Tehnika Bellmanovih funkcija u matematičkoj analizi

Bužančić, Marin

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:313165

Rights / Prava: In copyright

Download date / Datum preuzimanja: **2021-01-17**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marin Bužančić

TEHNIKA BELLMANOVIH FUNKCIJA U MATEMATIČKOJ ANALIZI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

Osnovna ideja tehnike Bellmanovih funkcija u matematičkoj analizi pojavila se sredinom 1980-ih godinama u radovima D. L. Burkholdera, koji je koristio pomno konstruirane funkcije s određenim svojstvima konkavnosti i ograničenosti slike u dokazivanju oštrih L^p nejednakosti za martingale. Sredinom 1990-ih godina F. Nazarov, S. Treil i A. Volberg sustavno su razvili tehniku, dali joj ime i proširili njenu primjenu na probleme u harmonijskoj analizi. Pritom su povukli paralele s metodama u području optimalne stohastičke kontrole, konkretno s Bellmanovom jednadžbom i Bellmanovim načelom optimalnosti, stoga je tehnika dobila ime upravo prema primijenjenom matematičaru R. E. Bellmanu.
Ideja je tehnike Bellmanovih funkcija da je za dokaz određenih tipova nejednakosti dovoljno naći barem jednu funkciju koja zadovoljava određene uvjete na domenu i sliku te određeno svojstvo usporedivo s konkavnosti. Dokazivanje egzistencije i nalaženje eksplicitne formule takve funkcije težak je posao, ali isplativ, budući da često daje upravo najbolje ocjene.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. Prvo poglavlje sadrži osnovne definicije i rezultate potrebne u tehnici Bellmanovih funkcija. Definirat ćemo familiju dijadskih kocki, odnosno intervala, te iskazati njihova svojstva. Bit će definirani pojmovi konveksnog skupa te konveksnih i konkavnih funkcija. Precizno ćemo dokazati rezultate vezane uz konkavnost funkcija vektorskih varijabli, koji čine jedne od osnovnih alata prilikom nalaženja funkcija Bellmanovog tipa. Ovo poglavlje sadrži i konstrukciju općeg rješenja homogene Monge-Ampèreove jednadžbe.
U drugom će poglavlju biti definirani pojmovi Carlesonove mjere i Carlesonovog niza te iskazana dijadska L^p verzija Carlesonovog teorema ulaganja. Ostatak ćemo poglavlja posvetiti dokazu teorema spomenutom tehnikom. Definirat ćemo Bellmanovu funkciju i funkciju Bellmanovog tipa, analizirati svojstva spomenutih funkcija za dani teorem te dati eksplicitnu formulu jedne takve funkcije. Osvrnut ćemo se i na pitanje najbolje konstante u Carlesonovom teoremu ulaganja te dati drugi mogući primjer funkcije Bellmanovog tipa.
U trećem će poglavlju biti definirani Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija, ope-

ratori slabog i jakog tipa (p, q), dijadski maksimalni operator te iskazana dijadska L^p verzija Hardy-Littlewoodovog maksimalnog teorema. Pokazat ćemo kako definirati Bellmanovu funkciju za dani teorem, precizno njome dokazati teorem te naći eksplicitnu formulu Bellmanove funkcije kao rješenje homogene Monge-Ampèreove jednadžbe s rubnim uvjetima.
U zadnjem će poglavlju biti definirane A_p težine, dijadske klase $A_p^{d,\delta}$, $A_\infty^{d,\delta}$, $RH_p^{d,\delta}$ i $RH_1^{d,\delta}$ te iskazani ekvivalentni sumacijski uvjeti. Prvo ćemo dokazati nužnost sumacijskih uvjeta u slučaju dijadske klase $A_\infty^{d,\delta}$ jednostavnim nalaženjem funkcije Bellmanovog tipa, zatim ćemo pokazati kako poopćiti oblik funkcije za jedinstven dokaz teorema.
U radu primjenjujemo tehniku isključivo na dijadske verzije teorema, tj. na teoreme koji su iskazani preko prosjeka na dijadskim intervalima, no moguće je tehniku primijeniti i na neprekidne verzije teorema.

Posebno se želim zahvaliti mentoru, doc. dr. sc. Vjekoslavu Kovaču, na mnogim koristim komentarima i pruženoj pomoći tijekom pisanja diplomskoga rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i rezultati

1.1 Dijadska familija

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $\mathcal{Q}_0$ familiju kocaka u $\mathbb{R}^n$ koje su kongruentne jediničnoj kocki, otvorenoj zdesna, te čiji vrhovi leže na rešetki $\mathbb{Z}^n$, tj. neka je $\mathcal{Q}_0 = [0,1\rangle^n + \mathbb{Z}^n$. Dilatiramo li ovu familiju s koeficijentom 2^{-k}, $k \in \mathbb{Z}$, dobivenu familiju označimo s $\mathcal{Q}_k$, tj. $\mathcal{Q}_k = [0, 2^{-k}\rangle^n + (2^{-k}\mathbb{Z})^n$.

Definicija 1.1.1. *Familiju* $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_k$ *zovemo* familija dijadskih kocki *u* $\mathbb{R}^n$.

Napomena 1.1.2. *Kada je* $n = 1$*, tada familiju* $\mathcal{D} = \{[2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)\rangle : j, k \in \mathbb{Z}\}$ *zovemo* familija dijadskih intervala *u* $\mathbb{R}$.

Iz konstrukcije direktno slijede sljedeća svojstva:

(1) Za dani $x \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{Z}$ postoji jedinstvena kocka iz familije $\mathcal{Q}_k$ koja sadrži x.

(2) Dvije dijadske kocke su ili disjunktne ili jedna je sadržana u drugoj.

(3) Dijadska kocka iz $\mathcal{Q}_k$ sadržana je u jedinstvenoj kocki iz $\mathcal{Q}_j$ za svaki $j < k$ te sadrži 2^n kocki iz Q_{k+1}.

(4) Lebesgueova mjera $|Q|$ kocke iz familije $\mathcal{Q}_k$ iznosi 2^{-kn}.

Iz navedenih svojstva slijedi da se svaki dijadski interval $I \in \mathcal{D}$ može prikazati kao unija dva disjunktna dijadska intervala duljine $\frac{1}{2}|I|$, koje zovemo *lijevi i desni (dijadski) sin* od I te ih označavamo I_- i I_+. Obratno, za svaki $I \in \mathcal{D}$ postoji dijadski interval duljine $2|I|$, koji zovemo *(dijadski) otac* od I i označavamo I^F.

1.2 Konveksnost i konkavnost

Definicija 1.2.1. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* konveksan *ako je za svaki par točaka $x_1, x_2 \in A$ segment koji ih spaja sadržan u A, tj.*

$$(1-t)\,x_1 + t\,x_2 \in A, \quad \forall x_1, x_1 \in A, \ \forall t \in [0,1].$$

Sljedeće je svojstvo konveksnih skupova ponekad korisno.

Propozicija 1.2.2. *Presjek proizvoljne familije konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ također je konveksan skup.*

Definicija 1.2.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan. Za funkciju $\varphi : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je*

(i) konveksna *na A, ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in A$ graf funkcije φ leži ispod segmenta koji spaja točke $(x_1, \varphi(x_1))$ i $(x_2, \varphi(x_2))$, tj.*

$$\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \leq (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A, \ \forall t \in [0,1].$$

Funkcija φ je strogo konveksna *ako za $x_1 \neq x_2$ i $0 < t < 1$ vrijedi stroga nejednakost.*

(ii) konkavna *na A, ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in A$ graf funkcije φ leži iznad segmenta koji spaja točke $(x_1, \varphi(x_1))$ i $(x_2, \varphi(x_2))$, tj.*

$$\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \geq (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A, \ \forall t \in [0,1].$$

Funkcija φ je strogo konkavna *ako za $x_1 \neq x_2$ i $0 < t < 1$ vrijedi stroga nejednakost.*

U prethodnoj definiciji zahtjev da domena funkcije bude konveksan skup slijedi iz zahtjeva da za svaki izbor točaka iz domene segment koji ih spaja ponovno bude u domeni. Često se u literaturi susreće sljedeća definicija konveksnosti i konkavnosti, koja nema zahtjev na domenu funkcije:

Za funkciju $\varphi : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako je njen *epigraf*

$$\operatorname{epi} \varphi := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq y\}$$

konveksan skup u $\mathbb{R}^{n+1}$.

Propozicija 1.2.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan i neka je $\varphi : A \to \mathbb{R}$. Dvije prethodno navedene definicije konveksne funkcije su ekvivalentne.*

Dokaz. Pretpostavimo da je φ konveksna na A. Neka su $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \operatorname{epi}\varphi$ proizvoljni. Tada je $\varphi(x_1) \leq y_1$ te $\varphi(x_2) \leq y_2$, stoga za $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \leq (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2) \leq (1-t)\,y_1 + t\,y_2,$$

odnosno

$$(1-t)\,(x_1, y_1) + t\,(x_2, y_2) = ((1-t)\,x_1 + t\,x_2, (1-t)\,y_1 + t\,y_2) \in \operatorname{epi}\varphi.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $\operatorname{epi}\varphi$ konveksan skup u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka su $x_1, x_2 \in A$ proizvoljni. Tada $(x_1, \varphi(x_1)), (x_2, \varphi(x_2)) \in \operatorname{epi}\varphi$, stoga za $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$((1-t)\,x_1 + t\,x_2, (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2)) = (1-t)\,(x_1, \varphi(x_1)) + t\,(x_2, \varphi(x_2)) \in \operatorname{epi}\varphi.$$

odnosno

$$\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \leq (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2).$$

□

Korolar 1.2.5. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan te neka je $\{\varphi_i : i \in I\}$ familija funkcija. Ako su $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije, onda je funkcija $\varphi : A \to \mathbb{R}$ definirana po točkama*

$$\varphi(x) := \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

također konveksna funkcija.

Dokaz. Da bismo dokazali prvu tvrdnju, dovoljno je provjeriti da vrijedi

$$\operatorname{epi}\varphi = \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi}\varphi_i.$$

Tada tvrdnja slijedi primjenom Propozicije 1.2.2 i Propozicije 1.2.4. □

Definicija 1.2.6. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan. Za funkciju $\varphi : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je*

(i) Jensen konveksna *na A, ako*

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

(ii) Jensen konkavna *na A, ako*

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

Napomena 1.2.7. *Često se u literaturi upravo funkcija $\varphi : A \to \mathbb{R}$ iz Definicije 1.2.6 naziva konveksna, odnosno konkavna, dok se uvjet konveksnosti iz Definicije 1.2.3 naziva* Jensenova nejednakost*.*

U nastavku će nas posebno zanimati nužni i dovoljni uvjeti za konkavnost funkcije. Iz Definicije 1.2.3 trivijalno slijedi da je φ konkavna ako i samo ako je $-\varphi$ konveksna, stoga se slični rezultati mogu iskazati i za konveksne funkcije.

Propozicija 1.2.8. *Neka je $\varphi(x, y)$ konkavna funkcija na konveksnom skupu $A \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ te neka je $\gamma(x) := \sup_{y \in A_x} \varphi(x, y)$, gdje je $A_x = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : (x, y) \in A\}$ $x-$prerez skupa A. Tada je $\gamma(x)$ konkavna funkcija na skupu $\{x \in \mathbb{R}^{n_1} : A_x \neq \emptyset\}$.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$ takvi da $A_{x_1}, A_{x_2} \neq \emptyset$. Odaberimo $y_1 \in A_{x_1}$ i $y_2 \in A_{x_2}$ takve da za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ vrijedi $\varphi(x_1, y_1) > \gamma(x_1) - \varepsilon$ i $\varphi(x_2, y_2) > \gamma(x_2) - \varepsilon$. Takvi y_1, y_2 postoje iz karakterizacije supremuma. Tada, za proizvoljni $t \in [0, 1]$, po konveksnosti skupa A vrijedi $(1-t)\, y_1 + t\, y_2 \in A_{(1-t)\, x_1 + t\, x_2}$, stoga ima smisla gledati

$$\begin{aligned}
\gamma((1-t)\, x_1 + t\, x_2) &\geq \varphi((1-t)\, x_1 + t\, x_2, (1-t)\, y_1 + t\, y_2) \\
&= \varphi((1-t)\,(x_1, y_1) + t\,(x_2, y_2)) \\
&\geq (1-t)\, \varphi(x_1, y_1) + t\, \varphi(x_2, y_2) \\
&> (1-t)\, \gamma(x_1) + t\, \gamma(x_2) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

S obzirom da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, po karakterizaciji supremuma dobijemo upravo

$$\gamma((1-t)\, x_1 + t\, x_2) \geq (1-t)\, \gamma(x_1) + t\, \gamma(x_2). \qquad \square$$

Propozicija 1.2.9. *Neka je $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konkavna, strogo padajuća funkcija na otvorenom intervalu I i neka je $J = \varphi(I)$. Tada je φ^{-1} strogo padajuća i konkavna na J.*

Dokaz. Iz osnova matematičke analize znamo da φ^{-1} postoji te da je strogo padajuća funkcija na otvorenom intervalu J. Neka su $y_1, y_2 \in J$ proizvoljni. Tada postoje $x_1, x_2 \in I$ takvi da je $y_1 = \varphi(x_1)$ i $y_2 = \varphi(x_2)$. Za proizvoljni $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$(1-t)\, y_1 + t\, y_2 = (1-t)\, \varphi(x_1) + t\, \varphi(x_2) \leq \varphi((1-t)\, x_1 + t\, x_2).$$

S obzirom da je φ^{-1} strogo padajuća, za proizvoljni $t \in [0, 1]$ slijedi

$$\varphi^{-1}((1-t)\, y_1 + t\, y_2) \geq (1-t)\, x_1 + t\, x_2 = (1-t)\, \varphi^{-1}(y_1) + t\, \varphi^{-1}(y_2). \qquad \square$$

Teorem 1.2.10. *Neka je $\varphi : A \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena na otvorenom konveksnom skupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i Jensen konkavna. Tada je φ konkavna i lokalno Lipschitzova.*

Dokaz. Dokažimo prvo da je φ konkavna. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x_1, x_1 \in A$ i $t \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da

$$\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) < (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2).$$

Promotrimo funkciju $\psi(t) := \varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) - (1-t)\,\varphi(x_1) - t\,\varphi(x_2)$ na $[0,1]$. Tada iz lokalne ograničenosti funkcije φ slijedi

$$-\infty < C := \inf_{t\in[0,1]} \psi(t) < 0.$$

Također, iz Jensen-konkavnosti funkcije φ slijedi

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) &= \varphi\left(\frac{[(1-t_1)\,x_1 + t_1\,x_2] + [(1-t_2)\,x_1 + t_2\,x_2]}{2}\right)\\ &\quad - \frac{1-t_1}{2}\,\varphi(x_1) - \frac{t_1}{2}\,\varphi(x_2) - \frac{1-t_1}{2}\,\varphi(x_1) - \frac{t_1}{2}\,\varphi(x_2)\\ &\geq \frac{\psi(t_1)+\psi(t_2)}{2}, \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1],\end{aligned}$$

odnosno da je i funkcija ψ Jensen konkavna. Neka je $0 < \varepsilon < -\frac{C}{2}$. Neka je $t_0 \in [0,1]$ takav da vrijedi $\psi(t_0) < C + \varepsilon$. Takav t_0 postoji iz karakterizacije infimuma. Štoviše, iz $\psi(0) = \psi(1) = 0$ slijedi $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$.

Ako je $t_0 \leq \frac{1}{2}$, tada je $\psi(2\,t_0) \geq C$ i vrijedi

$$\psi(t_0) < C + \varepsilon < \frac{C}{2} \leq \frac{\psi(0) + \psi(2\,t_0)}{2}.$$

Ako je $t_0 \geq \frac{1}{2}$, tada je $\psi(2\,t_0 - 1) \geq C$ i vrijedi

$$\psi(t_0) < C + \varepsilon < \frac{C}{2} \leq \frac{\psi(2\,t_0 - 1) + \psi(1)}{2}.$$

U oba slučaja dobijemo kontradikciju s Jensen-konkavnosti funkcije ψ.

Dokažimo sada da je φ lokalno Lipschitzova. Neka je $x \in A$ proizvoljan. Iz otvorenosti skupa A postoji $R > 0$ takav da je $B(x, 2\,R) \subseteq A$. Iz lokalne ograničenosti postoji $M > 0$ takav da je $|\varphi| \leq M$ na $B(x, 2\,R)$. Za dane $x_1, x_2 \in B(x, R)$, $x_1 \neq x_2$, neka je $z := x_1 + \frac{R}{t}\,(x_1 - x_2)$, gdje je $t = \|x_1 - x_2\|$. Tada je $z \in B(x, 2\,R)$. S obzirom da vrijedi

$$x_1 = \frac{R}{R+t}\,x_2 + \frac{t}{R+t}\,z,$$

iz dokazane konkavnosti funkcije φ slijedi

$$\varphi(x_1) \geq \frac{R}{R+t}\,\varphi(x_2) + \frac{t}{R+t}\,\varphi(z).$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi(x_2) - \varphi(x_1) &\leq \frac{t}{R+t}\,(\varphi(x_2) - \varphi(z)) \\ &\leq \frac{t}{R}\,|\varphi(x_2) - \varphi(z)| \leq \frac{2M}{R}\,\|x_2 - x_1\|.\end{aligned}$$

Zamjena uloga x_1 i x_2 u prethodnom računu daje upravo

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2M}{R}\,\|x_2 - x_1\|. \qquad \square$$

Iz matematičke analize poznati su nužni i dovoljni uvjeti za konkavnost jednom ili dvaput diferencijabilne funkcije na intervalu. Cilj nam je poopćiti rezultate na konkavne funkcije vektorske varijable. Za to nam je potrebna sljedeća lema.

