Fermi-Pasta-Ulamov model

Čižmek, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Čižmek

FERMI-PASTA-ULAMOV MODEL

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Zahvaljujem mentoru prof.dr.sc. Siniši Slijepčeviću koji mi je pomogao brojnim savjetima oko izrade ovog rada i uvijek imao strpljenja odgovarati na moja pitanja.

Hvala mojim kolegicama i prijateljicama koje su mi bile bezrezervna potpora tijekom proteklih 5 godina i svim ostalim koji su bili uz mene.

Najveće hvala mojim roditeljima, bratu i mom Franji koji su najviše zaslužni za sve ono što sam postigla u životu. Bez Vašeg povjerenja, ljubavi i potpore ništa ne bi imalo smisla.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu promatramo neke od rezultata teorije diferencijalnih jednadžbi. Proučavat ćemo neka temeljna svojstva diferencijalnih jednadžbi, najmanje separabilnih matematičkih subjekata koji su strogo povezani sa skoro svim područjima matematike te su osnovni element primijenjene matematike. Bavit ćemo se rješenjima diferencijalnih jednadžbi, njihovim postojenjem, jedinstvenošću i stabilnošću. Sve to pripremit će nas za proučavanje Fermi-Pasta-Ulamovog modela kojim ćemo se baviti na kraju ovoga rada.

Poglavlje 1 zove se "Uvod u diferencijalne jednadžbe". U njemu ćemo se baviti postojanjem i jedinstvenošću rješenja diferencijalnih jednadžbi te vrstama diferencijalnih jednadžbi. Definiramo tok diferencijalne jednadžbe. Uvodimo geometrijsku interpretaciju rješenja i definiramo pojmove vezane za tu temu, točke mirovanja i periodične putanje, koje ćemo koristiti u narednim poglavljima.

U poglavlju 2 pod nazivom "Linearna i nelinearna stabilnost" proučavamo stabilnost linearnih i nelinearnih sustava. U tom poglavlju iskazat ćemo formulu varijacije parametara koja je osnovni alat korišten u našoj analizi stabilnosti. Također, formulirat ćemo teorijski temelj za Lyapunovu indirektnu metodu, to jest metodu linearizacije.

Glavnu temu rada "Fermi-Pasta-Ulamov model" obradit ćemo u poglavlju 3. U njemu ćemo promatrati model koji su predložili i numerički istražili kojeg su proveli Fermi, Pasta i Ulam. Radi se o modelu koji možemo promatrati kao seriju kuglica međusobno povezanih oprugama. Definirat ćemo termalizaciju i vidjeti da se ona, suprotno očekivanjima, nije dogodila kod ovog eksperimenta.

1 Uvod u obične diferencijalne jednadžbe

Ovo poglavlje je o temeljnim konceptima teorije diferencijalnih jednadžbi. Odgovorit ćemo na temeljna pitanja: Što je diferencijalna jednadžba? Da li diferencijalne jednadžbe uvijek imaju rješenje? Jesu li rješenja diferencijalnih jednadžbi uvijek jedinstvena? No, najvažniji cilj ovog poglavlja je uvesti geometrijsku interpretaciju prostora rješenja diferencijalne jednadžbe. Koristeći tu geometriju, uvest ćemo elemente vezane za temu: točke mirovanja i periodične putanje.

1.1 Egzistencija i jedinstvenost

Neka su $J \subseteq \mathrm{R}$, $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{R}^n$, $\Lambda \subseteq \mathrm{R}^k$ otvoreni podskupovi i pretpostavimo da je $f : \mathrm{J} \times \mathrm{U} \times \Lambda \to \mathrm{R}^n$ glatka funkcija. Ovdje pojam „glatka“ podrazumijeva da je funkcija f neprekidno diferencijabilna. Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika

$$\dot{x} = x(t, x, \lambda) \tag{1}$$

gdje točka označava derivaciju po neovisnoj varijbli t (obično označava vrijeme), zavisna varijabla x je vektor varijabli stanja i λ je vektor parametara. Kada se bavimo komponentama vektora diferencijalne jednadžbe zgodno je koristiti terminologiju prema kojoj kažemo da je jednadžba (1) sustav diferencijalnih jednadžbi. Također, ako nas zanimaju promjene u odnosu parametara, onda diferencijalnu jednadžbu nazivamo *familija diferencijalnih jednadžbi.*

Primjer 1.1. *Van der Pol-ov oscilator s vanjskom silom*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= b(1 - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + a \cos \Omega t \end{aligned}$$

je diferencijalna jednadžba sa J=R, x=$(x_1, x_2) \in U = \mathbb{R}^2$,

$$\Lambda = \{(a, b, \omega, \Omega) : (a, b) \in \mathbb{R}^2, \omega > 0, \Omega > 0\},$$

i $f : \mathbb{R} \times R^2 \times \Lambda \to R^2$ definirana po komponentama sa

$$(t, x_1, x_2, a, b, \omega, \Omega) \to (x_2, b(1 - x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + a \cos \Omega t).$$

Ako je $\lambda \in \Lambda$ konstanta, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe (1) funkcija $\phi : J_0 \to U$ dana sa $t \mapsto \phi(t)$, gdje je J_0 otvoreni podskup od J takav da je

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t, \phi(t), \lambda) \tag{2}$$

za svaki t $\in J_0$.

Iako se, u ovom kontekstu, pojmovi "trajektorija", "fazna krivulja" i "integrabilna krivulja" odnose i na rješenje diferencijalne jednadžbe (1), korisno je imati pojam koji se odnosi na sliku rješenja u $\mathbb{R}^n$. Zato uvodimo slijedeću definiciju.

Definicija 1.2. Skup $\{\phi(t) \in U : t \in J_0\}$ nazivamo *putanja* rješenja ϕ.

Kada diferencijalnu jednadžbu koristimo kao modeliranje napretka varijeble stanja u fizikalnim procesima, glavni problem je odrediti buduću vrijednost varijable stanja iz njenih početnih vrijednosti. Matematički model je dan s parom jednadžbi

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \qquad x(t_0) = x_0$$

gdje drugu jednadžbu nazivamo *početni uvjet*. Ako je diferencijalna jednadžba definirana kao jednadžba (1) i $(t_0, x_0) \in J \times U$, onda se par jednadžbi naziva *početni problem*. Naravno, rješenje ovog početnog problema je rješenje diferencijalne jednadžbe ϕ takvo da je $\phi(t_0) = x_0$.

Ako gledamo diferencijalnu jednadžbu (1) kao familiju diferencijalnih jednadžbi u ovisnosti o vektoru parametara i možda i o početnom uvjetu, onda možemo promatrati odgovarajuće familije rješanja - ako one postoje - popisivanjem varijabli koje promatramo kao dodatni argument. Na primjer, pisat ćemo $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ da specificiramo ovisnost rješenja o početnom uvjetu $x(t_0) = x_0$ i o vektoru parametara λ.

Fundamentalna pitanja opće teorije diferencijalnih jednadžbi su egzistencija, jedinstvenost, proširenje rješenja i njegovo zadovoljavanje početnog problema. Srećom, rješenja svih tih pitanja dobivamo slijedeće fundamentalne rezultate: *Svaki početni problem ima jedinstveno rješenje koje je glatko i zadovoljava početne uvjete i parametre. Štoviše, rješenje početnog problema se može proširiti sve do granica domene definicije diferencijalnih jednadžbi ili do beskonačnosti.*

Sljedeća tri teorema formalni su iskazi fundamentalnih rezultata vezanih za diferencijalne jednadžbe. Oni su opsežno korišteni u svemu što slijedi.

Teorem 1.3. ***(Egzistencija i jedinstvenost)*** *Ako su $J \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoreni skupovi, $f : J \times U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ je glatka funkcija i $(t_0, x_0, \lambda_0) \in J \times U \times \Lambda$, onda postoje otvoreni skupovi $J_0 \subseteq J$, $U_0 \subseteq U$, $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$, $(t_0, x_0, \lambda_0) \in$*

$J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$ i funkcija $\phi : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}^n$ dana sa $(t, s, x, \lambda) \mapsto \phi(t, s, x, \lambda)$ takva da je za svaku točku $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J_0 \times U_0 \times \Lambda_0$ funkcija $t \mapsto \phi(t, t_1, x_1, \lambda_1)$ jedinstveno rješenje definirano na J_0 za početni problem dan diferencijalnom jednadžbom (1) i početnim uvjetom $x(t_1) = x_1$.

Dokaz ovog teorema može se naći u [1,Teorem 1.260, Teorem 1.261]

Podsjetimo se da za funkciju definiranu na otvorenom skupu i za k=1, 2, . . . , ∞ kažemo da je funkcija klase C^k ako su funkcija i sve njene parcijalne derivacije sve do uključivo k-tog reda neprekidne na otvorenom skupu.

Teorem 1.4. ***(Neprekidna ovisnost o početnim uvjetima)*** *Ako sustav (1) zadovoljava pretpostavke Teorema 1.2., onda je rješenje $\phi : J_0 \times J_0 \times U_0 \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}^n$ diferencijalne jednadžbe glatka funkcija. Štoviše, ako je f klase C^k za neki k=1,2,...,∞, onda je ϕ također klase C^k.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [1,Teorem 1.262]

Kao pogodnu notaciju, koristit ćemo oznaku $|x|$ za uobičajenu Euklidsku normu od $x \in \mathbb{R}^n$. Ali, budući da su sve norme na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentne, rezultati ovog poglavlja vrijede za proizvoljnu normu na $\mathbb{R}^n$.

Teorem 1.5. ***(Proširenje rješenja)*** *Ako sustav (1) zadovoljava pretpostavke Teorema 1.2 i ako je maksimalni otvoreni interval na kojem postoji rješenje $t \mapsto \phi(t)$ dan sa (α, β) gdje je $-\infty \leq \alpha < \beta < \infty$, onda je $|\phi(t)|$ jednako ∞ ili je $\phi(t)$ približno granici od U kada $t \to \beta$.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [1,Teorem 1.263]

U slučaju da postoji neki konačan T i $\lim_{t \to T} |\phi(t)|$ je ∞, kažemo da rješenje *proširujemo u konačnom vremenu.*

Teorem o egzistenciji i jedinstvenosti je fundamentalan teorem i ponekad se naziva "princip determinizma". Ideja je da ako znamo početne uvjete, onda možemo predvidjeti buduća stanja sustava. Iako princip determinizma vrijedi prema dokazu teorema o egzistenciji i jedinstvenosti, nije jasno može li se interpretacija ovog principa primijeniti za fizikalne sustave. Problem je što rješenje diferencijalne jednadžbe može biti jako komplicirano. Primjerice, buduće stanje može jako ovisiti o početnom stanju sustava. Prema tome, ako ne znamo u potpunosti točno početno stanje, konačno stanje može biti teško (ako ne i nemoguće) predvidjeti.

Varijable koje ćemo navesti kao eksplicitne argumente za rješenje ϕ diferencijalne jednadžbe ovise o kontekstu kao što je gore navedeno. Pisat ćemo t $\mapsto \phi(t, x)$ kao oznaku za jednadžbe takve da je $\phi(0, x) = x$. Slično, kada želimo odrediti vektor parametara, koristit ćemo t $\mapsto \phi(t, x, \lambda)$ kao oznaku za jednadžbu takvu da je $\phi(0, x, \lambda) = x$.

Primjer 1.6. *Rješenje diferencijalne jednadžbe* $\dot{x} = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, *je dano elementarnom funkcijom*

$$\phi(t, x) = \frac{x}{1 - xt}.$$

U ovom primjeru, $J = \mathbb{R}$ *i* $U = \mathbb{R}$. *Imajmo na umu da je* $\phi(0, x) = x$. *Ako je* $x > 0$, *onda odgovarajuće rješenje postoji samo na intervalu* $J_0 = (-\infty, x^{-1})$. *Isto tako imamo da* $|\phi(t, x)| \to \infty$ *kada* $t \to x^{-1}$. *To ilustrira jednu od mogućnosti spomenutih u teoremu o proširenju, proširenje u konačnom vremenu.*

1.2 Vrste diferencijalnih jednadžbi

Diferencijalne jednadžbe mogu biti podijeljene na nekoliko različitih načina. U ovom odjeljku napominjemo da nezavisna varijabla može biti zadana implicitno ili eksplicitno i da se mogu pojaviti derivacije višeg reda.

Definicija 1.7. *Autonomna* diferencijalna jednadžba dana je sa

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^k; \tag{3}$$

gdje funkcija f eksplicitno ne ovisi o nezavisnoj varijabli.
Ako funkcija f eksplicitno ovisi o t, onda se odgovarajuća diferencijalna jednadžba naziva *neautonomna*.

Kod primjene u fizici, često susrećemo jednadžbe koje sadrže drugi, treći ili viši red derivacija nezavisnih varijabli. Nazivamo ih diferencijalne jednadžbe drugog reda, diferencijalne jednadžbe trećeg reda i tako dalje, gdje red jednadžbe upućuje na najviši red derivacije nezavisne varijable koja se eksplicitno pojavljuje u jednadžbi.

Prisjetimo se da Drugi Newtonov zakon - ubrzanje tijela određene mase proporcionalno je ukupnoj sili koja na njega djeluje - uključuje drugu derivaciju pozicije (puta) tijela po vremenu. Prema tome, u mnogim slučajevima promjene u fizici najčešće upotrebljavani matematički modeli uključuju diferencijalne jednadžbe drugog reda.

Primjer 1.8. *Prirodna fizička derivacija van der Pol-ove jednadžbe dovodi do diferencijalne jednadžbe drugog reda koja je dana sa*

$$\ddot{u} + b(u^2 - 1)\dot{u} + \omega^2 u = a \cos \Omega t. \tag{4}$$

Bitna činjenica je da je svaka diferencijalna jednadžba ekvivalentna sustavu prvog reda. Za ilustraciju, promotrimo zamjenu van der Pol-ove jednadžbe sa *sustavom prvog reda. U tu svrhu jednostavno definirajmo novu varijablu $v := \dot{u}$, tako dobivamo sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega^2 u + b(1-u^2)v + a\cos\Omega t. \end{aligned} \tag{5}$$

Jasno, ovaj sustav je ekvivalentan jednadžbi drugog reda u smislu da svako rješenje sustava određuje rješenje van der Pol-ove jednadžbe drugog reda i svako rješenje van der Pol-ove jednadžbe određuje rješenje sustava prvog reda.

