedi opis funkcija konveksnih u Jensenovom smislu. Osim Jensenove nejednakosti, pokazat ćemo i Hermite-Hadamardovu nejednakost za konveksne funkcije.
U drugom i trećem poglavlju bit će riječ o zvjezdastim i superaditivnim funkcijama. Definirat ćemo zvjezdaste i superaditivne funkcije, opisati nekoliko svojstava. Također, u trećem poglavlju bit će iznensen jedan od glavnih rezultata ovoga rada. Promatrat ćemo odnose konveksnih, zvjezdastih i superaditivnih funkcija, tj. razmotrit ćemo pitanje hijerarhije klasa tih funkcija.
Četvrto poglavlje bit će posvećeno integralnim sredinama. Promatrat ćemo odnose konveksnih, konveksnih u srednjem, zvjezdastih, zvjezdastih u srednjem, superaditivnih te superaditivnih funkcija u srednjem.

U posljednjem poglavlju ovoga rada fokusirat ćemo se na m-konveksne funkcije. U prvom odjeljku definirat ćemo m-konveksne funkcije i iznijeti nekoliko karakterizacija. U drugom odjeljku petog poglavlja promatrat ćemo funkcije definirane na općenitom intervalu $[a, b]$. Definirat ćemo nekoliko klasa funkcija koje poopćavaju zvjezdaste, superaditivne i konveksne u Jenesenovom smislu. Također, razmotrit ćemo odnos klasa tih funkcija.
Uživajte u čitanju.

Poglavlje 1

Konveksne funkcije

1.1 Definicija i svojstva

Na početku ovog potpoglavlja izreći ćemo nekoliko definicija pojmova koje ćemo razmatrati u ovom radu.
U ovom ćemo radu koristiti oznaku I za interval realnih brojeva bilo kojeg oblika – zatvoreni, otvoreni, poluotvoreni slijeva ili zdesna.
Ako je I segment $[a, b]$, tj. ako je $I = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, tada za svaki $x \in I$ postoji $t \in [0, 1]$ takav da je $x = (1 - t)a + tb$. I obratno, svaki broj oblika $(1 - t)a + tb$, gdje je $t \in [0, 1]$ pripada segmentu I.
Drugim riječima, $[a, b] = \{(1 - t)a + tb : t \in [0, 1]\}$.

Definicija 1.1.1. *Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za sve $x, y \in I$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi:*

$$f((1 - t)x + ty)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y). \tag{1.1}$$

Kažemo da je funkcija f strogo konveksna ako za sve $x \neq y$ i za sve $t \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi:

$$f((1 - t)x + ty)) < (1 - t)f(x) + tf(y). \tag{1.2}$$

Kažemo da je funkcija f konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna, tj. ako za sve $x, y \in I$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi:

$$f((1 - t)x + ty)) \geq (1 - t)f(x) + tf(y), \tag{1.3}$$

a strogo konkavna ako za sve $x \neq y$ i za sve $t \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi:

$$f((1 - t)x + ty)) > (1 - t)f(x) + tf(y). \tag{1.4}$$

Propozicija 1.1.2. *Zbroj dvije konveksne funkcije definirane na istom intervalu I je ponovno konveksna funkcija. Ako je jedna od funkcija strogo konveksna, tada je i njihov zbroj strogo konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka su f i g dvije konveksne funkcije definirane na istom intervalu I. Neka je $h := f + g$. Tada za svaki $t \in [0, 1]$ i $x, y \in I$ prema definiciji konveksnosti funkcija f i g vrijedi:

$$\begin{aligned} h((1-t)x) + ty) &= f((1-t)x + ty) + g((1-t)x + ty) \\ &\leq (1-t)f(x) + tf(y) + (1-t)g(x) + tg(y) \\ &= (1-t)h(x) + th(y), \end{aligned}$$

tj. funkcija h je konveksna na I.
Dokaz analogno provodimo kada je jedna od funkcija strogo konveksna. □

Propozicija 1.1.3. *Umnožak (strogo) konveksne funkcije i pozitivnog skalara je (strogo) konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija definirana na intervalu I i neka je $\alpha > 0$. Definirajmo funkciju $h := \alpha f$. Tada za svaki $t \in [0, 1]$ i $x, y \in I$ prema definiciji konveksnosti vrijedi:

$$\begin{aligned} h((1-t)x) + ty) &= \alpha f((1-t)x + ty)) \\ &\leq \alpha(1-t)f(x) + \alpha t f(y) \\ &= (1-t)h(x) + th(y), \end{aligned}$$

tj. h je konveksna na I.
Dokaz analogno provodimo za strogo konveksne funkcije. □

Promatrajući dokaz, očito je da za $\alpha < 0$ i konveksnu funkciju f vrijedi da je αf konkavna.

Propozicija 1.1.4. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna (strogo konveksna) i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća (strogo rastuća) konveksna funkcija, onda je $g \circ f$ konveksna funkcija (strogo konveksna).*

Dokaz. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća konveksna funkcija. Tada za svaki $t \in [0, 1]$ i $x, y \in I$ koristeći svojstva funkcija f i g vrijedi:

$$\begin{aligned} (g \circ f)((1-t)x) + ty) &= g(f((1-t)x + ty)) \\ &\leq g((1-t)f(x) + tf(y)) \\ &= (1-t)(g \circ f)(x) + t(g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Dakle, $g \circ f$ je konveksna funkcija.
Dokaz analogno provodimo za strogo konveksnu funkciju f. □

Propozicija 1.1.5. *Ako su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ pozitivne, rastuće (padajuće) i konveksne funkcije, onda je funkcija $h = f \cdot g$ pozitivna, rastuća (padajuća) i konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ pozitivne, rastuće i konveksne funkcije. Funkcija $h = f \cdot g$ je očito pozitivna. Dokažimo da raste.
Neka je $x < y$, $x, y \in I$. Tada je $f(x) \le f(y)$ i $g(x) \le g(y)$. Budući da su $f(x), f(y), g(x), g(y)$ pozitivni brojevi, množenjem lijevih, odnosno desnih strana tih nejednakosti dobivamo $f(x)g(x) \le f(y)g(y)$, tj. $h(x) \le h(y)$.
Dokažimo još konveksnost od h.
Kako su f i g obje rastuće i pozitivne, tada za $x < y$ imamo

$$(f(x) - f(y))(g(y) - g(x)) \le 0,$$

odnosno

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \le f(x)g(x) + f(y)g(y). \tag{1.5}$$

Budući da su f i g konveksne funkcije, tada za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi:

$$\begin{aligned} h((1-t)x) + ty) &= f((1-t)x + ty)g((1-t)x + ty) \\ &\le ((1-t)f(x) + tf(y))((1-t)g(x) + tg(y)) \\ &= (1-t)^2 f(x)g(x) + t(1-t)\big(f(x)g(y) + f(y)g(x)\big) + t^2 f(y)g(y). \end{aligned}$$

Iz (1.5) slijedi

$$\begin{aligned} h((1-t)x) + ty &\le (1-t)^2 f(x)g(x) + t(1-t)\big(f(x)g(x) + f(y)g(y)\big) + t^2 f(y)g(y) \\ &= (1-t)^2 f(x)g(x) + (t-t^2)f(x)g(x) + (t-t^2)f(y)g(y) + t^2 f(y)g(y) \\ &= (1-t)f(x)g(x) + tf(y)g(y) \\ &= (1-t)h(x) + th(y), \end{aligned}$$

tj. h je konveksna.
Dokaz kad su obje funkcije f i g padajuće provodi se analogno. □

1.2 Karakterizacije konveksnih funkcija

Definicija 1.2.1. *Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom $f(x) = cx + d$, gdje je $c, d \in \mathbb{R}$ nazivamo **afina** funkcija.*

Lema 1.2.2. *Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je istovremeno konveksna i konkavna ako i samo ako je f afina funkcija.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je funkcija f konveksna i konkavna. Tada prema definiciji konveksne i konkavne funkcije, za svaki $x, y \in [a, b]$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f((1-t)x + ty)) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ afina funkcija čiji graf prolazi kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Tada vrijedi

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Pokažimo da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$.
Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljan. Tada postoji jedinstveni $t \in [0, 1]$ takav da je $x = (1-t)a + tb$. Odatle slijedi da je

$$f(x) = f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$

S druge strane:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g((1-t)a + tb) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((1-t)a + tb - a) + f(a) \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot t(b - a) + f(a) \\
&= (f(b) - f(a))t + f(a) \\
&= (1-t)f(a) + tf(b) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Budući da jednakost $g(x) = f(x)$ vrijedi za proizvoljan $x, y \in [a, b]$ slijedi da je $f = g$, tj. f je afina funkcija.
($\Leftarrow$) Neka je funkcija f afina funkcija. Tada postoje $c, d \in \mathbb{R}$, takvi da je $f(x) = cx + d$. Neka su $x, y \in [a, b]$ i $t \in [0, 1]$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
f\Big((1-t)x + ty\Big) &= c\Big((1-t)x + ty\Big) + d, \\
&= (1-t)cx + tcy + d, \\
&= (1-t)cx + tcy + ((1-t)d + td), \\
&= (1-t)(cx + d) + t(cy + d), \\
&= (1-t)f(x) + tf(y).
\end{aligned}$$

Dakle f je i konveksna i konkavna. □

Propozicija 1.2.3. *[9] Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako za svaki $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ vrijedi:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0. \tag{1.6}$$

Dokaz. Razvijemo li determinantu (1.6) po drugom stupcu dobivamo da je (1.6) ekvivalentna s

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0. \tag{1.7}$$

To se može zapisati kao

$$(x_1 - x_3)f(x_2) \geq (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3),$$

a zbog $x_1 < x_3$, gornja nejednakost je ekvivalentna s

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3). \tag{1.8}$$

Dakle, tvrdnja propozicije se može izreći i ovako: funkcija f je konveksna ako i samo ako za svaki $x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3$ vrijedi (1.8).
Pretpostavimo da je f konveksna funkcija te neka su $x_1, x_2, x_3 \in I$, takvi da je $x_1 < x_2 < x_3$. Tada je

$$x_2 = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \cdot x_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot x_3.$$

Označimo li $\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$ s t, vidimo da je $1 - t = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$ i da je $0 < t < 1$. Primjenimo li definicijsku nejednakost konveksne funkcije za brojeve x_1 i x_3 te za gore definirani parametar t dobivamo

$$f(tx_1 + (1 - t)x_3) \leq t(f(x_1)) + (1 - t)f(x_3).$$

Uvrštavanjem $t = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$ dobivamo

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3),$$

što je upravo i trebalo dokazati u ovom smjeru.
Pretpostavimo da vrijedi (1.8) za svaki izbor $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. Želimo dokazati da je f konveksna, tj. da za svaki $y_1, y_2 \in I$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(ty_1 + (1 - t)y_2) \leq t(f(y_1)) + (1 - t)f(y_2). \tag{1.9}$$

Neka su $y_1, y_2 \in I$ i neka je $t \in \langle 0, 1\rangle$. Bez smanjenja općenitosti, stavimo da je $y_1 < y_2$. Definiramo: $x_1 := y_1,\ x_2 := ty_1 + (1 - t)y_2,\ x_3 := y_2$.
Iz druge jednakosti proizlazi da je $x_2 = ty_1 + y_2 - ty_2$, odnosno $x_2 - y_2 = t(y_1 - y_2)$,

$$t = \frac{x_2 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}.$$

Tada je $1 - t = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$.
Uvrstimo li sve dobiveno u (1.8) dobivamo upravo (1.9). □

Ako nejednakost (1.7) podijelimo s $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) > 0$ dobivamo

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \geq 0. \tag{1.10}$$

Nejednakost (1.10) vrijedi uz uvjet $x_1 < x_2 < x_3$, ali taj se uvjet može maknuti jer se pokaže da i za druge poretke vrijedi (1.10). Ova nejednakost vrijedi ako i samo ako je f konveksna.
Zanimljvo je da je (1.10) osnova za nove generalizacije konveksnih funkcija. Naime, za f kažemo da je konveksna $n-1$-vog reda ako za $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ vrijedi

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} + ... + \frac{f(x_j)}{(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)}$$
$$+ ... + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})} \geq 0.$$

Prema ovoj definiciji konveksna funkcija je konveksna drugog reda, a rastuća funkcija je konveksna prvog reda. Ovu vrstu generalizacije konveksnih funkcija razmatrao je sredinom 20. stoljeća T. Popoviciu, [10].
Transformirajmo $f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
f(x_2) &\leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3) \\
&= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \\
&= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \Big(f(x_3) - f(x_1) + f(x_1) \Big) \\
&= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_1) \\
&= f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

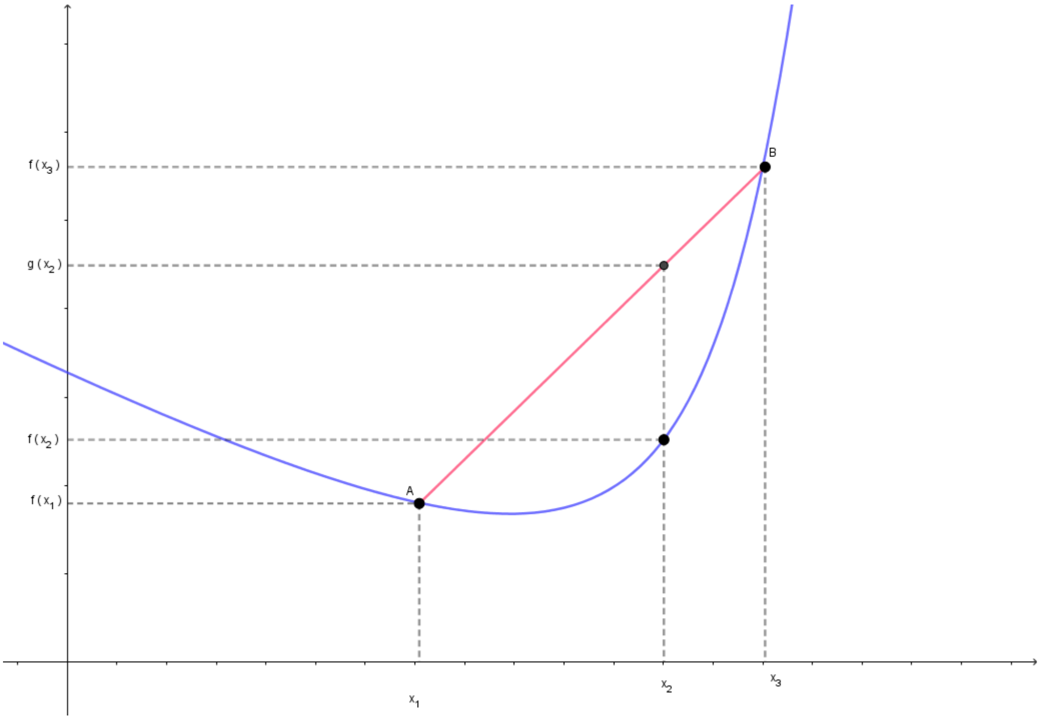
Ako je f konveksna tada za $x_1 < x_2 < x_3$ vrijedi (1.11).
Pogledajmo kako glasi jednadžba pravca kroz točku $(x_1, f(x_1))$ i $(x_3, f(x_3))$

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Taj je pravac graf afine funkcije $g(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$. Nejednakost (1.11) sad možemo zapisati ovako

$$f(x_2) \leq g(x_2),$$

tj. točka $(x_2, f(x_2))$ niža je od točke $(x_2, g(x_2))$, odnosno graf konveksne funkcije f na intervalu $[x_1, x_3]$ nalazi se ispod tetive koja spaja $(x_1, f(x_1))$ i $(x_3, f(x_3))$.