Lema 1.2.11. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan. Funkcija $\varphi : A \to \mathbb{R}$ je konkavna na A ako i samo je za svaki par točaka $x_1, x_2 \in A$ funkcija $\psi(s) := \varphi((1-s)\,x_1 + s\,x_2))$ konkavna na $[0,1]$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je φ konkavna na A. Neka su $s_1, s_2 \in [0,1]$ proizvoljni. Tada za $t \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\psi((1-t)\,s_1 + t\,s_2) &= \varphi\Big([1 - (1-t)\,s_1 - t\,s_2))\,x_1 + [(1-t)\,s_1 + t\,s_2]\,x_2)\Big) \\ &= \varphi\Big((1-t)\,[(1-s_1)\,x_1 + s_1\,x_2] + t\,[(1-s_2)\,x_1 + s_2\,x_2]\Big) \\ &\geq (1-t)\,\varphi((1-s_1)\,x_1 + s_1\,x_2)) + t\,\varphi((1-s_2)\,x_1 + s_2\,x_2)) \\ &= (1-t)\,\psi(s_1) + t\,\psi(s_2).\end{aligned}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je ψ konkavna na $[0,1]$. Neka su $x_1, x_2 \in A$ proizvoljni. Tada za $t \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi((1-t)\,x_1 + t\,x_2) &= \psi(t) = \psi((1-t)\cdot 0 + t \cdot 1) \\ &\geq (1-t)\,\psi(0) + t\,\psi(1) \\ &= (1-t)\,\varphi(x_1) + t\,\varphi(x_2). \qquad \square\end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je funkcija φ iz prethodne leme strogo konkavna na A ako i samo ako je za svaki par točaka $x_1, x_2 \in A$ funkcija ψ strogo konkavna na $[0,1]$.

Teorem 1.2.12. *Neka je $\varphi : A \to \mathbb{R}$ klase C^2 na otvorenom konveksnom skupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je H_φ Hesseova matrica funkcije φ. Tada vrijedi:*

(a) φ je konkavna ako i samo ako je $H_\varphi(c)$ negativno semidefinitna za svaku točku $c \in A$.

(b) Ako je $H_\varphi(c)$ negativno definitna za svaku točku $c \in A$, tada je φ strogo konkavna.

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in A$ proizvoljni te neka je $\psi(s) := \varphi((1-s)\,x_1 + s\,x_2))$ funkcija na $[0,1]$. Po pretpostavci $\varphi \in C^2$ slijedi da je funkcija ψ dvaput diferencijabilna na $\langle 0, 1\rangle$ i vrijedi

$$\psi''(s) = \Big\langle H_\varphi(c)\,(x_2 - x_1) \,|\, (x_2 - x_1)\Big\rangle, \quad \forall s \in \langle 0, 1\rangle,$$

gdje je $c = (1-s)\,x_1 + s\,x_2 \in A$. Prema Lemi 1.2.11, tvrdnje slijede iz odgovarajućih rezultata za funkcije realne varijable. □

1.3 Monge−Ampèreova jednadžba

Homogena Monge-Ampèreova jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba oblika

$$z_{xx}\,z_{yy} - z_{xy}^2 = 0.$$

Teorem 1.3.1. *Opće rješenje homogene Monge-Ampèreova jednadžbe, uz pretpostavku $z_{xx} \neq 0$, dano je sa*

$$z(x,y) = u\,x + f(u)\,y + g(u),$$

pri čemu je $u = u(x,y)$ parametar, a f i g su jednodimenzionalne C^2 funkcije takve da vrijedi

$$x + f'(u)\,y + g'(u) = 0.$$

Dokaz. Kako je

$$\det \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} = 0,$$

u svakoj točki domene postoji vektor $\theta(x,y)$ iz jezgre Hesseove matrice od $z = z(x,y)$.

Pretpostavimo da θ čini glatko vektorsko polje. Tvrdimo da su funkcije z_x, z_y, $z - x\,z_x - y\,z_y$ konstantne duž integralnih krivulja tog polja. Parametriziramo li neku takvu krivulju sa $t \mapsto (x(t), y(t))$, imat ćemo

$$\left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dx}(t)\right) = \theta(x(t), y(t)).$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_x(x(t),y(t)) \\ z_y(x(t),y(t)) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix}_{(x(t),y(t))} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix}_{(x(t),y(t))} \theta(x(t),y(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

te je slično

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[z - x\,z_x - y\,z_y\right]_{(x(t),y(t))} &= \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}_{(x(t),y(t))} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}_{(x(t),y(t))} \\
&\quad - \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix}_{(x(t),y(t))} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{bmatrix} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pri čemu $\cdot$ označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^2$. Zaključujemo da su spomenute funkcije komponirane s $t \mapsto (x(t),y(t))$ zaista konstantne.

Po pretpostavci $z_{xx} \neq 0$ slijedi da funkcija z_x nije lokalno konstantna, stoga ćemo uzeti $u = z_x$ za parametar kojim parametriziramo karakteristike. Nadalje, iz navedenog postoje funkcije f i g takve da vrijedi

$$\begin{aligned}
&z_y = f(u), \\
&z - x\,z_x - y\,z_y = g(u).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$z = u\,x + f(u)\,y + g(u), \tag{1.1}$$

a izjednačavanjem i deriviranjem posljednjeg izraza slijedi

$$u = z_x = u_x\,x + u + f'(u)\,u_x\,y + g'(u)\,u_x,$$

tj. korištenjem $u_x = z_{xx} \neq 0$ dobivamo

$$0 = x + f'(u)\,y + g'(u). \tag{1.2}$$

Obratno, direktno se provjeri da svaka funkcija oblika (1.1) uz uvjet (1.2) zadovoljava polaznu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Naime, $z_x = u$ te $z_y = f(u)$, stoga

$$\begin{aligned} z_{xx} &= u_x, \\ z_{xy} &= u_y, \\ z_{yx} &= \frac{\partial f}{\partial x}(u) = f'(u)\,u_x, \\ z_{yy} &= \frac{\partial f}{\partial y}(u) = f'(u)\,u_y, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $z_{xx}\,z_{yy} - z_{xy}^2 = z_{xx}\,z_{yy} - z_{xy}\,z_{yx} = 0$. □

Napomenimo da krivulje $x + f'(u)\,y + g'(u) = 0$ nazivamo *karakteristikama* homogene Monge-Ampèreove jednadžbe. Kako je u konstantno duž svake takve krivulje, vidimo da je riječ o pravcima u $xy-$ravnini.

Na kraju, iskažimo teorem koji generalizira rješenje homogene Monge-Ampèreove jednadžbe dano u Teoremu 1.3.1 za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu u n varijabli.

Teorem 1.3.2. *Neka je $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ glatka funkcija koja zadovoljava sljedeću Monge-Ampèreovu jednadžbu*

$$\det d^2 z = \begin{bmatrix} z_{x_1,x_1} & \cdots & z_{x_1,x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{x_n,x_1} & \cdots & z_{x_n,x_n} \end{bmatrix} = 0$$

te pretpostavimo da Hesseova matrica H_z ima rang $n-1$, a radi određenosti neka je baš glavna minora sastavljena od prvih $n-1$ redaka i stupaca H_z različita od nule. Tada postoje funkcije $t_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, takve da je

$$z = t_0 + t_1\,x_1 + \ldots + t_n\,x_n$$

te da zadovoljavaju sljedećih $n-1$ linearnih jednadžbi:

$$x_i + \frac{\partial t_n}{\partial t_i}\,x_n + \frac{\partial t_0}{\partial t_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Teorem 1.3.1 može se dobiti kao poseban slučaj Teorema 1.3.2 kada je $n = 2$. Tada uvjet na rang Hesseove matrice postaje upravo uvjet $z_{xx} \neq 0$, a funkcije t_0, t_1, t_2 redom su funkcija g, parametar u i funkcija f. Napomenimo da je dokaz Teorema 1.3.2 analogan dokazu Teorema 1.3.1 (vidi Vasyunin i Volberg [10]).

Poglavlje 2

Carlesonov teorem ulaganja

Najbolji način za objasniti glavnu ideju rješavanja problema tehnikom Bellmanovih funkcija jest da razmotrimo neki relativno jednostavan problem. Vrlo često se u literaturi među prvim primjerima daje dokaz poznatog Carlesonovog teorema ulaganja u dijadskom L^2 obliku. Mi ćemo iskazati i dokazati teorem u malo općenitijem, dijadskom L^p obliku.

2.1 Definicije i iskaz teorema

Definicija 2.1.1. *Borelova mjera μ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ je* Carlesonova mjera *ako postoji konstanta $C > 0$ takva da*

$$\mu\left(Q \times \langle 0, |Q|]\right) \leq C\,|Q|$$

za svaku kocku $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima.

Carlesonove mjere imaju mnoge primjene u harmonijskoj analizi i teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Primjerice, Carlesonove mjere se mogu karakterizirati kao Borelove mjere μ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ za koje je Poissonov integral ograničen operator s $L^p(\mathbb{R}^n)$ u $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mu)$ (za detalje vidi Duoandikoetxea [2]). Također, u primjenama je važna sljedeća definicija vezana uz dijadske intervale.

Definicija 2.1.2. *Neka je $\mathcal{D}$ familija dijadskih intervala na $\mathbb{R}$. Za indeksiranu familiju nenegativnih vrijednosti $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ kažemo da zadovoljava* Carlesonov uvjet *ako postoji konstanta $C > 0$ takva da*

$$\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \mu_J \leq C\,|I|$$

za svaki dijadski interval $I \in \mathcal{D}$.

Napomenimo da se indeksirana familija $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ koja zadovoljava Carlesonov uvjet naziva *Carlesonov niz*, iako strogo govoreći ona nije niz. Naime, nije indeksirana prirodnim brojevima, već prebrojivom familijom dijadskih intervala.

Carlesonov niz možemo promatrati kao niz vrijednosti pridruženih Carlesonovoj mjeri μ na gornjoj poluravnini $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, definiranih s $\mu_I := \mu\left(I \times \left\langle \frac{|I|}{2}, |I|\right]\right)$ za $I \in \mathcal{D}$. Tada Carlesonov uvjet slijedi kao posljedica svojstva dijadskih intervala i $\sigma-$aditivnosti Carlesonove mjere.

Napomena 2.1.3. *U nastavku ćemo prosjek funkcije φ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ označavati sa*

$$\langle\varphi\rangle_I := \frac{1}{|I|}\int_I \varphi.$$

Važnost Carlesonovih nizova proizlazi iz sljedećeg teorema:

Teorem 2.1.4. (Carlesonov teorem ulaganja, dijadska L^p verzija) *Neka je $\mathcal{D}$ familija dijadskih intervala u $\mathbb{R}$ i neka je $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ niz nenegativnih vrijednosti koje zadovoljavaju Carlesonov uvjet. Tada ocjena*

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} \mu_I \left|\langle\varphi\rangle_I\right|^p \leq C_p \cdot C \left\|\varphi\right\|^p_{L^p(\mathbb{R})}$$

vrijedi za sve $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, pri čemu je C_p konstanta koja koja ovisi samo o eksponentu p.

Napomenimo da vrijedi i obrat Teorema 2.1.4. Naime, ako ocjena vrijedi za sve $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, onda izborom $\varphi = \mathbb{1}_I$ i promatranjem sume po dijadskim intervalima $J \subseteq I$ dobivamo upravo Carlesonov uvjet za niz nenegativnih vrijednosti $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$.

2.2 Bellmanova funkcija

Pokušajmo dokazati teorem za $p > 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su promatrane funkcije $\varphi \in L^p$ realne i $\varphi \geq 0$. Naime, to možemo postići rastavljanjem funkcija na realni i imaginarni, odnosno pozitivni i negativni dio.

Zbog svojstva dijadskih intervala, za dokaz Teorema 2.1.4 dovoljno je dokazati ekvivalentnu tvrdnju

$$\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \mu_J \langle\varphi\rangle_J^p \leq C_p \cdot C\,|I|\langle\varphi^p\rangle_I, \quad \forall I \in \mathcal{D}, \tag{2.1}$$

Naime, primijenimo li tvrdnju (2.1) na dijadske intervale $I = [-2^n, 0\rangle$ i $I = [0, 2^n\rangle$, po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi tvrdnja Teorema 2.1.4.

Prvo što možemo primijetiti je da ovakav oblik iskaza ima sličnu strukturu kao Carlesonov uvjet. Također, primijetimo da i lijeva i desna strana nejednakosti (2.1) imaju slične uvjete na funkciju φ – pojavljuju se prosjeci funkcije φ nad dijadskim intervalima $J \subseteq I$ te prosjek funkcije φ^p na dijadskom intervalu I. Prosjeci funkcija i transformiranje iskaza u oblik u kojem se oni pojavljuju iznimno su važni za opisanu tehniku. Naime, pokazat će se da oni predstavljaju vrijednosti koje ne ovise o izboru intervala $I \in \mathcal{D}$. Težit ćemo prema tome da nam svi izrazi u preformuliranoj tvrdnji zadovoljavaju to svojstvo.

Sljedeće što možemo primijetiti je da Carlesonov uvjet možemo drugačije zapisati kao

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J \leq C, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Lijeva strana nejednakosti nam sada predstavlja svojevrsni prosjek niza vrijednosti na dijadskom intervalu I. Desna strana nejednakosti je konstanta, odnosno više ne ovisi o intervalu I.

Da bismo sačuvali sličnu strukturu tvrdnje teorema i Carlesonovog uvjeta, normaliziranjem dobijemo da je za dokaz Teorema 2.1.4 dovoljno dokazati tvrdnju

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J \langle \varphi \rangle_J^p \leq C_p \cdot C \langle \varphi^p \rangle_I, \quad \forall I \in \mathcal{D}. \tag{2.2}$$

Ponovno vidimo da desna strana nejednakosti više ne ovisi o I, no nije konstanta. No, kad bismo ograničili promatrane funkcije na skup s nekom fiksnom vrijednošću $\langle \varphi^p \rangle_I$, ponovno bismo imali konstantnu desnu stranu. Pokazat će se da je ova primjedba jedna od osnova opisane tehnike.

Promotrimo sada lijevu stranu nejednakosti (2.2). Zbog svojstva dijadskih intervala, vidimo da se lijeva strana iskaza može lijepo rastaviti na manje, sebi slične dijelove. Vrijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J \langle \varphi \rangle_J^p = \frac{1}{2} \frac{1}{|I_+|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I_+}} \mu_J \langle \varphi \rangle_J^p + \frac{1}{2} \frac{1}{|I_-|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I_-}} \mu_J \langle \varphi \rangle_J^p + \frac{\mu_I}{|I|} \langle \varphi \rangle_I^p. \tag{2.3}$$

Cilj nam je, za svaki dijadski interval I, ocijeniti lijevu stranu nejednakosti (2.2). Iz ovakvog je raspisa sada vidljivo da bismo morali imati i ocjenu za vrijednost prosjeka $\langle\varphi\rangle_I$. Također, zbog sličnih struktura, očekujemo da ćemo bolju ocjenu lijeve strane nejednakosti (2.2) dobiti što bolje ocijenimo vrijednost lijeve strane Carlesonovog uvjeta.

Ovakvo nam razmatranje daje motivaciju da Teorem 2.1.4 pokušamo dokazati kontroliranjem vrijednosti prosjeka $\langle\varphi\rangle_I$ i $\langle\varphi\rangle_I^p$ te vrijednosti desne strane nejednakosti u Carlesonovom uvjetu. To ćemo formalno pokušati sljedećom konstrukcijom:

Za fiksni dijadski interval I definirajmo *Bellmanovu funkciju* u tri realne varijable (f, F, M) kao

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) := \sup_{\varphi,\mu} \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J\in\mathcal{D} \\ J\subseteq I}} \mu_J \, \langle\varphi\rangle_J^p, \tag{2.4}$$

gdje supremum ide po skupu svih nenegativnih funkcija $\varphi \in L^p$ i nizova nenegativnih vrijednosti $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ koji zadovoljavaju Carlesonov uvjet, takvi da vrijedi

$$\langle\varphi\rangle_I = f, \qquad \langle\varphi^p\rangle_I = F, \qquad \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J\in\mathcal{D} \\ J\subseteq I}} \mu_J = M.$$

Iz definicije se vidi da ovako zadana funkcija $\mathcal{B}$ ne ovisi o izboru fiksnog intervala I. Naime, dovoljno je primijetiti da afinim transformacijama varijabli ne mijenjamo vrijednosti prosjeka funkcije na intervalu. Time smo zaista ispunili težnju za izrazom koji ne ovisi o izboru $I \in \mathcal{D}$.

