Modeli kratkoročnih kamatnih stopa

Čuljak, Maria

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Maria Čuljak

MODELI KRATKOROČNIH KAMATNIH STOPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, srpanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Miljenku Huzaku na stručnoj pomoći i savjetima pri izradi ovog diplomskog rada.
Hvala mojoj obitelji na velikoj podršci tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

U praksi je vrijednost jednog dolara danas, veća od dolara sutra. Neka je $P(t,T)$ sadašnja vrijednost (u trenutku t) koju će imati jedan dolar u trenutku $T \geq t$. Tada $P(t,T)$ zovemo obveznica bez kupona sa dospijećem T ili $T-$obveznica. Također, ekonomska teorija tvrdi da nerizičan profit nije moguć, te da je na stvarnim financijskim tržištima teško pronaći takve slučajeve odnosno arbitražu.

U ovom diplomskom radu glavni cilj je vrednovati cijenu opcije na temelju $T-$obveznice. Stoga smo u prvom poglavlju dali pregled i karakterizaciju osnovnih financijskih instrumenata. Time smo postavili bazu za daljni uvod u analitički račun sljedećeg poglavlja kako bismo naposljetku vrednovali opcije.

Drugo i treće poglavlje daje uvod u stohastički diferencijalni i integralni račun te tvrdnje potrebne za razumijevanje arbitražne teorije Brownovog financijskog tržišta. Takoder dajemo rezultate arbitražne teorije kroz nekoliko tvrdnji, gdje su dokazi dani u literaturi.

Budući da koristimo Vasičekov model za vrednovanje ATM put opcije u četvrtom poglavlju dajemo pregled modela kratkoročnih stopa. Naime, Vasičekov i CIR modeli su bili prvi stohastički modeli kamatnih stopa. Ovo poglavlje daje uvid u difuzijske kratkoročne modele i analizu najvažnijih modela sa naglaskom na tzv. afine modele.

U petom poglavlju promatramo željene financijske instrumente, $T-$oveznice, umjesto ne-rizičnih instrumenata. Standardni numerarij mijenjamo sa $T-$obveznicom. Ovaj način zamjene numerarija se najčešće koristi u praksi kod vrednovanja opcija, te je prirodan uvod u posljednje poglavlje, primjer.

Šesto poglavlje daje primjer gdje koristimo Vasičekov model za vrednovanje cijene ATM put opcije. Ovdje implementiramo model i metodu pomoću Matlab-a.

Poglavlje 1

Financijski instrumenti

1.1 Obveznice bez kupona

Vrijednost jednog dolara danas je veća od dolara sutra. Neka je $P(t,T)$ sadašnja vrijednost (u trenutku t) koju će imati jedan dolar u trenutku $T \geq t$. Tada $P(t,T)$ zovemo obveznica bez kupona sa dospijećem T ili $T-$obveznica. Za svaki $T > 0$ i svaku $T-$obveznicu postoji tržište. Nadalje, za svaki T vrijedi $P(T,T) = 1$, te je $P(t,T)$ diferencijabilna funkcija u T.
U praksi, na stvarnom tržištu, ova svojstva ne moraju vrijediti. Sa obveznicama bez kupona se ne trguje za svako dospijeće $T > 0$ i $P(T,T)$ može biti manje od jedan ukoliko izdavatelj $T-$obveznice ne ispuni ugovornu obvezu. Diferencijabilnu funkciju $T \mapsto P(t,T)$ zovemo ročna struktura obveznice bez kupona ili diskontna funckija. Funkcija $t \mapsto P(t,T)$ je slučajni proces.