Slika 1.1: Geometrijska interpretacija

Propozicija 1.2.4. *Neka je f konveksna funkcija na intervalu I te neka su $x, y, z \in I$ takvi da je $x \leq y$, $z \geq 0$. Tada je*

$$f(x+z) - f(x) \leq f(y+z) - f(y). \tag{1.12}$$

Ako je f konkavna, tada u (1.12) vrijedi drugi znak nejednakosti.

Dokaz. Dokaz se uvelike zasniva na rezultatu propozicije 1.2.3.
Prvo ćemo dokazati da za $x_1 < x_3$ i $x_2 \neq x_1, x_3$ vrijedi nejednakost

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \tag{1.13}$$

Za tri broja x_1, x_2, x_3 s uvjetom $x_1 < x_3$ imamo tri moguća poretka:
a) $x_2 < x_1 < x_3$
b) $x_1 < x_2 < x_3$
c) $x_1 < x_3 < x_2$
Zapišimo nejednakost (1.7) za brojeve $x_2 < x_1 < x_3$:

$$(x_3 - x_1)f(x_2) + (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) \geq 0.$$

Faktor $x_3 - x_1$ zapišimo ovako $(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$ i uvrstimo u gornju nejednakost:

$$\begin{aligned}((x_3 - x_2) + (x_2 - x_1))f(x_2) + (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) &\geq 0\\ (x_3 - x_2)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) &\geq 0\\ (f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_3) \geq (f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Pomnožimo li s (-1) gornju nejednakost dobivamo

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_3 - x_2) \leq (f(x_3) - f(x_2))(x_1 - x_2).$$

Zbog pretpostavke o poretku brojeva x_1, x_2, x_3 izrazi $x_3 - x_2$ i $x_1 - x_2$ su pozitivni pa kad cijelu nejednakost podijelimo s njihovim produktom dobivamo upravo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

što je i trebalo dokazati.

Promotrimo slučaj kada je $x_1 < x_2 < x_3$. Analogno, zapišimo nejednakost (1.7) za brojeve $x_1 < x_2 < x_3$:

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0.$$

Faktor $x_3 - x_2$ zapišimo ovako $(x_3 - x_1) + (x_1 - x_2)$ i uvrstimo u gornju nejednakost:

$$\begin{aligned}((x_3 - x_1) + (x_1 - x_2))f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) &\geq 0\\ (x_3 - x_1)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) &\geq 0\\ (f(x_2) - f(x_1))(x_1 - x_3) \geq (f(x_3) - f(x_1))(x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Pomnožimo li s (-1) gornju nejednakost dobivamo

$$(f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1) \leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1).$$

Zbog pretpostavke o poretku brojeva x_1, x_2, x_3 izrazi $x_3 - x_2$ i $x_2 - x_1$ su pozitivni pa kad cijelu nejednakost podijelimo s njihovim produktom dobivamo upravo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_2},$$

a to smo upravo trebali dokazati.

Promotrimo slučaj kada je $x_1 < x_3 < x_2$.
Zapišimo nejednakost (1.7) za brojeve $x_1 < x_3 < x_2$:

$$(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) + (x_3 - x_1)f(x_2) \geq 0.$$

Faktor $x_2 - x_3$ zapišimo ovako $(x_2 - x_1) + (x_1 - x_3)$ i uvrstimo u gornju nejednakost:

$$\begin{aligned} ((x_2 - x_1) + (x_1 - x_3))f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) + (x_3 - x_1)f(x_2) &\geq 0 \\ (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x_3) + (x_3 - x_1)f(x_2) &\geq 0 \\ (f(x_3) - f(x_1))(x_1 - x_2) \geq (f(x_2) - f(x_1))(x_1 - x_3)&. \end{aligned}$$

Pomnožimo li s (-1) gornju nejednakost dobivamo

$$(f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \leq (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1).$$

Zbog pretpostavke o poretku brojeva x_1, x_2, x_3 izrazi $x_2 - x_1$ i $x_3 - x_1$ su pozitivni pa kad cijelu nejednakost podijelimo s njihovim produktom dobivamo upravo

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ako u (1.13) stavimo
$x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = y_1$, tada uz uvjete $x_1 \leq y_1$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq x_2$ imamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(y_1) - f(x_2)}{y_1 - x_2}.$$

Ako u (1.13) stavimo
$x_1 = x_2, x_2 = y_1, x_3 = y_2$, tada uz uvjete $x_2 \leq y_2$, $y_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ imamo

$$\frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1} \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Vidimo da te dvije nejednakosti čine niz te da je

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Stavimo li u tu nejednakost $x_2 = x$, $x_1 = x + z$, $y_2 = y$, $y_1 = y + z$ dobivamo

$$\frac{f(x + z) - f(z)}{z} \leq \frac{f(y + z) - f(y)}{z},$$

što nakon množenja sa z upravo postaje nejednakost (1.12) koju smo trebali dokazati.

□

Teorem 1.2.5. *(Hermite - Hadamardova nejednakost) [7]*
Za konveksnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f\Big(\frac{a + b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Dokaz. Pokažimo da vrijedi $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$
Neka je $x \in \langle a, b\rangle$, tada postoji $t \in \langle 0,1\rangle$ takav da je $x = ta + (1-t)b$. Primjenimo li definicijsku nejednakost konveksne funkcije za brojeve a i b te za parametar t dobivamo:

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq tf(a) + (1-t)f(b) \\ f((1-t)a + tb) &\leq (1-t)f(a) + tf(b). \end{aligned}$$

Zbrojimo li nejednakosti dobivamo

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b). \tag{1.14}$$

Može se pokazati da je konveksna funkcija integrabilna pa integriranjem dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \begin{vmatrix} z & = & ta + (1-t)b \\ dz & = & dta - bdt \\ dt & = & \dfrac{dz}{a-b} \end{vmatrix} = \int_a^b f(z)\frac{dz}{a-b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)dz$$

$$\int_0^1 f((1-t)a + tb)dt = \begin{vmatrix} z & = & (1-t)a + tb \\ dz & = & dta - bdt \\ dt & = & \dfrac{dz}{a-b} \end{vmatrix} = \int_a^b f(z)\frac{dz}{a-b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)dz.$$

Uvrstimo li sve dobiveno u (1.14) dobivamo

$$2 \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)dz \leq f(a) + f(b),$$

što je upravo trebalo pokazati.
Pokažimo da vrijedi lijeva nejednakost, odnosno $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
Uzmimo $t = \frac{1}{2}$, $x = ua + (1-u)b$, $y = (1-u)a + ub$.
Tada je $tx + (1-t)y = \frac{1}{2}\Big(ua + (1-u)b\Big) + \frac{1}{2}\Big((1-u)a + ub\Big) = \frac{a+b}{2}$, odnosno

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= f\Big(tx + (1-t)y\Big) \\ &\leq tf(x) + (1-t)y \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \\ &= \frac{1}{2}\Big[f\Big(ua + (1-u)b\Big) + f\Big((1-u)a + ub\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt,$$

što je upravo trebalo pokazati. □

Definicija 1.2.6. *[3] Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo* ***konveksnom u Jensenovom smislu*** *ili* ***J-konveksnom*** *na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.15}$$

Funkciju f je ***strogo J-konveksna*** *ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ nazivamo ***konkavnom u Jensenovom smislu*** *ili* ***J-konkavnom*** *na I ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Funkciju f je ***strogo J-konkavna*** *ako za sve $x, y \in I$ vrijedi:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Teorem 1.2.7. *[3] Ako je f neprekidna i J-konveksna tada je f konveksna.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je funkcija f konveksna. Tada za $\alpha = 1/2$ imamo J-konveksnost.
($\Leftarrow$) Neka je f J-konveksna. Pretpostavimo suprotno, tj. da funkcija f nije konveksna funkcija. Tada postoji podinterval $[a, b]$ takav da graf od $f|_{[a,b]}$ nije ispod dužine koja spaja točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Zato funkcija

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a),\ \ x \in [a, b]$$

poprima i pozitivne vrijednosti. Primijetimo da je funkcija h neprekidna te da vrijedi $h(a) = h(b) = 0$.

Prema pretpostavci f je J-konveksna, pa pokažimo da je i h J-konveksna

$$\begin{aligned}
h\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\Big(\frac{x+y}{2}-a\Big) - f(a)\\
&\leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\Big(\frac{x-a+y-a}{2}-a\Big) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a)\\
&= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(y-a)\\
&\quad -\frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(a)\\
&\leq \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) - \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(y)\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(y-a) - \frac{1}{2}f(a)\\
&= \frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}h(y).
\end{aligned}$$

Kako je funkcija h neprekidna, onda na segmentu $[a,b]$ postiže svoj maksimum γ, $\gamma > 0$. Označimo s $c = \min\{x \in [a,b] \mid h(x) = \gamma\}$. Po definiciji od c, za svaki $m > 0$ za koji je $c \pm m \in [a,b]$ imamo

$$h(c-m) < h(c) \text{ i } h(c+m) \leq h(c).$$

Zbrajanjem nejednakosti dobivamo

$$h(c) \geq \frac{h(c-m)+h(c+m)}{2},$$

a to je u kontradikciji s činjenicom da je h J-konveksna. Drugim riječima, funkcija f je konveksna funkcija. □

Lema 1.2.8. *[1] Interval I je zatvoren na konveksne kombinacije, tj. ako su $x_1,...,x_n \in I$ i $\alpha_1,...,\alpha_n \in [0,1]$, takvi da je $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$, slijedi da je $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \in I$.*

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n.
Slučaj $n = 1$ je trivijalan. Tvrdnja u slučaju kada je $n = 2$ vrijedi iz karakterizacije segmenta.

Naime, neka su $x_1, x_2 \in I, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ sa svojstvom, $\sum_{k=1}^{2}\alpha_k = 1$. Tada je $\alpha_1 = 1-\alpha_2$, pa je $\sum_{k=1}^{2}\alpha_k x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = (1-\alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2$.
Prema karakterizaciji segmenta vrijedi:

$(1-\alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2]$, a budući da je $[x_1, x_2] \subseteq I$ slijedi da je $\sum_{k=1}^{2} \alpha_k x_k \in I$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za konveksne kombinacije gdje je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$.
Neka su $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ i $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in [0, 1]$ takvi da je $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$. Promotrimo tri slučaja:
1° Ako je $\alpha_{n+1} = 0$ tada imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in I,$$

pa tvrdnja vrijedi po pretpostavci indukcije.
2° Ako je $\alpha_{n+1} = 1$ tada je $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, pa vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \alpha_{n+1} x_{n+1} = x_{n+1}.$$

Po pretpostavci je $x_{n+1} \in I$, pa vrijedi $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \in I$.
3° Ako je $\alpha_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle$ tada imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} = (1-\alpha_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k \right) + \alpha_{n+1} x_{n+1}.$$

Kako je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \alpha_{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 - \alpha_{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} = 1,$$

po pretpostavci vrijedi:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k \right) \in I.$$

Budući da je po pretpostavci i $x_{n+1} \in I$ pa po bazi indukcije za slučaj $n = 2$ vrijedi:

$$(1-\alpha_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k \right) + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in I,$$

što smo i trebali pokazati.
Iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ pokazali smo da vrijedi i za $n+1$ pa budući da smo dokazali da vrijedi i baza indukcije, prema principu matematičke indukcije dana tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n. □

Teorem 1.2.9. *(Jensenova nejednakost) [3] Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, ..., x_n \in I$ i za sve $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$ takve da je $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ vrijedi:*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k). \tag{1.16}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $n = 2$ te $x_1, x_2 \in I, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$. Tada imamo

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_k = 1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 - \alpha_2$$

Uvrštavanjem $n = 2$ u (1.16) dobivamo:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{2} \alpha_k x_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f(x_k) \\ f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &\leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ f[(1-\alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2] &\leq (1-\alpha_2) f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \end{aligned}$$