2.3 Svojstva funkcije $\mathcal{B}(f, F, M; C)$

(1) Domena Bellmanove funkcije $\mathcal{B}$ sastoji se od uređenih trojki nenegativnih realnih brojeva (f, F, M) takvih da vrijedi

$$f^p \leq F, \qquad M \leq C.$$

(2) Za svaku uređenu trojku (f, F, M) iz domene vrijedi

$$0 \leq \mathcal{B}(f, F, M; C) \leq C_p \, C \, F.$$

(3) Za sve uređene trojke (f, F, M), (f_+, F_+, M_+), (f_-, F_-, M_-) iz domene takve da je

$$f = \frac{f_+ + f_-}{2}, \qquad F = \frac{F_+ + F_-}{2}, \qquad M = \frac{M_+ + M_-}{2} + \Delta M,$$

gdje je $0 \le \Delta M \le C$, vrijedi nejednakost

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) \ge \frac{1}{2}\left\{\mathcal{B}(f_+, F_+, M_+; C) + \mathcal{B}(f_-, F_-, M_-; C)\right\} + \Delta M\, f^p.$$

Objasnimo ukratko navedena svojstva. Pod domenom ćemo uvijek podrazumijevati skup varijabli za koje se supremum iz definicije Bellmanove funkcije uzima po nepraznom skupu. Nejednakosti u (1) direktno slijede iz Hölderove nejednakosti, odnosno iz Carlesonovog uvjeta. Primijetimo da nije očita tvrdnja da je za svaki izbor uređenih trojki (f, F, M) iz domene moguće konstruirati odgovarajuću funkciju φ te niz vrijednosti $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ iz definicije (2.4). No, pokazat ćemo da je za dokaz Teorema 2.1.4 dovoljno koristiti činjenicu da ne postoje φ, $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ te dijadski interval I takvi da pripadni prosjeci ne leže u domeni, stoga nam dokaz te tvrdnje neće biti ni potreban.

Nenegativnost u (2) trivijalno slijedi iz definicije Bellmanove funkcije, a nejednakost $\mathcal{B}(f, F, M; C) \le C_p\, C\, F$ slijedi u slučaju da vrijedi Teorem 2.1.4.

Nejednakost u (3), koju ćemo zvati *glavna nejednakost*, može se dobiti djelovanjem supremumom na jednakost (2.3). Naime, uzmimo pripadne uređene trojke (f, F, M), (f_+, F_+, M_+), (f_-, F_-, M_-) i fiksirajmo dijadski interval I. Za intervale $I_\pm$, odaberimo funkcije $\varphi_\pm$ i Carlesonov niz $\{\mu_J\}_{J\in\mathcal{D}}$ takve da za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\frac{1}{|I_\pm|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I_\pm}} \mu_J\, \langle\varphi_\pm\rangle_J^p > \mathcal{B}(f_\pm, F_\pm, M_\pm; C) - \varepsilon.$$

Takvi $\varphi_\pm$ i $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ postoje iz karakterizacije supremuma, s pripadnim vrijednostima prosjeka

$$\langle\varphi_\pm\rangle_{I_\pm} = f_\pm, \qquad \langle\varphi_\pm^p\rangle_{I_\pm} = F_\pm, \qquad \frac{1}{|I_\pm|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I_\pm}} \mu_J = M_\pm.$$

Vidimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\operatorname{supp}\varphi_\pm \subseteq I_\pm$ te da je $\mu_J = 0$ za sve dijadske intervale $J \not\subseteq I$. Definiramo li dodatno $\mu_I := |I|\Delta M$ te funkciju $\varphi := \varphi_+ + \varphi_-$, koristeći svojstvo dijadskih intervala dobijemo da je

$$\langle\varphi\rangle_I = f, \qquad \langle\varphi^p\rangle_I = F, \qquad \frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \mu_J = M.$$

Iz jednakosti (2.3) slijedi

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \mu_J\, \langle\varphi\rangle_J^p > \frac{1}{2}\left\{\mathcal{B}(f_+, F_+, M_+; C) + \mathcal{B}(f_-, F_-, M_-; C)\right\} + \Delta M\, f^p - \varepsilon.$$

S obzirom da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, po karakterizaciji supremuma dobijemo upravo svojstvo (3).

Dakle, vidimo da iz Teorema 2.1.4 slijedi egzistencija funkcije koja zadovoljava svojstva (1)−(3). No, ono što čini bit opisane tehnike jest činjenica da možemo pokazati i obrnutu tvrdnju − za dokaz Teorema 2.1.4, odnosno ekvivalentne tvrdnje (2.1), dovoljno je pokazati egzistenciju barem jedne funkcije koja zadovoljava navedena svojstva. Takve funkciju ćemo zvati *funkcija Bellmanovog tipa.*

2.4 Dokaz teorema pomoću Bellmanove funkcije

Pretpostavimo da postoji neka funkcija $\mathcal{B}(f, F, M; C)$ Bellmanovog tipa. Uzmimo proizvoljne φ i $\{\mu_I\}_{I\in\mathcal{D}}$ kao iz uvjeta Teorema 2.1.4. Fiksirajmo proizvoljni $I \in \mathcal{D}$.

Za svaki dijadski interval $J \subseteq I$, neka su f_J, F_J, M_J pripadni prosjeci:

$$f_J = \langle\varphi\rangle_J, \qquad F_J = \langle\varphi^p\rangle_J, \qquad M_J = \frac{1}{|J|}\sum_{\substack{K\in\mathcal{D}\\ K\subseteq J}} \mu_K.$$

Koristeći svojstvo dijadskih intervala, vidimo da za dijadske intervale $J \subseteq I$ vrijedi

$$f_J = \frac{f_{J_+} + f_{J_-}}{2}, \qquad F_J = \frac{F_{J_+} + F_{J_-}}{2}, \qquad M_J = \frac{M_{J_+} + M_{J_-}}{2} + \frac{\mu_J}{|J|},$$

što po svojstvu (3) povlači nejednakost

$$\mu_J\, f_J^p \le |J|\cdot\mathcal{B}(f_J, F_J, M_J; C) - |J_+|\cdot\mathcal{B}(f_{J_+}, F_{J_+}, M_{J_+}; C) - |J_-|\cdot\mathcal{B}(f_{J_-}, F_{J_-}, M_{J_-}; C).$$

Zbrojimo li navedene nejednakosti za sve dijadske intervale $J \subseteq I$ za koje je $|J| > 2^{-n}|I|$, $n \in \mathbb{N}$, dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}} \mu_J\, f_J^p &\le |I|\cdot\mathcal{B}(f_I, F_I, M_I; C) - \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\cdot\mathcal{B}(f_J, F_J, M_J; C)\\ &\overset{(2)}{\le} |I|\cdot\mathcal{B}(f_I, F_I, M_I; C)\\ &\overset{(2)}{\le} C_p\cdot C\,|I|F_I,\end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}} \mu_J\,\langle\varphi\rangle_J^p \le C_p\cdot C\,|I|\langle\varphi^p\rangle_I.$$

Puštajući limes $n \to \infty$ dobivamo upravo (2.1).

2.5 Nalaženje funkcije Bellmanovog tipa

Primijetimo da funkcija Bellmanovog tipa iz prethodnog dokaza ne mora nužno biti jednaka samoj Bellmanovoj funkciji (2.4), za dokaz je bilo dovoljno koristiti samo njena definicijska svojstva. Stoga, da bismo upotpunili dokaz Teorema 2.1.4, potrebno je opravdati pretpostavku i naći barem jednu funkciju Bellmanovog tipa. Da bismo to napravili, potrebno je dodatno analizirati svojstva Bellmanove funkcije.

Ispitivanje toka funkcije

Promotrimo svojstvo (3). Uzmemo li pripadne uređene trojke (f, F, M), (f_+, F_+, M_+), (f_-, F_-, M_-) takve da je dodatno $M = \frac{M_+ + M_-}{2}$, tj. $\Delta M = 0$, vidimo da funkcija $\mathcal{B}$ zadovoljava uvjet Jensen-konkavnosti

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) \geq \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{B}(f_+, F_+, M_+; C) + \mathcal{B}(f_-, F_-, M_-; C) \right\}.$$

S obzirom da je po (1) domena Bellmanove funkcije konveksan skup u $\mathbb{R}^3$ te je po (2) Bellmanova funkcija lokalno ograničena, iz Teorema 1.2.10 slijedi da je funkcija $\mathcal{B}$ konkavna i lokalno Lipschitzova. Posebno, svaka funkcija Bellmanovog tipa je neprekidna.

Neka je (f, F, M) uređena trojka iz domene i neka je $0 \leq \Delta M \leq M$. Tada je uređena trojka $(f, F, M - \Delta M)$ ponovno element domene. Uvrštavanjem $f_\pm = f$, $F_\pm = F$, $M_\pm = M - \Delta M$ u svojstvo (3), slijedi

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) \geq \mathcal{B}(f, F, M - \Delta M; C) + \Delta M \, f^p. \tag{2.5}$$

Posebno, svaka funkcija Bellmanovog tipa je rastuća po varijabli M.

Pitanje glatkoće

U sljedećem koraku bismo htjeli dobiti uvjete na glatkoću funkcije $\mathcal{B}$. No, iz navedenih svojstava nije jasno da ima smisla tražiti jači uvjet od neprekidnosti. Ipak, postoji metoda koja će pokazati da ima smisla tražiti funkcije koje su C^∞.

Pretpostavimo da postoji neka funkcija $\mathcal{B}(f, F, M; C)$ Bellmanovog tipa. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka su $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : \langle 0, \infty \rangle \to [0, \infty\rangle$ dvije nenegativne C^∞ funkcije, takve da $\operatorname{supp} \phi_\varepsilon \subseteq [1, (1+\varepsilon)^p]$, $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon \subseteq [1+\varepsilon, 1+2\varepsilon]$ i $\int_0^\infty \phi_\varepsilon(t) \, \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(t) \, \frac{dt}{t} = 1$.

Definirajmo

$$\mathcal{B}_\varepsilon(f,F,M;C) := \iiint\limits_{\langle 0,\infty\rangle^3} \mathcal{B}\left(\frac{f}{u},\frac{F}{v},\frac{M}{w};C\right)\psi_\varepsilon(u)\phi_\varepsilon(v)\phi_\varepsilon(w)\frac{du\,dv\,dw}{uvw} \tag{2.6}$$

$$= \iiint\limits_{\langle 0,\infty\rangle^3} \mathcal{B}\left(u,v,w;C\right)\psi_\varepsilon\left(\frac{f}{u}\right)\phi_\varepsilon\left(\frac{F}{v}\right)\phi_\varepsilon\left(\frac{M}{w}\right)\frac{du\,dv\,dw}{uvw}. \tag{2.7}$$

Iz jednakosti (2.6) vidimo da nosači funkcija ϕ_ε i ψ_ε jamče da je $\mathcal{B}_\varepsilon$ dobro definirana na domeni $\{(f,F,M)\in[0,\infty\rangle^3 : f^p \le F, M \le C\}$. Također, iz ostalih uvjeta funkcija ϕ_ε i ψ_ε trivijalno slijedi $0 \le \mathcal{B}_\varepsilon(f,F,M;C) \le C_p\, C\, F$.

Primijetimo da iz jednakosti (2.7) slijedi da je $\mathcal{B}_\varepsilon \in C^\infty$. S druge strane, koristeći svojstvo (3) funkcije Bellmanovog tipa $\mathcal{B}$, iz jednakosti (2.6) slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\varepsilon(f,F,M;C) &- \frac{1}{2}\{\mathcal{B}_\varepsilon(f_+,F_+,M_+;C)+\mathcal{B}_\varepsilon(f_-,F_-,M_-;C)\} \\
&\ge \Delta M\, f^p \int\limits_{1+\varepsilon}^{1+2\varepsilon}\int\limits_{1}^{(1+\varepsilon)^p}\int\limits_{1}^{(1+\varepsilon)^p} \frac{1}{u^p w}\psi_\varepsilon(u)\phi_\varepsilon(v)\phi_\varepsilon(w)\frac{du\,dv\,dw}{uvw} \\
&\ge \Delta M\, f^p \cdot \frac{1}{(1+2\varepsilon)^p(1+\varepsilon)^p} \longrightarrow \Delta M\, f^p \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

S obzirom na ponašanje desne strane nejednakosti pri djelovanju limesa kada $\varepsilon \to 0$, dokaz iz 2.4 je dovoljno provesti promatrajući familiju glatkih funkcija $\{\mathcal{B}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$.

Primijetimo da funkcije $\mathcal{B}_\varepsilon$ zadovoljavaju nešto slabiju ocjenu nego što je svojstvo (3), stoga formalno nisu funkcije Bellmanovog tipa. No, skaliranjem dane funkcije $\mathcal{B}_\varepsilon$ možemo dobiti funkciju $\widetilde{\mathcal{B}}_\varepsilon$ koja zadovoljava svojstva (1), (3) te

$$0 \le \widetilde{\mathcal{B}}_\varepsilon(f,F,M;C) \le C_p'\, C\, F,$$

gdje je $C_p' = C_p\cdot(1+2\varepsilon)^p(1+\varepsilon)^p$. Time ponovno dobivamo funkciju Bellmanovog tipa, no čija egzistencija dokazuje Teorem 2.1.4 s nešto slabijom konstantom C_p'. Stoga je u nastavku dovoljno promatrati samo glatke funkcije Bellmanovog tipa.

Uvjeti na derivacije

Neka je $\mathcal{B}$ glatka funkcija Bellmanovog tipa. S obzirom da je domena konveksan skup u $\mathbb{R}^3$, po Teoremu 1.2.12 (a) svojstvo konkavnosti funkcije $\mathcal{B}$ ekvivalentno je uvjetu $d^2\mathcal{B}(f,F,M;C) \le 0$. Iz uvjeta rasta (2.5) slijedi $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M}(f,F,M;C) \ge f^p$. U nastavku ćemo stoga tražiti glatku funkciju koja zadovoljava svojstva (1), (2) te

(3a) $d^2\mathcal{B}(f, F, M; C) \leq 0$,

(3b) $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M}(f, F, M; C) \geq f^p$.

Primijetimo da su svojstva (3a) i (3b) ekvivalenta svojstvu (3) u slučaju glatke funkcije Bellmanovog tipa. Naime, svojstva (3a) i (3b) su dobivena promatrajući svojstvo (3). S druge strane, vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta M\, f^p &\overset{(3b)}{\leq} \mathcal{B}(f, F, M; C) - \mathcal{B}(f, F, M - \Delta M; C) \\ &\leq \mathcal{B}(f, F, M; C) - \frac{1}{2}\left\{\mathcal{B}(f_+, F_+, M_+; C) + \mathcal{B}(f_-, F_-, M_-; C)\right\}.\end{aligned}$$

Napomenimo da smo kod druge nejednakosti koristili konkavnost funkcije $\mathcal{B}$, no to svojstvo je ekvivalentno svojstvu (3a) zbog konveksnosti domene Bellmanove funkcije.

Svođenje na funkcije s manje varijabli

Sada nam je cilj iskoristiti izvedena svojstva funkcije Bellmanovog tipa i po mogućnosti naći eksplicitnu formulu barem jedne takve funkcije. Važno je ovdje napomenuti da nije poznata općenita metoda kojom to je moguće izvesti − potrebno je prvo nagađati oblik koji ima smisla s obzirom na danu domenu i sliku Bellmanove funkcije te istovremeno voditi računa o uvjetima na derivacije.

Neka je $\mathcal{B}$ glatka funkcija Bellmanovog tipa. Primijetimo da, osim svojstva (2), nema uvjeta na funkciju po varijabli F. Stoga definirajmo za $f \geq 0$, $0 \leq M \leq C$ funkciju

$$\upsilon(f, M; C) := -\sup_F \{\mathcal{B}(f, F, M; C) - C_p\, C\, F\},$$

gdje supremum ide po svim $F \geq f^p$. Iz svojstva (2) imamo

$$-C_p\, C\, F \leq \mathcal{B}(f, F, M; C) - C_p\, C\, F \leq 0,$$

stoga djelovanjem supremumom po svim po $F \geq f^p$ i množenjem s -1 slijedi da dobivena funkcija zadovoljava

$$0 \leq \upsilon(f, M; C) \leq C_p\, C\, f^p. \tag{2.8}$$

Iz definicije se vidi da je υ konveksna funkcija. Naime, zbroj dvije konkavne funkcije je ponovno konkavna funkcija, stoga vidimo da je $\mathcal{B}(f, F, M; C) - C_p\, C\, F$ konkavna funkcija po točkama (f, F, M). Po Propoziciji 1.2.8 slijedi da je funkcija $-\upsilon(f, M; C)$ konkavna funkcija po točkama (f, M), iz čega direktno slijedi tvrdnja.