Uzmimo u obzir da postoji puno mogućnosti za konstrukciju ekvivalentnog sustava prvog reda - mi nismo morali definirati $v := \dot{u}$. Na primjer, ako definiramo $v := a\dot{u}$ gdje je a konstanta različita od nule i ponavljamo postupak kojim smo dobili sustav (5), dobit ćemo familiju ekvivalentnih sustava prvog reda. Naravno, diferencijalna jednadžba m-tog reda može se zamijeniti ekvivalentnim sustavom prvog reda definiranjem $m-1$ novih varijabli na očit način.

Ako je naša diferencijalna jednadžba neautonomna diferencijalna jednadžba oblika $\dot{x} = f(t,x)$, gdje smo zanemarili mogućnost ovisnosti o parametrima, onda postoji "ekvivalentan" autonomni sustav koji se dobije definiranjem nove varijable kako slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(\tau, x), \\ \dot{\tau} &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Na primjer, ako je $t \mapsto (\phi(t), \tau(t))$ rješenje ovog sustava pri čemu je $\phi(t_0) = x_0$ i $\tau(t_0) = t_0$, onda je $\tau(t) = t$ i

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \qquad \phi(t_0) = x_0.$$

Prema tome, funkcija $t \mapsto \phi(t)$ je rješenje početnog problema

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Posebno, svako rješenje neautonomne diferencijalne jednadžbe može se dobiti iz rješenja autonomnog sustava (6).

Upravo smo vidjeli da diferencijalne jednadžbe bilo kojeg reda odgovaraju autonomnim sustavima prvog reda. Kao posljedicu toga, posebno ćemo obratiti pažnju na svojstva autonomnih sustava. Zamjena diferencijalne jednadžbe višeg reda sustavom prvog reda je najčešće korisna, ali ne uvijek. Posebno, ako je neautonomni sustav dan sa $\dot{x} = f(t,x)$ gdje je f periodična funkcija po t, onda je zamjena s autonomnim sustavom jako često najbolji način analize sustava.

1.3 Geometrijska interpretacija nezavisnih sustava

U ovom odjeljku opisat ćemo vrlo bitnu geometrijsku interpretaciju nezavisne diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Funkcija dana sa $x \to (x, f(x))$ definira vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ određeno diferencijalnom jednadžbom (7). Ovdje prva komponenta funkcije određuje točku u $\mathbb{R}^n$, a druga komponenta funkcije određuje vektor u toj točki. Rješenje $t \mapsto \phi(t)$ jednadžbe (7) ima svojstvo da je njegov tangencijalni vektor u svakom trenutku t dan s

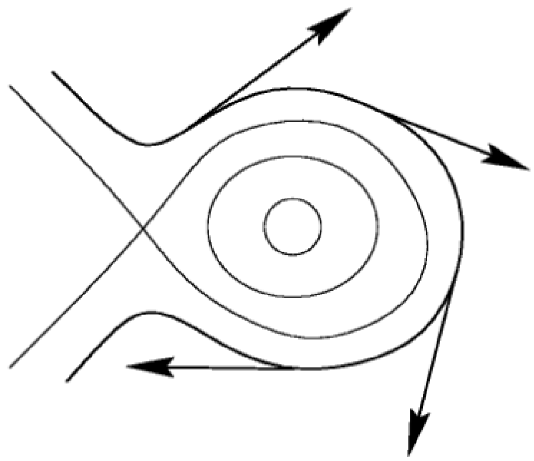
$$(\phi(t), \dot{\phi}(t)) = (\phi(t), f(\phi(t))).$$

Drugim riječima, ako je $\xi \in \mathbb{R}^n$ na putanji ovog rješenja, onda je tangenta na putanju u ξ generirana vektorom $(\xi, f(\xi))$ kako prikazuje Slika 1.

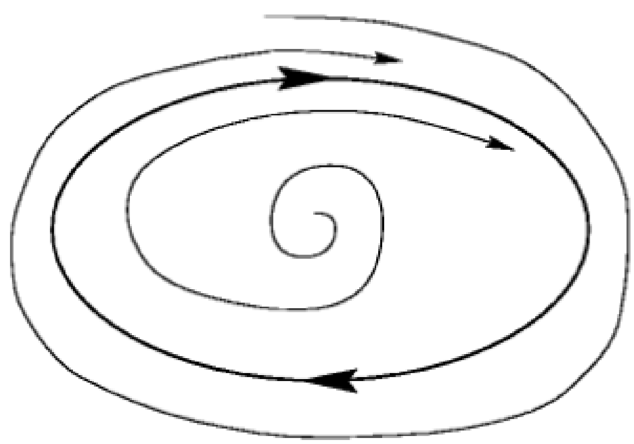
Upravo smo spomenuli dvije bitne činjenice:
i) Postoji bijekcija između vektorskog polja i nezavisne diferencijalne jednadžbe.
ii) Svaki tangencijalni vektor na krivulju rješenja je dan s vektorom u vektorskom polju.
Te činjenice ukazuju da je geometrija vektorskih polja usko povezana s geometrijom rješenja diferencijalne jednadžbe kada rješenja promatramo kao krivulje u Euklidskom prostoru. Ova geometrijska interpretacija rješenja autonomnih diferencijalnih jednadžbi pruža dubok uvid u opću prirodu rješenja diferencijalnih jednadžbi i u isto vrijeme navodi na "geometrijsku metodu" proučavanja diferencijalnih jednadžbi. Kvalitativne značajke najbolje je prikazati geometrijski. Analitičke formule rješenja imaju sekundarno značenje. Konačno, uzmimo u obzir da je vektorsko polje povezano s diferencijalnom jednadžbom eskplicitno dano. Prema tome, jedan od glavnih ciljeva geometrijske metode je dobivanje kvalitativnih svojstava rješenja direktno iz vektorskog polja bez "rješavanja" diferencijalne jednadžbe.

Primjer 1.9. *Promotrimo mogućnost da krivulja rješenja počinje u $x_0 \in \mathbb{R}^n$ u vremenu $t = 0$ i vraća se u točku x_0 u $t = \tau > 0$. Jasno, tangencijalni vektor na krivulju rješenja u točki $\phi(0) = x_0$ jednak je tangencijalnom vektoru u $\phi(\tau)$. Geometrija nas navodi da točke na krivulji rješenja definirane za $t > \tau$ precrtamo na originalnu putanju. Prema tome, moguće je da je putanja za autonomnu diferencijalnu jednadžbu zatvorena krivulja (kako prikazuje Slika 2). S druge strane, putanja ne može presjeći samu sebe. Kad bi postojao presjek na putanji, postojala bi dva različita tangencijalna vektora istog vektorskog polja u točki presjeka.*

Vektorsko polje odgovara neautonomnoj diferencijalnoj jednadžbi u ovisnosti o vremenu. Posebno, ako se krivulja rješenja "vraća" u svoju početnu točku, smjer određen vektorskim poljem u toj točki uglavnom ovisi o vremenu dolaska. Prema tome, krivulja će uglavnom "napustiti" početnu točku u smjeru različitom od prvotnog smjera. Na primjer, pretpostavimo da je $t \mapsto \phi(t)$ krivulja u $\mathbb{R}^2$ koja ima poprečan presjek i promotrimo sljedeći sustav diferencijalnih



Slika 1: Tangencijalno vektorsko polje i pripadna krivulja



Slika 2: Zatvorena trajektorija autonomne diferencijalne jednadžbe

jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = g'(t), \quad \frac{dy}{dt} = h'(t). \tag{8}$$

Upravo smo definirali diferencijalnu jednadžbu s danom krivuljom kao rješenje. Prema tome, svaka glatka krivulja je rješenje diferencijalne jednadžbe, ali nije svaka krivulja rješenje autonomne diferencijalne jednadžbe.

Krivulje rješenja neautonomnih diferencijalnih jednadžbi mogu presjeći same sebe. Ta mogućnost proizlazi iz toga što eksplicitna varijabla vremena nije promatrana na istoj osnovi sa zavisnim varijablama. Doista, ako promatramo odgovarajući autonomni sustav modeliran dodavanjem vremena kao nove varijable, onda u proširenom prostoru stanja (domeni stanja i varijabli vremena), putanje ne mogu presjeći same sebe. Na primjer, prostor stanja autonomnog sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{x} = g'(\tau), \quad \dot{y} = h'(\tau), \quad \dot{\tau} = 1,$$

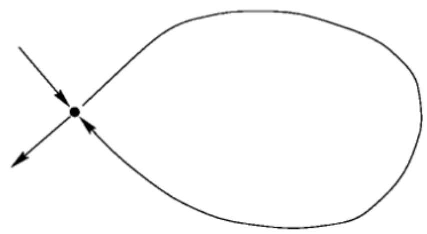
koji odgovara neautonomnoj diferencijalnoj jednadžbi (8) je $\mathbb{R}^3$. Putanje sustava u proširenom prostoru stanja ne mogu se presjecati - odgovarajuće vektorsko polje u $\mathbb{R}^3$ je autonomno. Ako autonomna diferencijalna jednadžba (7) ima zatvorenu putanju i $t \mapsto \phi(t)$ je rješenje s početnim vrijednostima na krivulji, onda je jasno da postoji neki $T > O$ takav da $\phi(T) = \phi(0)$. Zapravo, u idućem odjeljku pokazat ćemo da vrijedi: rješenje je periodično s periodom T; to znači da je $\phi(t+T) = \phi(T)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$. Iz tog razloga zatvorene putanje autonomnih sustava nazivamo *periodične putanje*.

Drugi bitan specijalni tip putanje naziva se *točka mirovanja*. Pri definiranju ovog pojma imajmo na umu da ako je $f(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}^n$, onda je konstantna funkcija $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definirana sa $\phi(t) \equiv x_0$ rješenje diferencijalne jednadžbe (7). Geometrijski, odgovarajuća putanja se sastoji od točno jedne točke. Prema tome, ako je $f(x_0) = 0$, onda je x_0 točka mirovanja. Takvo rješenje naziva se i stacionarno stanje, kritična točka, ravnotežna točka ili nula (povezanog vektorskog polja).

Koje sve vrste putanja za autonomne diferencijalne jednadžbe postoje? Odgovor ovisi o tome što podrazumijevamo pod "vrstu". Mi ćemo dati polovičan odgovor: putanja može biti točka, jednostavna zatvorena krivulja ili homeomorfna slika intervala.

Definicija 1.10. Geometrijski prikaz (slika) svih putanja autonomne diferencijalne jednadžbe naziva se njenim *faznim portretom* ili *faznim dijagramom*.

Ta terminologija dolazi od pojma *fazni prostor* koji se koristi u fizici, prostor pozicije i momenta. Napomenimo, *prostor stanja* u fizici je prostor pozicija i brzina. Ali, u ovom kontekstu pojmovi prostor stanja i fazni prostor su sinonimi, odnose se na domenu vektorskog polja koje definira autonomnu diferencijalnu jednadžbu. U svakom slučaju, temeljni problem geometrijske teorije diferencijalnih jednadžbi evidentno je: za danu diferencijalnu jednadžbu odrediti njen fazni dijagram.



Slika 3: Krivulja u faznom prostoru koja se sastoji od četiri putanje autonomne diferencijalne jednadžbe

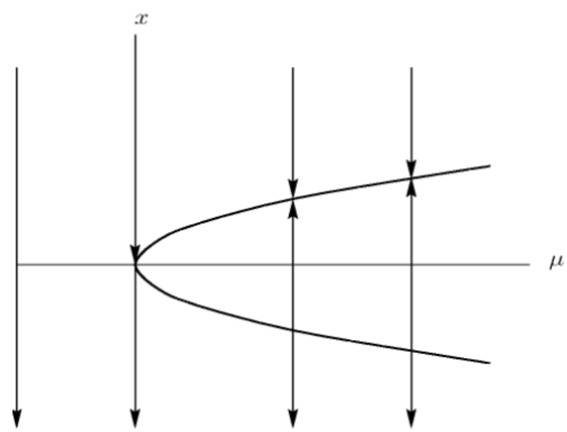
Slika 4: Fazni dijagram za $\dot{x} = \mu - x^2$ kada je $\mu = 0$

U prethodnom odlomku smo spomenuli samo tri vrste putanja pa bi se moglo činiti da fazni dijagrami ne mogu biti prekomplicirani. Ali, vidjet ćemo, dijagram jedne putanja može biti jako kompleksan. Uistinu, homeomorfna slika intervala može biti jako kompliciran podskup u Euklidskom prostoru. Kao jednostavan, ali bitan primjer faznog dijagrama s kompleksnim geometrijskim svojstvom uzmimo krivulju koja presjeca samu sebe kako prikazuje Slika 1. Takva krivulja ne može biti putanja nezavisne diferencijalne jednadžbe. S druge strane, ako je točka presjeka na opisanoj krivulji točka mirovanja diferencijalne jednadžbe, onda takva krivulja može postojati u faznom dijagramu kao unija četiri putanje kako prikazuje Slika 3.

Definicija 1.11. U slučaju kada naš sustav ovisi o parametrima, kolekciju faznih dijagrama koji odgovaraju svakom izboru vektora parametara nazivamo *račvasti dijagram.*

Kao jednostavan, ali bitan primjer promotrimo diferencijalnu jednadžbu $\dot{x} = \mu - x^2$, $x \in R^n$, koja ovisi o parametru $\mu \in \mathbb{R}$. Ako je $\mu = 0$, onda je fazni dijagram, na faznoj liniji, kao što prikazuje Slika 4. Ako stavimo zajedno sve "prereze" faznih dijagrama u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gdje prerez odgovara fiksnoj vrijednosti μ, dobivamo račvasti dijagram (Slika 5).