Prema definicji 1.1.1 f je konveksna funkcija.
($\Leftarrow$) Neka je f konveksna funkcija. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n = 2$. Prema definiciji 1.1.1 i lemi 1.2.8 vrijedi:

$$f[(1-\alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2] \leq (1-\alpha_2) f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{2} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2} \alpha_k f(x_k).$$

Pretpostavimo da (1.16) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da nejednakost vrijedi i za $n + 1$. Neka su $x_1, ..., x_{n+1} \in I$ i $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$. Promotrimo tri slučaja:
1° Ako je $\alpha_{n+1} = 0$ tada po lemi 1.2.8 imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right).$$

Također vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$$

Prema pretpostavci indukcije slijedi:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k),$$

odnosno

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

2° Ako je $\alpha_{n+1} = 1$ tada je $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, pa vrijedi:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f(\alpha_{n+1} x_{n+1}) = f(x_{n+1}).$$

Primjenom definicije konveksne funkcije dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k) = \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}).$$

Pa zaključujemo da vrijedi:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k),$$

odnosno, tada možemo zaključiti da vrijedi:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

3° Ako je $\alpha_{n+1} \in \langle 0, 1\rangle$ tada po lemi 1.2.8 imamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1},$$

odnosno:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f\left((1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right).$$

Po definiciji konveksne funkcije vrijedi:

$$f\left((1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1-\alpha_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} x_k\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Primjenom pretpostavke indukcije dobivamo:

$$
\begin{aligned}
f\left((1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}}x_k\right)+\alpha_{n+1}x_{n+1}\right) &\leq (1-\alpha_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}}f(x_k)\right)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\leq \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k f(x_k).
\end{aligned}
$$

Tada dobivamo traženu nejednakost, tj. :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k f(x_k).$$

Iz pretpostavke da nejednakost vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ pokazali smo da vrijedi i za $n+1$ pa budući da smo dokazali da vrijedi i baza indukcije, prema principu matematičke indukcije dana nejednakost vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$. □

Lema 1.2.10. *[12] Ako je konveksna funkcija f diferencijabilna, tada je f' rastuća funkcija.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x > y$, trebamo dokazati da je $f'(y) \leq f'(x)$. Neka je f konveksna i diferencijabilna funkcija. Prema definiciji konveksne funkcije za $t \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
f(tx+(1-t)y) &\leq tf(x)+(1-t)f(y)\\
f(tx+(1-t)y) &\leq tf(x)+(1-t)f(y)-f(y)\\
\frac{f(y+t(x-y))-f(y)}{y+t(x-y)-y} &\leq \frac{t(f(x)-f(y))}{t(x-y)}\\
\frac{f(y+t(x-y))-f(y)}{t(x-y)} &\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.
\end{aligned}
$$

Ako u prethodnoj nejednakosti djelujemo s $\lim_{t\to 0}$ dobivamo:

$$f'(y) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Zamijenimo li t sa $(1-t)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
f((1-t)x+ty) &\leq (1-t)f(x)+tf(y)\\
f((1-t)x+ty)-f(x) &\leq -tf(x)+tf(y)\\
\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{x+t(y-x)-x} &\geq \frac{t(f(y)-f(x))}{t(y-x)}\\
\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t(y-x)} &\geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.
\end{aligned}$$

Podijelimo li prethodnu nejednakost s $\lim_{t\to 0}$ vrijedi:

$$f'(x) \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

tj. dobili smo

$$f'(y) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(x).$$

Drugim riječima, $f'(y) \leq f'(x)$. □

Teorem 1.2.11. *[12] Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je konveksna na intervalu I ako i samo ako je f' rastuća.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) U prethodnoj lemi smo pokazali ako je funkcija konveksna, tada je njena derivacija rastuća funkcija.
($\Leftarrow$) Neka je f' rastuća funkcija na intervalu I. Kako je f po pretpostavci derivabilna, ona je i neprekidna.
Neka su $x_1, x_2 \in I$ takvi da je $x_1 < x_2$ te neka je $t \in [0,1]$.
Označimo s $\bar{x} = (1-t)x_1 + tx_2$. Vrijedi $\bar{x} \in [x_1, x_2]$. Prema Langrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji $c_1 \in \langle x_1, \bar{x}\rangle$ i postoji $c_2 \in \langle \bar{x}, x_2\rangle$ takvi da vrijedi:

$$\begin{aligned}
f(\bar{x})-f(x_1) &= f'(c_1)(\bar{x}-x_1)\\
&= f'(c_1)t(x_2-x_1) \qquad (1.17)\\
f(x_2)-f(\bar{x}) &= f'(c_2)(1-t)(x_2-x_1). \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Pomnožimo (1.17) s $(1-t)$ i (1.18) s t, tada dobivamo

$$\begin{aligned}
(1-t)f(\bar{x})-(1-t)f(x_1) &= f'(c_1)t(1-t)(x_2-x_1)\\
tf(x_2)-tf(\bar{x}) &= f'(c_2)t(1-t)(x_2-x_1).
\end{aligned}$$

Budući da je $c_1 < c_2$ vrijedi $f(c_1) \leq f(c_2)$, odnosno

$$\begin{aligned}
\frac{(1-t)f(\bar{x}) - (1-t)f(x_1)}{t(1-t)(x_2 - x_1)} &\leq \frac{tf(x_2) - tf(\bar{x})}{t(1-t)(x_2 - x_1)} \\
(1-t)f(\bar{x}) - (1-t)f(x_1) &\leq tf(x_2) - tf(\bar{x}) \\
(1-t)f(\bar{x}) + tf(\bar{x}) &\leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \\
f(\bar{x}) &\leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).
\end{aligned}$$

Drugim riječima, f je konveksna. □

Teorem 1.2.12. *[12] Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je konveksna na intervalu I ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$.*

Dokaz. Ako je f dva puta diferencijabilna, tada je tvrdnja da funkcija f' raste ekvivalentna s $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$, pa tvrdnja teorema slijedi iz prethodnog teorema. □

Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konkavna na I ako i samo ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

Kao neposrednu posljedicu prethodne karakterizacije imamo sljedeći teorem.

Teorem 1.2.13. *[12] Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, te neka je f'' ograničena, tj. postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq f'' \leq M$. Tada su funkcije g i h definirane na sljedeći način*

$$g(x) := \frac{M}{2}x^2 - f(x),\ h(x) := f(x) - \frac{m}{2}x^2$$

također konveksne.

Dokaz. Izračunajmo drugu derivaciju od g

$$g'(x) = Mx - f',\ g''(x) = M - f''(x).$$

Budući da je $f'' \leq M$ slijedi da je $g''(x) \geq 0$, što znači da je g konveksna funkcija.
Na isti način, proučavajući $h''(x) = f''(x) - m$ dobivamo da je h konveksna funkcija.

□

Promotrimo nekoliko primjera određivanja konveksnosti funkcija.

Primjeri konveksnih funkcija

Primjer 1.2.14. *Funkcija* $f(x) = x^k$ $(x \geq 0)$ *je konveksna ako je* $k \geq 1$ *ili* $k \leq 0$*, a konkavna ako je* $0 \leq k \leq 1$.
Naime, druga derivacija funkcije f *je* $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$. *Tada je* $f''(x)$ *nenegativna ako je* $k(k-1) \geq 0$*, tj. ako* $k \in \langle -\infty, 0] \cup [1, \infty\rangle$*, odnosno* $f''(x)$ *je negativna ako je* $k(k-1) < 0$*, tj. ako* $0 < k < 1$.

Primjer 1.2.15. *Neka je funkcija* f *zadana formulom* $f(x) = e^x$.
Druga derivacija funkcije f *je* $f''(x) = e^x$*, pa zaključujemo da je* f *konveksna funkcija.*

Primjer 1.2.16. *Neka je funkcija* f *zadana formulom* $f(x) = \ln(x)$.
Prva derivacija funkcije f *je* $f'(x) = \frac{1}{x}$*, a druga derivacija je* $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Budući da je $f''(x) < 0$*, zaključujemo da je* f *konkavna funkcija.*

Primjer 1.2.17. *Funkcija* $f(x) = ax^2$ *je konveksna za* $a > 0$*, a konkavna* $a < 0$.
Naime, druga derivacija funkcije f *je* $f''(x) = 2a$. *Tada je* f'' *nenegativna ako je* $2a \geq 0$*, tj. ako* $a > 0$*, odnosno* f'' *je negativna ako je* $2a < 0$*, tj. ako* $a < 0$.

Primjer 1.2.18. *Neka je funkcija* f *zadana formulom* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.
Prva derivacija funkcije f *je* $f'(x) = 3x^2 - 4x$.
Druga derivacija funkcije f *je* $f''(x) = 6x - 4$.
Zaključujemo da je f'' *nenegativna za* $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$ *te negativna za* $x \in \left\langle -\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$.
Drugim riječima, f *je konveksna na intervalu* $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$*, a konkavna na intervalu* $\left\langle -\infty, \frac{2}{3}\right\rangle$.

Poglavlje 2

Zvjezdaste funkcije

Klasu nenegativnih, neprekidnih realnih funkcija definiranih na segmentu $[0, b]$ takvih da je $f(0) = 0$ označavat ćemo s $C(b)$.

$$C(b) = \{f : [0, b] \to [0, \infty\rangle : f(0) = 0, f \text{ neprekidna}\}.$$

Klasu nenegativnih, neprekidnih konveksnih funkcija na $[0, b]$, $f(0) = 0$, označavamo s $K(b)$, tj.

$$K(b) = \{f \in C(b) : f \text{ je konveksna}\}.$$

Definicija 2.0.1. *[14] Funkciju $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ nazivamo zvjezdastom ako za svaki $x \in [0, b]$ i za svaki $t \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi*

$$f(tx) \leq t f(x).$$

Klasu nenegativnih, neprekidnih zvjezdastih funkcija na $[0, b]$, $f(0) = 0$, označavamo sa $S^*(b)$, tj.

$$S^*(b) = \{f \in C(b) : f \text{ je zvjezdasta}\}.$$

Propozicija 2.0.2. *Zbroj dvije zvjezdaste funkcije definirane na istom intervalu $[0, b]$ je ponovno zvjezdasta funkcija.*

Dokaz. Neka su f i g dvije zvjezdaste funkcije definirane na intervalu $[0, b]$. Tada za svaki $t \in \langle 0, 1\rangle$ i za svaki $x \in [0, b]$ prema činjenici da su funkcije f i g zvjezdaste, vrijedi:

$$\begin{aligned} (f + g)(tx) &= f(tx) + g(tx) \\ &\leq t f(x) + t g(x), \end{aligned}$$

tj. $f + g$ je zvjezdasta funkcija na $[0, b]$. □

Propozicija 2.0.3. *Umnožak dvije nenegativne zvjezdaste funkcije definirane na istom intervalu $[0, b]$ je ponovno zvjezdasta funkcija.*

Dokaz. Neka su f i g dvije nenegativne zvjezdaste funkcije definirane na intervalu $[0, b]$. Tada za svaki $t \in \langle 0, 1\rangle$ i za svaki $x \in [0, b]$ prema činjenici da su funkcije f i g zvjezdaste, vrijedi:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(tx) &= f(tx) \cdot g(tx) \\
&\leq tf(x) \cdot tg(x) \\
&= t^2 f(x)g(x) \\
&\leq tf(x)g(x), \quad \text{jer je } t^2 \leq t \text{ za } t \in \langle 0, 1\rangle,
\end{aligned}$$

tj. $f \cdot g$ je zvjezdasta funkcija na $[0, b]$. □

Lema 2.0.4. *Funkcija f je zvjezdasta na $[0, b]$ ako i samo ako je $\frac{f(x)}{x}$ rastuća funkcija.*

Dokaz. (⇒) Neka je $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ zvjezdasta funkcija. Tada vrijedi

$$f(ty) \leq tf(y), \forall t \in \langle 0, 1\rangle, \forall y \in [0, b].$$

Neka je $0 < x < y$ i $t = \frac{x}{y}, y \neq 0$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq \frac{x}{y} f(y) \\
\frac{f(x)}{x} &\leq \frac{f(y)}{y}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\frac{f(x)}{x}$ rastuća funkcija.
(⇐) Neka je $\frac{f(x)}{x}$ rastuća funkcija i t $\in \langle 0, 1\rangle$. Tada je $tx < x$ te vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{f(tx)}{tx} &\leq \frac{f(x)}{x} \\
f(tx) &\leq tf(x).
\end{aligned}$$

Drugim riječima, f je zvjezdasta funkcija. □

Lema 2.0.5. *[12] Ako je funkcija f diferencijabilna na [0,b], tada je ona zvjezdasta ako i samo ako je $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ zvjezdasta funkcija. Označimo s $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$. Prema prethodnoj lemi, g je rastuća pa deriviranjem funkcije g dobivamo:

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} &\geq 0 \\ f'(x)x - f(x) &\geq 0 \\ f'(x)x &\geq f(x) \\ f'(x) &\geq \frac{f(x)}{x}, \end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati.
($\Leftarrow$) Neka je $f'(x) \geq \dfrac{f(x)}{x}$. Označimo s $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$. Deriviranjem funkcije g dobivamo:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \\ g'(x) &= \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right]. \end{aligned}$$

Budući da je desna strana jednakosti pozitivna zaključujemo $g' \geq 0$.
Dakle g je rastuća funkcija, tj. $\dfrac{f(x)}{x}$ je rastuća funkcija, pa prema lemi 2.0.4 f je zvjezdasta funkcija iz $S^*(b)$. □

Primjer 2.0.6. *Promotrimo što možemo zaključiti o zvjezdastosti polinoma. Neka je*

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{2.1}$$

polinom n-tog stupnja, $n \geq 1$, *na* $\langle 0, \infty \rangle$ *. Tada je*

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1} \ i & (2.2) \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}, & (2.3) \end{aligned}$$

pa je

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = a_2x + 2a_3x^2 + ... + (n-1)a_nx^{n-1}.$$

Za $n = 2$ *dobivamo*

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = a_2x \tag{2.4}$$

i to je pozitivno za $a_2 > 0$.
Dakle, polinom (2.1) drugog stupnja je zvjezdast ako i samo ako je $a_2 > 0$.
Za $n = 3$ *dobivamo*

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = a_2x + 2a_3x^2, \tag{2.5}$$

a taj će izraz biti nenegativan za pozitivne x ako i samo ako je $a_3 > 0, a_2 \geq 0$.