Neka su $f \geq 0$, $0 \leq M \leq C$ i neka je $0 \leq \Delta M \leq M$. Neka je $F \geq f^p$ takav da za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mathcal{B}(f, F, M - \Delta M; C) - C_p C\, F > -\upsilon(f, M - \Delta M; C) - \varepsilon.$$

Takav F postoji iz karakterizacije supremuma. Iz uvjeta rasta (2.5) slijedi

$$\begin{aligned}\upsilon(f, M; C) - \upsilon(f, M - \Delta M; C) &< \upsilon(f, M; C) + \{\mathcal{B}(f, F, M - \Delta M; C) - C_p C\, F\} + \varepsilon \\ &\leq -\{\mathcal{B}(f, F, M; C) - \mathcal{B}(f, F, M - \Delta M; C)\} + \varepsilon \\ &\leq -\Delta M\, f^p + \varepsilon.\end{aligned}$$

S obzirom da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi

$$\upsilon(f, M; C) - \upsilon(f, M - \Delta M; C) \leq -\Delta M\, f^p.$$

Dakle, vidimo da funkcija υ zadovoljava slična svojstva kao i funkcija $\mathcal{B}$. No, primijetimo da, za razliku od $\mathcal{B}$, funkcija υ ne mora biti glatka. Uz pretpostavku glatkoće, istim postupkom kao za funkcije Bellmanovog tipa, iz navedenog se može pokazati da funkcija υ zadovoljava dodatna svojstva

$$d^2\upsilon(f, M; C) \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial M}(f, M; C) \leq -f^p. \tag{2.10}$$

S druge strane, ako postoji funkcija $\upsilon(f, M; C)$ definirana za $f \geq 0$, $0 \leq M \leq C$ sa svojstvima (2.8), (2.9) i (2.10), tada definiramo $\mathcal{B}(f, F, M; C) := C_p C\, F - \upsilon(f, M; C)$ za $f \leq 0$, $f^p \leq F$, $0 \leq M \leq C$. Iz navedenih svojstava funkcije υ slijedi da funkcija $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstva (1), (2), (3a) i (3b), čime smo našli traženu funkciju. U nastavku ćemo stoga tražiti glatku funkciju Bellmanovog tipa u obliku

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) = C_p C\, F - \upsilon(f, M; C).$$

U sljedećem koraku promotrimo Bellmanovu funkciju (2.4). Neka je (f, F, M) uređena trojka iz domene i neka je $t \geq 0$. Tada je uređena trojka $(t\, f, t^p\, F, M)$ ponovno iz domene. Iz definicije Bellmanove funkcije vidimo da zadovoljava svojstvo homogenosti

$$\mathcal{B}(t\, f, t^p\, F, M; C) = t^p\, \mathcal{B}(f, F, M; C).$$

Naime, za $t > 0$ preslikavanje $(\varphi, \mu) \mapsto (t\, \varphi, \mu)$ je bijekcija između skupova po kojima ide supremum iz definicije Bellmanove funkcije za uređene trojke (f, F, M) i $(t\, f, t^p\, F, M)$ te vrijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J\, \langle t\, \varphi \rangle_J^p = t^p\, \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J\, \langle \varphi \rangle_J^p.$$

Također, Bellmanova funkcija zadovoljava svojstvo skaliranja

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) = C \cdot \mathcal{B}\left(f, F, \frac{M}{C}; 1\right).$$

Naime, za $C > 0$ preslikavanje $(\varphi, \mu) \mapsto (\varphi, \frac{\mu}{C})$ je bijekcija između skupova po kojima ide supremum iz definicije Bellmanove funkcije za uređene trojke $(f, F, M; C)$ i $(f, F, \frac{M}{C}; 1)$ te vrijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J \langle \varphi \rangle_J^p = C \, \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \frac{\mu_J}{C} \langle \varphi \rangle_J^p.$$

S obzirom da navedna svojstva nisu dobivena iz svojstva $(1){-}(3)$, nije jasno da će svaka funkcija Bellmanovog tipa zadovoljavajati svojstva homogenosti i skaliranja. Ipak, u ovom trenutku pretpostavljamo da postoji barem jedna i da je traženog oblika. Iz te pretpostavke slijedi da funkcija v mora zadovoljavati svojstvo homogenosti $v(tf, M; C) = t^p \, v(f, M; C)$, $t \geq 0$ te svojstvo skaliranja $v(f, M; C) = C \cdot v(f, \frac{M}{C}; 1)$. Iz navedenih svojstava, ali i svojstva $\frac{\partial v}{\partial M}(f, M; C) \leq -f^p$, imamo motivaciju tražiti samo funkciju $v(f, M) = v(f, M; 1)$, i to u obliku

$$v(f, M) = f^p \cdot \gamma(M).$$

Time smo, uz određene pretpostavke na oblik i svojstva, nalaženje funkcije Bellmanovog tipa sveli na nalaženje funkcije jedne varijable.

Funkcija v navedenog oblika ima Hesseovu matricu

$$H_v(f, M) = \begin{bmatrix} p(p-1) f^{p-2} \gamma(M) & p f^{p-1} \gamma'(M) \\ p f^{p-1} \gamma'(M) & f^p \gamma''(M) \end{bmatrix}.$$

Stoga, tražimo glatku funkciju $\gamma(M)$ definiranu za $0 \leq M \leq 1$ sa sljedećim svojstvima:

(i) $0 \leq \gamma(M) \leq C_p$,

(ii) $\gamma'(M) \leq -1$,

(iii) $\gamma(M)\gamma''(M) - \frac{p}{p-1} \gamma'(M)^2 \geq 0$.

Prva dva svojstva direktno slijede iz svojstava (2.8) i (2.10), dok svojstvo (iii) slijedi iz svojstva (2.9) po Sylvesterovom kriteriju za pozitivnu semidefinitnu matricu H_v.

Završni račun

Primijetimo da svojstvo (iii) ima oblik sličan funkciji dobivenoj kao

$$\begin{aligned}(\gamma(M)^m)'' &= m(m-1)\,\gamma(M)^{m-2}\gamma'(M)^2 + m\,\gamma(M)^{m-1}\gamma''(M) \\ &= m\,\gamma(M)^{m-2}\cdot\left\{(m-1)\,\gamma'(M)^2 + \gamma(M)\gamma''(M)\right\},\end{aligned}$$

gdje je $m \in \mathbb{R}$. Vidimo da izborom $m = -\frac{1}{p-1}$ svojstva (i) i (iii) povlače

$$\left(\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}}\right)'' \geq 0.$$

Dobiveni uvjet ekvivalentan je konveksnosti funkcije $\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}}$.

S obzirom da je afina funkcija najjednostavniji primjer konveksne funkcije, pokušat ćemo naći funkciju γ takvu da $\gamma(M)^{-\frac{1}{p-1}} = a\,M + b$, tj. $\gamma(M) = (a\,M+b)^{1-p}$. Radi jednostavnosti računa, promatrat ćemo slučaj $a = b$, odnosno funkcije oblika

$$\gamma(M) = c\,(M+1)^{1-p}.$$

Uvjet na derivaciju (ii) nam daje uvjet $c \geq \frac{(M+1)^p}{p-1}$ za sve $0 \leq M \leq 1$. S obzirom da je $p > 1$, slijedi

$$c \geq \frac{2^p}{p-1}.$$

Iz svojstva (1) slijedi da ima smisla promatrati konstante C_p takve da $C_p \geq c\,(M+1)^{1-p}$ za sve $0 \leq M \leq 1$. S obzirom da je $p > 1$, slijedi $C_p \geq c$.

Iz navedenog vidimo da za proizvoljni $c \geq \frac{2^p}{p-1}$ uzimanjem $C_p = c$ funkcija $\gamma(M) = c\,(M+1)^{1-p}$ zadovoljava svojstva (i)$-$(iii). Definiramo li sada

$$\upsilon(f, M; C) := C \cdot f^p \cdot \gamma\left(\frac{M}{C}\right),$$

vidimo da postoji glatka funkcija definirana za $f \geq 0$, $0 \leq M \leq C$ sa svojstvima (2.8), (2.9) i (2.10), što nam je dovoljno za egzistenciju funkcije Bellmanovog tipa.

Dakle, vidimo da uzimanjem $c = \frac{2^p}{p-1}$, dobivamo funkciju Bellmanovog tipa

$$\mathcal{B}(f, F, M; C) = \frac{2^p}{p-1} \cdot C\left(F - f^p\left(\frac{M}{C}+1\right)^{1-p}\right)$$

koja je dovoljna za dokaz Teorem 2.1.4 s konstantom $C_p = \frac{2^p}{p-1}$.

2.6 Najbolja konstanta C_p

Pronalaskom funkcije Bellmanovog tipa upotpunili smo dokaz Teorema 2.1.4. Primijetimo da smo zapravo dokazali više nego što se tvrdi u teoremu − imamo ocjenu za konstantnu C_p. No, ne možemo tvrditi da je to najbolja ocjena. Ipak, može se pokazati (vidi Nazarov, Treil i Volberg [7]) da to jest najbolja ocjena kada je $p = 2$.

Pretpostavnimo da nam je dana funkcija Bellmanovog tipa $\mathcal{B}$. Iz dokaza Teorema 2.1.4 vidimo da za C_p možemo uzeti bilo koji pozitivan realan broj za koji dana funkcija $\mathcal{B}$ zadovoljava svojstvo (2), tj. $\mathcal{B}(f, F, M; C) \leq C_p C\, F$. Stoga, možemo uzeti

$$C_p = \sup_{f,F,M} \frac{\mathcal{B}(f, F, M; C)}{C\, F},$$

gdje supremum ide po svim $f \geq 0$, $f^p \leq F$, $0 \leq M \leq C$.

U našim razmatranjim, prilikom svođenja problema na nalaženje funkcije jedne varijable, dovoljno je bilo za danu funkciju γ uzeti

$$C_p = \sup_{M} \gamma(M),$$

gdje supremum ide po svim $0 \leq M \leq 1$.

Dobivanjem oblika $\gamma(M) = c\,(M + 1)^{1-p}$, $c \geq \frac{2^p}{p-1}$, slijedi ocjena $C_p = c$. No, takav oblik funkcije γ dobiven je iz dosta jakih pretpostavki na funkciju koje smo napravili zbog jednostavnijeg računa. Pokušajmo stoga provesti općenitiji račun u nadi da dobijemo bolju ocjenu.

Promotrimo ponovno svojstvo (iii) i primijetimo da ima oblik sličan funkciji dobivenoj kao

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma'(M)}{\gamma(M)^m}\right)' &= \frac{\gamma''(M)\gamma(M)^m - m\,\gamma(M)^{m-1}\gamma'(M)^2}{\gamma(M)^{2m}} \\ &= \frac{1}{\gamma(M)^{m+1}} \cdot \left\{\gamma(M)\gamma''(M) - m\,\gamma'(M)^2\right\},\end{aligned}$$

gdje je $m \in \mathbb{R}$. Vidimo da izborom $m = \frac{p}{p-1}$ svojstva (i) i (iii) povlače

$$\left(\gamma'(M)\gamma(M)^{-\frac{p}{p-1}}\right)' \geq 0.$$

Neka je $\left(\gamma'(M)\gamma(M)^{-\frac{p}{p-1}}\right)' = \varsigma(M)$ i promatrajmo tu jednakost kao diferencijalnu jednadžbu. Definiramo li $\sigma(M) = \int_0^M \varsigma(m)dm$, tada je $\gamma'(M)\gamma(M)^{-\frac{p}{p-1}} = \sigma(M) - a$, $a \in \mathbb{R}$. Kao rješenje dobivamo

$$\gamma(M) = \left(\frac{p-1}{a\,M + b - \int_0^M \sigma(m)dm}\right)^{p-1}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Uvjet na derivaciju (ii) nam daje $C_p = \gamma(0) = \left(\frac{p-1}{b}\right)^{p-1}$. Stoga, tražimo funkciju γ koja minimizira $\left(\frac{p-1}{b}\right)^{p-1}$, odnosno maksimizira b.

Primijetimo da je

$$-1 \geq \gamma'(M) = \left(\frac{p-1}{a\,M + b - \int_0^M \sigma(m)dm}\right)^p \cdot (\sigma(M) - a).$$

Uvrstimo li točku $M = 1$ u gornju formulu, dobijemo uvjet

$$b \leq \int_0^1 \sigma(m)dm - a + (p-1)\cdot(a - \sigma(1))^{\frac{1}{p}}.$$

S obzirom da je, po definiciji, $\sigma'(M) = \varsigma(M) \geq 0$, slijedi da je $\int_0^1 \sigma(m) \leq \sigma(1)$, što povlači

$$b \leq (\sigma(1) - a) + (p-1)\cdot(a - \sigma(1))^{\frac{1}{p}}.$$

Supstitucijom $x = a - \sigma(1)$, desna strana dobivene nejednakosti postaje funkcija $\phi(x) = -x + (p-1)\,x^{\frac{1}{p}}$. Iz prve i druge derivacije

$$\phi'(x) = -1 + \frac{p-1}{p}\,x^{-\frac{p-1}{p}},$$

$$\phi''(x) = -\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 x^{\frac{1-2p}{p}},$$

vidimo da ϕ poprima maksimum $(p-1)\cdot\left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p}{p-1}}$ u točki $x = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p}{p-1}}$. Stoga, $b \leq (p-1)\cdot\left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p}{p-1}}$, što povlači $C_p \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

Da bismo postigli minimalan $C_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$, dovoljno je uzeti $\sigma(M) = 0$, $a = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p}{p-1}}$ te $b = (p-1)\cdot\left(\frac{p}{p-1}\right)^{-\frac{p}{p-1}}$. Naime, tada je dobro definirana funkcija

$$\gamma(M) = \frac{p^p}{(p-1)\cdot(M + (p-1))^{p-1}}$$

te iz navednog vidimo da zadovoljava svojstva (i)−(iii).

Dakle, postoji funkciju Bellmanovog tipa

$$\mathcal{B}(f,F,M;C) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p C\,F - \frac{p^p}{(p-1)}\,C\,f^p\,\left(\frac{M}{C} + (p-1)\right)^{1-p}$$

koja je dovoljna za dokaz Teorem 2.1.4 s konstantom $C_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

Primijetimo da se nova ocjena za C_p podudara sa starom ocjenom kada je $p = 2$, stoga je u tom slučaju najbolja moguća. No, za razliku od stare ocjene, može se pokazati (vidi Lai [4]) da je upravo nova ocjena najbolja za sve $p > 1$. Dokazi pomoću Bellmanovih funkcija često služe upravo za dobivanje optimalnih ocjena u teoremima kojima je već poznat dokaz. Napomenimo da, kao što to pokazuju navedeni postupci, pretpostavkama koje olakšavaju račun gubimo optimalnost ocjena. Stoga, nalaženje primjera funkcije Bellmanovog tipa može zahtijevati dugačak i krajnje kompliciran račun.

Na kraju, napomenimo da dobivena funkcija Bellmanovog tipa nije jednaka Bellmanovoj funkciji (2.4), iako je dobivena ocjena za C_p zaista najbolja moguća. Naime, za nenegativne funkcije φ za koje je $f^p = \langle\varphi\rangle_I^p = \langle\varphi^p\rangle_I = F$ nužno vrijedi $\varphi \equiv \mathit{const}$ na I. Stoga, Bellmanova funkcija na granici domene $f^p = F$ nužno zadovoljava

$$\mathcal{B}(f,F,M;C) = M\,f^p = M\,F,$$

što za dobivenu funkciju Bellmanovog tipa ne vrijedi. Dakle, dobivena funkcija Bellmanovog tipa se ne podudara s Bellmanovom funkcijom (2.4) barem na dijelu svoje domene.

Poglavlje 3

Hardy–Littlewoodova maksimalna funkcija

U prethodnom poglavlju dali smo ideju kako dokazati teorem u kojem se traži gornja ocjena sume prosjeka na dijadskim intervalima – definicijom Bellmanove funkcije i dokazom egzistencije barem jedne funkcije Bellmanovog tipa. Osnova te ideje bila je glavna nejednakost koju smo dobili promatrajući utjecaj grananja dijadskih intervala na elemente Bellmanove funkcije. U ovom poglavlju pokazat ćemo kako primijeniti opisanu tehniku na problem koji se ne ponaša lijepo s obzirom na grananje dijadskih intervala.

3.1 Definicije i iskaz teorema

Neka je $B_r = B(0, r)$ kugla u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa središtem u nuli radijusa r. *Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija* od $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definira se kao

$$M\varphi(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r} |\varphi(x-y)|dy.$$

Ponekad se u definiciji maksimalne funkcije uzimaju kocke umjesto kugli. Neka je $Q_r = [-r, r]^n$, tada definiramo

$$M'\varphi(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{Q_r} |\varphi(x-y)|dy.$$

Primijetimo da su u slučaju kad je $n = 1$ operatori M i M' jednaki. Ako je $n > 1$, u kuglu sa središtem u nuli radijusa $r > 0$ može se opisati kocka $[-r, r]^n$ te upisati kocka $[-\frac{r}{\sqrt{n}}, \frac{r}{\sqrt{n}}]^n$. Stoga, vidimo da postoje pozitivne konstante c_n i C_n takve da

$$c_n\, M'\varphi(x) \leq M\varphi(x) \leq C_n\, M'\varphi(x).$$

S obzirom na dane nejednakosti, po potrebi možemo zamijeniti operator M operatorom M' ili obrnuto. Možemo definirati i općenitiju, necentriranu maksimalnu funkciju

$$M''\varphi(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |\varphi(y)| dy,$$

gdje supremum ide po svim kockama $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima i koje sadrže x. Slično kao prije, operatori M'' i M su ekvivalentni.

Važnost Hardy-Littlewoodove maksimalne funkcije u harmonijskoj analizi proizlazi iz proučavanja aproksimacije identitetom, koja poopćuje tehnike usrednjenja pomoću Fejérove ili Poissonove jezgre (za detalje vidi Duoandikoetxea [2]). Osnovna pitanja koja se pritom javljaju su pitanja ograničenosti maksimalne funkcije na L^p prostorima.

Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ izmjerivi prostori te neka je T operator iz $L^p(\mu)$ u prostor izmjerivih funkcija iz $(Y, \mathcal{G})$ u $\mathbb{C}$.