Primijetimo, ako je $\mu < 0$, onda nema točke mirovanja. Kako se μ udaljava od nule, nastaje račvanje "sedlo-čvor"; to jest, pojavljuju se dvije točke



Slika 5: Račvasti dijagram za $\dot{x} = \mu - x^2$

mirovanja. Ako je $\mu < 0$, slika nam također daje podatak o svakom rješenju kada $t \to \infty$. Nije bitno koji početni uvjet izaberemo, rješenje ide prema $-\infty$ u konačnom pozitivnom vremenu. Kada je $\mu = 0$ imamo stabilno stanje. Ako je $x_0 > 0$, onda rješenje $t \mapsto \phi(t, x_0)$ uz početni uvjet $\phi(0, x_0) = x_0$ aproksimira to stabilno stanje; to jest, $\phi(t, x_0) \to 0$ kada $t \to \infty$. Ako je $x_0 < 0$, onda $\phi(t, x_0) \to 0$ kada $t \to -\infty$. U ovom slučaju, kažemo da je x_0 *semistabilna* točka mirovanja. Ali ako je $\mu > 0$ i $x_0 > 0$, onda rješenje $\phi(t, x_0) \to \sqrt{\mu}$ kada $t \to \infty$. Prema tome, $x_0 = \sqrt{\mu}$ je *slabilna* postojana točka. Točka $x_0 = -\sqrt{\mu}$ je *nestabilna* postojana točka.

1.4 Tokovi

Skup rješenja autonomne diferencijalne jednadžbe (7)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ima jedno važno svojstvo: oni formiraju jednoparametarsku grupu koja definira fazni tok. Još preciznije, definiraju funkciju $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kako slijedi: Za $x \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \phi(t, x)$ označava rješenje autonomne diferencijalne jednadžbe (7) tako da je $\phi(0, x) = x$.

Mi znamo da rješenja diferencijalne jednadžbe ne moraju postojati za svaki $t \in \mathbb{R}$. Ali zbog jednostavnosti pretpostavimo da rješenje postoji u svakom trenutku. U tom slučaju, rješenje nazivamo *kompletno* i grupno svojstvo za ϕ je sažeto kako slijedi:

$$\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)).$$

U pogledu ove jednadžbe, ako rješenje počinje u trenutku nula u točki x i nastavlja se sve do vremena s kada doseže točku $\phi(s, x)$ i ako se novo rješenje u toj točki s početnim vremenom nula nastavlja sve do vremena t, onda će to novo rješenje dosegnuti istu točku koja bi bila postignuta da se prvotno rješenje koje počinje u trenutku nula u točki x nastavilo sve do vremena $t + s$.

Prototipni primjer toka je dan s općim rješenjem obične diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = ax$, $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$. Rješenje je dano sa $\phi(t, x_0) = e^{at}x_0$ i ono zadovoljava grupu svojstava

$$\phi(t + s, x_0) = e^{a(t+s)}x_0 = e^{at}(e^{as}x_0) = \phi(t, e^{as}x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0)).$$

Općenito, pretpostavimo da je za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ $t \mapsto \phi(t, x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe (7) takvo da je $\phi(0, x) = 0$. Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ i definirajmo

$$\psi(t) := \phi(t + s, x), \qquad \gamma(t) := \phi(t, \phi(s, x)).$$

Primijetimo da je $\phi(s, x)$ točka u $\mathbb{R}^n$. Dakle, γ je rješenje diferencijalne jednadžbe (7) pri čemu je $\gamma(0) = \phi(s, x)$. Funkcija ψ je također rješenje diferencijalne jednadžbe jer je

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\phi}{dt}(t + s, x) = f(\phi(t + s, x)) = f(\psi(t)).$$

Konačno, primijetimo da je $\psi(0) = \phi(s, x) = \gamma(0)$. Dokazali smo da su i $t \mapsto \psi(t)$ i $t \mapsto \gamma(t)$ rješenja istog početnog problema. Prema tome, po teoremu o jedinstvenosti, $\gamma(t) \equiv \psi(t)$. Ideja ovog dokaza - dvije funkcije koje zadovoljavaju isti početni problem su jednake - uvijek se koristi u teoriji i primjeni diferencijalnih jednadžbi.

Po teoremu o ovisnosti neprekidnosti, ϕ je glatka funkcija. Posebno, za svaki fiksni $t \in \mathbb{R}$, funkcija $x \mapsto \phi(t, x)$ je glatka transformacija na $\mathbb{R}^n$. Posebno, ako je $t = 0$, onda je $x \mapsto \phi(0, x)$ identiteta. Također, uzmimo u obzir da je

$$x = \phi(0, x) = \phi(t - t, x) = \phi(t, \phi(-t, x)) = \phi(-t, \phi(t, x)).$$

Drugim riječima, $x \mapsto \phi(-t, x)$ je inverz funkcije $x \mapsto \phi(t, x)$. Prema tome, u stvari, $x \mapsto \phi(t, x)$ je difeomorfizam za svaki fiksni $t \in \mathbb{R}$.

Općenito, pretpostavljamo da je $J \times U$ produkt otvorenog podskupa od $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.12. Funkcija $\phi : J \times U \to \mathbb{R}^n$ dana sa $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ naziva se *tok* ako $\phi(0, x) \equiv x$ i $\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$ kad god su obje strane jednadžbe definirane.

Naravno, ako $t \mapsto \phi(t, x)$ definira familiju rješenja autonomne diferencijalne jednadžbe (7) takvu da je $\phi(0, x) \equiv x$, onda je ϕ tok.

Pretpostavimo da je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$ i da je $\phi(T, x_0) = x_0$; tada se rješenje vraća u svoju početnu točku nakon vremena T. Onda je $\phi(t + T, x_0) = \phi(t, \phi(T, x_0)) = \phi(t, x_0)$. Drugim riječima, $t \mapsto \phi(t, x_0)$ je periodična funkcija

s periodom T. Najmanji $T > 0$ s tim svojstvom naziva se *period* periodične krivulje kroz x_0.
U matematičkoj literaturi, oznake $t \mapsto \phi_t(x)$ i $t \mapsto \phi^t(x)$ koriste se umjesto $t \to \phi(t,x)$ za rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

koje počinje u x u trenutku $t = 0$. Te notacije naglašavaju da je tok jednoparametarska familija transformacija. Uistinu, za svaki t, ϕ_t označava jedan otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ (njegovu domenu) na $\mathbb{R}^n$. Štoviše, ϕ_0 je transformacijska identiteta i $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$ kad god su obje strane jednadžbe definirane. Mi ćemo koristiti sve tri vrste notacija. Jedina moguća nedoumica nastaje kada se indeksi koriste za parcijalne derivacije, ali značenje notacije će uvijek biti jasno iz konteksta u kojem se koristi.

1.5 Reparametrizacija vremena

Pretpostavimo da je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija i $g : U \to \mathbb{R}$ pozitivna glatka funkcija. Pitanje je koja je veza između rješenja diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{x} = f(x) \tag{9}$$
$$\dot{x} = g(x)f(x). \tag{10}$$

Vektorska polja definirana s f i gf imaju isti smjer u svakoj točki skupa U, samo su im duljine različite. Prema tome, po našoj geometrijskoj interpretaciji za autonomne diferencijalne jednadžbe, intuitivno je jasno da diferencijalne jednadžbe (9) i (10) imaju isti fazni dijagram na U. Ta činjenica ja posljedica sljedeće propozicije.

Propozicija 1.13. *Ako je $J \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval koji sadrži ishodište (nulu) i $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ je rješenje diferencijalne jednadžbe (9) sa $\gamma(0) = x_0 \in U$, onda je funkcija $B : J \to \mathbb{R}$ dana sa*

$$B(t) = \int_0^t \frac{1}{g((s))} ds$$

invertibilna na svojoj slici $K \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $\rho : K \to J$ inverz od B, onda identitet

$$\rho'(t) = g(\gamma(\rho(t)))$$

vrijedi za sve $t \in K$ i funkcija $\sigma : K \to \mathbb{R}^n$ dana s $\sigma(t) = \gamma(\rho(t))$ je rješenje diferencijalne jednadžbe (10) s početnim uvjetom $\sigma(0) = x_0$.

Dokaz. Funkcija $s \mapsto \dfrac{1}{g(\gamma(s))}$ je neprekidna na J. B je definirana na J i njena derivacija je svugdje pozitivna. Prema tome B je invertibilna na svojoj domeni. Ako je ρ njen inverz, onda

$$\rho'(t) = \frac{1}{B'(\rho(t))} = g(\gamma(\rho(t)))$$

i

$$\sigma'(t) = \rho'(t)\gamma'(\rho(t)) = g(\gamma(\rho(t)))f(\gamma(\rho(t))) = g(\sigma(t))f(\sigma(t)). \quad \square$$

Funkcija ρ u Propoziciji 1.13. je inverz od B i zbog toga imamo formulu

$$t = \int_0^\rho \frac{1}{g(\gamma(s))} ds.$$

Prema tome, ako gledamo ρ kao novu varijablu vremena (to jest, varijablu koja raste s vremenom), onda imamo

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{g(\gamma(\rho))}$$

i stoga diferencijalna jednadžba (10), s promjenom nezavisne varijable iz t u ρ, je dana s

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\rho} = f(x).$$

Posebno, to je baš diferencijalna jednadžba (9) u supstituiranoj nezavisnoj varijabli.

Sljedeća propozicija izražava iste rezultate u terminologiji toka.

Propozicija 1.14. *Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pozitivna funkcija i ϕ je tok diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = f(x)$. Ako je familija rješenja familije početnih problema*

$$\dot{y} = g(\phi(y, \xi)), \qquad y(0) = 0,$$

s parametrom ξ, dana sa $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onda je ψ, definiran sa $\psi(t, \xi) = \phi(\rho(t, \xi), \xi)$, tok diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = g(x)f(x)$.

Dokaz. Prema definiciji $\psi(0, \xi) \equiv \xi$ i prema pravilu lanca

$$\frac{d}{dt}\phi(t, \xi) = g(\phi(t, \xi))f(\phi(t, \xi)). \quad \square$$

Kao prikladan izraz, kažemo da je diferencijalna jednadžba (9) dobivena iz diferencijalne jednadžbe (10) reparametrizacijom vremena.

U najbitnijim specijalnim slučajevima funkcija g je konstanta. Ako je njena konstantna vrijednost $c > 0$, onda reparametrizacija diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = cf(x)$ sa $\rho = ct$ rezultira s novom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dx}{d\rho} = f(x).$$

Reparametrizaciju u ovom slučaju zovemo *reskaliranje.*

Imajmo na umu da reskaliranje, prema prethodnom odlomku, diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = cf(x)$ pokazuje diferencijalnu jednadžbu u kojoj je eliminiran parametar c. Ova ideja se često koristi za pojednostavljenje diferencijalnih jednadžbi. Također, isto reskaliranje se koristi u primijenjenoj matematici da bi prikazali nezavisnu varijablu bezdimenzijski. Na primjer, ako se prvotna varijabla vremena t mjeri u sekundama, i faktor skale c ima jedinicu 1/sek, onda je nova varijabla ρ bezdimenzionalna.

Iduća propozicija je specijalan slučaj sljedeće tvrdnje: Svaka autonomna diferencijalna jednadžba ima potpunu reparametrizaciju.

Propozicija 1.15. *Ako je diferencijalna jednadžba $\dot{x} = f(x)$ definirana na $\mathbb{R}^n$, onda je diferencijalna jednadžba*

$$\dot{x} = \frac{1}{1 + |f(x)|^2} f(x) \tag{11}$$

definirana na $\mathbb{R}^n$ i njen tok je potpun.

Dokaz. Vektorsko polje diferencijalne jednadžbe (11) je glatko definirano na cijelom $\mathbb{R}^n$. Ako je σ jedno od rješenja s početnom vrijednosti $\sigma(0) = x_0$ i t je u domeni od σ, onda, prema integraciji po nezavisnoj varijabli, imamo da je

$$\sigma(t) - \sigma(0) = \int_0^t \frac{1}{1 + |f(\sigma(s))|^2} f(\sigma(s)) ds.$$

Primijetimo da izraz pod integralom ima apsolutnu vrijednost manju od jedan i koristeći nejednakost trokuta (uzmimo u obzir da t može biti negativan) dobivamo sljedeću procjenu

$$|\sigma(t)| \leq |x_0| + |t|.$$

Posebno, rješenje ne proširujemo u konačnom vremenu. Prema teoremu o proširivanju, rješenje je potpuno. $\square$

1.6 Stabilnost i linearizacija

Iako točke mirovanja i periodične putanje odgovaraju vrlo specifičnim rješenjima autonomne diferencijalne jednadžbe, one su često najbitnije putanje u primjeni. Posebno, uobičajena praksa inženjeringa je pokrenuti proces u "stacionarnom stanju". Ako proces ne stoji blizu stacionarnog stanja nakon malih smetnji, onda će se kontrolni inženjer morati suočiti s teškim problemom. Mi ne ćemo ovdje riješiti kontrolu problema, ali ćemo uvesti matematičku definiciju stabilnosti i klasične metode koje se mogu koristiti pri utvrđivanju stabilnosti točaka mirovanja i periodičnih putanja.

Pojam *Lyapunov-a stabilnost* podrazumijeva intuitivno shvaćanje stabilnosti - putanja je stabilna ako rješenja koja počinju u okolini, ostaju u okolini. Da bismo dali formalnu definiciju, promotrimo autonomnu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x} = f(x) \tag{12}$$

definiranu na otvorenom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ i njen tok ϕ_t.

Definicija 1.16. Točka mirovanja x_0 diferencijalne jednadžbe (12) je *stabilna (u Lyapunov-om smislu)* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|\phi_t(x) - x_0| < \varepsilon$ za svaki $t \geq 0$ kada je $|x - x_0| < \delta$. (Vidi Sliku 6.)