Za polinom četvrtog stupnja vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.0.7. *[14] Polinom (2.1) četvrtog stupnja je zvjezdast na* $\langle 0, \infty \rangle$ *ako i samo ako njegovi koeficijenti zadovoljavaju jedan od ovih uvjeta:*
(i) $a_4 > 0$ *i* $a_3^2 - 3a_2a_4 \leq 0$
(ii) $a_4 > 0, a_3 \geq 0$ *i* $a_2 \geq 0$.

Dokaz. Promotrimo izraz $f'(x) - \frac{f(x)}{x}$.

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x(a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2).$$

To je polinom trećeg stupnja s nultočkom $x = 0$. Taj će polinom biti nenegativan na $\langle 0, \infty \rangle$ ako je kvadratni polinom

$$a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

nenegativan na $\langle 0, \infty \rangle$, a to će biti ili kad ima najviše jednu realnu nultočku i pripadna mu parabola gleda prema gore ili kad su mu obje nultočke negativne i parabola gleda prema gore.
Prvi slučaj će se desiti kad je diskriminanta polinoma nepozitivna i $3a_4 > 0$, tj. kad je

$$a_4 > 0 \text{ } i \text{ } a_3^2 - 3a_2a_4 \leq 0.$$

Prema Vièteovim formulama, u drugom slučaju vrijedi $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \leq 0$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \geq 0$, pa uz uvjet $a_4 > 0$, druga Vièteova formula daje $a_2 > 0$, a prva $a_3 \geq 0$. Time je dokazana ova lema. □

Primjer 2.0.8. *Neka je funkcija* f *zadana formulom* $f(x) = -e^{-x}$ *na* $[0, \infty\rangle$.
Označimo s $g(x) := \frac{f(x)}{x}$, *tj.* $g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.
Prva derivacija funkcije g je

$$g'(x) = -\frac{e^{-x}(-1)x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}}{x^2}(-x-1)$$

Budući da je $g' > 0$ *zaključujemo da je* f *zvjezdasta funkcija.*

Primjer 2.0.9. *Funkcija* $f(x) = x^p$ *je zvjezdasta na* $[0, \infty\rangle$, *za* $p > 1$.
Naime, označimo s $g(x) := \frac{f(x)}{x}$, *tj.* $g(x) = x^{p-1}$.
Prva derivacija funkcije g je $g'(x) = (p-1)x^{p-2}$. *Tada je* $g'(x)$ *pozitivna ako je* $(p-1) > 0$.
Drugim riječima, za $p > 1$ *funkcija* f *je zvjezdasta funkcija.*

Primjer 2.0.10. *Funkcija* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{-1}{x}}$ *je zvjezdasta na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.
Naime, f *je zvjezdasta ako i samo ako vrijedi* $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$ *za sve* $x \in [0, b]$ *, odnosno* $f'(x) - \frac{f(x)}{x} \geq 0$*. Tada za funkciju* f *vrijedi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3}(1 - x - x^2) \cdot e^{\frac{-1}{x}} &\geq 0\\ 1 - x - x^2 &\geq 0 \text{ i } x \geq 0.\end{aligned}$$

Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe su $X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$*, pa zaključujemo da je* f *zvjezdasta na intervalu* $\left\langle 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Poglavlje 3

Superaditivne funkcije

3.1 Definicija i svojstva

Definicija 3.1.1. *[2] Funkciju* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ *nazivamo superaditivnom ako za sve* $x, y, x + y \in [0, b]$ *vrijedi*

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y).$$

Klasu nenegativnih, neprekidnih superaditivnih funkcija na $[0, b]$, $f(0) = 0$, označavamo sa $S(b)$, tj.

$$S(b) = \{f \in C(b) : f \text{ je superaditivna}\}.$$

Propozicija 3.1.2. *[2] Zbroj dvije superaditivne funkcije definirane na istom intervalu* $[0, b]$ *je ponovno superaditivna funkcija.*

Dokaz. Neka su f i g dvije superaditivne funkcije definirane na intervalu $[0, b]$. Tada za sve $x, y, x + y \in [0, b]$ prema definiciji superaditivnosti funkcija f i g vrijedi:

$$\begin{aligned}
(f + g)(x + y) &= f(x + y) + g(x + y) \\
&\geq f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\
&= (f + g)(x) + (f + g)(y),
\end{aligned}$$

tj. $f + g$ je superaditivna funkcija na $[0, b]$. □

Propozicija 3.1.3. *[2] Umnožak dvije nenegativne superaditivne funkcije definirane na istom intervalu* $[0, b]$ *je ponovno superaditivna funkcija.*

Dokaz. Neka su f i g dvije nenegativne superaditivne funkcije definirane na intervalu $[0, b]$. Tada za sve $x, y, x+y \in [0, b]$ prema definiciji superaditivnosti funkcija f i g vrijedi:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x+y) &= f(x+y) \cdot g(x+y) \\ &\geq [f(x) + f(y)] \cdot [g(x) + g(y)] \\ &= f(x)g(x) + f(y)g(y) + f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ &\geq fg(x) + fg(y),\end{aligned}$$

tj. $f \cdot g$ je superaditivna funkcija na $[0, b]$. □

Primjer 3.1.4. *[2] Funkcija $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ je superaditivna na $\langle 0, \infty\rangle$, za $k > 1$.*
Prema definiciji superaditivne funkcije vrijedi

$$\begin{aligned}f(x+y) &\geq f(x) + f(y) \\ (x+y)^k &\geq x^k + y^k \\ \left(\frac{x}{y} + 1\right)^k &\geq \left(\frac{x}{y}\right)^k + 1.\end{aligned}$$

Kada se uvrsti supstitucija

$$t = \frac{x}{y},\ t > 0,$$

tada je

$$(t+1)^k \geq t^k + 1.$$

Neka je $y = (t+1)^k - t^k - 1$. Pogledajmo prvu derivaciju od y

$$\begin{aligned}y' &= k(t+1)^{k-1} - kt^{k-1} \\ &= k[(t+1)^{k-1} - t^{k-1}].\end{aligned}$$

Izračunajmo stacionarne točke

$$\begin{aligned}y' &= 0 \\ k[(t+1)^{k-1} - t^{k-1}] &= 0 \\ (t+1)^{k-1} &= t^{k-1} \\ \left(\frac{t+1}{t}\right)^{k-1} &= 1 \\ \frac{t+1}{t} &= 1 \\ t+1 &= t\end{aligned}$$

te dobivamo da funkcija nema stacionarnih točaka.

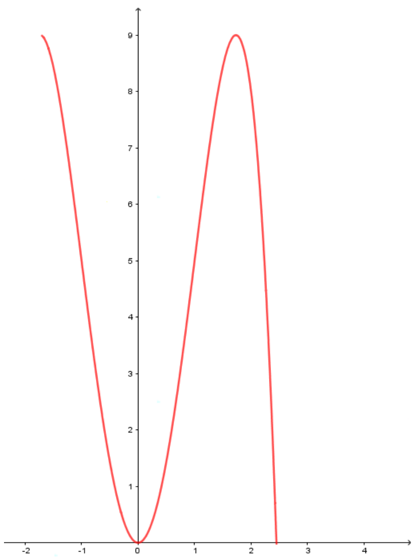
	$\langle 0, \infty\rangle$
y'	$+$
y	*raste*

$y(0^+) = \lim_{h\to 0} y(h) = 1^k - 0^k - 1 = 0.$
Zaključujemo da je $y \geq 0,\ \forall x \in \langle 0, \infty\rangle$.
Drugim riječima, f *je superaditivna funkcija na* $\langle 0, \infty\rangle$.

Za neke vrste funkcija postoji test, tzv. Brucknerov test koji omogućava da se superaditivnost dokaže na samo jednoj vrsti argumenata, a iz toga onda slijedi superaditivnost za sve argumente x i y.

Definicija 3.1.5. *[5] Neprekidnu funkciju* f *definiranu na* $[0, a]$ *nazivamo konveksno-konkavnom funkcijom ako postoji* b*,* $0 \leq b \leq a$ *takav da je* f *konveksna na* $[0, b]$ *i konkavna na* $[b, a]$.

Ako je $b = a$, tada konveksno-konkavna funkcija postaje konveksna, a ako je $b = 0$, tada je konveksno – konkavna funkcija u stvari konkavna.
Na donjem grafu je prikazana jedna konveksno-konkavna funkcija kojoj je $b \neq a$.



Slika 3.1:

Teorem 3.1.6. *[5] Neka je f konveksno-konkavna funkcija definirana na intervalu $[0, a]$ takva da je $f(0) \leq 0$. Tada je*

$$\max_{x \in [0,a]} [f(x) + f(a - x)] \leq f(a)$$

nužan i dovoljan uvjet da f bude superaditivna funkcija.

Dokaz. Nužnost uvjeta je očigledna.
Da bi dokazali dovoljnost uvjeta, promotrimo funkciju $g(x, y) \equiv f(x+y) - f(x) - f(y)$ definiranu na skupu $T = \{(x, y) : 0 \leq x, y, x + y \leq a\}$. Prema uvjetu teorema g je nenegativna na skupu $\{(x, y) : x + y = a\}$. Također, g je nenegativna u točki $g(0, 0)$ za $f(0) \leq 0$.
Pokazat ćemo da je g nenegativna na cijelom skupu T.
Ako fiksiramo jednu varijablu, bilo x bilo y, pokazat ćemo da je funkcija g ili padajuća ili rastuća ili prvo rastuća pa onda padajuća.
Neka je funkcija f konkavna na $[0, b]$, $b = a$. Uzmimo $x_1, x_2 \in [0, b]$ takve da je $x_1 < x_2$. Neka je y fiksan.
Prema propoziciji 1.2.4 ako stavimo u (1.12) $x = x_1$, $y = x_2$, $z = y$ dobivamo

$$f(x_1 + y) - f(x_1) \geq f(x_2 + y) - f(x_2).$$

Dodamo li na obje strane $-f(y)$ slijedi

$$f(x_1 + y) - f(x_1) - f(y) \geq f(x_2 + y) - f(x_2) - f(y),$$

tj. $g(x_1, y) \geq g(x_2, y)$. Dakle, funkcija g je padajuća.

Neka je funkcija f konveksna na $[0, b]$, $b = a$. Uzmimo $x_1, x_2 \in [0, b]$ takve da je $x_1 < x_2$. Neka je y fiksan. Prema propoziciji 1.2.4 ako stavimo u (1.12) $x = x_1$, $y = x_2$, $z = y$ dobivamo

$$f(x_1 + y) - f(x_1) \leq f(x_2 + y) - f(x_2).$$

Dodamo li na obje strane $-f(y)$ dobivamo

$$f(x_1 + y) - f(x_1) - f(y) \leq f(x_2 + y) - f(x_2) - f(y),$$

tj. $g(x_1, y) \leq g(x_2, y)$. Dakle, funkcija g je rastuća.

Neka je f konveksna na $[0, b]$, a konkavna na $[b, a]$, $b < a$. Tada prema upravo dokazanom g raste na $[0, b]$ i pada na $[a, b]$ što je i trebalo dokazati. Isto vrijedi ako se u funkciji g fiksira prva varijabla. Dakle, uz fiksan x, g poprima minimum ili u točki $g(x, 0)$ ili u točki $g(x, a - x)$. No, vrijedi:

$$g(x, 0) = f(x, 0) - f(x) - f(0) = -f(0) \geq 0,$$

pa ako je minimum u $g(x, 0)$, onda je $g(x, y) \geq g(x, 0) \geq 0$.
Ako uz fiksan x, g poprima minimum u $g(x, a - x)$, tada je $g(x, y) \geq g(x, a - x)$, a to je nenegativno po pretpostavci teorem. Dakle, za bilo koji fiksirani y je $g(x, y) \geq 0$, a to znači da je g nenegativna na cijelom T. Drugim riječima, f je superaditivna. □

3.2 Teorem hijerarhije

Slijedi prvi teorem koji opisuje odnose konveksnih, zvjezdastih i superaditivnih funkcija, tj. razmatra pitanje hijerarhije klasa tih funkcija.

Teorem 3.2.1. *[12] Za proizvoljan $b > 0$ vrijedi:*

$$K(b) \subset S^*(b) \subset S(b). \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka je $f \in K(b)$, tj. f je nenegativna, neprekidna i konveksna i neka je $t \in \langle 0, 1\rangle, x \in [0, b]$. Prema definiciji konveksnosti vrijedi

$$f(tx) = f(tx + (1 - t) \cdot 0) \leq tf(x) + (1 - t)f(0),$$

pa slijedi

$$f(tx) \leq tf(x),$$

a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $K(b) \subset S^*(b)$.

Neka je $f \in S^*(b)$, tj. f je zvjezdasta i neka su $x, y, x + y \in [0, b]$. Prema lemi 2.0.4 funkcija $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ je rastuća, pa za x i y vrijedi

$$g(x) \leq g(x + y),$$

tj.

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x + y)}{x + y}. \tag{3.2}$$

Također za y i $x + y$ vrijedi

$$g(y) \leq g(x + y),$$

tj.

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x + y)}{x + y}. \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) slijedi

$$\begin{aligned} f(x+y) = \frac{(x+y)f(x+y)}{x+y} &= x\frac{f(x+y)}{x+y} + y\frac{f(x+y)}{x+y} \\ &\geq x\frac{f(x)}{x} + y\frac{f(y)}{y} \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Odnosno, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Drugim riječima, f je superaditivna funkcija iz $S(b)$. □

U sljedećim primjerima ćemo pokazati da vrijede stroge inkluzije.