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je T* sublinearan operator *ako*

(i) za $\varphi_1, \varphi_2 \in L^p(\mu)$ vrijedi

$$|T(\varphi_1 + \varphi_2)(x)| \leq |T\varphi_1(x)| + |T\varphi_2(x)| \quad \mu - (g.s.),$$

(ii) za $\varphi \in L^p(\mu)$ i $k \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|T(k\,\varphi)(x)| = |k|\, |T\varphi(x)|.$$

Iz definicije trivijalno slijedi da je maksimalni operator M sublinearan iz $L^p(\mathbb{R}^n)$ u prostor nenegativnih Borelovih funkcija iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$.

Definicija 3.1.2. *Kažemo da je T* slabog tipa (p, q)*, $q < \infty$, ako za svaki $t > 0$ vrijedi*

$$\nu(\{y \in Y : |T\varphi(y)| > t\}) \leq \left(\frac{C\, \|\varphi\|_{L^p(\mu)}}{t} \right)^q,$$

te kažemo da je T slabog tipa (p, ∞) *ako je ograničen operator iz $L^p(\mu)$ u $L^\infty(\nu)$. Kažemo da je T* jakog tipa (p, q) *ako je ograničen operator iz $L^p(\mu)$ u $L^q(\nu)$.*

Uzmemo li $(X, \mathcal{F}, \mu) = (Y, \mathcal{G}, \nu)$ te $T = id_X$, slaba (p,p) ocjena je posljedica *Markov-Čebiševljeve nejednakosti*

$$\mu(\{|\varphi| > t\}) \leq \frac{\|\varphi\|^p_{L^p(\mu)}}{t^p}, \quad t > 0,$$

čiji dokaz se generalizira na sljedeći način:

Propozicija 3.1.3. *Ako je T jakog (p,q) tipa, onda je T slabog (p,q) tipa.*

Dokaz. Neka je $E_t = \{y \in Y : |T\varphi(y)| > t\}$. Tada

$$\nu(E_t) = \int_{E_t} d\nu(y) \leq \int_{E_t} \left|\frac{T\varphi(y)}{t}\right|^q d\nu(y) \leq \frac{\|T\varphi\|^q_{L^q(\nu)}}{t^q} \leq \left(\frac{C\,\|\varphi\|_{L^p(\mu)}}{t}\right)^q,$$

ako stavimo $C = \|T\|_{L^p(\mu)\to L^q(\nu)}$. □

Sada smo u mogućnosti iskazati fundamentalni teorem o Hardy-Littlewoodovoj maksimalnoj funkciji:

Teorem 3.1.4. (Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem) *Operator M je slabog tipa $(1,1)$ te jakog tipa (p,p), $1 < p \leq \infty$:*

(a)

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : M\varphi(y) > t\}| \leq \frac{C_n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|dx, \quad \forall t > 0,$$

(b)

$$\|M\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p}\,\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Napomenimo da se slaba $(1,1)$ ocjena iz Teorema 3.1.4 ne može zamijeniti jakom $(1,1)$ ocjenom. To slijedi iz sljedeće propozicije:

Propozicija 3.1.5. *Ako je $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \not\equiv 0$, onda $M\varphi \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Ako je $\varphi \not\equiv 0$, tada postoji $R > 0$ takav da

$$A := \int_{B(0,R)} |\varphi(y)|dy > 0.$$

Za proizvoljan $\|x\| > R$ vrijedi $B(0,R) \subset B(x, R + \|x\|)$. Tada

$$M\varphi(x) \geq \frac{1}{|B(x, R + \|x\|)|} \int_{B(x,R+\|x\|)} |\varphi(y)|dy \geq \frac{A}{|B(0,1)|\,(R + \|x\|)^n},$$

odnosno postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M\varphi(x)|dx \geq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \frac{C}{\|x\|^n}\, dx = C \cdot |S(0,1)| \int_R^\infty \frac{r^{n-1}}{r^n}\, dr = \infty. \qquad \square$$

Iz definicije operatora M trivijalno slijedi jaka (∞, ∞) ocjena

$$\|M\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

stoga je, po Marcinkiewiczevom teoremu interpolacije (vidi Duoandikoetxea [2]), za dokaz Teorema 3.1.4 dovoljno pokazati slabu $(1, 1)$ ocjenu. U tu svrhu se uvodi maksimalni operator po dijadskim kockama:

Neka je $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i neka je $\mathcal{D}$ familija dijadskih kocki na $\mathbb{R}^n$. Za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$E_k\varphi(x) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \langle\varphi\rangle_Q\, \mathbb{1}_Q(x).$$

Tada je *dijadska maksimalna funkcija* definirana sa

$$M_d\varphi(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} E_k|\varphi|(x).$$

Primijetimo da iz svojstva dijadskih kocki slijedi

$$M_d\varphi(x) = \sup_{\substack{Q \ni x \\ Q \in \mathcal{D}}} \big\langle|\varphi|\big\rangle_Q, \tag{3.1}$$

što opravdava naziv dijadska maksimalna funkcija.

Koristeći svojstva dijadskih kocki moguće je dokazati slabu $(1, 1)$ ocjenu za dijadski maksimalni operator M_d. Iz navedene ocjene može se dokazati slaba $(1, 1)$ ocjena za maksimalni operator M te, sličnim postupkom kao dokaz Marcinkiewiczevog teorema interpolacije, jaka (p, p) ocjena, $1 < p < \infty$, za dijadski maksimalni operator M_d (vidi Duoandikoetxea [2]). Zanimljivo, u slučaju kada je $n = 1$, tehnikom opisanom u prethodnom poglavlju moguće je dati direktan dokaz za jake (p, p) ocjene, $1 < p < \infty$, maksimalnog operatora M_d.

Teorem 3.1.6. (Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem, dijadska L^p verzija) *Neka je $\mathcal{D}$ familija dijadskih intervala u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi ocjena*

$$\|M_d\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{p}{p-1}\, \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

za sve $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$.

3.2 Transformiranje problema u pogodan oblik

Pokušajmo dokazati Teorem 3.1.6 tehnikom opisanom u prethodnom poglavlju. Neka je $p > 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su promatrane funkcije $\varphi \in L^p$ realne i nenegativne.

Zbog svojstva dijadskih intervala i Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji, za dokaz Teorema 3.1.6 dovoljno je dokazati ekvivalentnu tvrdnju

$$\int_I (M_d\varphi)^p \leq C_p \int_I \varphi^p, \quad \forall I \in \mathcal{D}. \tag{3.2}$$

odnosno

$$\big\langle (M_d\varphi)^p \big\rangle_I \leq C_p \,\langle \varphi^p \rangle_I, \quad \forall I \in \mathcal{D}. \tag{3.3}$$

Vidimo da smo transformirali iskaz u oblik u kojem se pojavljuje prosjek funkcije φ^p na dijadskom intervalu I. Stoga se nadamo da lijeva strana u (3.3) ima oblik koji je pogodan za definiranje Bellmanove funkcije.

Primijetimo da se lijeva strana nejednakosti (3.3), kao prosjek funkcije na dijadskom intervalu I, može rastaviti na manje, sebi slične dijelove. Vrijedi

$$\big\langle (M_d\varphi)^p \big\rangle_I = \frac{1}{2}\big\langle (M_d\varphi)^p \big\rangle_{I_+} + \frac{1}{2}\big\langle (M_d\varphi)^p \big\rangle_{I_-}. \tag{3.4}$$

Dosad navedeno motivira definiciju Bellmanove funkcije kao supremum izraza s lijeve strane nejednakosti (3.3), koji prolazi po skupu svih nenegativnih funkcija $\varphi \in L^p$ s fiksnom vrijednošću $\langle \varphi^p \rangle_I$. No, u tom slučaju ne bismo mogli iskazati glavnu nejednakost. Naime, promotrimo li dokaz glavne nejednakosti Bellmanove funkcije za Carlesonov teorem ulaganja, možemo primijetiti da smo koristili činjenicu da definicija Bellmanove funkcije (2.4) ne ovisi o ponašanju promatranih objekata na dijadskim intervalima $J \not\subseteq I$. U slučaju dijadske maksimalne funkcije, vrijednost $M_d\varphi(x)$ u proizvoljnoj točki $x \in I$ ovisi o prosjeku funkcije φ na svakom intervalu $J \in \mathcal{D}$ koji sadrži x. Stoga, fiksiranjem samo vrijednosti $\langle \varphi^p \rangle_I$ nismo u mogućnosti definirati Bellmanovu funkciju.

Promotrimo definiciju (3.1). Za dani $x \in I$, vidimo da vrijednost $M_d\varphi(x)$ ovisi o vrijednostima funkcije φ na dijadskom intervalu I te o vrijednostima prosjeka $\langle \varphi \rangle_J$ po dijadskim intervalima $J \supset I$. Stoga, da bismo ograničili razmatranje na fiksni interval $I \in \mathcal{D}$, dovoljno je fiksirati vrijednosti supremuma navedenih prosjeka.

Primijetimo da vrijedi

$$\sup_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\supseteq I_\pm}} \langle\varphi\rangle_J = \max\Big\{\langle\varphi\rangle_{I_\pm}, \sup_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\supseteq I}} \langle\varphi\rangle_J\Big\}. \tag{3.5}$$

Iz navedenog slijedi da sljedeća definicija ima smisla:

Za fiksni dijadski interval I definirajmo Bellmanovu funkciju u tri realne varijable (f, F, L) kao

$$\mathcal{B}(f, F, L) := \sup_{\varphi} \big\langle (M_d\varphi)^p \big\rangle_I, \tag{3.6}$$

gdje supremum ide po skupu svih nenegativnih funkcija $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ takvih da vrijedi

$$\langle\varphi\rangle_I = f, \qquad \langle\varphi^p\rangle_I = F, \qquad \sup_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\supseteq I}} \langle\varphi\rangle_J = L.$$

Primijetimo da definicija Bellmanove funkcije $\mathcal{B}$ ne ovisi o izboru fiksnog intervala I.

3.3 Svojstva funkcije $\mathcal{B}(f, F, L)$

(1) Domena: $0 \le f \le L$, $f^p \le F$.

(2) Slika: $L^p \le \mathcal{B}(f, F, L) \le C_p\, F + L^p$.

(3) Glavna nejednakost: Za uređenu trojku (f, F, L) iz domene te uređene parove (f_+, F_+) i (f_-, F_-) takve da je

$$(f_\pm)^p \le F_\pm, \qquad f = \frac{f_+ + f_-}{2}, \qquad F = \frac{F_+ + F_-}{2},$$

vrijedi nejednakost

$$\mathcal{B}(f, F, L) \ge \frac{1}{2}\left\{\mathcal{B}(f_+, F_+, \max\{f_+, L\}) + \mathcal{B}(f_-, F_-, \max\{f_-, L\})\right\}.$$

Nejednakosti koje definiraju domenu trivijalno slijede iz definicija varijabli, odnosno iz Hölderove nejednakosti. Donja granica slike slijedi iz $M_d\varphi(x) \ge L$, $\forall x \in I$. Gornja granica slike slijedi u slučaju da vrijedi Teorem 3.1.6:

$$\big\langle (M_d(\varphi \mathbb{1}_I))^p \big\rangle_I \le C_p \big\langle (\varphi \mathbb{1}_I)^p \big\rangle_I = C_p\, F, \quad \big\langle (M_d(\varphi \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I}))^p \big\rangle_I = \big\langle (\sup_{J\supset I} \langle \varphi \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I}\rangle_J)^p \big\rangle_I \le L^p.$$

Glavna nejednakost može se dobiti djelovanjem supremumom na jednakost (3.4) koristeći (3.5).

3.4 Dokaz teorema

Dokaz za neprekidne funkcije s kompaktnim nosačem

Pretpostavimo da postoji funkcija $\mathcal{B}(f, F, L)$ Bellmanovog tipa. Uzmimo proizvoljnu nenegativnu funkciju $\varphi \in C_c$. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\operatorname{supp} \varphi \cap [0, \infty\rangle \subseteq [0, 2^{k_0}\rangle.$$

Fiksirajmo dijadski interval $I = [0, 2^k\rangle$, gdje je $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$. Za svaki dijadski interval $J \subseteq I$, neka su f_J, F_J, L_J pripadni prosjeci:

$$f_J = \langle \varphi \rangle_J, \qquad F_J = \langle \varphi^p \rangle_J, \qquad L_J = \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J}} \langle \varphi \rangle_K.$$

Koristeći svojstva dijadskih intervala te (3.5), vidimo da za dijadske intervale $J \subseteq I$ vrijedi

$$f_J = \frac{f_{J_+} + f_{J_-}}{2}, \qquad F_J = \frac{F_{J_+} + F_{J_-}}{2}, \qquad L_{J_\pm} = \max\{f_{I_\pm}, L_J\},$$

što po svojstvu (3) povlači nejednakost

$$0 \leq |J| \cdot \mathcal{B}(f_J, F_J, L_J) - |J_+| \cdot \mathcal{B}(f_{J_+}, F_{J_+}, L_{J_+}) - |J_-| \cdot \mathcal{B}(f_{J_-}, F_{J_-}, L_{J_-}).$$

Zbrojimo li navedene nejednakosti za sve dijadske intervale $J \subseteq I$ za koje je $|J| > 2^{-n}|I|$, $n \in \mathbb{N}$, dobijemo

$$\begin{aligned} 0 &\leq |I| \cdot \mathcal{B}(f_I, F_I, L_I) - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \cdot \mathcal{B}(f_J, F_J, L_J) \\ &\overset{(2)}{\leq} |I| \cdot \mathcal{B}(f_I, F_I, L_I) - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \, L_J^p \\ &\overset{(2)}{\leq} |I| \cdot (C_p \, F_I + L_I^p) - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \, L_J^p, \end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \, L_J^p \leq |I| \cdot (C_p \, F_I + L_I^p). \tag{3.7}$$

Označimo $M_{n,\varphi}(x) := \sup\{\langle\varphi\rangle_K : K \ni x, K \in \mathcal{D}, |K| \geq 2^{-n}|I|\}$. Tada za dijadski interval $J \subseteq I$, $|J| = 2^{-n}|I|$, vrijedi

$$M_{n,\varphi}(x) = \sup_{\substack{K\in\mathcal{D}\\ K\supseteq J}} \langle\varphi\rangle_K = L_J, \quad \forall x \in J.$$

Dakle, iz nejednakosti (3.7) slijedi

$$\begin{aligned}\int_I (M_{n,\varphi})^p &= \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} \int_J (M_{n,\varphi})^p = \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\, L_J^p \\ &\leq |I| \cdot (C_p\, F_I + L_I^p) = C_p \int_I \varphi^p + |I|\, L_I^p.\end{aligned}$$

S obzirom da $M_{n,\varphi} \nearrow M_d\varphi$ kada $n \to \infty$, po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int_I (M_d\varphi)^p \leq C_p \int_I \varphi^p + |I|\, L_I^p. \tag{3.8}$$

Primijetimo da, obzirom na $\operatorname{supp}\varphi \cap [0,\infty\rangle \subseteq [0, 2^{k_0}\rangle$, vrijedi

$$\begin{aligned}0 \leq |I|\, L_I^p = |I| \sup_{\substack{K\in\mathcal{D}\\ K\supseteq I}} \langle\varphi\rangle_K^p = |I|\, \langle\varphi\rangle_I^p &= \frac{1}{|I|^{p-1}} \left(\int_I \varphi\right)^p \\ &= \frac{1}{(2^k)^{p-1}} \left(\int_{[0,2^{k_0}\rangle} \varphi\right)^p \longrightarrow 0 \quad \text{kada} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Po Teoremu o sendviču te Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji, iz ocjene (3.8) slijedi

$$\int_{[0,\infty\rangle} (M_d\varphi)^p \leq C_p \int_{[0,\infty\rangle} \varphi^p$$

Analognim postupkom na $\langle-\infty, 0\rangle$ i zbrajanjem dobivamo upravo

$$\|M_d\varphi\|_{L^p} \leq C_p^{\frac{1}{p}}\, \|\varphi\|_{L^p}.$$

Proširivanje ocjene s gustog potprostora

Da bismo dokazali Teorem 3.1.6, htjeli bismo proširiti ocjenu po neprekidnosti s gustog potprostora C_c na prostor L^p. No, ograničenost na gustom potprostoru nužno ne povlači neprekidnost. Ipak, možemo definirati niz sublinearnih operatora koji su trivijalno ograničeni na cijelom L^p, čija uniformna ograničenost povlači ograničenost dijadskog maksimalnog operatora.

Neka je $m \in \mathbb{N}_0$. Definirajmo familiju dijadskih intervala

$$\mathcal{D}_m := \{I \in \mathcal{D} : I \subseteq [-2^m, 0\rangle \cup [0, 2^m\rangle, |I| \geq 2^{-m}\}.$$

Za funkciju $\varphi \in L^p$ definirajmo maksimalnu funkciju pridruženu familiji $\mathcal{D}_m$

$$M_m\varphi(x) := \sup_{\substack{I \ni x \\ I \in \mathcal{D}_m}} \big\langle |\varphi| \big\rangle_I.$$

Iz svojstva dijadskih intervala slijedi da je $\mathcal{D}_m$ konačna familija intervala te $\mathcal{D}_m \nearrow \mathcal{D}$. Stoga, iz (3.1) direktno slijedi da $M_m\varphi \nearrow M_d\varphi$ kada $m \to \infty$.