Nema razloga ograničiti definiciju stabilnosti na točke mirovanja. Ona se može odnositi na proizvoljna rješenja autonomne diferencijalne jednadžbe.

Definicija 1.17. Pretpostavimo da je x_0 u području definicije diferencijalne jednadžbe (12). Rješenje $t \mapsto \phi_t(x_0)$ diferencijalne jednadžbe je *stabilno (u Lyapunov-om smislu)* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takva da je $|\phi_t(x) - \phi_t(x_0)| < \varepsilon$ za svaki $t \geq 0$ kada je $|x - x_0| < \delta$.

Slika 7 prikazuje tipični fazni dijagram autonomnog sustava u ravnini blizu jedne vrste stabilne točke mirovanja zvane *ponor*. Stabilna točka mirovanja koju prikazuje Slika 8 naziva se *centar*.

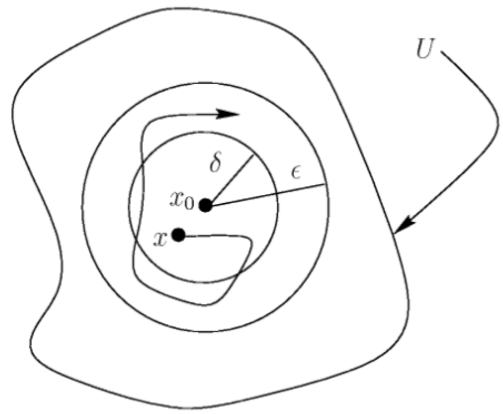
Definicija 1.18. Točka mirovanja nazivamo *centar* ako je sadržana u otvorenom skupu gdje je svaka putanja (osim točke mirovanja) periodična.

Definicija 1.19. Rješenje koje nije stabilno naziva se *nestabilno*.

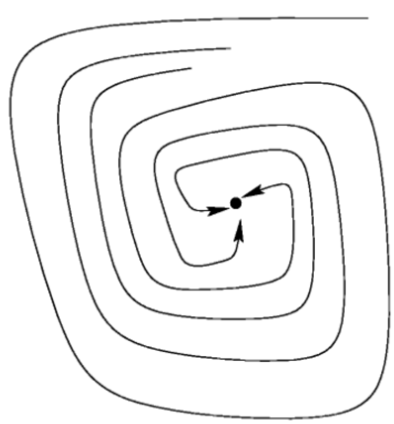
Tipični fazni dijagram za nestabilnu točku mirovanja *izvor* prikazuje Slika 9 (također vidi *sedlastu točku* koju prikazuje Slika 1).

Definicija 1.20. Kažemo da je rješenje $t \mapsto \phi_t(x_0)$ diferencijalne jednadžbe (12) *asimptotski stabilno* ako je stabilno i ako postoji konstanta $a > 0$ takva da je
$\lim_{t\to\infty} |\phi_t(x) - \phi_t(x_0)| = 0$ kada $|x - x_0| < a$.

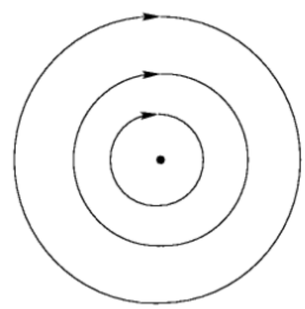
Upravo smo definirali pojam stabilnosti za rješenja u slučaju kada je određena početna točka specificirana. Pojam stabilnosti za putanje je nešto složeniji. Na primjer, imamo sljedeću definiciju stabilnosti za periodične putanje.



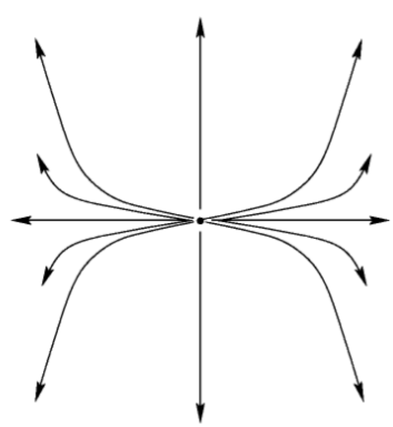
Slika 6: Otvoreni skupovi potrebni za definiciju Lyapunove stabilnosti. Trajektorija koja počinje u x može napustiti kuglu radijusa δ, ali mora ostati u kugli radijusa ε.



Slika 7: Fazni dijagram asimptotski stabilnog (spiralnog) ponora



Slika 8: Fazni dijagram harmonijskog oscilatora



Slika 9: Fazni dijagram nestabilne točke mirovanja

Definicija 1.21. Periodična putanja Γ diferencijalne jednadžbe (12) se naziva *stabilna* ako za svaki otvoren skup $V \subseteq \mathbb{R}^n$ koji sadrži Γ postoji otvoren skup $W \subseteq V$ takav da svako rješenje koje počinje u točki iz W u $t = 0$ ostaje u V za svaki $t \geq 0$. Periodična putanja se naziva *asimptotski stabilna* ako, dodatno, postoji podskup $X \subseteq W$ takav da svako rješenje s početkom u X je asimptotsko za Γ kada $t \to \infty$.

Dane definicije obuhvaćaju bit pojma stabilnosti, ali ne daju nikakvu naznaku kako odrediti jesu li dano rješenje ili putanja stabilni. Proučit ćemo dvije opće metode, indirektnu i direktnu Lyapunov-u metodu, koje se koriste za određivanje stabilnosti točaka mirovanja i periodičnih putanja. Prema suvremenijoj tehnologiji, indirektna metoda se naziva metodom linearizacije, a direktna metoda Lyapunov-om metodom. Prije nego detaljnije raspravimo o spomenutim metodama, imajmo na umu da za slučaj stabilnosti posebnih vrsta putanja, na primjer točaka mirovanja i periodičnih putanja, postoje dva glavna problema:
i) Pronaći specijalna rješenja.
ii) Odrediti njihovu stabilnost.

Za ostatak ovog i za iduće poglavlje, diskusija će biti ograničena na analizu za točke mirovanja. Naše uvođenje metoda za pronalaženje i određivanje stabilnosti periodičnih putanja mora biti odgođeno dok ne uvedemo neke dodatne pojmove.

Uzmimo u obzir da je problem određivanja točaka mirovanja diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = f(x)$ zapravo problem pronalaženja rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Naravno, pronalaženje rješenja jednadžbe može biti težak zadatak, posebno ako funkcija f ovisi o parametrima i mi želimo pronaći njen račvasti dijagram. Zapravo, u potrazi za točkama mirovanja, uvijek su potrebne vješte tehnike algebre, analize i numeričke analize. To nije iznenađujuće kada prestanemo misliti da je rješavanje jednadžbi jedno od fundamentalnih poglavlja u matematici. Na primjer, vjerojatno nije prestrogo reći da je najosnovniji problem u linearnoj algebri, apstraktnoj algebri i algebarskoj geometriji rješavanje sustava polinomijalnih jednadžbi. Rezultati svih tih područja ponekad su potrebni za rješavanje problema u diferencijalnim jednadžbama.

Pretpostavimo da imamo neku točku $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takvu da je $f(x_0) = 0$. Što možemo reći o stabilnosti odgovarajuće točke mirovanja? Jedna od istaknutih ideja u području diferencijalnih jednadžbi - da ne spominjemo ostala područja matematike - je linearizacija. Ova ideja, u možda svom najsuštijem obliku, koristi se za dobivanje glavne metode za određivanje stabilnosti u točki mirovanja. Metoda linearizacije bazirana je na dvije činjenice:
i) Analiza stabilnosti za linearan sustav je "jednostavna".
ii) Nelinearni sustavi mogu se aproksimirati pomoću linearnih sustava. Ove činjenice su samo odrazi fundamentalne ideje diferencijalnog računa: Nelinearna funkcija je u suštini linearna ako uzmemo u obzir njeno ponašanje na dovoljno maloj okolini točke njene domene. Uistinu, često je dovoljno aproksimirati graf funkcije njenom tangentom.

Za opisivanje metode linearizacije za točke mirovanja, promotrimo (homogene) linearne sustave diferencijalnih jednadžbi; to jest, sustave oblika $\dot{x} = Ax$

gdje je $x \in \mathbb{R}^n$ i A je linearna transformacija u $\mathbb{R}^n$. Ako matrica A ne ovisi o t - tako da je linearni sustav autonoman - onda postoji efikasna metoda koju možemo koristiti za određivanje stabilnosti njegove točke mirovanja u $x = 0$. Zapravo, može se pokazati da ako sve svojstvene vrijednosti od A imaju negativan realni dio, onda je $x = 0$ asimptotski stabilna točka mirovanja za linearni sustav.

Ako je x_0 točka mirovanja za nelinearan sustav $\dot{x} = f(x)$, onda postoji prirodan način dobivanja linearnog sustava koji aproksimira nelinearan sustav u okolini x_0: Jednostavno zamijenimo funkciju f u diferencijalnoj jednadžbi s linearnom funkcijom $x \mapsto Df(x_0)(x - x_0)$ danom s prvim članom Taylorovog reda za f oko točke x_0 različitim od nule. Linearna diferencijalna jednadžba

$$\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0) \tag{13}$$

naziva se *linearizirani sustav povezan s* $\dot{x} = f(x)$ *u* x_0. Primjenom zamjene varijabli $\omega := x - x_0$, linearizirani sustav dobiva uobičajeni oblik $\dot{\omega}$=Df(x_0)ω.

Alternativno, možemo promatrati familiju rješenja $t \mapsto \phi(t, \varepsilon)$ za $\dot{x} = f(x)$ s parametrom ε takvim da je $\phi(t, 0) = x_0$. Drugim riječima, familija rješenja sadrži konstantno rješenje koje odgovara točki mirovanja za vrijednost parametra $\varepsilon = 0$. Prema Taylorovom teoremu (s obzirom na ε u $\varepsilon = 0$),

$$\phi(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon\eta(t, 0) + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon)$$

za neku funkciju R. Stoga, familija aproksimacija rješenja prvog reda iz familije ϕ je dana sa

$$\phi(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon\eta(t, 0).$$

Za određivanje funkcije $t \mapsto \eta(t, 0)$ koristimo diferencijalnu jednadžbu i Taylorov teorem (s obzirom na ε u $\varepsilon = 0$) i dobivamo

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\eta}(t, \varepsilon) &= \phi(t, \varepsilon) \\ &= f(\phi(t, \varepsilon)) \\ &= f(x_0 + \varepsilon\eta(t, \varepsilon)) \\ &= \varepsilon Df(x_0)\eta(t, 0) + \varepsilon^2 \mathcal{R}(t, \varepsilon) \end{aligned}$$

gdje je $\varepsilon^2 \mathcal{R}(t, \varepsilon)$ ostatak Taylorovog proširenja $\varepsilon \mapsto f(x_0 + \varepsilon\eta(t, \varepsilon))$. Nakon dijeljenja s ε, dobivamo jednadžbu

$$\dot{\eta}(t, \varepsilon) = Df(x_0)\eta(t, \varepsilon) + \varepsilon R(t, \varepsilon)$$

i uzimanjem limesa kada $\varepsilon \to 0$, slijedi da je

$$\dot{\eta}(t, 0) = Df(x_0)\eta(t, 0).$$

Naravno, početni uvjet za ovu jednadžbu je određen izborom familije ϕ; zapravo,

$$\eta(0, 0) = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(0, \varepsilon)\mid_{\varepsilon=0} .$$

Prema tome, linearizirana diferencijalna jednadžba u x_0 (to jest, $\dot{\omega} = Df(x_0)\omega$) je ista za svaku familiju ϕ i svaki vektor v u $\mathbb{R}^n$ je početni vektor ($\omega(0) = v$) za neku takvu familiju.

Napomena 1.22. *"Princip linearizirane stabilnosti" kaže da ako linearizacija diferencijalne jednadžbe u postojećem stanju ima odgovarajuće stabilno postojeće stanje, onda je prvotno postojeće stanje stabilno. Prema notaciji ovog odjeljka, ovaj princip znači da ako je $\omega(t) = 0$ stabilno postojeće stanje za $\dot{\omega} = Df(x_0)\omega$, onda je x_0 stabilno postojeće stanje za $\dot{x} = f(x)$. Načelo linearizacije stabilnosti nije teorem, ali je motivacija za nekoliko važnih rezultata u teoriji stabilnosti diferencijalnih jednadžbi.*

Pretpostavimo da je x_0 stacionarna točka diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = f(x)$. Zamjenom varijabli $u = x - x_0$ tu diferencijalnu jednadžbu transformiramo u ekvivalentnu diferencijalnu jednadžbu $\dot{u} = f(u + x_0)$ gdje je točka mirovanja točka odgovarajuća početnoj točki x_0. Za $g(u) := f(u + x_0)$ imamo $\dot{u} = g(u)$ i $g(0) = 0$. Prema tome, trebalo bi biti jasno da nema gubitka općenitosti ako pretpostavimo da je točka mirovanja u ishodištu. U ovom slučaju, linearizirana jednadžba je $\dot{\omega} = Dg(0)\omega$.

Ako je f glatka u $x = 0$ i $f(0) = 0$, onda je

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + R(x) = Df(0)x + R(x)$$

gdje je $Df(0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna transformacija dana s derivacijom od f u $x = 0$ i, za ostatak R, postoji konstanta $k > 0$ i otvorena okolina U oko ishodišta takva da je

$$|R(x)| \leq k|x|^2$$

za $x \in U$. Zato što je stabilnost točke mirovanja lokalno svojstvo (to jest, svojstvo određeno s vrijednošću restrikcije funkcije f na proizvoljan otvoren podskup koji sadrži tokču mirovanja) i s obzirom na procjenu veličine ostatka, razumno je očekivati da će stabilnost točke mirovanja u ishodištu linearnog sustava $\dot{x} = Df(0)x$ biti jednaka stabilnosti početne točke mirovanja. Ovo očekivanje se ne ostvari uvijek, ali zato imamo fundamentalni teorem o stabilnost koji slijedi.