Primjer 3.2.2. *[14] Neka je f polinom četvrtog stupnja oblika*

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

U lemi 2.0.7 dani su uvjeti koje zadovoljavaju koeficijenti od f ako je f zvjezdasta funkcija. Ako želimo da f bude konveksna funkcija, tada promatramo drugu derivaciju od f, tj.

$$f''(x) = 2a_2 x + 6a_3 x + 12a_4 x^2.$$

Funkcija f'' će biti nenegativna na $\langle 0, \infty\rangle$ ako i samo ako ili ima obje nultočke nepozitivne i parabola je okrenuta prema gore ili ako ima najviše jednu realnu nultočku i parabola je okrenuta prema gore. Iskažemo li te uvjete pomoću koeficijenata dobivamo da je f'' nenegativna ako je
(i) $a_4 > 0, a_3 \geq 0$ i $a_2 \geq 0$
(ii) $a_4 > 0,\ 3a_3^2 - 8a_2 a_4 \leq 0$.
Ako želimo naći polinom četvrtog stupnja koji je zvjezdast, ali nije konveksan, koeficijenti a_2, a_3, a_4 se traže među brojevima za koje vrijedi:

$$a_4 > 0,\ a_3 < 0 \ i\ 8a_2 a_4 < 3a_3^2 \leq 9a_2 a_4.$$

Na primjer, možemo uzeti $a_4 = \frac{4}{5}, a_3 = -3, a_2 = 4$, pa funkcija f

$$f(x) = a_1 x + 4x^2 - 3x^3 + \frac{4}{5}x^4$$

nije konveksna, ali je zvjezdasta.

Primjer 3.2.3. *Neka je funkcija g zadana formulom $g(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1. \end{cases}$*
Označimo s $h(x) := \dfrac{g(x)}{x}$, tj. $h(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1. \end{cases}$

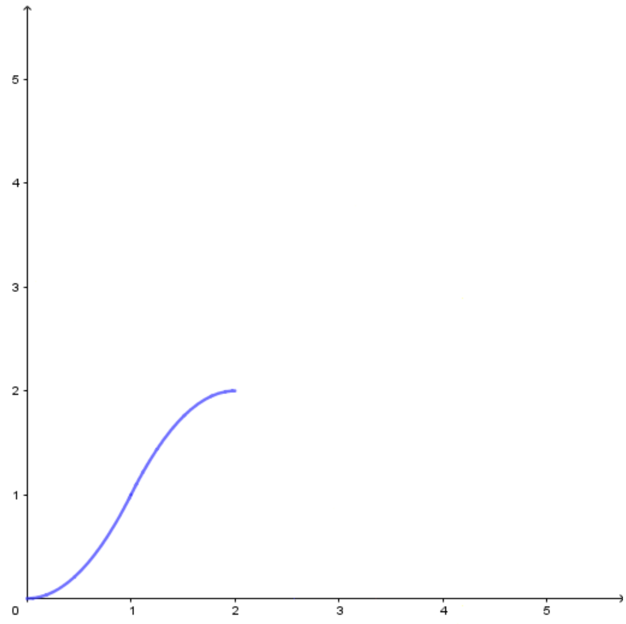
Očito da je g rastuća funkcija, pa prema lemi 2.0.4 g je zvjezdasta i pripada $S^*(b)$.
Želimo pokazati da g nije konveksna. Dokaz ćemo provesti tražeći kontraprimjer. Neka je $x = 2, y = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$. *Po definiciji konveksne funkcije vrijedi* $g\big((1-t)x + ty)\big) \leq (1-t)g(x) + tg(y)$. *Uvrštavanjem* x, y, t *dobivamo*

$$g\big((1-t)x + ty)\big) = g\Big(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Big) = g\Big(\frac{5}{4}\Big) = \frac{5}{4},$$

$$(1-t)g(x) + tg(y) = \frac{1}{2} \cdot g\Big(\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2} \cdot g(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{9}{8}.$$

Budući da je $\frac{5}{4} > \frac{9}{8}$ *slijedi da je* $g\big((1-t)x + ty)\big) \geq (1-t)g(x) + tg(y)$. *Drugim riječima, g nije konveksna.*

Primjer 3.2.4. *Neka je* f *funkcija definirana na* $[0, 2]$ *ovako:*
$f(x) = x^2$ *za* $x \in [0, 1]$
$f(x) = -x^2 + 4x - 2$ *za* $x \in [1, 2]$



Slika 3.2: Graf funkcije *f*

Promatrajući graf, očito je f konveksna na $[0,1]$ i konkavna na $[1,2]$. Također iz grafa vidimo da f zadovoljava pretpostavku Brucknerovog testa.
Naime, ako je $x \in [0,1\rangle$, tada je $f(x) + f(2-x) = f(0) + f(2-0) = f(2)$.
Dakle, prema Brucknerovom testu, f je superaditivna.
Pokažimo da f nije zvjezdasta. Treba naći bar jedan $x \in [0,2]$ i $t \in [0,1]$ za koji je $f(tx) > tf(x)$.
Uzmimo $x = \frac{9}{5}$ i $t = \frac{49}{81}$. Tada je $tx = \frac{49}{45} > 1$ pa je $f(tx) = -\left(\frac{49}{45}\right)^2 + 4 \cdot \frac{49}{45} - 2 = 1.16987$.
S druge strane, $tf(x) = \frac{49}{81}\left(-\left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4 \cdot \frac{9}{5} - 2\right) = 1.1856 > f(tx)$.
Dakle, f nije zvjezdasta.
Ovo je primjer superaditivne funkcije koja nije zvjezdasta.

Poglavlje 4

Integralne sredine

4.1 Definicija i svojstva

Definicija 4.1.1. *Kažemo da funkcija f ima svojstvo P u srednjem ako funkcija*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,\ x > 0,\ F(0) = 0 \tag{4.1}$$

ima svojstvo P. Funkcija F naziva se integralna sredina funkcije f na intervalu $[0, x]$.

Dakle, kažemo da je funkcija f konveksna u srednjem ako je funkcija F definirana s (4.1) konveksna. Analogno, kažemo da je funkcija f zvjezdasta u srednjem ako je funkcija F definirana s (4.1) zvjezdasta te kažemo da je funkcija f superaditivna u srednjem ako je funkcija F definirana s (4.1) superaditivna.
Označimo sa $MK(b)$, $MS^*(b)$, $MS(b)$ klase nenegativnih, neprekidnih funkcija definiranih na $[0, b]$, $f(0) = 0$, koje su konveksne u srednjem, zvjezdaste u srednjem i superaditivne u srednjem.

4.2 Teorem hijerarhije

Teorem 4.2.1. *[12] Za proizvoljan $b > 0$ vrijedi:*

$$K(b) \subseteq MK(b) \subseteq S^*(b) \subseteq S(b) \subseteq MS^*(b) \subseteq MS(b). \tag{4.2}$$

Dokaz. Neka je $f \in K(b)$, tj. f je konveksna i neka je $t \in \langle 0, 1\rangle, x \in [0, b]$. Prema definiciji 4.1.1 funkcija f ima svojstvo P u srednjem ako vrijedi (4.1). Uvođenjem supstitucije $t = xu$ dobivamo

$$F(x) = \int_0^1 f(xu)du. \tag{4.3}$$

Također, prema konveksnosti funkcije vrijedi $f(tx) = f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} F(tx + (1-t)y) &= \int_0^1 f(txu + (1-t)yu)du \\ &\leq \int_0^1 (tf(xu) + (1-t)f(yu))du \\ &= \int_0^1 (tf(xu))du + \int_0^1 ((1-t)f(yu))du \\ &= tF(x) + (1-t)F(y), \end{aligned}$$

a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $K(b) \subseteq MK(b)$.

Neka je $f \in MK(b)$, tj. f je konveksna u srednjem. Prema definicji 4.1.1

$$\frac{f(x)}{x} = F'(x) + \frac{F(x)}{x}. \tag{4.4}$$

Funkcija F je konveksna, pa prema lemi 1.2.10 F' je rastuća funkcija. U teoremu 3.2.1 smo pokazali da je klasa konveksnih funkcija pravi podskup klasa zvjezdastih funkcija, pa je F zvjezdasta, tj. $\frac{F(x)}{x}$ je rastuća. Sad imamo zbroj dvije rastuće funkcije $\frac{F(x)}{x}$ i F', a to je opet rastuća funkcija. Dakle, $\frac{f(x)}{x}$ je rastuća, tj. f je zvjezdasta.

U teoremu 3.2.1 je dokazano da vrijedi $S^*(b) \subseteq S(b)$. Neka je $f \in MS^*(b)$. Tada je $F \in S^*(b)$, a prema teoremu 3.2.1 slijedi da je $F \in S(b)$, tj. $f \in MS(b)$. Time smo dokazali da je $MS^*(b) \subseteq MS(b)$.

Neka je f superaditivna funkcija. Tada prema definiciji superaditivne funkcije, za $u \in \langle 0, 1\rangle$, $x \in [0, b]$, $f(x) = f(xu + (1-u)x)$ vrijedi

$$f(x) = f(xu + (1-u)x) \geq f(xu) + f((1-u)x).$$

Uvođenjem supstitucije $t = xu$ u (4.1) dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) - 2F(x) &= \int_0^1 (f(x) - 2f(xu))du \\ &\geq \int_0^1 (f(xu) + f((1-u)x) - 2f(xu))du \\ &= \int_0^1 (f((1-u)x) - f(xu))du \\ &= \int_0^1 f((1-u)x)du - \int_0^1 f(xu)du. \end{aligned}$$

Supstitucijom $1 - u = z$ dobivamo da je

$$\int_0^1 f((1-u)x)du = \int_0^1 f(zx)dz,$$

pa je gornja razlika jednaka 0.
Odnosno,

$$\begin{aligned} f(x) - 2F(x) &\geq 0 \\ f(x) &\geq 2F(x). \end{aligned}$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu s $\frac{1}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{2F(x)}{x}.$$

Prema (4.4)

$$\frac{f(x)}{x} = F'(x) + \frac{F(x)}{x} \geq \frac{2F(x)}{x},$$

tj.

$$F'(x) \geq \frac{F(x)}{x}.$$

Primjenom leme 2.0.5 F je zvjezdasta, a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $f \in MS^*(b)$. □

Napomena 4.2.2. *Označimo s F_a funkciju*

$$F_a(x) = \frac{a}{x^a} \int_0^x t^{a-1} f(t)\, dt. \tag{4.5}$$

Odnosno:

$$f(x) = F_a(x) + (x/a){F_a}'(x). \tag{4.6}$$

Uvođenjem supstitucije u (4.5), $t = xu^{1/a}$ vrijedi

$$F_a(x) = \int_0^1 f(xu^{1/a})\, du. \tag{4.7}$$

Označimo sa $M^aK(b)$, $M^aS^*(b)$, $M^aS(b)$ klase nenegativnih, neprekidnih funkcija definiranih na $[0, b]$, $f(0) = 0$, sa svojstvom da odgovarajuće funkcije F^a pripadaju klasi konveksnih, zvjezdastih i superaditivinih funkcija.

Teorem 4.2.3. *[12] Za proizvoljne $a, b > 0$ vrijedi:*

$$\begin{array}{ccccccc} K(b) & \subseteq & M^a K(b) & \subseteq & S^*(b) & \subseteq & S(b) \\ & & & & \cap\!| & & \cap\!| \\ & & & & M^a S^*(b) & & M^a S(b) \end{array}$$

Dokaz. Neka je $f \in K(b)$, tj. f je konveksna i neka je $t \in \langle 0, 1\rangle, x, y \in [0, b]$. Prema napomeni 4.2.2 vrijedi:

$$\begin{aligned} F_a(tx + (1-t)y) &= \int_0^1 f(txu^{1/a} + (1-t)yu^{1/a})du \\ &\leq \int_0^1 (tf(xu^{1/a}) + (1-t)f(yu^{1/a}))du \\ &= \int_0^1 (tf(xu^{1/a}))du + \int_0^1 ((1-t)f(yu^{1/a}))du \\ &= tF_a(x) + (1-t)F_a(y), \end{aligned}$$

a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $f \in M^a K(b)$.

Neka je $f \in M^a K(b)$. Prema (4.6) vrijedi:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{F_a(x)}{x} + \frac{F_a{}'(x)}{a}.$$

Funkcija F_a je konveksna pa prema lemi 1.2.10 $F_a{}'$ je rastuća funkcija. U teoremu 3.2.1 smo pokazali da je klasa konveksnih funkcija pravi podskup klasa zvjezdastih funkcija. Stoga je F_a ujedno i zvjezdasta, tj. funkcija $\frac{F_a(x)}{x}$ je rastuća. Dakle, funkcije $\frac{F_a(x)}{x}$ i $\frac{F_a'(x)}{a}$ su rastuće pa je i njihov zbroj rastuća funkcija, tj. $\frac{f(x)}{x}$ je rastuća. Zaključujemo da je f zvjezdasta, odnosno f je iz $S^*(b)$.
Također, prema teoremu 3.2.1 vrijedi

$$S^*(b) \subset S(b) \Rightarrow M^a S^*(b) \subseteq M^a S(b).$$

Neka je $f \in S^*(b)$ i neka je $t \in \langle 0, 1\rangle, x \in [0, b]$. Tada prema (4.7) i definiciji za zvjezdaste funkcije vrijedi

$$F_a(tx) = \int_0^1 f(txu^{1/a})\, du \leq \int_0^1 tf(xu^{1/a})\, du = tF_a(x).$$

Drugim riječima $f \in M^a S^*(b)$.