Primijetimo da za proizvoljnu funkciju $\varphi \in L^p$ operator M_m zadovoljava

$$\begin{aligned} \|M_m\varphi\|_{L^p} &\leq \Big\| \sum_{I \in \mathcal{D}_m} \langle|\varphi|\rangle_I \, \mathbb{1}_I \Big\|_{L^p} \leq \sum_{I \in \mathcal{D}_m} \langle|\varphi|\rangle_I \, |I|^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{I \in \mathcal{D}_m} |I|^{\frac{1}{p}-1} \int_I |\varphi| \leq \sum_{I \in \mathcal{D}_m} \left(\int_I |\varphi|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \operatorname{card} \mathcal{D}_m \, \|\varphi\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Napomenimo da smo kod druge nejednakosti koristili nejednakost Minkowskog, a kod četvrte Hölderovu nejednakost.

Dakle, operator M_m je ograničen na L^p. Posebno, za proizvoljnu $\varphi \in L^p$ vrijedi $M_m\varphi < \infty$ (g.s.), što po sublinearnosti povlači

$$|M_m\varphi_1 - M_m\varphi_2| \leq M_m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{(g.s.)} \tag{3.10}$$

za sve $\varphi_1, \varphi_2 \in L^p$. Primijetimo da je uvjet (3.10) uz ocjenu (3.9) dovoljan za dokaz neprekidnosti operatora M_n na L^p.

Iz ograničenosti dijadskog maksimalnog operatora na potprostoru C_c trivijalno slijedi

$$\|M_m\varphi\|_{L^p} \leq \|M_d\varphi\|_{L^p} \leq C_p^{\frac{1}{p}} \, \|\varphi\|_{L^p}$$

za sve $\varphi \in C_c$. Iz neprekidnosti direktno slijedi ocjena $\|M_m\varphi\|_{L^p} \leq C_p^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^p}$ za sve $\varphi \in L^p$. Tada za proizvoljnu $\varphi \in L^p$ po Fatouovoj lemi vrijedi

$$\|M_d\varphi\|_{L^p} = \|\lim_m M_m\varphi\|_{L^p} \leq \liminf_m \|M_m\varphi\|_{L^p} \leq C_p^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^p},$$

čime je dokazan Teorem 3.1.6.

3.5 Postavljanje parcijalne diferencijalne jednažbe

Da bismo upotpunili dokaz Teorema 3.1.6, potrebno je naći barem jednu funkciju Bellmanovog tipa.

Ispitivanje toka funkcije. Uvjeti na derivacije

Promotrimo svojstvo (3). Neka je (f, F, L) uređena trojka iz domene takva da dodatno vrijede stroge nejednakosti $f < L$ i $f^p < F$. Promatrajući elemente domene s fiksnim L, vidimo da postoji kugla $B \subset \mathbb{R}^2$ sa središtem u (f, F) koja zadovoljava sljedeće svojstvo: za uređene parove (f_+, F_+), $(f_-, F_-) \in B$ takve da $f = \frac{f_+ + f_-}{2}$, $F = \frac{F_+ + F_-}{2}$, vrijedi $f_\pm < L$, $(f_\pm)^p < F_\pm$. Tada su uređene trojke (f_+, F_+, L) i (f_-, F_-, L) ponovno elementi domene te vidimo da funkcija $\mathcal{B}(\cdot, \cdot, L)\big|_B$ zadovoljava uvjet Jensenove konkavnosti

$$\mathcal{B}(f, F, L) \geq \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{B}(f_+, F_+, L) + \mathcal{B}(f_-, F_-, L) \right\}.$$

S obzirom da je B konveksan skup u $\mathbb{R}^2$ te je po (2) Bellmanova funkcija lokalno ograničena, iz Teorema 1.2.10 slijedi da je funkcija $\mathcal{B}(\cdot, \cdot, L)\big|_B$ konkavna i lokalno Lipschitzova. Posebno, svaka je funkcija Bellmanovog tipa neprekidna i lokalno konkavna po točkama (f, F) za fiksni L.

Napomenimo da iz svojstava (1)−(3) nije jasno da funkcija Bellmanovog tipa mora biti neprekidna na svojoj domeni. Ipak, u ovom trenutku pretpostavljamo da postoji barem jedna takva neprekidna funkcija. Također, s obzirom na metodu opisanu u odjeljku 2.5, pretpostavljamo da postoji čak glatka funkcija Bellmanovog tipa.

Stoga, tražimo glatku funkciju $\mathcal{B}(f, F, L)$ koja zadovoljava svojstva (1), (2) te

(i) $\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial f^2}(f, F, L) \leq 0$,

(ii) $\det H_{\mathcal{B}(\cdot,\cdot,L)}(f,F) \geq 0$,

(iii) $\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial L}(f,F,L) \leq 0$ kada $f = L$.

Prva dva svojstva slijede iz lokalne konkavnosti funkcije $\mathcal{B}(\cdot,\cdot,L)$ po Sylvesterovom kriteriju za negativnu semidefinitnu matricu $H_{\mathcal{B}(\cdot,\cdot,L)}$. Svojstvo (iii) slijedi iz zahtjeva da funkcija Bellmanovog tipa zadovoljava svojstvo

$$\mathcal{B}(f,F,L_1) \geq \mathcal{B}(f,F,L_2) \text{ kada } L_1 \leq L_2.$$

Naime, iz lokalne konkavnosti i navedenog svojstva slijedi glavna nejednakost.

Dakle, da bismo dokazali Teorem 3.1.6 dovoljno nam je dokazati egzistenciju glatke funkcije koja zadovoljava gornja svojstva. No, time ne dokazujemo nužno teorem s najboljom konstantom. Naime, promotrimo li dokaz teorema pomoću Bellmanove funkcije, ocjena nejednakosti iz iskaza teorema slijedi višestrukim djelovanjem glavne nejednakosti. Da bismo dobili što bolju ocjenu, nejednakosti s kojima djelujemo nužno moraju biti oštre, tj. što bliže jednakosti. S obzirom da smo pokazali kako lokalna konkavnost po točkama (f,F) i monotonost po varijabli L impliciraju glavnu nejednakost, dovoljno je tražiti funkciju koja nije nužno strogo lokalno konkavna po točkama (f,F) te nije strogo monotona po varijabli L. Po obratu Teorema 1.2.12 (b) te odgovarajućem rezultatu za prvu derivaciju, zahtijevat ćemo jednakosti u svojstvima (ii) i (iii).

Svođenje na funkcije s manje varijabli

U sljedećem koraku promotrimo Bellmanovu funkciju (3.6). Neka je (f,F,L) uređena trojka iz domene takva da je $L > 0$. Tada je uređena trojka $(\frac{f}{L}, \frac{F}{L^p}, 1)$ ponovno element domene. Iz definicije Bellmanove funkcije vidimo da zadovoljava svojstvo homogenosti

$$\mathcal{B}(f,F,L) = L^p\,\mathcal{B}\left(\frac{f}{L}, \frac{F}{L^p}, 1\right).$$

Naime, za $L > 0$ preslikavanje $\varphi \mapsto \frac{\varphi}{L}$ je bijekcija između skupova po kojima ide supremum iz definicije Bellmanove funkcije za uređene trojke (f,F,L) i $(\frac{f}{L}, \frac{F}{L^p}, 1)$ te vrijedi

$$\left\langle (M_d\varphi)^p \right\rangle_I = L^p \left\langle \left(M_d(\tfrac{\varphi}{L})\right)^p \right\rangle_I.$$

Također, za nenegativne funkcije φ za koje je $f^p = \langle\varphi\rangle_I^p = \langle\varphi^p\rangle_I = F$ nužno vrijedi $\varphi \equiv const$ na I, stoga iz definicije Bellmanove funkcije slijedi

$$\mathcal{B}(f, f^p, L) = L^p. \tag{3.11}$$

U nastavku ćemo tražiti funkciju Bellmanovog tipa s navedenim svojstvima. Stoga, imamo motivaciju tražiti samo funkciju

$$\beta(x,y) := \mathcal{B}\left(\frac{f}{L}, \frac{F}{L^p}, 1\right),$$

gdje je $x = \frac{f}{L}$, $y = \frac{F}{L^p}$. Navedena funkcija, definirana za $0 \le x \le 1$, $x^p \le y$, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^2 = 0 \tag{3.12}$$

s rubnim uvjetima

$$\beta(x,x^p) = 1, \qquad p\,\beta(1,y) = \frac{\partial\beta}{\partial x}(1,y) + p\,y\,\frac{\partial\beta}{\partial y}(1,y). \tag{3.13}$$

Diferencijalna jednadžba slijedi iz svojstva (ii), dok rubni uvjeti slijede iz svojstva (3.11), odnosno svojstva (iii).

Metoda karakteristika

Vidimo da je (3.12) homogena Monge-Ampèreova jednadžba. Motivirani parametrizacijom iz Teorema 1.3.1, tražimo rješenje oblika

$$\beta(x,y) = u\,x + f(u)\,y + g(u),$$

pri čemu u točki (x,y) parametar u i funkcije f, g zadovoljavaju jednadžbu karakteristike $x + f'(u)\,y + g'(u) = 0$.

Fiksirajmo parametar u, tj. promatrajmo fiksnu karakteristiku. U slučaju da promatrana karakteristika siječe rub domene $x^p = y$, označimo točku presjeka sa $(\upsilon(u), \upsilon(u)^p)$. Iz uvjeta (3.13) slijedi da točka presjeka zadovoljava uvjete

$$1 = u\,\upsilon(u) + f(u)\,\upsilon(u)^p + g(u), \qquad \upsilon(u) + f'(u)\,\upsilon(u)^p + g'(u) = 0.$$

Deriviranjem prve jednakosti po parametru u i koristeći drugu jednakost, dobijemo

$$\begin{aligned} 0 &= \upsilon(u) + u\,\upsilon'(u) + f'(u)\,\upsilon(u)^p + p\,f(u)\,\upsilon(u)^{p-1}\upsilon'(u) + g'(u) \\ &= u\,\upsilon'(u) + p\,f(u)\,\upsilon(u)^{p-1}\upsilon'(u), \end{aligned}$$

što povlači

$$f(u) = -\frac{u}{p\,\upsilon(u)^{p-1}}, \qquad g(u) = 1 - \frac{p-1}{p}\,u\,\upsilon(u).$$

Napomenimo da smo račun proveli uz pretpostavku da je funkcija υ derivabilna te da $\upsilon'(u) \neq 0$. Tu pretpostavku trenutno ne možemo formalno opravdati, no kasnije će dobiveno rješenje zaista imati to svojstvo.

Pretpostavimo sada da promatrana karakteristika siječe i rub domene $x = 1$ te označimo točku presjeka sa $(1, \phi(u))$. Ta točka presjeka zadovoljava uvjet

$$\beta(1, \phi(u)) = u + f(u)\,\phi(u) + g(u).$$

S druge strane, promotrimo uvjet (3.13). Rješenje oblika $\beta(x, y) = u\,x + f(u)\,y + g(u)$ povlači $\frac{\partial\beta}{\partial x}(x, y) = u$ te $\frac{\partial\beta}{\partial y}(x, y) = f(u)$, iz čega po uvjetu (3.13) slijedi

$$\beta(1, \phi(u)) = \frac{u}{p} + f(u)\,\phi(u).$$

Iz navedenog tada slijedi

$$g(u) = -\frac{p-1}{p}\,u,$$

što uz gornji zapis povlači uvjet

$$u\,(\upsilon(u) - 1) = \frac{p}{p-1}.$$

Sada možemo rješenje izraziti u obliku

$$\begin{aligned}
\beta(x, y) &= u\,x + f(u)\,y + g(u) - u \cdot 0 \\
&= \{f(u) - u\,f'(u)\} \cdot y + \{g(u) - u\,g'(u)\} \\
&= \{f(u) - u\,f'(u)\} \cdot y = -u^2 \left(\frac{f(u)}{u}\right)' \cdot y \\
&= -\frac{p-1}{p}\,\frac{u^2\,\upsilon'(u)}{\upsilon(u)^p} \cdot y = \frac{p-1}{p}\,\frac{u\,(\upsilon(u) - 1)}{\upsilon(u)^p} \cdot y \\
&= \frac{y}{\upsilon(u)^p},
\end{aligned}$$

za svaki parametar u takav da točka (x, y) leži na karakteristici

$$\begin{aligned}
0 &= x + f'(u)\,y + g'(u) \\
&= x + \frac{1}{u}\left(f(u) - \frac{1}{\upsilon(u)^p}\right) y - \frac{p-1}{p} \\
&= x - \left(\frac{1}{p\,\upsilon(u)^{p-1}} + \frac{\frac{p-1}{p}\,(\upsilon(u) - 1)}{\upsilon(u)^p}\right) y - \frac{p-1}{p} \\
&= x - \left(\frac{1}{\upsilon(u)^{p-1}} - \frac{p-1}{p}\,\frac{1}{\upsilon(u)^p}\right) y - \frac{p-1}{p}.
\end{aligned}$$

Supstitucijom $z = \frac{1}{v(u)}$, vidimo da jednadžba karakteristike ovisi o rješenju jednadžbe

$$p\,z^{p-1} - (p-1)\,z^p = \frac{p\,x - (p-1)}{y}.$$

Promotrimo stoga funkciju $\eta(z) = p\,z^{p-1} - (p-1)\,z^p$. Iz provedenog računa vidimo da $0 < v(u) \leq 1$, stoga nas zanima ponašanje funkcije η na skupu $[1, \infty\rangle$. Iz prve i druge derivacije

$$\eta'(z) = p(p-1)\,z^{p-2}\,(1-z),$$
$$\eta''(z) = p(p-1)\,z^{p-3}\,\big((p-2) - (p-1)\,z\big),$$

vidimo da je η strogo padajuća i konkavna funkcija te da poprima maksimum 1 u točki $z = 1$. Slijedi da je funkcija $\eta : [1, \infty\rangle \to \langle -\infty, 1]$ bijekcija, tj. ima inverznu funkciju $\omega : \langle -\infty, 1] \to [1, \infty\rangle$. Po Propoziciji 1.2.9 slijedi da je funkcija ω strogo padajuća i konkavna.

Tada rješenje diferencijalne jednadžbe (3.12) ima oblik

$$\beta(x, y) = y \cdot \omega\left(\frac{p\,x - (p-1)}{y}\right)^p$$

na dijelu svoje domene.

Primijetimo da navedeno rješenje nema smisla na cijeloj domeni. Naime, rješenje je dobiveno računom koji pretpostavlja da karakteristika $x + f'(u)\,y + g'(u) = 0$ siječe rubove domene $x^p = y$ te rub domene $x = 1$. Promatrajući nagib navedene karakteristike, vidimo da je nužan uvjet $f'(u) < 0$, koji povlači $\eta(z) > 0$. Iz navedenog slijedi da ima smisla promatrati samo restrikciju funkcije $\eta : [1, \frac{p}{p-1}\rangle \to \langle 0, 1]$, odnosno funkciju $\omega : \langle 0, 1] \to [1, \frac{p}{p-1}\rangle$. U tom slučaju rješenje ima smisla za točke (x, y) iz domene takve da $x > \frac{p-1}{p}$. Pritom je karakteristika kroz točku (x, y) pravac koji prolazi kroz točku $(0, \frac{p-1}{p})$.

U sljedećem koraku želimo definirati rješenje na ostatku domene. Primijetimo da nema smisla tražiti karakteristike takve da je $f'(u) > 0$. Naime, karakteristike s navedenim nagibom sijeku rub domene $x = 0$. No, točke $(0, y)$ bi odgovarale točkama iz domene Bellmanove funkcije za koje vrijedi $f = 0$. Nenegativne funkcije φ za koje $\langle \varphi \rangle_I = f = 0$ nužno vrijedi $\varphi \equiv 0$ na I, iz čega slijedi $F = \langle \varphi^p \rangle_I = 0$. Stoga, vrijednosti funkcije $\beta(0, y)$ nema smisla promatrati za $y > 0$.

Promotrimo rješenje $\beta(x,y)$ uzduž karakteristika takve da je $f'(u) = 0$, tj. $x = const$. Tada vrijedi $f(u) \equiv a$, $a \in \mathbb{R}$, stoga rješenje možemo zapisati u obliku

$$\beta(x,y) = a\,y + h(x).$$

Karakteristika $x = const$ siječe rub domene u točki (x, x^p). Iz uvjeta (3.13) slijedi da točka presjeka zadovoljava uvjet

$$1 = \beta(x, x^p) = a\,x^p + h(x),$$

što povlači

$$\beta(x,y) = a\,(y - x^p) + 1.$$

Preostaje odrediti vrijednost konstante a. S obzirom da rješenje mora biti neprekidno na cijeloj domeni te znamo oblik rješenja na području $x > \frac{p-1}{p}$, vidimo da je dovoljno promatrati vrijednosti rješenja kada x zdesna teži ka $\frac{p-1}{p}$.

Za fiksni $y > \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$ vrijedi

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{p-1}{p}, y\right) &= \lim_{x \to \frac{p-1}{p}^+} \beta(x,y) = \lim_{x \to \frac{p-1}{p}^+} y \cdot \omega\left(\frac{p\,x - (p-1)}{y}\right)^p \\ &= y \cdot \omega\left(0^+\right)^p = y \cdot \left(\frac{p}{p-1}\right)^p,\end{aligned}$$

iz čega slijedi $a = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$.