Teorem 1.23. *Ako je x_0 točka mirovanja za diferencijalnu jednadžbu $\dot{x} = f(x)$ i ako sve svojstvene vrijednosti linearne transformacije $Df(x_0)$ imaju negativne realne dijelove, onda je x_0 asimptotski stabilna.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [1,Teorem 2.78]

Zaključujemo da ako je x_0 točka mirovanja i $Df(x_0)$ ima najmanje jednu svojstvenu vrijednost s pozitivnim realnim dijelom, onda x_0 nije stabilna. Ako neke svojstvene vrijednosti od $Df(x_0)$ leže na imaginarnoj osi, onda može biti jako teško odrediti stabilnost točke mirovanja. Također, možemo očekivati da će doći do kvalitativne promjene u faznom dijagramu sustava u blizini takvih točaka mirovanja kada su parametri sustava varijabilni.

Definicija 1.24. Ako je x_0 točka mirovanja za diferencijalnu jednadžbu (12) i ako su sve svojstvene vrijednosti linearne transformacije $Df(x_0)$ izvan imaginarne osi, onda kažemo da je x_0 *hiperbolna točka mirovanja.* Inače x_0 zovemo *nehiperbolna točka mirovanja.*

Definicija 1.25. Ako je x_0 hiperbolna i sve svojstvene vrijednosti imaju negativne realne dijelove, onda točku mirovanja zovemo *hiperbolni ponor*. Ako sve svojstvene vrijednosti imaju pozitivne realne dijelove, onda se točka mirovanja naziva *hiperbolni izvor*.
Hiperbolna točka mirovanja koja nije ni izvor ni utonuće naziva se *hiperbolno sedlo*.

Definicija 1.26. Ako je točka mirovanja nehiperbolna sa svim svojim svojstvenim vrijednostima na probušenoj imaginarnoj osi (to jest, na imaginarnoj osi bez ishodišta), onda se točka mirovanja naziva *linearni centar*.
Ako nula nije svojstvena vrijednost, onda se odgovarajuća točka mirovanja naziva *nedegenerirana*.

Definicija 1.27. Ako svaka svojstvena vrijednost linearne transformacije A ima realni dio različit od nule, onda se A naziva *infinitezimalno hiperbolna*. Ako nijedna svojstvena vrijednost od A nema modul jednak jedan, onda kažemo da je A *hiperbolna*.

Ova terminologija može biti zbunjujuća: Na primjer, ako je A infinitezimalno hiperbolna, onda je točka mirovanja s porijeklom iz linearnog sustava $\dot{x} = Ax$ hiperbolna. Razlog takve terminologije je lakše razmatranje skalarnih linearnih diferencijalnih jednadžbi $\dot{x} = ax$ s tokom danim sa $\phi_t(x) = e^{at}x$. Ako je $a \neq 0$, onda je linearna transformacija $x \to ax$ infinitezimalno hiperbolna i točka mirovanja je hiperbolnog podrijetla. Dodatno, ako je $a \neq 0$ i $t \neq 0$, onda je linearna transformacija $x \to e^{ta}x$ hiperbolna. Nadalje, linearna transformacija $x \to ax$ je dobivena diferencijacijom u odnosu na t u $t = 0$ familije linearnih transformacija $x \mapsto e^{ta}x$. Prema tome, zapravo, diferencijacija - beskrajno mala operacija na familiji hiperbolnih transformcija - proizvodi beskrajno hiperbolnu transformaciju.

Veza između dinamike nelinearnog sustava i njegove linearizacije u točki mirovanja je dublja nego veza između vrsta stabilnosti odgovarajućih točaka mirovanja. Idući teorem, pod nazivom Hartman - Grobmanov teorem, važan je rezultat koji opisuje taj odnos u slučaju da je točka mirovanja hiperbolna.

Teorem 1.28. ***(Hartman - Grobmanov teorem)*** *Ako je x_0 hiperbolna točka mirovanja za autonomnu diferencijalnu jednadžbu (12), onda postoji otvoren skup U koji sadrži x_0 i homeomorfizam H s domenom U takav da su putanje diferencijalne jednadžbe (12) mapirane s H u putanje lineariziranog sustava $\dot{x} = Df(x_0)(x - x_0)$ u skupu U.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [1,Teorem 4.6]

Drugim riječima, linearizirani sustav ima isti fazni dijagram kao originalni sustav na dovoljno maloj okolini hiperbolne točke mirovanja. Štoviše, homeomorfizam H iz teorema može biti izabran za očuvanje ne samo putanja kao točaka skupova.

1.7 Stabilnost i direktna Lyapunov-a metoda

Promotrimo točku mirovanja x_0 za autonomnu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Definicija 1.29. Neprekidna funkcija $V : U \to \mathbb{R}$, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $x_0 \in U$, naziva se *Lyapunov-a funkcija* za diferencijalnu jednadžbu (14) u x_0 ako
(i) $V(x_0) = 0$,
(ii) $V(x) > 0$ za $x \in U \backslash \{x_0\}$,
(iii) funkcija f je neprekidno diferencijabilna na skupu $U \backslash \{x_0\}$ i, na tom skupu, $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$.
Funkcija V se naziva *strogo(striktno) Lyapunov-a funkcija* ako je, dodatno,
(iv) $\dot{V}(x) < 0$ za $x \in U \backslash \{x_0\}$.

Ideja Lyapunov-e metode je jako jednostavna. U mnogim slučajevima su nivo skupovi od V sfere koje okružuju točku mirovanja x_0 kao što prikazuje Slika 10. Pretpostavimo da je to slučaj i neka ϕ_t označava tok diferencijalne jednadžbe (14). Ako je y iz nivo skupa $S_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$ funkcije V, onda po lančanom pravilu imamo da je

$$\frac{d}{dt} V(\phi_t(y)) \mid_{t=0} = \nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0. \tag{15}$$

Vektor ∇V je vanjska normala od S_c u y. Prema tome, V ne raste na krivulji $t \mapsto \phi_t(y)$ u $t = 0$ i, kao rezultat, slika te krivulje ili leži u nivo skupu S_c ili je skup $\{\phi_t(y) : t > 0\}$ podskup skupa u $\mathbb{R}^n$ s vanjskom granicom S_c. Isti rezultat vrijedi za svaku točku skupa S_c. Dakle, rješenje s početkom na S_c je zarobljeno; ili ostaje u S_c ili boravi u skupu $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < c\}$ za svaki $t > 0$. Zato što isto svojstvo ima na svim nivo skupovima "unutar" S_c, točka mirovanja je asimptotski stabilna.

Definicija 1.30. Rješenje koje nije stabilno naziva se *nestabilno*.

Ako su nivo skupovi naše Lyapunov-e funkcije kao što prikazuje Slika 10, onda rasprava samo daje dokaz stabilnosti točke mirovanja. Ali nivo skupovi Lyapunov-e funkcije mogu ne imati ovu jednostavnu konfiguraciju. Na primjer, neki nivo skupovi mogu ne biti omeđeni.

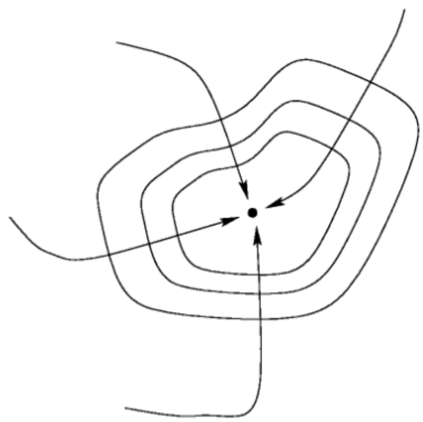
Dokaz Teorema o Lyapunov-oj stabilnosti zahtijeva više delikatnih analiza. Koristimo sljedeću notaciju. Za $d > 0$ i $\zeta \in \mathbb{R}^n$, definiramo

$$S_\alpha(\zeta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \zeta| = d\},$$

$$B_\alpha(\zeta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \zeta| < d\},$$

$$\bar{B}_\alpha(\zeta) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \zeta| \leq d\}.$$

Sada smo spremni za teorem o Lyapunov-oj stabilnosti.



Slika 10: Nivo skupovi Lyapunove funkcije

Teorem 1.31. ***(Teorem o Lyapunov-oj stabilnosti)*** *Ako postoji Lyapunov-a funkcija definirana na otvorenoj okolini točke mirovanja diferencijalne jednadžbe (14), onda je točka mirovanja stabilna. Ako je, dodatno, Lyapunov-a funkcija strogo Lyapunov-a funkcija, onda je točka mirovanja asimptotski stabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je dan $\varepsilon > 0$ i imajmo na umu da je u pogledu Lyapunov-e stabilnosti dovoljna pretpostavka da je $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ neprekidan na domeni U Lyapunov-e funkcije V. $S_\varepsilon(x_0)$ je kompaktan skup koji ne sadrži x_0 pa postoji broj $m > 0$ takav da je $V(x) \geq m$ za svaki $x \in S_\varepsilon(x_0)$. Također, postoji $\delta > 0$ i $\delta < \varepsilon$ takva da je $V(x) \leq m/2$ za x iz kompaktnog skupa $\bar{B}_\delta(x_0)$. Ako ne, onda za svaki $k \geq 2$ postoji točka x_k iz $\bar{B}_{\varepsilon/k}(x_0)$ takva da je $V(x_k) > m/2$. Niz $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$ konvergira prema x_0. Koristeći neprekidnost Lyapunov-e funkcije V u x_0, imamo $\lim_{k\to\infty} V(x_k) = V(x_0) = 0$ u kontradikciji.

Neka ϕ_t označava tok za (14). Ako $x \in B_\delta(x_0)$, onda

$$\frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) = \nabla V(\phi_t(x)) \cdot f(\phi_t(x)) \leq 0.$$

Prema tome, funkcija $t \mapsto V(\phi_t(x))$ nije rastuća. Pošto je $V(\phi_0(x)) \leq M < m$, moramo imati $V(\phi_t(x)) < m$ za svaki $t \geq 0$ za koji je rješenje $t \mapsto \phi_t(x)$ definirano. Ali, za te vrijednosti t, također moramo imati $\phi_t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$. Ako ne, postoji neki $T > 0$ takav da je $|\phi_t(x) - x_0| \geq \varepsilon$. Kako je $t \mapsto |\phi_t(x) - x_0|$ neprekidna funkcija, onda mora postojati τ, $0 < \tau \leq T$, takav da je $|\phi_t(x) - x_0| = \varepsilon$. Za taj τ imamo $V(\phi_\tau(x)) \geq m$ u kontradikciji. Prema tome, $\phi_t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$ za svaki $t \geq 0$ za koje rješenje postoji. Po teoremu o egzistenciji, ako rješenje ne postoji za svaki $t \geq 0$, onda $|\phi_t(x)| \to \infty$ kada $t \to \infty$ ili $\phi_t(x)$ aproksimira granicu domene na kojoj je definirana f. Ako se nijedna od tih mogućnosti ne dogodi, rješenje postoji za svako pozitivno vrijeme s njegovom odgovarajućom slikom u skupu $B_\varepsilon(x_0)$. Prema tome, x_0 je stabilna.

Ako je, dodatno, funkcija strogo Lyapunov-a, pokazat ćemo da je tada x_0 asimptotski stabilna.

Neka je $x \in B_\delta(x_0)$. Po kompaktnosti $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ ili je $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = x_0$ ili postoji niz $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ realnih brojeva $0 < t_1 < t_2...$ pri čemu $t_k \to \infty$ tako da niz $\{\phi_{t_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergira u neku točku $x_* \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ pri čemu je $x_* \neq x_0$. Ako x_0 nije asimptotski stabilna, onda takav niz postoji za najmanje jednu točku $x \in B_\delta(x_0)$.

Koristeći neprekidnost od V, slijedi da je $\lim_{k\to\infty} V(\phi_{t_k}(x)) = V(x_*)$. Također, V se smanjuje na putanjama. Prema tome, za svaki prirodni broj k, imamo da je $V(\phi_{t_k}(x)) > V(x_*)$. Ali, zato što je funkcija $t \mapsto V(\phi_t(x_*))$ strogo padajuća, imamo

$$\lim_{k\to\infty} V(\phi_{1+t_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} V(\phi_1(\phi_{t_k}(x))) = V(\phi_1(x_*)) < V(x_*).$$

Prema tome, postoji neki prirodan broj l takav da je $V(\phi_{1+t_l}(x)) < V(x_*)$. Jasno, postoji također cijeli broj $j > l$ takav da je $t_j > 1 + t_l$. Za taj cijeli broj imamo nejednakosti $V(\phi_{t_j}(x)) < V(\phi_{1+t_l}(x)) < V(x_*)$ u kontradikciji. □

Idući rezultat može se koristiti za dokazivanje nestabilnosti u točki mirovanja.

Teorem 1.32. *Pretpostavimo da je V glatka funkcija definirana na otvorenoj okolini U točke mirovanja x_0 autonomnog sustava $\dot{x} = f(x)$ takva da je $V(x_0) = 0$ i $\dot{V}(x) > 0$ na $U\backslash\{x_0\}$. Ako V ima pozitivnu vrijednost negdje u svakom otvorenom skupu koji sadrži x_0, onda x_0 nije stabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 stabilna i neka ϕ_t označava tok diferencijalne jednadžbe. Odaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset U$ i da je $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ također u domeni od f. Postoji pozitivan δ takav da je $\delta < \varepsilon$ i $\phi_t(x)$ je u $B_\varepsilon(x_0)$ kad god je $x \in B_\delta(x_0)$ i $t \geq 0$. Također, zbog neprekidnosti od V, postoji neki $\alpha > 0$ takav da je $V(x) \leq \alpha$ kad je $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$.