Neka je $f \in S(b)$, tj. f je superaditvna funkcija i neka su $x, y, x + y \in [0, b]$. Tada prema (4.7) i definiciji za superaditivne funkcije vrijedi:

$$F_a(x + y) = \int_0^1 f((x + y)u^{1/a})\, du \geq \int_0^1 (f(xu^{1/a}) + f(yu^{1/a}))\, du = F_a(x) + F_a(y).$$

Drugim riječima, $f \in M^a S(b)$. $\square$

Poglavlje 5

m-konveksne funkcije

5.1 Definicija i svojstva

Definicija 5.1.1. *[13] Neka je m nenegativan, fiksan realni broj te neka je* $b > 0$. *Funkciju* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ *nazivamo m-konveksna funkcija, ako za svaki* $x, y \in [0, b]$ *i* $t \in [0, 1]$ *vrijedi*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t \cdot f(x) + m(1-t) \cdot f(y). \tag{5.1}$$

Ako u (5.1) vrijedi drugi znak nejednakosti, tada govorimo o m-konkavnoj funkciji.

Uočimo, za $m = 1$ dobivamo konveksnu funkcija, a za $m = 0$ dobivamo zvjezdastu funkciju.
Pokažimo da za m-konveksnu funkciju vrijedi $f(0) \leq 0$ čim je $m < 1$.
Uzmimo da je $t = 0$ i $y = 0$. Uvrštavanjem u (5.1) dobivamo

$$\begin{aligned} f(0 \cdot x + m(1-0) \cdot 0) &\leq 0 \cdot f(x) + m(1-0)f(0) \\ f(0) &\leq mf(0) \\ f(0) \cdot (1-m) &\leq 0. \end{aligned}$$

Budući da je $m \in [0, 1\rangle$, tada je $1 - m > 0$ pa je $f(0) \leq 0$.
Označimo točke $A(x, f(x)), B(y, f(y)), P(mx, mf(x)), Q(my, mf(y))$. Funkcija f je m-konveksna ako i samo ako je točka $M(z, f(z))$ ispod tetive BP za $z \in [y, mx]$ te ispod tetive AQ za $z \in [x, my]$. Dokažimo ovu tvrdnju.

Neka je $z \in [x, my]$. Tada postoji $t \in [0, 1]$ takav da je $z = tx + (1-t)my$. Zbog m-konveksnosti vrijedi

$$f(z) \leq tf(x) + m(1-t)f(y). \tag{5.2}$$

Spojnica AQ, $A(x, f(x))$, $Q(my, mf(y))$, ima jednadžbu

$$Y - mf(y) = \frac{mf(y) - f(x)}{my - x}(X - my).$$

Uvrstimo li $X = z$ i iskoristimo li da je $z - my = tx + (1 - t)my - my = t(x - my)$ dobivamo

$$\begin{aligned} Y(z) &= mf(y) + \frac{mf(y) - f(x)}{my - x} \cdot (x - my) \\ &= mf(y) - t(mf(y) - f(x)) \\ &= tf(x) + m(1 - t)f(y). \end{aligned}$$

Usporedivši sa (5.2) vidimo da je $f(z) \leq Y(z)$, tj. točka $M(z, f(z))$ nalazi se ispod spojnice AQ, kad je $z \in [x, my]$.
Analogno se pokaže da se u slučaju kad je $z \in [y, mx]$ točka M nalazi ispod tetive BP, $B(y, f(y)), P(mx, mf(x))$.

Lema 5.1.2. *Neka je funkcija f m-konveksna, tada je f zvjezdasta funkcija.*

Dokaz. Neka je $x \in [0, b]$ i $t \in [0, 1]$. Tada vrijedi

$$f(tx) = f(tx + m(1 - t) \cdot 0) \leq t \cdot f(x) + m(1 - t) \cdot f(0) \leq t \cdot f(x).$$

Drugim riječima f je zvjezdasta funkcija. □

Propozicija 5.1.3. *[13] Ako je f m-konveksna i $0 \leq n < m \leq 1$, tada je f n-konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in [0, b]$ i neka je $t \in [0, 1]$. Prvo uočimo da je $f\Big(\frac{n}{m}y\Big) \leq \frac{n}{m}f(y)$ jer to dobivamo iz leme 5.1.2.
Raspišemo li $tx + n(1 - t)y$ kao $tx + m(1 - t)\frac{n}{m}y$ te primjenimo li m-konveksnost funkcije f dobivamo

$$\begin{aligned} f(tx + n(1 - t)y) &= f\Big(tx + m(1 - t) \cdot \frac{n}{m}y\Big) \\ &\leq t \cdot f(x) + m(1 - t) \cdot f\Big(\frac{n}{m}y\Big) \\ &\leq t \cdot f(x) + m(1 - t) \cdot \frac{n}{m} \cdot f(y) \\ &= t \cdot f(y) + n(1 - t)f(y), \end{aligned}$$

što znači da je f n-konveksna. □

Propozicija 5.1.4. *[6] Ako su $f_1, f_2 : [0,b] \to \mathbb{R}$ m-konveksne funkcije, tada je funkcija f zadana formulom $f(x) = \max_{x\in[0,b]}\{f_1(x), f_2(x)\}$ također m-konveksna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in [0,b]$ i neka je $t \in [0,1]$. Tada po definicji m-konveksne funkcije vrijedi

$$\begin{aligned}
f_1(tx + m(1-t)y) &\leq tf_1(x) + m(1-t)f_1(y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y) \\
&i \\
f_2(tx + m(1-t)y) &\leq tf_2(x) + m(1-t)f_2(y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).
\end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$f(tx + m(1-t)y) = \max\{f_1(tx + m(1-t)y), f_2(tx + m(1-t)y)\} \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

□

Propozicija 5.1.5. *[6] Neka je $m_1 \leq m_2 \neq 1$ i neka su $f, g : [0,b] \to \mathbb{R}$. Ako je f m_1-konveksna i g m_2-konveksna, tada je $f + g$ m_1-konveksna funkcija.*

Dokaz. Budući da je g m_2-konveksna i $m_1 \leq m_2$, tada prema propoziciji 5.1.3 g je m_1-konveksna funkcija. Neka su $x, y \in [0,b]$ i neka je $t \in [0,1]$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
(f+g)(tx + m_1(1-t)y) &= f(tx + m_1(1-t)y) + g(tx + m_1(1-t)y) \\
&\leq tf(x) + m_1(1-t)f(y) + tg(x) + m_1(1-t)g(y) \\
&= t(f+g)(x) + m_1(1-t)(f+g)(y),
\end{aligned}$$

a to smo upravo trebali pokazati. □

Propozicija 5.1.6. *[13] Ako je $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ m-konveksna funkcija i $\alpha > 0$, tada je funkcija αf m-konveksna.*

Dokaz. Neka su $x, y \in [0,b]$ i neka je $t \in [0,1]$. Primjenom definicije m-konveksne funkcije dobivamo

$$\begin{aligned}
(\alpha f)(tx + m(1-t)y) &\leq \alpha[tf(x) + m(1-t)f(y)] \\
&= t(\alpha f)(x) + m(1-t)(\alpha f)(y).
\end{aligned}$$

Drugim riječima, αf je m-konveksna funkcija. □

Propozicija 5.1.7. *[13] Ako je $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ m-konveksna i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća m-konveksna funkcija, onda je $g \circ f$ m-konveksna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ m-konveksna, tada za svaki $t \in [0, 1]$ i $x, y \in [0, b]$ vrijedi

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y). \tag{5.3}$$

Budući da je $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ rastuća m-konveksna funkcija imamo

$$\begin{aligned} g(f(tx + m(1 - t)y)) &\leq g(tf(x) + m(1 - t)f(y)) \\ &\leq tg(f(x)) + m(1 - t)g(f(y)). \end{aligned}$$

Dakle, $g \circ f$ je m-konveksna funkcija. □

Klasu m-konveksnih neprekidnih funkcija na $[0, b]$ sa svojstvom $f(0) \leq 0$ označavamo s $K_m(b)$, tj.

$$K_m(b) = \{f : [0, b] \to \mathbb{R} \text{ je } m\text{-konveksna, neprekidna, } f(0) \leq 0\}.$$

Lema 5.1.8. *[13] Funkcija f pripada klasi m-konveksnih funkcija ako i samo ako je funkcija*

$$f_m(x) = \frac{f(x) - m \cdot f(y)}{x - my}, \tag{5.4}$$

rastuća na $(my, b], y \in [0, b]$.

Dokaz. Danu nejednakost $f(tx + m(1 - t)y) \leq t \cdot f(x) + m(1 - t) \cdot f(y)$ pri čemu je $x > my$, zapišimo u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} f(tx + m(1 - t)y) &\leq tf(x) + mf(y) - mtf(y) \\ t(f(x) - mf(y)) &\geq f(tx + m(1 - t)y) - mf(y) \\ \frac{f(x) - mf(y)}{x - my} &\geq \frac{f(tx + m(1 - t)y) - m \cdot f(y)}{t(x - my)}. \end{aligned}$$

Neka je $z \leq x$, $z, x \in \langle my, b]$. Definiramo $t := \dfrac{z - my}{x - my}$, $t \in 0, 1$. Tada je $z = tx + m(1 - t)y$ i gornja nejednakost postoji

$$f_m(x) \geq f_m(z),$$

tj. f_m je rastuća na $\langle my, b]$. □

Lema 5.1.9. *[13] Ako je f diferencijabilna na* $[0, b]$*, tada je* $f \in K_m(b)$ *ako i samo ako*

$$f'(x) \geq \frac{f(x) - mf(y)}{x - my}, \tag{5.5}$$

za $x > my$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $f \in K_m(b)$, tj. f je m-konveksna funkcija funkcija s $f(0) \geq 0$. Označimo s $g(x) := \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$. Prema prethodnoj lemi, g je rastuća pa deriviranjem funkcije g dobivamo:

$$
\begin{aligned}
g'(x) = \frac{f'(x)(x - my) - f(x) + mf(y)}{(x - my)^2} &\geq 0 \\
f'(x)(x - my) - f(x) + mf(y) &\geq 0 \\
f'(x)(x - my) &\geq f(x) - mf(y) \\
f'(x) &\geq \frac{f(x) - mf(y)}{x - my},
\end{aligned}
$$

što smo i trebali pokazati.

($\Leftarrow$) Neka je $f'(x) \geq \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$. Označimo s $g(x) := \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$. Deriviranjem funkcije g dobivamo:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{f'(x)(x - my) - f(x) + mf(y)}{(x - my)^2} \\
g'(x) &= \frac{1}{x - my}\left[f'(x) - \frac{f(x) - mf(y)}{x - my}\right].
\end{aligned}
$$

Budući da je desna strana jednakosti pozitivna zaključujemo $g' \geq 0$.

Dakle, g je rastuća funkcija, tj. $\dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$ je rastuća funkcija, pa prema lemi 5.1.8 f je m-konveksna funkcija iz $K_m(b)$. □

Primjer 5.1.10. *[6] Funkcija $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ je m-konveksna ($m \in [0, 1]$) ako je $b \leq 0$.*

Naime, f je m-konveksna ako i samo ako vrijedi $f'(x) \geq \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$ za $x > my$, odnosno $f'(x) - \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my} \geq 0$. Tada za funkciju $f(x) = ax + b$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{a(x - my) - (ax + b) + m(ay + b)}{x - my} &\geq 0 \\
\frac{ax - amy - ax - b + may + mb}{x - my} &\geq 0 \\
\frac{mb - b}{x - my} &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Budući da je $x > my$, zaključujemo da je $f'(x) - \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my} \geq 0$ za $b \leq 0$.

Drugim riječima f je m-konveksna za $b \leq 0$.

Primjer 5.1.11. *[6] Funkcija* $f : [0,\infty\rangle \to \langle -\infty, 0]$, $f(x) = -\ln(x+1)$ *je m-konveksna funkcija.*

Naime, f je m-konveksna ako i samo ako vrijedi $f'(x) \geq \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my}$ *za* $x > my$, *odnosno* $f'(x) - \dfrac{f(x) - mf(y)}{x - my} \geq 0$.

Za funkciju $f(x) = -\ln(x+1)$ *to je ekvivalentno sa*

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{-1}{x+1}\cdot(x-my) - (-\ln(x+1)) + m\cdot(-\ln(y+1))}{x-my} &\geq 0\\
\frac{\dfrac{-(x-my)}{x+1} + \ln(x+1) + \ln(y+1)^{-m}}{x-my} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Pokažimo da za $x > my$ *vrijedi*

$$-(x-my) + (x+1)\ln(x+1) + (x+1)\ln(y+1)^{-m} \geq 0.$$

Lijevu stranu gornje nejednakosti označimo s

$$h(x) := -(x-my) + (x+1)\ln(x+1) + (x+1)\ln(y+1)^{-m},$$

tada trebamo pokazati da je $h(x) \geq 0$.

Označimo sa $z(y) := \ln(my+1) - m\ln(y+1)$. *Tada je* $z(0) = \ln(0+1) - m\ln 1 = 0$.

Pogledajmo prvu derivaciju funkcije z

$$\begin{aligned}
z'(y) &= \frac{m}{my+1} - \frac{m}{my+1}\\
&= m\cdot\frac{y+1-my-1}{(my+1)(y+1)}\\
&= \frac{(1-m)y}{(my+1)(y+1)} > 0.
\end{aligned}$$

Budući da je z rastuća f i $z(0) = 0$ *slijedi da je* $z(y) \geq 0$ *za svaki* $y \geq 0$.

Neka su m i y fiksni brojevi, tada za $x > my$ *vrijedi*

$$\lim_{z\to my} h(z) = h(my) = (my+1)\ln[(my+1)(y+1)^{-m}].$$

Uočimo, $my + 1$ *je nenegativno,* $\ln[(my+1)(y+1)^{-m}] = z(y)$, *a to smo dokazali da je nenegativno, pa zaključujemo da je* $h(my) \geq 0$.