Dakle, rješenje diferencijalne jednadžbe (3.12) s rubnim uvjetima (3.13) dano je sljedećom formulom:

$$\beta(x,y) = \begin{cases} y \cdot \omega\left(\dfrac{p\,x - (p-1)}{y}\right)^p, & x > \dfrac{p-1}{p} \\ \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p (y - x^p) + 1, & x \leq \dfrac{p-1}{p} \end{cases}$$

Definiramo li sada

$$\mathcal{B}(f, F, L) = L^p \cdot \beta\left(\frac{f}{L}, \frac{F}{L^p}\right),$$

vidimo da postoji funkcija koja zadovoljava svojstva (1), (2) te svojstva (i), (ii), (iii).

Dakle, postoji funkcija Bellmanovog tipa

$$\mathcal{B}(f, F, L) = \begin{cases} F \cdot \omega \left(\dfrac{p\, L^{p-1} f - (p-1)\, L^p}{F} \right)^p, & L < \dfrac{p}{p-1}\, f \\ \left(\dfrac{p}{p-1} \right)^p (F - f^p) + L^p, & L \geq \dfrac{p}{p-1}\, f \end{cases} \tag{3.14}$$

koja je dovoljna za dokaz Teorema 3.1.6. S obzirom da na cijeloj domeni vrijedi

$$\mathcal{B}(f, F, L) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p F + L^p,$$

dokazali smo Teorem 3.1.6 s konstantom $C_p = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p$.

Napomenimo da je dobivena ocjena najbolja za $p > 1$. Naime, može se pokazati (vidi Melas [5] ili Slavin, Stokolos, i Vasyunin [8]) da je dobivena funkcija (3.14) upravo Bellmanova funkcija (3.6).

3.6 Završne napomene

Primijetimo da se konstanta $C_p = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ pojavila kao najbolja konstanta i u dokazu Teorema 2.1.4 i u dokazu Teorema 3.1.6. To nije iznenađujuće, s obzirom da jedan od standardnih načina dokazivanja Teorema 2.1.4 upravo usporedba s dijadskom maksimalnom funkcijom (vidi Treil [9]). Štoviše, može se pokazati da su tvrdnje Teorema 2.1.4 i Teorema 3.1.6 međusobno ekvivalentne (vidi Nazarov i Treil [6]). Ipak, kao što to pokazuju navedeni postupci nalaženja funkcija Bellmanovog tipa, međusobno ekvivalentni teoremi mogu imati bitno različitu složenost računa i različit oblik funkcija Bellmanovog tipa.

Na kraju, promotrimo funkciju $\eta(z) = p\, z^{p-1} - (p-1)\, z^p$. Njeno pojavljivanje u računu isto nije iznenađujuće. Naime, poznato je (vidi Grafakos i Montgomery-Smith [3]) da je operatorska norma necentrirane maksimalne funkcije $M'' : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ jedinstveno rješenje jednadžbe

$$(p-1)\, z^p - p\, z^{p-1} - 1 = 0,$$

tj. $\eta(z) = -1$. Navedeno je primjer kako bolje poznavanje problema koji se dokazuje može olakšati račun prilikom nalaženja Bellmanove funkcije.

Poglavlje 4

A_p težine i sumacijski uvjeti

U prethodnim poglavljima prezentirali smo osnovne principe tehnike Bellmanovih funkcija. Između ostalog, komentirali smo da nije poznata općenita metoda za nalaženje funkcija Bellmanovog tipa. Prethodna dva primjera pokazala su da se funkcije Bellmanog tipa mogu eksplicitno naći kao rješenja običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. No, kao što je često slučaj u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, nije moguće za svaki problem pronaći eksplicitno rješenje. U ovom poglavlju pokazat ćemo kako poznavanje rješenja jednog problema može pomoći u nagađanju oblika funkcije Bellmanovog tipa za drugi problem.

4.1 Definicije i iskaz teorema

Za lokalno integrabilnu funkciju $\omega : \mathbb{R}^n \to \langle 0, \infty\rangle$ kažemo da je *težinska funkcija* ili *težina*. Za izmjeriv skup E definiramo $\omega(E) := \int_E \omega$.

Definicija 4.1.1. *Za težinu ω kažemo da zadovoljava A_p* uvjet, *$1 < p < \infty$, ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi*

$$\left\langle \omega \right\rangle_Q \left\langle \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right\rangle_Q^{p-1} \leq C$$

za svaku kocku $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima.

Težine ω koje zadovoljavaju A_p uvjet, $1 < p < \infty$, javljaju se prilikom proučavanja slabih ocjena necentriranog maksimalnog operatora M'' na $L^p(\omega)$ prostorima. Može se pokazati da je operator M'' slabog tipa (p, p) ako i samo ako je $\omega \in A_p$ (za detalje vidi Duoandikoetxea [2]).

Koristeći Hölderovu nejednakost može se pokazati da $A_p \subseteq A_q$, $1 < p < q$. Naime, označimo li $p_1 := -\frac{1}{p-1}$ i $q_1 := -\frac{1}{q-1}$, tada je $p_1 < q_1$, što za fiksnu kocku $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ po Hölderovoj nejednakosti povlači

$$\left\langle \omega^{p_1} \right\rangle_Q^{\frac{1}{p_1}} \leq \left\langle \omega^{q_1} \right\rangle_Q^{\frac{1}{q_1}},$$

odnosno

$$\left\langle \omega^{-\frac{1}{q-1}} \right\rangle_Q^{q-1} \leq \left\langle \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right\rangle_Q^{p-1}.$$

Teorem 4.1.2. (Obrnuta Hölderova nejednakost) *Neka je $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$. Tada postoji $C > 0$ i $\varepsilon > 0$, koji ovise o p i konstanti iz A_p uvjeta, takvi da je*

$$\left\langle \omega^{1+\varepsilon} \right\rangle_Q^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \left\langle \omega \right\rangle_Q$$

za svaku kocku $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima.

Dokaz teorema može se pročitati u Duoandikoetxea [2], mi ga ovdje nećemo navoditi. Iz Teorema 4.1.2 direktno slijedi $A_p = \bigcup_{1<q<p} A_q$, $1 < p < \infty$. Kao granični slučaj, kada $p \to \infty$, definiramo

$$A_\infty := \bigcup_{1<p<\infty} A_p.$$

Može se pokazati (vidi Duoandikoetxea [2]) da je navedena definicija ekvivalentna sljedećem uvjetu:

Za težinu ω kažemo da zadovoljava A_∞ *uvjet* ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\left\langle \omega \right\rangle_Q e^{-\langle \log \omega \rangle_Q} \leq C$$

za svaku kocku $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima.

U nastavku ćemo proučavati dijadske verzije dosad navedenih uvjeta.

Definicija 4.1.3. *Za težinu ω kažemo da pripada* dijadskoj klasi $A_p^{d,\delta}$, $1 < p < \infty$, *ako vrijedi*

$$\left\langle \omega \right\rangle_I \left\langle \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right\rangle_I^{p-1} \leq \delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Za težinu ω kažemo da pripada dijadskoj klasi $A_\infty^{d,\delta}$ *ako vrijedi*

$$\left\langle \omega \right\rangle_I e^{-\langle \log \omega \rangle_I} \leq \delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Klase u sljedećoj definiciji odgovaraju klasama težina koje zadovoljaju dijadsku verziju iskaza Teorema 4.1.2.

Definicija 4.1.4. *Za težinu ω kažemo da pripada* dijadskoj klasi $RH_p^{d,\delta}$, $1 < p < \infty$, *ako vrijedi*

$$\frac{\langle \omega^p \rangle_I^{\frac{1}{p}}}{\langle \omega \rangle_I} \leq \delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Za težinu ω kažemo da pripada dijadskoj klasi $RH_1^{d,\delta}$ *ako vrijedi*

$$\left\langle \frac{\omega}{\langle \omega \rangle_I} \log \frac{\omega}{\langle \omega \rangle_J} \right\rangle_I \leq \delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Sada nam je cilj iskazati sumacijske uvjete koji daju mogućnost alternativnog definiranja dijadskih klasa $A_p^{d,\delta}$, $A_\infty^{d,\delta}$, $RH_p^{d,\delta}$ i $RH_1^{d,\delta}$. Za to nam je prvo potrebna sljedeća definicija.

Definicija 4.1.5. *Za težinu ω kažemo da pripada* dijadskoj klasi Db^d *ako vrijedi*

$$Db^d(\omega) := \sup_{I \in \mathcal{D}} \frac{\langle \omega \rangle_{I^F}}{\langle \omega \rangle_I} < \infty,$$

gdje je I^F dijadski otac od I, tj. najmanji dijadski interval koji strogo sadrži I.

Napomena 4.1.6. *U nastavku ćemo razliku prosjeka težine ω na dijadskim sinovima intervala $I \in \mathcal{D}$ označavati sa*

$$\Delta_I \, \omega := \langle \omega \rangle_{I_+} - \langle \omega \rangle_{I_-}.$$

Teorem 4.1.7. (Buckley) *Neka je $1 < p < \infty$ te neka je $\omega \in Db^d$. Tada vrijedi:*

(a) $\omega \in A_p^{d,\delta}$ *ako i samo ako*

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \langle \omega \rangle_J^{-\frac{1}{p-1}} \left(\frac{\Delta_J \, \omega}{\langle \omega \rangle_J} \right)^2 |J| \leq K_\delta \, \langle \omega \rangle_I^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

(b) $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$ *ako i samo ako*

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \left(\frac{\Delta_J \, \omega}{\langle \omega \rangle_J} \right)^2 |J| \leq K_\delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

(c) $\omega \in RH_p^{d,\delta}$ *ako i samo ako*

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \left\langle\omega\right\rangle_J^p \left(\frac{\Delta_J\,\omega}{\left\langle\omega\right\rangle_J}\right)^2 |J| \le K_\delta \left\langle\omega\right\rangle_I^p, \quad \forall I\in\mathcal{D}.$$

(d) $\omega \in RH_1^{d,\delta}$ *ako i samo ako*

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \left\langle\omega\right\rangle_J \left(\frac{\Delta_J\,\omega}{\left\langle\omega\right\rangle_J}\right)^2 |J| \le K_\delta \left\langle\omega\right\rangle_I, \quad \forall I\in\mathcal{D}.$$

Napomena 4.1.8. *Iz iskaza Teorema 4.1.7 (b) slijedi da postoji Carlesonov niz pridružen težinskoj funkciji* $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$.

Najbolje je ovdje napomenuti da ćemo dati dokaz implikacija u jednom smjeru iz prethodnog teorema, jer su nam one najzanimljivije radi ilustracije metode, dok se za dokaze obrata čitatelja upućuje na Beznosova i Reznikov [1].

4.2 Jednostavan dokaz pomoću Bellmanove funkcije

Pokušajmo prvo dokazati jedan smjer Teorema 4.1.7 (b), tj. dokažimo da za težinu $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$ vrijedi

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \left(\frac{\Delta_J\,\omega}{\left\langle\omega\right\rangle_J}\right)^2 |J| \le K_\delta, \quad \forall I\in\mathcal{D}. \tag{4.1}$$

Za fiksni dijadski interval I definirajmo Bellmanovu funkciju u dvije realne varijable (u,v) kao

$$\mathcal{B}(u,v) := \sup_\omega \frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} \left(\frac{\Delta_J\,\omega}{\left\langle\omega\right\rangle_J}\right)^2 |J|, \tag{4.2}$$

gdje supremum ide po skupu svih težina $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$ takvih da vrijedi

$$\left\langle\omega\right\rangle_I = u, \qquad \left\langle\log\omega\right\rangle_I = v.$$

Primijetimo da definicija Bellmanove funkcije $\mathcal{B}$ ne ovisi o izboru fiksnog intervala I. Njena su svojstva sljedeća:

(1) Domena: $e^v \leq u \leq \delta\, e^v$.

(2) Slika: $0 \leq \mathcal{B}(u,v) \leq K_\delta$.

(3) Glavna nejednakost: Za uređene parove (u,v), (u_+,v_+), (u_-,v_-) iz domene takve da je

$$u = \frac{u_+ + u_-}{2}, \qquad v = \frac{v_+ + v_-}{2},$$

vrijedi nejednakost

$$\mathcal{B}(u,v) \geq \frac{1}{2}\left\{\mathcal{B}(u_+,v_+) + \mathcal{B}(u_-,v_-)\right\} + \left(\frac{u_+ - u_-}{u}\right)^2.$$

Nejednakosti koje definiraju domenu trivijalno slijede iz Jensenove nejednakosti, odnosno iz definicije dijadske $A_\infty^{d,\delta}$ klase. Gornja granica slike slijedi u slučaju da vrijedi tvrdnja (4.1). Glavna nejednakost može se dobiti rastavljanjem sume po $J \subseteq I$ na sume po $J \subseteq I_+$, $J \subseteq I_-$ te $J = I$.

Standardni dokaz

Pretpostavimo da postoji funkcija $\mathcal{B}(u,v)$ Bellmanovog tipa. Uzmimo proizvoljnu težinu $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$. Fiksirajmo proizvoljni $I \in \mathcal{D}$.

Za svaki dijadski interval $J \subseteq I$, neka su u_J, v_J pripadni prosjeci:

$$u_J = \big\langle \omega \big\rangle_J, \qquad v_J = \big\langle \log \omega \big\rangle_I.$$

Koristeći svojstva dijadskih intervala, vidimo da za dijadske intervale $J \subseteq I$ vrijedi

$$u_J = \frac{u_{J_+} + u_{J_-}}{2}, \qquad v_J = \frac{v_{J_+} + v_{J_-}}{2},$$

što po svojstvu (3) povlači nejednakost

$$|J|\left(\frac{u_{J_+} - u_{J_-}}{u}\right)^2 \leq |J| \cdot \mathcal{B}(u_J, v_J) - |J_+| \cdot \mathcal{B}(u_{J_+}, v_{J_+}) - |J_-| \cdot \mathcal{B}(u_{J_-}, v_{J_-}).$$

Zbrojimo li navedene nejednakosti za sve dijadske intervale $J \subseteq I$ za koje je $|J| > 2^{-n}|I|$, $n \in \mathbb{N}$, dobijemo

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} |J|\left(\frac{u_{J_+} - u_{J_-}}{u}\right)^2 &\leq |I| \cdot \mathcal{B}(u_I, v_I) - \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \cdot \mathcal{B}(u_J, v_J) \\ &\overset{(2)}{\leq} |I| \cdot \mathcal{B}(u_I, v_I) \overset{(2)}{\leq} |I| \cdot K_\delta,\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}}\left(\frac{\Delta_J\,\omega}{\langle\omega\rangle_J}\right)^2|J|\leq K_\delta.$$

Puštajući limes $n\to\infty$ dobivamo upravo (4.1).

Jednostavna pretpostavka na oblik tražene funkcije

Da bismo upotpunili dokaz Teorema 4.1.7 (b), potrebno je naći barem jednu funkciju Bellmanovog tipa. Promotrimo stoga svojstva (1) i (2). Prvo što možemo primijetiti je da smo domenu Bellmanove funkcije mogli ekvivalentno opisati kao

$$1\leq u\,e^{-v}\leq\delta.$$

Donja ograda domene je sada konstanta, dok gornja ograda domene ovisi samo o parametru δ. Time smo dobili slične uvjete kao u slici Bellmanove funkcije. Nadalje, djelujemo li logaritmom na uvjete koji opisuju domenu, dobijemo

$$0\leq\log u-v\leq\log\delta.$$

Time smo sačuvali ovisnost gornje ograde domene o parametru δ, dok se donja ograda domene poklapa s donjom ogradom slike.

U sljedećem koraku promotrimo Bellmanovu funkciju (4.2). Težine ω za koje je $\log u=\log\langle\omega\rangle_I=\langle\log\omega\rangle_I=v$ nužno vrijedi $\omega\equiv const$ na I, stoga iz definicije Bellmanove funkcije slijedi

$$\mathcal{B}(u,\log u)=0.$$

U nastavku ćemo tražiti funkciju Bellmanovog tipa s navedenim svojstvom. Stoga, imamo motivaciju tražiti funkciju oblika

$$\mathcal{B}(u,v)=\gamma(x),$$

gdje je $x=\log u-v$. Tražena funkcija, definirana za $0\leq x\leq\log\delta$, zadovoljava

(i) $0\leq\gamma(x)\leq K_\delta$,

(ii) $\gamma(0)=0$.

S obzirom da je linearna funkcija najjednostavniji primjer funkcije koja zadovoljava svojstva (i) i (ii), pokušat ćemo naći funkciju γ oblika $\gamma(x)=a\,x$, $a\geq 0$.