Po hipotezi, postoji neki $x \in B_\delta(x_0)$ takav da je $V(x) > 0$. Također, po hipotezi, $\beta := \inf_{t\geq 0} \dot{V}(\phi_t(x)) \geq 0$. Pretpostavimo da je $\beta = 0$. U tom slučaju, postoji niz $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ takav da je $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$ i $\lim_{j\to\infty} \dot{V}(\phi_{t_j}(x)) = 0$. Iz stabilnosti i kompaktnosti $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$, $\{\phi_{t_j}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da niz konvergira u neki $x_* \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. Po neprekidnosti $\dot{V}$, imamo $\lim_{j\to\infty} \dot{V}(\phi_{t_j}(x)) = \dot{V}(x_*) = 0$. Pošto $\dot{V}$ ne iščezava na $U\backslash\{x_0\}$, slijedi da je $x_* = x_0$. Pošto je V neprekidna, $\lim_{j\to\infty} V(\phi_{t_j}(x)) = V(x_0) = 0$. Ali, $V(\phi_{t_j}(x)) > V(x) > 0$ je u kontradikciji. Dakle, $\beta > 0$.

Imajmo na umu

$$V(\phi_t(x)) = V(x) + \int_0^t \dot{V}(\phi_s(x))ds \geq V(x) + \beta t$$

za svaki $t \geq$. Ako je t dovoljno velik, onda je $V(\phi_t(x)) > \alpha$ u kontradikciji sa stabilnošću x_0. □

2 Linearna i nelinearna stabilnost

U ovom poglavlju proučavat ćemo diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x} = A(t)x + f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

gdje je A glatka $n \times n$ matrica i f je glatka funkcija takva da je $f(0,t) = f_x(0,t) \equiv 0$. Primijetimo da ako f ima taj oblik, onda je povezani *homogeni linearni sustav* $\dot{x} = A(t)x$ linearizacija diferencijalne jednadžbe duž *trivijalnog rješenja* $t \mapsto \phi(t) \equiv 0$.

Jedan od glavnih ciljeva ovog poglavlja je dokaz temeljnih rezultata povezanih s principom linerizirane stabilnosti. Na primjer, dokazat ćemo da ako je matrica A konstantna i sve njene svojstvene vrijednosti imaju negativan realni dio, onda je trivijalno rješenje asimptotski stabilno.

2.1 Stabilnost linearnih sustava

Linearna homogena diferencijalna jednadžba ima točku mirovanja u ishodištu. Koristit ćemo naše rezultate o rješenjima homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima za proučavanje stabilnosti te točke mirovanja. Sljedeći teorem je fundamentalan, ali prije navedimo još neke tvrdnje koje su nam nužne za dokaz teorema.

Korolar 2.1. *Ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realni dio, onda je trivijalno rješenje za $\dot{x} = Ax$ asimptotski stabilno.*

Dokaz ovog korolara može se naći u [2,Teorem 9.1]

Propozicija 2.2. *Neka je A realna $n \times n$ matrica i promotirmo diferencijalnu jednadžbu*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

(1) Funkcija dana sa $t \mapsto e^{\lambda t}v$ je realno rješenje ako i samo ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ i $Av = \lambda v$.

(2) Ako je $v \neq 0$ svojstveni vektor od A odgovarajuć svojstvenoj vrijednosti $\lambda = \alpha + i\beta$ pri čemu je $\beta \neq 0$, onda imaginarni dio od v nije 0. U ovom slučaju, ako je $v = u + iw \in \mathbb{C}^n$, onda postoje dva realna rješenja

$$t \to e^{\alpha t}[(\cos \beta t)u - (\sin \beta t)w],$$

$$t \to e^{\alpha t}[(\sin \beta t)u + (\cos \beta t)w].$$

Štoviše, ta rješenja su linearno nezavisna.

Dokaz. Ako je $Av = \lambda v$, onda je

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av = Ae^{\lambda t}v.$$

Posebno, funkcija $t \to e^{\lambda t}v$ je rješenje.

Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ i $\beta \neq 0$, onda, jer je A realna, v mora biti oblika $v = u + iw$ za neke $u, w \in \mathbb{R}^n$ gdje je $w \neq 0$. Realni i imaginarni dijelovi odgovarajućeg rješenja

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}v &= e^{(\alpha+i\beta)t}(u + iw) \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(u + iw) \\ &= e^{\alpha t}[(\cos \beta t)u - (\sin \beta t)w + i((\sin \beta t)u + (\cos \beta t)w)] \end{aligned}$$

su realna rješenja sustava (16). Da bismo pokazali da su ta realna rješenja linearno nezavisna, pretpostavimo da je neka njihova linearna kombinacija s koeficijentima c_1 i c_2 jednaka 0. Procjena za $t = 0$ i $t = \pi/(2\beta)$ zadovoljava jednadžbe

$$c_1u + c_2w = 0, \qquad c_2u - c_1w = 0.$$

Kada eliminiramo u dobivamo $(c_1^2 + c_2^2)w = 0$. Kako je $w \neq 0$, oba koeficijenta moraju biti 0. To dokazuje (2).

Konačno, završimo dokaz (1). Pretpostavimo da je $\lambda = \alpha + i\beta$ i $v = u + iw$. Ako je $e^{\lambda t}v$ realan broj, onda je $\beta = 0$ i $w = 0$. Tako zaključujemo da su λ i v realni. S druge strane, ako su λ i v realni, onda je $e^{\lambda t}v$ realno rješenje. U tom slučaju je

$$\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$$

i imamo da je $\lambda v = Av$. □

Propozicija 2.3. *Ako je A $n \times n$ matrica, onda je e^{tA} matrica čije su komponente (konačne) sume izraza oblika*

$$p(t)e^{\alpha t}\sin \beta t \quad i \quad p(t)e^{\alpha t}\cos \beta t$$

gdje su α i β realni brojevi takvi da je $\alpha + i\beta$ svojstvena vrijednost od A i $p(t)$ je polinom stupnja najviše $n - 1$.

Dokaz ove propozicije može se naći u [4, Poglavlje 4].
Sada smo spremni za teorem.

Teorem 2.4. *Pretpostavimo da je A (realna) $n \times n$ matrica. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) Imamo a-normu $| \ |_a$ na $\mathbb{R}^n$ i realni broj $\lambda > 0$ takav da za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ i svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$|e^{ta}v|_a \leq e^{-\lambda t}|v|_a.$$

(2) Ako je $| \ |_g$ proizvoljna norma na $\mathbb{R}^n$, onda imamo konstantu $C > 0$ i realni broj $\lambda > 0$ takve da za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ i svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$|e^{ta}v|_g \leq Ce^{-\lambda t}|v|_g.$$

(3) Svaka svojstvena vrijednost matrice A ima negativan realni dio.

Štoviše, ako $-\lambda$ prekorači najveći realni dio od svih svojstvenih vrijednosti od A, onda se λ može uzeti za konstantu u (1) ili (2).

Dokaz. Pokazat ćemo da (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1)

Pokažimo (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je $| \ |_a$ norma iz (1) i $| \ |_g$ norma iz (2). Ove norme su definirane na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ pa su stoga ekvivalentne; to jest, postoje konstante $K_1 > 0$ i $K_2 > 0$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$K_1|x|_g \leq |x|_a \leq K_2|x|_g.$$

Otuda imamo, ako je $t \geq 0$ i $v \in \mathbb{R}^n$, onda je

$$|e^{tA}v|_g \leq \frac{1}{K_1}|e^{tA}v|_a \leq \frac{1}{K_1}e^{-\lambda t}|v|_a \leq \frac{K_2}{K_1}e^{-\lambda t}|v|_g.$$

Pokažimo (2) $\Rightarrow$ (3). Pretpostavimo da (2) vrijedi, a (3) ne vrijedi. Posebno, A ima svojstvenu vrijednost $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = \alpha + i\beta$ gdje je $\alpha \leq 0$. Štoviše, postoji barem jedan svojstveni vektor $v \neq 0$ odgovarajuć toj svojstvenoj vrijednosti. Prema Propoziciji 2.2, sustav $\dot{x} = Ax$ ima rješenje $t \mapsto \gamma(t)$ oblika $t \to e^{at}((\cos \beta t)u - (\sin \beta t)w)$ gdje je je $v = u + iw$, $u \in \mathbb{R}^n$ i $w \in \mathbb{R}^n$. Sada imamo, $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) \neq 0$. Ali ako vrijedi (2), onda je $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Dakle, imamo kontradikciju, to jest (2) $\Rightarrow$ (3).

Za kraj dokaza pokazat ćemo (3) $\Rightarrow$ (1). Pretpostavimo da (3) vrijedi. Budući da A ima konačan skup svojstvenih vrijednosti i svaka svojstvena vrijednost ima negativan realni dio, postoji broj $\lambda > 0$ takav da je realni dio svake svojstvene vrijednosti od A manji od $-\lambda$.

Po Propoziciji 2.3, komponente od e^{tA} su konačne sume izraza oblika

$$p(t)e^{\alpha t}\sin \beta t \quad \textit{ili} \quad p(t)e^{\alpha t}\cos \beta t$$

gdje je α realni dio svojstvene vrijednosti od A i $p(t)$ je polinom najviše stupnja $n - 1$. Posebno, ako je matrica e^{tA}, podijeljena po stupcima, dana sa $[c_1(t), ..., c_n(t)]$, onda je svaka komponenta svakog vektora $c_i(t)$ suma tih izraza.

Označimo uobičajenu normu vektora $v = (v_,..., v_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ sa $|v|$. Također, $|v_i|$ je apsolutna vrijednost realnog broja v_i ili (možemo reći) norma vektora $v_i \in \mathbb{R}$. S tim oznakama imamo

$$|e^{tA}v| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i(t)||v_i|.$$

Zbog

$$|v_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \right)^{1/2} = |v|,$$

slijedi da je

$$|e^{tA}v| \leq |v| \sum_{i=1}^{n} |c_i(t)|.$$

Ako su $\beta_1, ..., \beta_l$ imaginarni dijelovi svojstvenih vrijednosti matrice A različiti od nule i ako α označava najveći realni dio svojstvene vrijednosti matrice A, onda koristeći strukturu komponenti vektora $c_i(t)$ slijedi da je

$$|c_i(t)|^2 \leq e^{2\alpha t} \sum_{k=0}^{2n-2} |d_{ki}(t)||t|^k$$

gdje je svaki koeficijent $d_{ki}(t)$ kvadratna forma od

$$\sin \beta_1 t, ..., \sin \beta_l t, \cos \beta_1 t, ..., \cos \beta_l t.$$

Postoji konstanta $M > 0$ koja ne ovisi o i niti o k takva da supremum od $|d_{ki}(t)|$ za $t \in \mathbb{R}$ ne prekorači M^2. Posebno, za svaki $i = 1, ..., n$ imamo

$$|c_i(t)|^2 \leq e^{2\alpha t} M^2 \sum_{k=0}^{2n-2} |t|^k,$$

i kao rezultat imamo

$$|e^{tA}v| \leq |v| \sum_{i=0}^{n} |c_i(t)| \leq e^{\alpha t} nM|v| \left(\sum_{k=0}^{2n-2} |t|^k \right)^{1/2}.$$

Zbog $\alpha < -\lambda < 0$, postoji $\tau > 0$ takav da za $t \geq \tau$ imamo nejednakost

$$e^{\lambda + \alpha t} nM \left(\sum_{k=0}^{2n-2} |t|^k \right)^{1/2} \leq 1$$

ili ekvivalentno

$$e^{\alpha t} nM \left(\sum_{k=0}^{2n-2} |t|^k \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda t}.$$

Posebno, ako je $t \geq \tau$, onda za svaki $v \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$|e^{tA}v| \leq e^{-\lambda t}|v|. \tag{17}$$

Na kraju dokaza, konstruirat ćemo novu normu za koju ista nejednakost vrijedi za svaki $t \geq 0$. Zapravo, dokazat ćemo da je

$$|v|_a := \int_0^\tau e^{\lambda s}|e^{sA}v|ds$$

tražena norma.

Za dobivanje procjene norme, imajmo na umu da za svaki $t \geq 0$ postoji nenegativan cijeli broj m i broj T takav da je $0 \leq T < \tau$ i $t = m\tau + T$. Koristeći dekompoziciju od t, dobivamo

$$\begin{aligned}
|e^{tA}v|_a &= \int_0^\tau e^{\lambda s}|e^{sA}e^{tA}v|ds \\
&= \int_0^{\tau-T} e^{\lambda s}|e^{(s+t)A}v|ds + \int_{\tau-T}^{\tau} e^{\lambda s}|e^{(s+t)A}v|ds \\
&= \int_0^{\tau-T} e^{\lambda s}|e^{m\tau A}e^{(s+T)A}v|ds + \int_{\tau-T}^{\tau} e^{\lambda s}|e^{(m+1)\tau A}e^{(T-\tau+s)A}v|ds.
\end{aligned}$$

Neka je $u = T+s$ u prvom integralu, $u = T-\tau+s$ u drugom integralu. Koristeći nejednakost (17) i, za $m = 0$, koristeći nejednakost $|e^{m\tau A}e^{uA}v| \leq e^{-\lambda m\tau}|v|$, dobivamo procjene

$$\begin{aligned}
|e^{tA}v|_a &= \int_T^\tau e^{\lambda(u-T)}|e^{(m\tau+u)A}v|du + \int_0^T e^{\lambda(u+\tau-T)}|e^{((m+1)\tau+u)A}v|du \\
&\leq \int_T^\tau e^{\lambda(u-T)}e^{-\lambda(m\tau)}|e^{uA}v|du + \int_0^T e^{\lambda(u+\tau-T)}e^{-\lambda(m+1)\tau}|e^{uA}v|du \\
&\leq \int_0^\tau e^{\lambda u}e^{-\lambda(m\tau+T)}|e^{uA}v|du \\
&= e^{-\lambda t}\int_0^\tau e^{\lambda u}|e^{uA}v|du \\
&\leq e^{-\lambda t}|v|_a
\end{aligned}$$

koje su nam potrebne. □

Prisjetimo se da je matrica *infitezimalno hiperbolna* ako svaka njena svojstvena vrijednost ima realni dio različit od nule. Sljedeći korolar je temeljni rezultat o dinamici hiperbolnih linearnih sustava.