Pogledajmo prvu derivaciju $h(x)$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -1 + \ln(x+1) + (x+1)\frac{1}{x+1} + \ln(y+1)^{-m}\\
&= m\ln(x+1) - m\ln(y+1).
\end{aligned}$$

Za $x > my$ slijedi da je $\ln(x + 1) > \ln(my + 1)$. *Drugim riječima* $h'(x) > z(y) > 0$. *Zaključujemo da je* $h(x) \geq 0$ *za svaki* $x > my$.

Propozicija 5.1.12. *Ako je* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ *istovremeno i m-konveksna i m-konkavna,* $m \neq 1$, *tada je f linearna funkcija, tj. postoji* $c \in \mathbb{R}$ *takav da je* $f(x) = cx$.

Dokaz. Iz pretpostavke da je f i m-konveksna i m-konkavna slijedi da za sve $x, y \in [0, b]$ i $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(tx + m(1 - t)y) = tf(x) + m(1 - t)f(y).$$

Za $t = 0$ i $y = 0$ imamo

$$\begin{aligned} f(0 \cdot x + m \cdot 0) &= 0 \cdot f(x) + mf(0) \\ f(0) &= mf(0) \\ f(0)(1 - m) &= 0, \end{aligned}$$

tj. $f(0) = 0$.
Izračunajmo još i $f(tb)$:

$$\begin{aligned} f(tb) &= f(t \cdot b + m(1 - t) \cdot 0) \\ &= tf(b) + m(1 - t)f(0) \\ &= tf(b). \end{aligned}$$

Definirajmo linearnu funkciju g koja spaja točke $(0, 0)$ i $(b, f(b))$. Dakle,

$$g(x) = \frac{f(b)}{b}x.$$

Pokazat ćemo da je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in [0, b]$.
Neka je $x \in [0, b]$ proizvoljan broj. Tada postoji $t \in [0, 1]$ takav da je $x = tb$.
Tada je

$$g(x) = \frac{f(b)}{b}x = \frac{f(b)}{b}tb = tf(b) = f(tb) = f(x).$$

Budući da ovo vrijedi za svaki $x \in [0, b]$ slijedi da su f i g jednake, tj f je linearna funkcija.
□

Lema 5.1.13. *[13] Ako je funkcija* $F_g(x) = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_0^x g'(t) \cdot f(t)dt$ *nenul m-konveksna funkcija za svaku m-konveksnu funkciju f tada postoje realni brojevi k i u,* $u > 0$ *takvi da je funkcija g oblika*

$$g(x) = k \cdot x^u. \tag{5.6}$$

Dokaz. Funkcija $f_0(x) = cx$ je m-konveksna funkcija za svaki $c \in \mathbb{R}$.
Prema pretpostavci leme funkcija

$$F_0(x) = F_g(f_0)(x) = \frac{c}{g(x)} \int_0^x g'(t) \cdot t \cdot dt = c \cdot G(x)$$

je m-konveksna funkcija.
To znači da za svaki $x, y \in [0, b]$ i $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$c \cdot \Big[G(tx + m(1-t)y) - t \cdot G(x) - m(1-t) \cdot G(y)\Big] \leq 0$$

te za $c = \pm 1$ dobivamo:

$$G(tx + m(1-t)y) = t \cdot G(x) + m(1-t) \cdot G(y).$$

Znači da je G i m-konveksna i m-konkavna, pa je prema propoziciji 5.1.12 G linearna, tj. $G(x) = a \cdot x$.
Prema definiciji od G vrijedi

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{g(x)} \int_0^x g'(t) \cdot t \cdot dt \\ a \cdot x &= \int_0^x g'(t) \cdot t \cdot dt. \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} ag(x) + axg'(x) &= g'(x)x \\ axg'(x) - g'(x)x &= -ag(x) \\ g'(x)x(a-1) &= -ag(x) \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{-a}{a-1} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dobiveni izraz integriramo

$$\begin{aligned} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx &= \frac{a}{a-1} \cdot \ln x + c \\ \ln g(x) &= \ln x^u + \ln k, \end{aligned}$$

gdje je $\frac{-a}{a-1} = u, k \in \mathbb{R}$. To možemo zapisati

$$\begin{aligned} \ln g(x) &= \ln(x^u \cdot k) \\ g(x) &= kx^u, \end{aligned}$$

a to smo upravo trebali pokazati.
Vratimo se na definiciju od F i promotrimo F za $f(t) = c$.
Uvrstimo li $g'(t) = k \cdot u \cdot t^{u-1}$ i $f(t) = c$, dobivamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{g(x)} \int_0^x g'(t) \cdot f(t) dt \\ &= \frac{1}{g(x)} \int_0^x k \cdot u \cdot t^{u-1} c dt \\ &= \frac{kuc}{g(x)} \int_0^x t^{u-1} dt \\ &= \frac{kuc}{g(x)} \cdot \frac{t^u}{u}\Big|_0^x. \end{aligned}$$

Zadnji izraz nije definiran za $u = 0$ zbog u u nazivniku. Ako je $u < 0$ onda $t^u|_{t=0}$ nije definiran. Dakle, u mora biti pozitivan. □

Lema 5.1.14. *[13] Ako je funkcija g oblika* $g(x) = k \cdot x^u, u > 0$ *tada je funkcija* F_g *nenegativna i m-konveksna za svaki* $f \in K_m(b)$.

Dokaz. Neka je $F_g(x) = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_0^x g'(t) \cdot f(t) dt$ i $g(x) = k \cdot x^u$. Tada vrijedi

$$F_g(x) = F_u(x) = \frac{u}{x^u} \int_0^x t^{u-1} f(t) dt.$$

Uvođenjem supstitucije $t = x \cdot s^{1/u}$ dobivamo:

$$F_u(x) = \int_0^1 f(x \cdot s^{1/u}) ds.$$

Budući da je $f \in K_m(b)$, za $x, y \in [0, b]$ i $t \in I$:

$$\begin{aligned} F_u(tx + m(1-t)y) &= \int_0^1 f(txs^{1/u} + m(1-t)ys^{1/u}) ds \\ &\leq \int_0^1 [t \cdot f(xs^{1/u}) + m(1-t) \cdot f(ys^{1/u})] ds \\ &= t \cdot F_u(x) + m(1-t) \cdot F_u(y) \end{aligned}$$

što smo i trebali pokazati. □

Klasu m-konveksnih funkcija u srednjem na $[0, b]$ s obzirom na funkciju $g(x) = kx^u$, $f(0) \leq 0$ označavamo s $M^u K_m(b)$, tj.

$$M^u K_m(b) = \{f : [0,b] \to \mathbb{R} : f(0) \le 0, f \text{ neprekidna}, \ F_u \in K_m(b)\}.$$
$$\left\{ F_u(x) = \frac{u}{x^u} \int_0^x t^{u-1} f(t)dt \right\}.$$

5.2 Teoremi hijerarhije

Slijedi teorem koji opisuje odnose konveksnih, m-konveksnih, n-konveksnih i zvjezdastih funkcija, tj. razmatra pitanje hijerarhije klasa tih funkcija.

Teorem 5.2.1. *[13] Za proizvoljan* $b > 0$ *i* $1 > m > n > 0$ *vrijedi:*

$$K(b) \subseteq K_m(b) \subseteq K_n(b) \subseteq K_0(b). \tag{5.7}$$

Dokaz. Neka je $f \in K(b)$, tj. f je konveksna i neka je $t \in [0,1], x, y \in [0,b]$ *i* $0 < m < 1$. Prema definiciji konveksnosti vrijedi

$$\begin{aligned} f(tx + m(1-t)\cdot y) &= f(tx + (1-t)(my)) \\ &\le tf(x) + (1-t)f(my) \\ &\le tf(x) + m(1-t)f(y), \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti upotrijebili da je konveksna funkcija ujedno i zvjezdasta.
Dakle, f je m-konveksna, tj. $K(b) \subseteq K_m(b)$.

Neka je $f \in K_m(b)$, tj. f je m-konveksna i neka su $x, y \in [0,b], 0 \le n < m \le 1$. Prema teoremu 5.1.3 $f \in K_n(b)$. Drugim riječima, f je n-konveksna funkcija.

Neka je $f \in K_n(b)$, tj. f je n-konveksna i neka je $x \in [0,b]$ i $t \in [0,1]$. Tada vrijedi

$$f(tx) = f(tx + n(1-t)\cdot 0) \le t \cdot f(x) + n(1-t)\cdot f(0) \le t \cdot f(x),$$

jer je $f(0) \le 0$.
Dakle, $K_n(b) \subseteq K_0(b)$. □

Teorem 5.2.2. *[13] Ako je* $0 < n < m < 1$ *i* $u > 0$ *tada vrijedi:*

$$\begin{array}{ccccccc} K(b) & \subseteq & K_m(b) & \subseteq & K_n(b) & \subseteq & K_0(b) \\ \cap\text{\textbar} & & \cap\text{\textbar} & & \cap\text{\textbar} & & \cap\text{\textbar} \\ M^u K(b) & \subseteq & M^u K_m(b) & \subseteq & M^u K_n(b) & \subseteq & M^u K_0(b) \end{array}$$

Dokaz. Prema teoremu 5.2.1 vrijedi $K(b) \subseteq K_m(b) \subseteq K_n(b) \subseteq K_0(b)$.

Neka je $f \in K(b)$, tj. f je konveksna. Neka je $t \in [0,1], x, y \in [0,b]$ i
$F_u(x) = \int_0^1 f(x \cdot s^{1/u})ds$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
F_u(tx + (1-t)y) &= \int_0^1 f(tx \cdot s^{1/u} + (1-t)ys^{1/u})ds \\
&\leq \int_0^1 (tf(xs^{1/u}) + (1-t)f(ys^{1/u}))ds \\
&= \int_0^1 (tf(xs^{1/u}))ds + \int_0^1 ((1-t)f(ys^{1/u}))ds \\
&= tF_u(x) + (1-t)F_u(y),
\end{aligned}$$

a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $f \in M^u K(b)$.

Neka je $f \in K_0(b)$ i neka je $t \in [0,1], x \in [0,b]$. Neka je $F_u(x) = \int_0^1 f(x \cdot s^{1/u})ds$. Prema definiciji za zvjezdaste funkcije vrijedi

$$F_u(tx) = \int_0^1 f(tx \cdot s^{1/u})ds \leq \int_0^1 tf(x \cdot s^{1/u})ds = tF_u(x).$$

Drugim riječima, $f \in M^u K_0(b)$.

Neka je $f \in M^u K(b)$, tj. F_u je konveksna. U prethodnom teoremu smo dokazali da je tada F_u m-konveksna, tj. $f \in M^u K_m(b)$.
Dakle $M^u K(b) \subseteq M^u K_m(b)$.

Neka je $f \in M^u K_m(b)$, tj. f je m-konveksna u srednjem. To znači da je F_u m-konveksna, a već smo dokazali da je m-konveksna funkcija ujedno i n-konveksna za $0 < n < m < 1$.
Dakle, F_u je n-konveksna, tj. $f \in M^u K_n(b)$.

Neka je $f \in M^u K_n(b)$, tj. f je n-konveksna u srednjem. Tada je F_u n-konveksna, pa je prema prethodnom teoremu F_u zvjezdasta.
Drugim riječima, $f \in M^u K_0(b)$, tj. $M^u K_n(b) \subseteq M^u K_0(b)$.

Neka je $f \in K_m(b)$ tj. f je m-konveksna i neka je $t \in [0,1], x, y \in [0,b], u > 0$ i $0 < m < 1$.

Tada imamo

$$\begin{aligned} F_u(tx + m(1-t)y) &= \int_0^1 f(txs^{1/u} + m(1-t)ys^{1/u})ds \\ &\leq \int_0^1 [t \cdot f(xs^{1/u}) + m(1-t) \cdot f(ys^{1/u})]ds \\ &= t \cdot F_u(x) + m(1-t) \cdot F_u(y), \end{aligned}$$

a to smo upravo i trebali pokazati, dakle $K_m(b) \subseteq M^u K_m(b)$.
Analogno pokažemo da je $K_n(b) \subseteq M^u K_n(b)$. □

Do sad smo funkcije promatrali na intervalu $[0, b]$. Ta se situacija može proširiti, tj. možemo promatrati funkcije definirane na općenitom intervalu$[a, b]$.
Sa $C[a, b]$ označavat ćemo neprekidne funkcije definirane na $[a, b]$.
Definirajmo nekoliko klasa funkcija koje poopćavaju zvjezdaste, superaditivne i konveksne u Jensenovom smislu.

Klasu m-zvjezdastih funkcija na $[a, b]$ označavamo sa $S^*_m[a, b]$, tj.

$$S^*_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : \frac{f(x) - mf(a)}{x - ma} \geq \frac{f(z) - mf(a)}{z - ma}, a \leq z < x \leq b \Big\}.$$

Klasu m-superaditivnih funkcija na $[a, b]$ označavamo sa $S_m[a, b]$, tj.

$$S_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : f(x) + f(y) \leq f(x + y - ma) + mf(a), \forall x, y \in [a, b] \Big\}.$$

Klasu m-zvjezdastih funkcija u Jensenovom smislu na $[a, b]$ označavamo s $J^*_m[a, b]$, tj.

$$J^*_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : f(2x - ma) - mf(a) \geq 2[f(x) - mf(a)], a \leq x \leq b \Big\}.$$

Klasu m-konveksnih funkcija u Jensenovom smislu na $[a, b]$ označavamo s $J_m[a, b]$, tj.

$$J_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : f\Big(\frac{m(x + y)}{1 + m}\Big) \leq \frac{m[f(x) + f(y)]}{1 + m}, \forall x, y \in [a, b] \Big\}.$$

Klasu m-subhomogenih funkcija na $[a, b]$ označavamo s $H_m[a, b]$, tj.

$$H_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : f(tx) \leq tf(x), a \leq x \leq b, m \leq t \leq 1 \Big\}.$$

Klasu m-subhomogenih funkcija u Jensenovom smislu na $[a, b]$ označavamo s $H^*_m[a, b]$, tj.

$$H^*_m[a, b] = \Big\{ f \in C[a, b] : f\Big(\frac{2mx}{1 + m}\Big) \leq \frac{2m}{1 + m} f(x), a \leq x \leq b \Big\}.$$

Klasu slabih m-superaditivnih funkcija na $[a,b]$ označavamo sa $wS_m[a,b]$, tj.

$$wS_m[a,b] = \Big\{ f \in C[a,b] : f(a+t)+f(b-t) \le f(b+(1-m)a)+mf(a), \forall t \in [0,(b-a)/2] \Big\}.$$

Klasu slabih m-konveksnih funkcija u Jensenovom smislu na $[a,b]$ označavamo s $wJ_m[a,b]$, tj.

$$wJ_m[a,b] = \Big\{ f \in C[a,b] : \frac{m[f(a+t)+f(b-t)]}{1+m} \ge f\Big(\frac{m(a+b)}{1+m}\Big), \forall t \in [0,(b-a)/2] \Big\}.$$

Ovo poopćenje funkcija pojavilo se krajem devedesetih, a obradio ih je Gh. Toader. Promotrimo odnose danih klasa funkcija, tj. razmotrimo pitanje hijerarhije klasa tih funkcija.