Promotrimo svojstvo (3). Uzmemo li pripadne uređene parove (u, v), (u_+, v_+), (u_-, v_-), vidimo da funkcija Bellmanovog tipa oblika $\mathcal{B}(u, v) = a\,(\log u - v)$ zadovoljava

$$a\,\log u \geq \frac{1}{2}\left\{a\,\log u_+ + a\,\log u_-\right\} + \left(\frac{u_+ - u_-}{u}\right)^2,$$

odnosno

$$-\frac{a}{2}\log\left(\frac{u_+\,u_-}{u^2}\right) \geq \left(\frac{u_+ - u_-}{u}\right)^2.$$

S druge strane, vrijedi

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2}\log\left(\frac{u_+\,u_-}{u^2}\right) &= -\frac{a}{2}\log\left(4\,\frac{u_+\,u_-}{(u_+ + u_-)^2}\right) = -\frac{a}{2}\log\left(1 - \left(\frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}\right)^2\right) \\ &\geq \frac{a}{2}\left(\frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-}\right)^2 = \frac{a}{8}\left(\frac{u_+ - u_-}{u}\right)^2. \end{aligned}$$

Napomenimo da smo koristili nejednakost $\log(1 - x) \leq -x$, koja vrijedi za $x < 1$. Iz navedenog vidimo da za proizvoljni $a \geq 8$ funkcija definirana s $\mathcal{B}(u, v) = a\,(\log u - v)$ zadovoljava svojstva (1), (2) i (3). Dakle, postoji funkcija Bellmanovog tipa

$$\mathcal{B}(u, v) = 8\,(\log u - v)$$

koja dokazuje tvrdnju (4.1) s konstantom $K_\delta = 8\,\log\delta$.

4.3 Univerzalna Bellmanova funkcija

U prethodnom odjeljku mogli smo lako pogoditi oblik funkcije Bellmanovog tipa. Sada nam je cilj pomoću navedene funkcije pogoditi funkcije Bellmanovog tipa koje dokazuju isti smjer implikacija u ostatku Teorema 4.1.7. Za to nam je prvo potrebna sljedeća lema.

Lema 4.3.1. *Neka je $1 < p < \infty$. Tada vrijedi:*

(a) $\omega \in A_p^{d,\delta}$ *ako i samo*

$$\left\langle \omega^{-\frac{1}{p-1}} \right\rangle_I - \left\langle \omega \right\rangle_I^{-\frac{1}{p-1}} \leq \left(\delta^{\frac{1}{p-1}} - 1\right) \left\langle \omega \right\rangle_I^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

(b) $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$ *ako i samo*

$$\log\left\langle \omega \right\rangle_I - \left\langle \log \omega \right\rangle_I \leq \log\delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

(c) $\omega \in RH_p^{d,\delta}$ *ako i samo ako*

$$\left\langle \omega^p \right\rangle_I - \left\langle \omega \right\rangle_I^p \leq (\delta^p - 1) \left\langle \omega \right\rangle_I^p, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

(d) $\omega \in RH_1^{d,\delta}$ *ako i samo*

$$\left\langle \omega \log \omega \right\rangle_I - \left\langle \omega \right\rangle_I \log \left\langle \omega \right\rangle_I \leq \delta \left\langle \omega \right\rangle_I, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Nejednakosti u Lemi 4.3.1 direktno slijede iz Definicije 4.1.3, odnosno Definicije 4.1.4. Napomenimo da su lijeve strane nejednakosti u svim slučajevima nenegativne. Naime, to slijedi iz Jensenove nejednakosti za konveksne funkcije na $\langle 0, \infty \rangle$

$$\varphi\left(\left\langle \omega \right\rangle_I\right) \leq \left\langle \varphi(\omega) \right\rangle_I, \quad I \in \mathcal{D},$$

i to redom $\varphi(x) = x^{-\frac{1}{p-1}}$, $\varphi(x) = -\log x$, $\varphi(x) = x^p$ i $\varphi(x) = x \log x$.

Primijetimo da desne strane nejednakosti u Lemi 4.3.1 imaju redom istu strukturu kao desne strane nejednakosti u Teoremu 4.1.7. Stoga, ima smisla pokušati desne strane nejednakosti u Teoremu 4.1.7 redom ocijeniti desnim stranama nejednakosti iz Leme 4.3.1.

Promotrimo sada već dokazanu implikaciju, tj. ako je $\omega \in A_\infty^{d,\delta}$ onda

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \left(\frac{\Delta_J \, \omega}{\left\langle \omega \right\rangle_J} \right)^2 |J| \leq K_\delta, \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Označimo $\mathcal{A}(x) := -\log x$. Cilj nam je dokazati da postoji $C > 0$ koji eventualno ovisi o δ takav da je

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \left(\frac{\Delta_J \, \omega}{\left\langle \omega \right\rangle_J} \right)^2 |J| \leq C \, \left(\left\langle \mathcal{A}(\omega) \right\rangle_I - \mathcal{A}\left(\left\langle \omega \right\rangle_I \right) \right), \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

S obzirom da je $\mathcal{A}''(x) = \frac{1}{x^2}$, gornju tvrdnju možemo drugačije zapisati kao

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} (\Delta_J \, \omega)^2 \, \mathcal{A}''\left(\left\langle \omega \right\rangle_J \right) |J| \leq C \, \left(\left\langle \mathcal{A}(\omega) \right\rangle_I - \mathcal{A}\left(\left\langle \omega \right\rangle_I \right) \right), \quad \forall I \in \mathcal{D}.$$

Time smo dobili tvrdnju koja, u slučaju da vrijedi za $\mathcal{A}(x) = x^{-\frac{1}{p-1}}$, $\mathcal{A}(x) = -\log x$, $\mathcal{A}(x) = x^p$ i $\mathcal{A}(x) = x \log x$, dokazuje navedene implikacije Teorema 4.1.7.

Tehničke leme

Lema 4.3.2. *Neka je $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna funkcija. Tada vrijedi*

$$\alpha(0) - \frac{\alpha(1) + \alpha(-1)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, \alpha''(x)\, dx.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, \alpha''(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} (1 + x)\, \alpha''(x)\, dx + \int_{0}^{1} (1 - x)\, \alpha''(x)\, dx \\
&= (1 + x)\, \alpha'(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \alpha'(x)\, dx \\
&\quad + (1 - x)\, \alpha'(x)\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \alpha'(x)\, dx \\
&= a(0) - \alpha(x)\Big|_{-1}^{0} - a(0) + \alpha(x)\Big|_{-1}^{0} \\
&= a(-1) + a(1) - 2\, a(0).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.3.3. *Neka je $\mathcal{A} : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna, dvaput diferencijabilna funkcija takva da je $\mathcal{A}''$ monotona funkcija. Tada za sve x i t takve da su $x, x \pm t \in \langle 0, \infty\rangle$ vrijedi*

$$\mathcal{A}(x) - \frac{\mathcal{A}(x + t) + \mathcal{A}(x - t)}{2} \geq -\frac{t^2}{4}\, \mathcal{A}''(x).$$

Dokaz. Neka su x i t iz uvjeta leme. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $t > 0$. Promotrimo funkciju $\alpha(s) := \mathcal{A}(x + t\, s)$ na $\mathbb{R}$. Vidimo da je α dvaput diferencijabila, stoga po Lemi 4.3.2 vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) - \frac{\mathcal{A}(x + t) + \mathcal{A}(x - t)}{2} &= \alpha(0) - \frac{\alpha(1) + \alpha(-1)}{2} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - |s|)\, \alpha''(s)\, ds \\
&= -\frac{t^2}{2} \int_{-1}^{1} (1 - |s|)\, \mathcal{A}''(x + t\, s)\, ds.
\end{aligned}$$

Uvjet konveksnosti funkcije $\mathcal{A}$ ekvivalentan je uvjetu $\mathcal{A}'' \geq 0$. Ako je funkcija $\mathcal{A}''$ monotono rastuća, tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1 - |s|)\, \mathcal{A}''(x + t\, s)\, ds &\geq \int_{0}^{1} (1 - |s|)\, \mathcal{A}''(x + t\, s)\, ds \\
&\geq \int_{0}^{1} (1 - |s|)\, \mathcal{A}''(x)\, ds = \frac{1}{2}\, \mathcal{A}''(x).
\end{aligned}$$

Ako je funkcija $\mathcal{A}''$ monotono padajuća, tada promatrajući integral po $\langle -1, 0\rangle$ vrijedi analogan račun. Iz navedenog slijedi tvrdnja. □

Univerzalni dokaz

Teorem 4.3.4. *Neka je $\mathcal{A}$ funkcija koja zadovoljava uvjete Leme 4.3.3. Tada za svaku težinu ω i fiksni dijadski interval I vrijedi*

$$\frac{1}{|I|}\sum_{\substack{J\in\mathcal{D}\\ J\subseteq I}} (\Delta_J\,\omega)^2\,\mathcal{A}''\left(\left\langle\omega\right\rangle_J\right)\,|J| \le C\,\left(\left\langle\mathcal{A}(\omega)\right\rangle_I - \mathcal{A}\left(\left\langle\omega\right\rangle_I\right)\right).$$

Pokušajmo dokazati Teorem 4.3.4. U dokazu Teorema 4.1.7 (b) našli smo funkciju Bellmanovog tipa $\mathcal{B}(u,v) = 8\,(\log u - v)$, pri čemu su varijable odgovarale prosjecima $u = \left\langle\omega\right\rangle_I$ i $v = \left\langle\log\omega\right\rangle_I$. S obzirom da Teorem 4.1.7 (b) odgovara slučaju kada je $\mathcal{A}(x) = -\log x$, analogno smo mogli tražiti funkciju u dvije realne varijable (u,v) takve da je $u = \left\langle\omega\right\rangle_I$ i $v = \left\langle\mathcal{A}(\omega)\right\rangle_I$. U tom bi slučaju tražena funkcija bila upravo $\mathcal{B}(u,v) = 8\,(\log u + v)$.

Stoga, imamo motivaciju definirati funkciju $\mathcal{B}(u,v) := v - \mathcal{A}(u)$. Tada vrijedi

$$\mathcal{B}(u,v) - \frac{\mathcal{B}(u+t,v+s)+\mathcal{B}(u-t,v-s)}{2} = -\left(\mathcal{A}(u) - \frac{\mathcal{A}(u-t)+\mathcal{A}(u+t)}{2}\right),$$

odnosno

$$\mathcal{B}(u,v) - \frac{\mathcal{B}(u+t,v+s)+\mathcal{B}(u-t,v-s)}{2} \ge \frac{1}{4}\,t^2\,\mathcal{A}''(u). \tag{4.3}$$

Za svaki dijadski interval $J\subseteq I$, neka su u_J, v_J prosjeci:

$$u_J = \left\langle\omega\right\rangle_J, \qquad v_J = \left\langle\mathcal{A}(\omega)\right\rangle_J.$$

Koristeći svojstva dijadskih intervala, vidimo da za dijadske intervale $J\subseteq I$ vrijedi

$$u_J \pm \frac{1}{2}\,\Delta_J\,\omega = u_{J_\pm}, \quad v_J \pm \frac{1}{2}\,\Delta_J\,\mathcal{A}(\omega) = v_{J_\pm}.$$

Označimo $t_J := \frac{1}{2}\,\Delta_J\,\omega$ te $s_J := \frac{1}{2}\,\Delta_J\,\mathcal{A}(\omega)$. Tada iz nejednakosti (4.3) slijedi

$$\frac{1}{4}\,t_J^2\,\mathcal{A}''(u_J)\,|J| \le |J|\cdot\mathcal{B}(u_J,v_J) - |J_+|\cdot\mathcal{B}(u_{J_+},v_{J_+}) - |J_-|\cdot\mathcal{B}(u_{J_-},v_{J_-}).$$

Zbrojimo li navedene nejednakosti za sve dijadske intervale $J\subseteq I$ za koje je $|J| > 2^{-n}|I|$, $n\in\mathbb{N}$, dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|>2^{-n}|I|}} t_J^2\,\mathcal{A}''(u_J)\,|J| &\le |I|\cdot\mathcal{B}(u_I,v_I) - \sum_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\cdot\mathcal{B}(u_J,v_J)\\ &\le |I|\cdot\mathcal{B}(u_I,v_I).\end{aligned}$$

Napomenimo da smo koristili da za svaki dijadski interval $J \subseteq I$ vrijedi $\mathcal{B}(u_J, v_J) \geq 0$. Naime, s obzirom da je funkcija $\mathcal{A}$ konveksna, iz Jensenove nejednakosti slijedi

$$\mathcal{A}(u_J) = \mathcal{A}\left(\langle\omega\rangle_J\right) \leq \langle\mathcal{A}(\omega)\rangle_J = v_J.$$

Iz navedenog slijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} t_J^2\, \mathcal{A}''(u_J)\, |J| \leq 4\, \mathcal{B}(u_I, v_I),$$

odnosno

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} (\Delta_J\, \omega)^2\, \mathcal{A}''\left(\langle\omega\rangle_J\right)\, |J| \leq 16\, \left(\langle\mathcal{A}(\omega)\rangle_I - \mathcal{A}\left(\langle\omega\rangle_I\right)\right).$$

Puštajući limes $n \to \infty$ dobivamo upravo tvrdnju Teorema 4.3.4.

Primijetimo da smo dokazali Teorem 4.3.4 s konstantom $C = 16$. Stoga, primjenom Leme 4.3.1 vidimo da smo dokazali Teorem 4.1.7 (b) s konstantom $K_\delta = 16 \log \delta$. Time smo dobili nešto slabiju ocjenu nego u odjeljku 4.2. No, u slučaju da nas ne zanimaju najbolje konstante, tvrdnju Teorema 4.3.4 moguće je primijeniti na veliku klasu funkcija $\mathcal{A}$ i time dokazati niz novih gornjih ocjena za sume prosjeka na dijadskim intervalima.

Na kraju, napomenimo da funkcija $\mathcal{B}(u, v) = v - \mathcal{A}(u)$ strogo govoreći nije funkcija Bellmanovog tipa. Naime, s obzirom da nismo definirali Bellmanovu funkciju za dani problem, nije definirana domena, slika i glavna nejednakost koja bi karakterizirala funkcije Bellmanovog tipa. Ipak, koristili smo da navedena funkcija zadovoljava svojevrsnu glavnu nejednakost (4.3) te da je nenegativna na skupu uređenih parova nenegativnih realnih brojeva (u, v) takvih da vrijedi $v \geq \mathcal{A}(u)$. Također, ovisno o odabiru funkcije $\mathcal{A}$, gornja ograda slike funkcije $\mathcal{B}(u, v)$ odgovara nekoj od desnih strana nejednakosti u Lemi 4.3.1. Stoga, vrlo se često upravo za funkcije koje djeluju na pripadne prosjeke po intervalima te zadovoljavaju svojevrsne glavne nejednakosti kaže da su funkcije Bellmanovog tipa.

Bibliografija

[1] O. Beznosova i A. Reznikov, *Equivalent definitions of dyadic Muckenhoupt and Reverse Hölder classes in terms of Carleson sequences, weak classes, and comparability of dyadic $L \log L$ and A_∞ constants*, (2012), `http://arxiv.org/abs/1201.0520v1`.

[2] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2000.

[3] L. Grafakos i S. Montgomery-Smith, *Best constants for uncentered maximal functions*, (1994), `http://arxiv.org/abs/math/9412218v2`.

[4] J. Lai, *The Bellman functions of the Carleson Embedding Theorem and the Doob's martingale inequality*, (2014), `http://arxiv.org/abs/1411.5408v3`.

[5] A. Melas, *The Bellman functions of dyadic–like maximal operators and related inequalities*, Advances in Mathematics **192** (2005), br. 2, 310–340.

[6] F. Nazarov i S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates of singular integral operators and to other classical problems in harmonic analysis*, St. Petersburg Mathematical Journal **8** (1997), br. 5, 721–824.

[7] F. Nazarov, S. Treil i A. Volberg, *Bellman function in stochastic control and harmonic analysis (how our Bellman function got its name)*, Operator Theory: Advances and Applications **129** (2001), 393–423.

[8] L. Slavin, A. Stokolos i V. Vasyunin, *Monge–Ampère equations and Bellman functions: The dyadic maximal operator*, Comptes Rendus Mathematique **346** (2008), br. 9–10, 585–588.

[9] S. Treil, *A remark on two weight estimates for positive dyadic operators*, (2012), `http://arxiv.org/abs/1201.1455v3`.

[10] V. Vasyunin i A. Volberg, *Monge–Ampère equation and Bellman optimization of Carleson Embedding Theorems*, (2008), `http://arxiv.org/abs/0803.2247v2`.

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrazlaže se osnovni princip tehnike Bellmanovih funkcija primjenama na nekoliko konkretnih problema u harmonijskoj analizi. Najprije se definiraju osnovni pojmovi i dokazuju pomoćni rezultati potrebni u tehnici Bellmanovih funkcija. Potom se detaljno opisuje navedena tehnika na primjerima dokaza dijadske L^p verzije Carlesonog teorema ulaganja i dokaza dijadske L^p verzije Hardy-Littlewoodovog maksimalnog teorema, gdje se konstruira Bellmanova funkcija kao rješenje homogene Monge-Ampèreove jednadžbe s rubnim uvjetima. Na kraju se dokazuje nužnost sumacijskih uvjeta za nekoliko klasa dijadskih težina.

Summary

In this thesis the basic principle of the Bellman function technique is explained on a few specific problems in harmonic analysis. Firstly, basic concepts are defined and additional results needed in the Bellman function technique are proven. Then, the mentioned technique is described in detail by examples of proof of the dyadic L^p version of Carleson embedding theorem and the proof of the dyadic L^p version of Hardy-Littlewood maximal theorem, where the Bellman function is constructed as a solution to the homogeneous Monge-Ampèreove equation with boundary conditions. Lastly, the necessity of summation conditions is proven for a few classes of dyadic weights.

Životopis

Rođen sam 21. listopada 1991. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole upisao sam V. gimnaziju u Zagrebu, matematički smjer. Godine 2010. upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a 2013. godine diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika na istom fakultetu.