Korolar 2.5. *Ako je A $n \times n$ (realna) infinitezimalna hiperbolna matrica, onda postoje dva A-invarijantna podprostora E^s i E^u od $\mathbb{R}^n$ takva da je $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Štoviše, ako je $|\ \ |_g$ norma na R^n, onda postoje konstante $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $C > 0$ i $K > 0$ takve da za svaki $v \in E^s$ i svaki $t \geq 0$ vrijedi*

$$|e^{ta}v|_g \leq Ce^{-\lambda t}|v|_g,$$

i za svaki $v \in E^u$ i svaki $t \leq 0$ vrijedi

$$|e^{ta}v|_g \leq Ke^{\mu t}|v|_g.$$

Također, postoji norma na $\mathbb{R}^n$ takva da gornje nejednakosti vrijede za $C = K = 1$ i $\lambda = \mu$.

Dokaz. Uzmimo u obzir da ako je A infinitezimalno hiperbolna, onda možemo urediti Jordanovu formu J od A tako da dobijemo blok matricu

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$$

pri čemu sve svojstvene vrijednosti od A_s imaju negativan realni dio, a sve svojstvene vrijednosti od A_u imaju pozitivan realni dio. Prema tome, postoji očito J-invarijantna podjela vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ na stabilan i nestabilan prostor. Vraćanjem na prvotne koordinate slijedi da postoji A-invarijantna podjela. Hiperbolna procjena na stabilnom prostoru slijedi iz Teorema 2.4 primjenom restrikcije od A na stabilni podprostor; procjena na nestabilnom prostoru slijedi prema Teoremu 2.4 primjenom rstrikcije od A na nestabilni podprostor. Konačno, prilagođena norma na čitavom prostoru je dana sa

$$|(v_s, v_u)|_a^2 = |v_s|_a^2 + |v_u|_a^2.$$

□

Temeljni rezultat ovog poglavlja - ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realni dio, onda je trivijalno rješenje odgovarajućeg homogenog sustava asimptotski stabilno - specijalan je slučaj principa linearizirane stabilnosti. Taj rezultat pruža metodu za određivanje stabilnosti trivijalnog rješenja koje ne zahtijeva poznavanje ostalih rješenja sustava. Ista ideja se primjenjuje u puno općenitijim kontekstima. Ali, za većinu generalizacija su potrebne dodatne pretpostavke.

2.2 Stabilnost nelinearnih sustava

Prema Teoremu 2.4 trivijalno rješenje homogenog linearnog sustava s konstantnim koeficijentima asimptotski je stabilno ako spektar matrice koeficijenata leži na lijevoj polovici kompleksne ravnine. Princip linearizirane stabilnosti kaže da neki rezultati vrijede za stabilna rješenja nelinearnih jednadžbi pod pretpostavkom da matrica lineariziranog sustava duž stabilnog rješenja ima spektar u lijevoj polovici ravnine. Taj princip nije teorem. Međutim, u ovom poglavlju ćemo formulirati i dokazati teorem o lineariziranoj stabilnosti koji je dovoljno jak za većinu primjena. Posebno, dokazat ćemo da je točka mirovanja autonomne diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = f(x)$ u $\mathbb{R}^n$ asimptotski stabilna ako sve svojstvene vrijednosti Jakobijeve matrice u točki mirovanja imaju negativan realni dio. Naš rezultat o stabilnosti vrijedi i za neke nehomogene neautonomne diferencijalne jednadžbe oblika

$$\dot{x} = At(x) + g(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{18}$$

gdje je $g : \mathbb{R}^n \times R \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija.

Osnovni alat korišten u našoj analizi stabilnosti je formula zvana *formula varijacije parametara* dana u idućoj propoziciji.

Propozicija 2.6. ***(Formula varijacije parametara)*** *Promotrimo početni problem*

$$\dot{x} = At(x) + g(x,t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{19}$$

i neka je $t \mapsto \Phi(t)$ fundamentalna matrica rješenja za homogeni sustav $\dot{x} = At(x)$ koji je definiran na nekom intervalu J_0 koji sadrži t_0. Ako je $t \mapsto \phi(t)$ rješenje početnog problema definiranog na nekom podintervalu od J_0, onda je

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(\phi(s),s)ds. \tag{20}$$

Dokaz. Definirajmo novu funkciju z sa $z(t) = \Phi^{-1}(t)\phi(t)$. Imamo

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\Phi(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t).$$

Prema tome,

$$A(t)\phi(t) + g(\phi((t),t) = A(t)\phi(t) + \Phi(t)\dot{z}(t)$$

i

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)g(\phi(t),t).$$

Također, imajmo na umu da je $z(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0$.

Po integraciji je

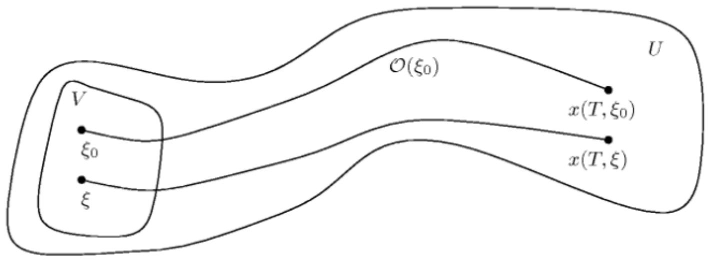
$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(\phi(s),s)ds,$$

ili, drugačije zapisano,

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(\phi(s),s)ds. \quad \square$$

Uzmimo u obzir da u posebnom slučaju kada je funkcija g u diferencijalnoj jednadžbi (19) konstantna s obzirom na njenu prvu varijablu, formula varijacije parametara rješava početni problem jedino kada je temeljna matrica rješenja pridruženog sustava određena.

Sljedeća propozicija iskazuje važnost neprekidnosti rezultata za rješenja neautonomnih sustava poštivajući početne uvjete. Za dokaz toga, koristit ćemo sljedeću lemu.



Slika 11: Lokalna stabilnost

Lema 2.7. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ glatka funkcija. Ako su $K \subseteq \mathbb{R}^n$ i $A \subset \mathbb{R}$ kompaktni skupovi, onda postoji broj $L > 0$ takav da je*

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$$

za svaki $(x,t),(y,t) \in K \times A$.

Dokaz. Dokaz leme koristi kompaktnost, neprekidnost i teorem srednje vrijednosti. □

Prisjetimo se da se funkcija f definirana kao u lemi naziva Lipschitz-ova u odnosu na njenu prvu varijablu na $K \times A$ s Lipschitz-ovom konstantom L.

Propozicija 2.8. *Neka je, za svaki $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \phi(t,\xi)$ rješenje diferencijalne jednadžbe $\dot{x} = f(x,t)$ takvo da je $\phi(0,\xi) = \xi$. Ako je $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ takav da je rješenje $t \mapsto \phi(t,\xi_0)$ definirano za $0 \leq t \leq T$ i ako je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup koji sadrži segment putanje $(\xi_0) = \{\phi(t,\xi_0) : 0 \leq t \leq T\}$,onda postoji otvoren skup $V \subseteq U$, (kao što prikazuje Slika 11), takav da je $\xi_0 \in V$ i $\{\phi(t,\xi) : \xi \in V, 0 \leq t \leq T\} \subseteq U$; to jest, rješenje počinje na svakom $\xi \in V$ koji se nalazi na intervalu $[0,T]$ i njegova vrijednost na tom intervalu se nalazi u U.*

Dokaz. Neka je $\xi \in \mathbb{R}^n$ i neka su dva rješenja diferencijalne jednadžbe dana sa $t \mapsto \phi(t,\xi_0)$ i $t \mapsto \phi(t,\xi)$. Za t iz presjeka intervala na kojima postoje ova rješenja, imamo da je

$$\phi(t,\xi) - \phi(t,\xi_0) = \xi - \xi_0 + \int_0^t (f(\phi(s,\xi),s) - f(\phi(s,\xi_0),s))ds$$

i

$$|\phi(t,\xi) - \phi(t,\xi_0)| \leq |\xi - \xi_0| + \int_0^t |f(\phi(s,\xi),s) - f(\phi(s,\xi_0),s)|ds.$$

Možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti da je U omeđen, stoga je zbog zatvorenosti i kompaktan. Iz leme slijedi da je glatka funkcija f Lipschitz-ova na $U \times [0,T]$ s Lipschitz-ovom konstantom $L > 0$. Prema tome, dokle god je $(\phi(t,\xi),t) \in U \times [0,T]$, imamo

$$|\phi(t,\xi) - \phi(t,\xi_0)| \leq |\xi - \xi_0| + \int_0^t L|\phi(s,\xi) - \phi(s,\xi_0)|ds$$

i prema Gronwall-ovoj nejednakosti

$$|\phi(t,\xi) - \phi(t,\xi_0)| \leq |\xi - \xi_0| e^{Lt}.$$

Neka je $\delta > 0$ takva da je δe^{LT} manje od udaljenosti $\Psi(\xi_0)$ i granice od U. Kako na presjeku J domene definicije rješenja $t \mapsto \phi(t,\xi)$ sa $[0,T]$ imamo

$$|\phi(t,\xi) - \phi(t,\xi_0)| \leq |\xi - \xi_0| e^{LT},$$

vektor $\phi(t,\xi)$ je na omeđenom skupu U sve dok je $t \in J$ i $|\xi - \xi_0| < \delta$. Prema teoremu o proširenju rješenja, rješenje $t \mapsto \phi(t,\xi)$ je definirano barem na intervalu $[0,T]$. Prema tome, željeni skup V je $\{\xi \in U : |\xi - \xi_0| < \delta\}$. □

Sada smo spremni za formuliranje teorijskog temelja za Lyapunov-u indirektnu metodu, to jest metodu linearizacije. Ideja je sljedeća: Ako sustav ima točku mirovanja u ishodištu, linearizacija sustava ima asimptotski stabilnu točku mirovanja u ishodištu i nelinearni dio je odgovarajuće omeđen, onda nelinearan sustav također ima asimptotski stabilnu točku mirovanja u ishodištu.

Teorem 2.9. *Neka je dan početni problem (19) za slučaj kada je $A := A(t)$ (realna) matrica konstanti. Ako sve svojstvene vrijednosti od A imaju negativan realni dio i postoje pozitivne konstante $a > 0$ i $k > 0$ takve da je $|g(x,t)| \leq k|x|^2$ kada je $|x| < a$, onda postoje pozitivne konstante C, b i α koje ovise o izboru početnog vremena t_0 tako da rješenje $t \mapsto \phi(t)$ početnog problema zadovoljava*

$$|\phi(t)| \leq C|x_0| e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{21}$$

za $t \geq t_0$ kada je $|x_0| \leq b$. Posebno, funkcija $t \mapsto \phi(t)$ je definirana za svaki $t \geq t_0$ i trivijalno rješenje (rješenje s početnom vrijednošću $\phi(t_0) = 0$) je asimptotski stabilno.

Dokaz. Prema Teoremu 2.4 i hipotezi o svojstvenim vrijednostima matrice A, postoje konstante $C > 1$ i $\lambda > 0$ takve da je

$$||e^{tA}|| \leq Ce^{-\lambda t} \tag{22}$$

za $t \geq 0$. Za fiksni $\delta > 0$ takav da je $\delta < \alpha$ i $Ck\delta - \lambda < 0$, definiramo $\alpha := \lambda - Ck\delta$ i $b = \delta/C$ i imajmo na umu da je $\alpha > 0$ i $0 < b < \delta < \alpha$.

Ako je $|x_0| < b$, onda postoji maksimalan poluotvoreni interval $J = \{t \in \mathbb{R} : t_0 \leq t < \tau\}$ takav da rješenje $t \to \phi(t)$ diferencijalne jednažbe s početnim uvjetom $\phi(t_0) = x_0$ postoji i zadovoljava nejednakost

$$|\phi(t)| < \delta \tag{23}$$

na intervalu J.

Za $t \in J$ koristimo procjenu

$$|g(\phi(t),t)| \leq k\delta|\phi(t)|$$

za procjenu (22) i formulu varijacije parametara

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}g(\phi(s), s)ds$$

za dokazivanje nejednakosti

$$|\phi(t)| \leq Ce^{-\lambda(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^{t} Ce^{-\lambda(t-s)}k\delta|\phi(s)|ds.$$

Preuredimo nejednakost u oblik

$$e^{\lambda(t-t_0)}|\phi(t)| \leq C|x_0| + Ck\delta\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}|\phi(s)|ds$$

i primijenimo Gronwall-ovu nejednakost za dobivanje procjene

$$e^{\lambda(t-t_0)}|\phi(t)| \leq C|x_0|e^{Ck\delta(t-t_0)}$$

ili ekvivalentno

$$|\phi(t)| \leq C|x_0|e^{(Ck\delta-\lambda)(t-t_0)} \leq C|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{24}$$

Prema tome, ako je $|x_0| < b$ i $|\phi(t)| < \delta$ za $t \in J$, onda nejednakost (21) vrijedi za $t \in J$.

Ako J nije interval $[t_0, \infty)$, onda je $\tau < \infty$. Jer je $|x_0| < \delta/C$ i s obzirom na nejednakost (24), imamo da je

$$|\phi(t)| < \delta e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{25}$$

za $t_0 \leq t < \tau$. Posebno, rješenje je omeđeno s δ na interval $[t_0, \tau)$. Dakle, prema teoremu o proširenju postoji neki broj $\varepsilon > 0$ takav da je rješenje definirano na intervalu $K := [t_0, \tau+\varepsilon)$. Koristeći neprekidnost funkcije $t \mapsto |\phi(t)|$ na intervalu K i nejednakost (25), slijedi da je

$$|\phi(\tau)| \leq \delta e^{-\alpha(\tau-t_0)} < \delta.$$

Koristeći ovu nejednakost i ponovno koristeći neprekidnost funkcije $t \mapsto |\phi(t)|$ na intervalu K, dobivamo da postoji broj $\eta > 0$ takav da je $t \mapsto \phi(t)$ definirano na intervalu $[t_0, \tau + \eta)$ i na tom intervalu je $|\phi(t)| < \delta$. Ovo je u kontradikciji s maksimalnošću od τ. $\square$

3 Fermi - Pasta - Ulamov model

Ovdje ćemo razmotriti čuveni primjer za koji su zaslužni Enrico Fermi, Stanialaw Ulam i Johan R. Pasta, a koji se može promatrati kao serija kuglica povezanih oprugama s najbližim susjedima. Originalni model je dobiven kao diskretizacija parcijalne diferencijalne jednadžbe modela niza - jedan od načina na koji nastaju sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi u primijenjenoj matematici.