1.2 Kamatne stope

Generalni *ugovor sa terminskim tečajem* je ugovor sa tri vremenske komponente $t < T < S$, pri čemu je t vrijeme, $T > t$ datum isteka važenja ugovora i $S > T$ datum dospijeća. Kako možemo (neto) profitirati od ovog ugovora? Naime, u trenutku t: prodajemo jednu $T-obveznicu$ i kupimo $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ $S-obveznica$, što rezultira sa nula neto investicije. Zatim u trenutku T: platimo jedan dolar. Naposlijetku, u trenutku S: zaradimo $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ dolara. Rezultat ovog postupka jest investicija od jednog dolara u trenutku T i zarada od $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ dolara u trenutku S.
Budući da su nam od ineteresa (neto) profitabilne investicije, upoznat ćemo se sa

izvedenicama ugovora sa treminskim tečajem kroz sljedeće definicije.

Definicija 1. *Jednostavan terminski tečaj za* $[T, S]$ *u vremenu* t *je dan relacijom:*

$$F(t; T, S) = \frac{1}{S - T}\left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1\right).$$

Definicija 2. *Promptni tečaj za* $[t, T]$ *je:*

$$F(t, T) = F(t; t, T) = \frac{1}{T - t}\left(\frac{1}{P(t, t)} - 1\right).$$

Definicija 3. *Kontinuirani složeni terminski tečaj za* $[T, S]$ *u vremenu* t *je dan relacijom:*

$$R(t; T, S) = -\frac{logP(t, S) - logP(t, T)}{S - T}.$$

Definicija 4. *Kontinuirani složeni promptni tečaj za* $[t, T]$ *je:*

$$R(t, T) = R(t; t, T) = -\frac{logP(t, T)}{T - t}.$$

Definicija 5. *Trenutni terminski tečaj sa dospijećem* T *u vremenu* t *je dan relacijom:*

$$f(t, T) = \lim_{S \downarrow T} R(t; T, S).$$

Iz definicije 5 i uvjeta $P(T, T) = 1$ slijedi relacija $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$. Funkciju $T \mapsto f(t, T)$ zovemo terminska funkcija u vremenu t.

Definicija 6. *Trenutni promptni tečaj u vremenu* t *je dan relacijom:*

$$r(t) = f(t, t) = \lim_{T \downarrow t} R(t, T).$$

1.2.1 LIBOR

Međubankovne stope (eng. *Interbank rates*) su stope pomoću kojih se odvijaju transakcije između banaka. Najpoznatija međubankovna stopa je ***LIBOR*** (eng. *London Interbank Offered Rate*). ***LIBOR*** je stopa pomoću koje visoko-kreditne financijske institucije mogu posuđivati novac na međubankovnom tržištu. Za sva vremena dospijeća, od 24 sata do 12 mjeseci ona se koristi kao referentna stopa za ugovore koje smo upoznali u prethodnom poglavlju. Primjerice 3− *mjesečni terminski LIBOR* za $\left[T, T + \frac{1}{4}\right]$ u vremenu t je

$$L(t, T) = F\left(t; T, T + \frac{1}{4}\right).$$

Banke mogu računati vlastite $LIBOR$ stope ali Britanska Bankarska Asocijacija (eng. *British Bankers Association-BBA*) daje globalnu referentnu vrijednost $LIBOR - a$. $LIBOR$ se smatra nerizičnom stopom.

1.3 Anuitetske obveznice, zamjene i prinosi

Na tržištu obveznica postoji jako malo obveznica bez kupona. Većina obveznica uključuje i kupon.

1.3.1 Obveznice s utvrđenim kuponom

Jedna inačica anuitetskih obveznica su obveznice s utvrđenim kuponom. Datume kupona označujemo sa $T_1 < \cdots < T_n$, pri čemu je T_n, $n \in \mathbb{N}$ datum dospijeća obveznice. Oznake za deterministički niz kupona je $c_1, \ldots, c_n$, $n \in \mathbb{N}$, te je N nominalna vrijednost. Vlasnik obveznice dobije c_i u trenutku T_i, za $i = 1, \ldots, n$ i N u trenutku T_n. Cijena obveznice s utvrđenim kuponom $p(t)$ u trenutku $t \leq T_1$ je dana relacijom:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) c_i + P(t, T_n) N.$$