Teorem 5.2.3. *[11] Za $m \in \langle 0,1]$ vrijedi:*

$$K_m[a,b] \subseteq S_m^*[a,b] \subseteq S_m[a,b] \subseteq wS_m[a,b]$$

i

$$H_m^*[a,b] \supseteqq H_m[a,b] \supseteqq K_m[a,b] \subseteq J_m[a,b] \subseteq wJ_m[a,b]$$

Dokaz. Neka je $f \in K_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-konveksna na $[a,b]$ i neka je $t \in [0,1]$, $x \in [a,b]$. Prema definiciji m-konveksnosti vrijedi

$$\begin{aligned} f(tx+m(1-t)a) &\le tf(x)+m(1-t)f(a) \\ f(tx+m(1-t)a) &\le tf(x)+mf(y)-tmf(a) \\ f(tx+m(1-t)a)-mf(y) &\le t(f(x)-mf(a)). \end{aligned}$$

Neka je $z \in [a,b]$ takav da je $z < x$. Tada za $t = \dfrac{z-ma}{x-ma}$ imamo da je $z = tx+m(1-t)a$, pa gornja nejednakost postaje

$$f(z)-mf(a) \le t(f(x)-mf(a)).$$

Podijelimo li ju sa $t(x-ma)$ dobivamo

$$\frac{f(z)-mf(a)}{t(x-ma)} \le \frac{f(x)-mf(a)}{x-ma}.$$

Budući da je $t(x-ma) = z-ma$, dokazali smo da je $f \in S_m^*[a,b]$. Dakle $K_m[a,b] \subseteq S_m^*[a,b]$.

Neka je $f \in S_m^*[a,b]$, tj. f je m-zvjezdasta.
Ako je f m-zvjezdasta, tada za $z < x$, $z,x \in [a,b]$ vrijedi

$$\frac{f(x)-mf(a)}{x-ma} \ge \frac{f(z)-mf(a)}{t(x-ma)}.$$

Pomnožimo li tu nejednakost sa zajedničkim nazivnikom i transformiramo li ju, dobit ćemo

$$\begin{aligned}(z-ma)(f(x)-mf(a)) &\geq (x-ma)(f(z)-mf(a)) \\ f(z)(x-ma) &\leq f(x)(z-ma)+mf(a)(x-z). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Stavimo li u (5.8) $z = x$, $x = x + y - ma$ dobivamo

$$f(x)(x+y-2ma) \leq f(x+y-ma)(x-ma)+mf(a)(y-ma). \tag{5.9}$$

Stavimo li u (5.8) $z = y$, $x = x + y - ma$ dobivamo

$$f(y)(x+y-2ma) \leq f(x+y-ma)(y-ma)+mf(a)(x-ma). \tag{5.10}$$

Zbrojimo li (5.9) i (5.10) dobit ćemo

$$\begin{aligned}(f(x)+f(y))(x+y-2ma) &\leq f(x+y-ma)[(x-ma)+(y-ma)]+ \\ &\quad +mf(a)[(y-ma)+(x-ma)].\end{aligned}$$

Nakon dijeljenja sa $(x + y - 2ma)$ dobivamo

$$f(x)+f(y) \leq f(x+y-ma)+mf(a),$$

a to znači da je f m-superaditivna.
Dakle, dokazali smo da je $S_m^*[a,b] \subseteq S_m[a,b]$.

Neka je $f \in S_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-superaditivna.
Prema definiciji m-superaditivnosti vrijedi

$$f(x)+f(y) \leq f(x+y-ma)+mf(a)$$

Sad napravimo sljedeću supstituciju $x = a + t$, $y = b - t$. Tada je

$$\begin{aligned}f(a+t)+f(b-t) &\leq f(a+t+b-t-ma)+mf(a) \\ &\leq f(b+(1-m)a)+mf(a).\end{aligned}$$

Drugim riječima, $S_m[a,b] \subseteq wS_m[a,b]$.

Dokažimo sada inkluzije u drugoj rečenici teorema.
Neka je $f \in K_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-konveksna i neka je $t \in [0,1], x \in [0,b]$.
Prema definiciji m-konveksnosti vrijedi

$$f(tx+m(1-t)y) \leq tf(x)+m(1-t)f(y).$$

Neka je $t := \dfrac{m}{1+m}$. Tada je $1 - t = \dfrac{1}{1+m}$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{m}{1+m}\cdot x + m\Big(\frac{1}{1+m}\Big)y\Big) &\leq \frac{m}{1+m}f(x) + m\Big(\frac{1}{1+m}\Big)f(y)\\
f\Big(\frac{m}{1+m}x + \frac{m}{1+m}y\Big) &\leq \frac{m}{1+m}f(x) + \frac{m}{1+m}f(y)\\
f\Big(\frac{m(x+y)}{1+m}\Big) &\leq \frac{m[f(x)+f(y)]}{1+m}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je f m-konveksna funkcija u *Jensenovom* smislu.

Neka je $f \in K_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-konveksna i neka je $t \in [0,1]$. Neka je $x = y$. Primjenom definicije m-konveksne funkcije dobivamo

$$\begin{aligned}
f(tx + m(1-t)x) &\leq tf(x) + m(1-t)f(x)\\
f(tx + mx - mtx) &\leq tf(x) + mf(x) - tmf(x)\\
f(x(t + m - mt)) &\leq f(x)(t + m - mt)\\
f[x(m + t(1-m))] &\leq f(x)(m + t(1-m)).
\end{aligned}$$

Označimo s $z := m + t(1-m)$, tada imamo da je $z \geq m$ i $z \leq 1$ i

$$f(xz) \leq f(x)z,$$

znači da je $f \in H_m[a,b]$.
Dakle, $K_m[a,b] \subseteq H_m[a,b]$.

Neka je $f \in J_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-konveksna u *Jensenovom* smislu. Prema definiciji m-konveksne funkcije u *Jensenovom* smislu vrijedi

$$f\Big(\frac{m(x+y)}{1+m}\Big) \leq \frac{m[f(x)+f(y)]}{1+m}.$$

Uvedemo li supstituciju: $x = a + t, y = b - t$, uvrštavanjem u gornju nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{m(f(a+t) + f(b-t))}{1+m} &\geq f\Big(\frac{m(a+t+b-t)}{1+m}\Big)\\
&\geq f\Big(\frac{m(a+b)}{1+m}\Big),
\end{aligned}$$

znači da je $f \in wJ_m[a,b]$. Dakle, $J_m[a,b] \subseteq wJ_m[a,b]$.

Neka je $f \in H_m[a,b]$, tj. f je neprekidna i m-subhomogena. U definiciju m-subhomogene funkcije uvrstimo supstituciju $t := \dfrac{2m}{1+m}$. Tada je

$$\begin{aligned} f(tx) &\leq tf(x) \\ f\Big(\frac{2m}{1+m} \cdot x\Big) &\leq \frac{2m}{1+m} f(x). \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je $f \in H_m^*[a,b]$, tj. $H_m[a,b] \subseteq H_m^*[a,b]$. $\square$

Bibliografija

[1] T. Angell: *Convex Sets and Convex Functions*, University of Delaware, dostupno na: https:http://www.math.udel.edu/~angell/Opt/convex.pdf

[2] E.F. Beckenbach: *Superadditivity inequalities*, Pacific J. Math., Vol. 14, No. 2, (1964) 421-438.

[3] K. Bošnjak, M.R. Penava: *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list, 16 (2016) 15-25.

[4] A.M. Bruckner, E. Ostrow: *Some function classes related to the class of convex functions*, Pacific J. Math., 12 (1962), 1203-1215.

[5] A.M. Bruckner: *Tests for the superadditivity of functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 126-130.

[6] T. Lara, N. Merentes, R. Quintero, E. Rosales: *On strongly m-convex functions*, Mathematica Aterna, Vol. 5, 2015, No. 3, 521-535.

[7] P.T. Mocanu, I. Şerb, Gh. Toader: *Real star-convex functions*, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, Vol XLII, No. 3, September 1997, 65-80.

[8] J.E. Pečarić: *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996. 49-53.

[9] J.E. Pečarić, F. Proschan, Y.L. Tong: *Convex functions, partial orderings and statistical applications*, Math. in science and engineering, Vol 187, 1992, 1-30.

[10] T. Popoviciu: *Les fonctions convexes*, Herman and Cie, Éditeurs, Paris, 1944.

[11] Gh. Toader: *Hierarchy of convexity and some classic inequalities*, J. Math. Inequal, 3 (2009), 305-313.

[12] Gh. Toader: *On the hierarchy of convexity of functions*, Anal. Numer. Theor. Approx. 15(1986)2, 167-172.

[13] Gh. Toader: *On a generalization of the convexity*, Mathematica 30(53)(1988), 1, 83-87.

[14] S. Toader: *The order of a star-convex function*, Bullet. Applied and Comp. Math. (Budapest) 85-B(1998), BAM-1473, 347-350.

Sažetak

Konveksne funkcije predstavljaju važno mjesto u matematici, jer imaju mnogobrojnu primjenu u različitim područjima matematike. Početak proučavanja konveksnih funkcija vezan je uz danskog matematičara J.L.W.V. Jensena.
U ovom radu razmotrili smo pitanje hijerarhije klasa konveksnih funkcija, odnosno pokazali smo da vrijedi

$$K(b) \subset S^*(b) \subset S(b).$$

U prvom poglavlju ovog rada izrekli smo osnovne definicije i svojstva konveksnih funkcija. Također smo iskazali i dokazali Jensenovu nejednakost i Hermite-Hadamardovu nejednakost za konveksne funkcije. Nakon konveksnih funkcija u drugom i trećem poglavlju definirali smo zvjezdaste i superaditivne funkcije. Nakon što smo dokazali nekoliko teorema i propozicija vezane uz konveksne, zvjezdaste i superaditivne funkcije na intervalu $[0, b]$, poglavlje smo zaključili proučavajući hijerarhiju konveksnih funkcija. U četvrtom poglavlju proučavali smo integralne sredine, tj. konveksne funkcije u srednjem, zvjezdaste u srednjem i superaditivne funkcije u srednjem te razmotrili hijerarhiju danih klasa funkcija:

$$K(b) \subseteq MK(b) \subseteq S^*(b) \subseteq S(b) \subseteq MS^*(b) \subseteq MS(b).$$

U posljednjem poglavlju ovog rada posvetili smo se poopćenju konveksnih funkcija. Definirali smo m-konveksne, m-zvjezdaste, m-superaditivne, m-konveksne funkcije u Jensenovom smislu, slabe m-konveksne funkcije u Jensenovom smislu, m-superaditivne funkcije u Jensenovom smislu, slabe m-superaditivne funkcije te razmotrili pitanje hijerarhije klasa tih funkcija.

Summary

Convex functions play an important role in many areas of mathematics, because they have many applications in different fields of mathematics. Danish mathematician J.L.W.V Jensen is considered for the creator of this field of mathematics.
In this paper we have studied the question of hierarchy of the convexity of functions. We proved strict inclusion:

$$K(b) \subset S^*(b) \subset S(b).$$

In the first section of this paper, we have given the several definitions and properties of convexity of functions. We have also expressed and proved Jensen's inequality and Hermite-Hadamard's inequality for convex functions. In Chapter 2 and 3 we defined starshaped and superadditive functions. After that we proved several theorems and propositions for convex, starshaped, and superadditive functions on $[0, b]$, we concluded chapter by studying hierarchy of convexity of this functions. In the fourth chapter, we extended our results by the arithmetic integral mean, respectively we studied the sets of functions which are convex, starshaped, respectively superadditive in the mean. We proved inclusions:

$$K(b) \subseteq MK(b) \subseteq S^*(b) \subseteq S(b) \subseteq MS^*(b) \subseteq MS(b).$$

At the end of this paper, we defined m-convex, m-starshaped functions, m-superadditive functions, Jensen m-convex functions, weak Jensen m-convex functions, Jensen m-superadditive functions, and weak m-superadditive functions. Some inclusions between such classes of functions are established.

Životopis

Rođena sam 22. studenog 1992. godine u Zagrebu. Pohađala sam osnovu školu Matije Gubec do 2007. godine. Iste godine nastavila sam svoje školovanje u II. gimnaziji. U srednjoj školi sve veći interes za matematiku, kao i želja za podučavanjem rezultirali su upisom Prirodoslovnog - matematičkog fakulteta u Zagrebu 2011. godine. 2015.godine stekla sam zvanje sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike, univ. bacc. educ. math, te iste godine nastavila školovanje na diplomskom studiju istog fakulteta, nastavnički smjer.