Promotrimo N identičnih masa (kuglica) pozicioniranih u liniju kao što prikazuje Slika 12 i pretpostavimo da je kretanje masa ograničeno samo na tu liniju. Štoviše, pretpostavimo da su mase povezane oprugama, ali su prva i zadnja masa pričvršćene za fiksne pozicije.

Definicija 3.1. Neka x_k označava pomak k-te mase od njenog ravnotežnog položaja. *Fermi-Pasta-Ulamov model* dan je sustavom jednadžbi

$$m\ddot{x}_k = F(x_{k+1} - x_k) - F(x_k - x_{k-1}), \qquad k = 1, ..., N-2$$

gdje je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja je klase $C^1(\mathbb{R})$ i ograničena odozdo.

Jedan od Fermi - Pasta - Ulamovih modela koristi zakon skalarne sile

$$F(z) = \alpha(z + \beta z^2); \qquad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0,$$

za modeliranje povratne sile nelinearne opruge. Ovaj izbor vodi do sljedećih jednadžbi gibanja:

$$m\ddot{x}_k = \alpha(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1})(1 + \beta(x_{k+1} - x_{k-1})), \quad k = 1, ..., N-2 \tag{26}$$

gdje smo također nametnuli rubne uvjete

$$x_0(t) \equiv 0, \qquad x_{N-1}(t) \equiv 0.$$

Ako uvrstimo $\beta = 0$ u jednadžbu (26), dobit ćemo linearizaciju sustava (26) u točki koja odgovara poziciji mirovanja masa.

Prvi cilj ovog poglavlja je utvrditi normalne modalitete i opće rješenje linearizacije jednadžbe te opis rješenja za male oscilacije.

Slika 12: Prikaz Fermi-Pasta-Ulamovog oscilatora

Neka je definiran vektor stanja x s komponentama $(x_1, ..., x_{N-2})$ i neka je sustav zapisan u matričnoj formi

$$\ddot{x} = c^2 Qx \tag{27}$$

gdje je $c^2 = \dfrac{\alpha}{m}$ i

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Kako je Q realna negativno definitna simetrična matrica, matrica ima bazu svojstvenih vektora odgovarajućih realnim negativnim svojstvenim vrijednostima. Ako je v svojstveni vektor odgovarajuć svojstvenoj vrijednosti λ, onda je $e^{c\sqrt{-\lambda}it}v$ rješenje matričnog sustava. Odgovarajući normalni modalitet je familija realnih rješenja oblika

$$x(t) = R\cos(c\sqrt{-\lambda}t + \rho)v$$

gdje R i ρ ovise o početnim uvjetima.

Ako je $v = (v_1, ..., v_{N-2})$ svojstveni vektor matrice Q koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, onda

$$v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1} = \lambda v_k, \qquad k = 1, ..., N-2.$$

Kako bi riješili ovu linearnu rekurziju, stavimo $v_k = a^k$ i primijetimo da a^k daje rješenje ako i samo ako je

$$a^2 - (2 + \lambda)a + 1 = 0. \tag{28}$$

Također, primijetimo da je umnožak rješenja ove jednadžbe jedinstven i jedno rješenje je dano sa

$$r = \frac{2 + \lambda + \sqrt{\lambda(4 + \lambda)}}{2}.$$

Prema tome, koristeći linearnost rekurzije, opće rješenje ima oblik

$$v_k = \mu r^k + \nu r^{-k}$$

gdje su μ i ν proizvoljni skalari. Štoviše, s obzirom na granične uvjete, $v_0 = 0$ i $v_{N-1} = 0$, moramo uzeti $\mu + \nu = 0$ i $r^{N-1} - \frac{1}{r^{N-1}} = 0$. Posebno, r mora zadovoljavati jednadžbu $r^{2(N-1)} = 1$. Prema tome, mogući izbori za r su rješenja jednakosti

$$r_l = e^{\frac{\pi i l}{(N-1)}}, \qquad l = 0, 1, ..., 2N - 3.$$

Pokazat ćemo da r_l za $l = 1, ..., N-2$ odgovaraju $N-2$ različitih svojstvenih vrijednosti $(N-2) \times (N-2)$ matrice Q kako slijedi: Svojstvena vrijednost

$$\lambda_l = -4\sin^2(\frac{\pi l}{2(N-1)})$$

odgovara r_l dobivenom rješavanjem jednadžbe (28) sa $a = r_l$; to jest, jednadžbe

$$e^{\frac{2\pi i l}{N-1}} - (2 + \lambda)e^{\frac{\pi i l}{N-1}} + 1 = 0.$$

Preostali izbori za r_l naravno ne mogu voditi novim svojstvenim vrijednostima. Ali ako gledamo direktno uzimajući u obzir raspon od l izražen u obliku

$$0, 1, ..., N-2, N-1, (N-1)+1, ..., (N-1)+N-2$$

da bi provjerili da je odgovarajući r_l dan s

$$1, r_1, ..., r_{N-2}, -1, -r_1, ..., -r_{N-2},$$

i odgovarajući λ_l su

$$0, \lambda_1, ..., \lambda_{N-2}, -4, -\lambda_{N-2}, ..., \lambda_1.$$

Ovdje izbori $r = 1$ i $r = -1$, koji odgovaraju $l = 0$ i $l = N-1$, daju $v_k \equiv 0$. Stoga, oni ne daju svojstvene vrijednosti.

Komponente svojstvenih vektora odgovarajućih svojstvenoj vrijednosti λ_l dane su sa

$$v_k = \mu\left(e^{\frac{\pi i l k}{N-1}} - e^{\frac{-\pi i l k}{N-1}}\right) = 2i\mu\sin\left(\frac{\pi l k}{N-1}\right)$$

gdje je μ skalar. Ako je $\mu = \frac{1}{2i}$, onda imamo, za svaki $l = 1, ..., N-2$, povezan svojstveni vektor v^l s komponentama

$$v_k^l = \sin\left(\frac{\pi l k}{N-1}\right).$$

Kako je Q simetrična, njeni su svojstveni vektori odgovarajući različitim svojstvenim vrijednostima ortogonalni s obzirom na uobičajeni unutarnji produkt. Štoviše, imamo

$$\langle \nu^l, \nu^l \rangle = \sum_{k=1}^{N-2} \sin^2\left(\frac{\pi l k}{N-1}\right) = \frac{N-1}{2}$$

gdje se posljednja jednakost može dokazati primjenom identiteta

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

a zatim sumiramo nastali geometrijski niz. Prema tome, vektori

$$\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} v^1, ..., \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} v^{N-2}$$

formiraju ortonormalnu bazu za $\mathbb{R}^{N-2}$.

Opće rješenje sustava (26) uz $\beta = 0$ dano je s vektorom rješenja $t \mapsto x(t)$ s komponentama

$$x_k(t) = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{N-2} (\gamma_l p_l(t) + \eta_l q_l(t)) \sin\left(\frac{\pi l k}{N-1}\right)$$

gdje je $c^2 = \dfrac{\alpha}{m}$,

$$p_l(t) = \cos\left(2ct\sin\left(\frac{pl}{2(N-1)}\right)\right), \qquad q_l(t) = \sin\left(2ct\sin\left(\frac{pl}{2(N-1)}\right)\right),$$

i γ_l, η_l su realne konstante. U vektorskom obliku, ovo rješenje je dano s

$$x(t) = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{N-2} (\gamma_- l p_l(t) + \eta_l q_l(t)) v^l;$$

to je rješenje sustava prvog reda koji odgovara modelu (26) s početnim vrijednostima

$$x(0) = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{N-2} \gamma_l v^l,$$

$$\dot{x}(0) = 2c\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^{N-2} \eta_l \sin\left(\frac{\pi l}{2(N-1)}\right) v^l.$$

Štoviše, uzmimo u obzir da ako koristimo ortonormalnost normaliziranih svojstvenih vektora, onda se skalarai γ_l i η_l mogu dobiti inverznim formulama

$$\gamma_l = \left\langle x(0), \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} v^l \right\rangle,$$

$$\eta_l = \left\langle \dot{x}(0), \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \left(2c\sin\left(\frac{\pi l}{2(N-1)}\right)\right)^{-1} v^l \right\rangle.$$

Sada kada smo utvrdili normalne modalitete i opće rješenje lineariziranog sustava, koristimo ih za opisivanje Fermi - Pasta - Ulamovih eksperimenata.

Ako je B matrica čije stupce određuju ortonormalni svojstveni vektori matrice Q, onda linearna koordinatna transformacija $x = By$ razdvaja sustav linearnih jednadžbi (26) uz $\beta = 0$ u sustav oblika

$$\ddot{y}_k = c^2 \lambda_k y_k, \qquad k = 1, ..., N-2$$

gdje je λ_k svojstvena vrijednost odgovarajuća k-tom stupcu matrice B. Primijetimo da je ukupna energija k-tog modaliteta dana s

$$E_k := \frac{1}{2}(\dot{y}_k^2 - c^2 \lambda_k y_k^2)$$

i ta energija se lako izračunava iz vektorskog rješenja x(t) koristeći identitet

$$\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \langle x(t), v^k \rangle = y_k.$$

Fermi, Ulam i Pasta su očekivali da će, nakon početnog pobuđivanja sustava izazvanog dovođenjem energije, prosječno vrijeme linearnog modaliteta energija $E_k(t)$ nelinearnog ($\beta \neq 0$) oscilatora (26) imati tendenciju izjednačiti se nakon dovoljno dugog vremenskog perioda. Proces koji vodi do ove "jednake raspodjele energije" naziva se *termalizacija*. Zapravo, svrha njihovog prvobitnog eksperimenta - numerička integracija sustava počevši s energijom različitom od nule u samo jednom normalnom načinu rada - bila je utvrditi vrijeme potrebno da se dogodi termalizacija. Suprotno njihovom očekivanju, rezultat eksperimenta sugerirao je da se termalizacija neće dogoditi. Na primjer, za neke izbore parametara sustava, energija postaje raspodjeljena među raznim linearnim modalitetima na neko vrijeme, ali se na kraju gotovo sva energija vraća na početni modalitet. Kasnije, većina energije može biti u drugom modalitetu prije ponovnog vraćanja na početni modalitet, i tako dalje. Za ostale vrijednosti parametara sustava ponavljanje nije toliko izraženo, ali niti jedan od njihovih eksperimenata nije sugerirao da se dogodi termalizacija.

Sažetak

U ovom radu proučavali smo neke temeljne rezultate teorije diferencijalnih jednadžđbi koje smo zatim iskoristili za objašnjenje Fermi-Pasta-Ulamovog modela.

Enrico Fermi, Stanialaw Ulam i Johan R. Pasta izveli su eksperiment u kojem su promatrali N identičnih kuglica (masa) od kojih su susjedne kuglice povezane oprugama, a krajnje kuglice su pričvršćene za fiksne pozicije. Dodatna pretpostavka je da je kretanje kuglica ograničeno samo na kretanje duž pravca.

Na početku rada promatrali smo rješenja diferencijalne jednadžbe; njegovo postojanje i jedinstvenost. Bavili smo se geometrijskom interpretacijom i definirali neke pojmove vezane uz tu temu. Zatim smo proučavali stabilnost rješenja.

Zaključke i rezultate do kojih smo došli u prvom dijelu ovog rada iskoristili smo u zadnjem poglavlju u kojem opisujemo Fermi-Pasta-Ulamov model. Njihovo očekivanje vezano uz prethodno opisani eksperiment je bilo da će se nakon početnog pobuđivanja sustava, to jest dovođenja vanjske energije doći do procesa termalizacije - procesa koji vodi do "jednake raspodjele energije". Početni cilj eksperimenta bio je odrediti vrijeme potrebno da se dogodi termalizacija. Međutim, suprotno očekivanjima, termalizacija se nije dogodila.

Summary

In this paper we observed some basic results od the theory of the differential equations and the we used them to describe Fermi-Pasta-Ulam model.

Enrico Fermi, Stanialaw Ulam and Johan R. Pasta made an experiment in which they observed N identical balls which were bounded by spring. The balls at the end were fixed. It was assumed that the movement of the balls is in one direction only.

At the beginning of the paper we studied the solutions of differential equations, it's existence and uniqueness. We described geometric interpretation and defined some terms on that subject. Then we examined the stability of the solution.

The conclusions and results that we came to in the first part of the paper, we used in the last chapter, where we described Fermi-Pasta-Ulam model. They applied force to the described system and they expected that it will come to thermalization, same allocation of the energy. The main goal of the experiment was to measure the time needed for thermalization, but at the end it never came to the thermalization.

Literatura

[1] C. Chicone, Ordinary Diferential Equations with Applications, 2.izdanje, Springer, New York, 2006.

[2] Paul Waltman, A Second Course in Elementary Differential Equations, Academic Press, Orlando, 2004.

[3] Davis, H. T., Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Pub. Inc., New York, 1960.

[4] Diacu, F. and P. Holmes, Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[5] Chicone, C. and M.Jacobs Bifurcation of critical periods for plane vector fields, Amer. Math. Soc., New York, 1989.

[6] Fermi, E., S. Ulam and J. Pasta, Studies of nonlinear problems I. In Nonlinear Wave Motion, Amer. Math. Soc., New York, 1974.

Životopis

Kristina Čižmek rođena je 10. travnja 1992. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu Sesvetski Kraljevec te potom i XV. gimnaziju u Zagrebu. Godine 2011. upisuje Preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Spomenuti studij završava 2014. godine te tako stječe naziv bacc. univ. math. Iste godine upisuje diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.