Općenito (u praksi) imamo da je $\delta = T_{i+1} - T_i$ za svaki i te su kuponi dani kao fiksni postotak nominalne vrijednosti, tj. $c_i = K\delta N$ za neku fiksnu kamatnu stopu K. Sada imamo:

$$p(t) = \left(K\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) + P(t, T_n) \right) N.$$

1.3.2 Obveznice s promjenjivom kamatnom stopom

Postoje inačice anuitetskih obveznica čiji kuponi nisu fiksni u vremenu kada je obveznica izdana. Naime, zbog tržišne kamatne stope (npr. $LIBOR - a$) kuponi se računaju posebno početkom svakog datuma kupona T_i, $i = 1, \ldots, n$. Obveznice s promjenjivom kamatnom stopom su ugovori gdje datume kupona označujemo sa $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$, $n \in \mathbb{N}$, te je nominalna vrijednost N. Deterministički niz kupona je sada:

$$c_i = (T_i - T_{i-1}) F(T_{i-1}, T_i) N,$$

pri čemu je $F(T_{i-1}, T_i)$ promptni tečaj utvrđen u trenutku T_{i-1}, za kupon c_i u trenutku T_i. Tada je cijena obveznice s promijenjivom kamatnom stopom $p(t)$ u trenutku $t \leq T_0$ je dana relacijom:

$$p(t) = P(t, T_n) + \sum_{i=1}^{n} (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) = P(t, T_0).$$

Za $t = T_0$ imamo da je $p(T_0) = 1$.
Zaista, bez smanjenja općenitosti stavimo da je nominalna vrijednost $N = 1$. Iz Definicije 2 slijedi da je:

$$c_i = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1.$$

- U trenutku t: kupimo T_{i-1}−obveznicu, cijena $P(t, T_{i-1})$.
- U trenutku T_{i-1}: zaradimo jedan dollar i kupimo $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$, T_i−obveznica, to je neto investicija od nula dollara.
- U trenutku T_i: zaradimo $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ dollara.

Za vrijeme t vrijednost kupona c_i je $P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$.

1.3.3 Zamjene kamatnih stopa

Zamjena kamatne stope (eng. *interest rate swaps*) je procedura gdje mijenjamo plaćanje po fiksnoj kamatnoj stopi za plaćanje po promjenjivoj kamatnoj stopi (najčešće *LIBOR*). Postoji mnogo inačica zamjene kamatnih stopa. Kod platiteljeve zamjene kamatne stope datume označujemo sa $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$, gdje je $T_i - T_{i-1} = \delta$ i T_n je datum dospijeća zamjene. Fiksna stopa je K, a nominalna vrijednost je N.
Novčani tokovi dospijevaju u datumima $T_1, \ldots, T_n$. U trenutku T_i, $i = 1, \ldots, n$ imatelj ugovora:

- plaća fiksni iznos $K\delta N$
- prima (promjenjivi tečaj) $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$.

Neto novčani tok je $(F(T_{i-1}, T_i) - K)\delta N$. Iz vrijednosti kupona $c_i = P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$ u vremenu $t \leq T_0$ imamo da je novčani tok:

$$N(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K\delta P(t, T_i))$$

. Vrijednost zamjene $\Pi_p(t)$ u vremenu $t \leq T_0$ je:

$$\Pi_p(t) = N\left(P(t, T_0) - P(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\right).$$

Primateljeva zamjena kamatne stope je dana zamjenom predznaka kod novčanih tokova u datumima (trenucima) $T_1, \ldots, T_n$. Vrijednost zamjene je $\Pi_r(t) = \Pi_p(t)$, $t \leq T_0$.

Prirodno slijedi pitanje kako određujemo "pravednu" fiksnu stopu K. Fiksna stopa zamjene $R_{swap}(t)$ u trenutku $t \leq T_0$ je fiksna stopa K koja daje $\Pi_r(t) = \Pi_p(t) = 0$.

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)}.$$

1.3.4 Prinosi i trajanje

Kod obveznica bez kupona, $P(t, T)$ prinos oveznice bez kupona je promptni tečaj $R(t, T)$, tj.

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Funkciju $T \mapsto R(t, T)$ zovemo funkcija prinosa (obveznice bez kupona). Neka je $p(t)$ u vremenu t tržišna vrijednost obveznice sa utvrđenim kuponom u datumima $T_1 < \cdots < T_n$, kuponskim uplatama $c_1, \ldots, c_n$ i nominalnom vrijednosti N. Radi jednostavnosti pretpostavimo da c_n uključuje nominalnu vrijednost N. Tada je

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i) c_i, \;\; t \leq T_1.$$

Prirodno slijedi pitanje koja je konstantna stopa (u intervalu $[t, T_n]$) koja generira tržišnu vrijednost obveznice sa kuponom. Takvu stopu zovemo prinos do dospijeća (eng. *yield to maturity*), oznaka $y(t)$, $t \leq T_1$ i definiramo relacijom:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-y(t)(T_i - t)}.$$

Poglavlje 2

Stohastički račun

U ovom dijelu ćemo navesti glavne tvrdnje potrebne za razumijevanje arbitražne teorije Brownovog financijskog tržišta. Neke od glavnih teorema stohastičkog računa ćemo i dokazati.

2.1 Uvod

Definicija 7. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor, te neka je za svaki* $t \in \mathbb{Z}_+$ X_t *je slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Familija* $X = (X_t, t \geq 0)$ *naziva se slučajni proces.*

Definicija 8. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $W = (W_t, t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje u* $\mathbb{R}$ *ako vrijedi:*

(a) putovi $t \mapsto W_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*)*

(b) $W_0 = 0$

(c) za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti* $W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ *nezavisni*

(d) za sve $0 \leq s < t$ *je prirast* $W_t - W_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$*.*

Definicija 9. *Kažemo da je* $W = (W_1, \ldots, W_d)$ $d-$*dimenzionalno Brownovo gibanje ukoliko su komponente nezavisna* $1-$*dimenzionalna Brownova gibanja u* $\mathbb{R}$*.*

Definicija 10. *Familija* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ*-podalgebri of* $\mathcal{F}$ *takvih da je* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ *za svaki* $t \geq 0$ *zove se filtracija.*

Za slučajne varijable X, Y pišemo $X = Y$ ako je $X = Y$, *g.s.* odnosno ako vrijedi $P(X = Y) = 1$. Analogno vrijedi za nejednakosti.

Slučajni proces $X_t = X(t, \cdot)$ je:

- adaptiran u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ ako je X_t, $\mathcal{F}_t-$izmjeriva slučajna varijabla za svaki $t \geq 0$.
- progresivno izmjeriv ili kraće progresivan ako je $X|_{[0,t]\times\Omega}$, $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t-$izmjeriv proces za svaki $t \geq 0$.

Stohastička baza je potpun vjerojatnosni prostor sa filtracijom $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Neka je $W = (W_1, \ldots, W_d)$ $d-$dimenzionalno $(\mathcal{F}_t)-$adaptirano Brownovo gibanje.

Progresivan proces je adaptiran. Progresivna izmjerivost od X je nužna da bi procesi $\int_0^t X(s)ds$ i $X(t \wedge \tau)$ za bilo koje vrijeme zaustavljanja τ bili adaptirani. Sa ***Prog*** označavamo progresivnu $\sigma-$algebru koja je generirana familijom svih progresivnih procesa na $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

2.2 Stohastički diferencijalni i integralni račun

Definicija 11. *$\mathcal{L}^2$ i $\mathcal{L}$ definiramo kao skupove progresivnih procesa $h = (h_1, \ldots, h_d)$ sa vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ koji zadovoljavaju*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \|h(s)\|^2\, ds\right] < \infty$$

i

$$\int_0^t \|h(s)\|^2\, ds < \infty, \ \forall t > 0,$$

respektivno.

Očigledno je $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}$.

Teorem 1. *Za svaki $h \in \mathcal{L}$ možemo definirati stohastički integral*

$$(h \circ W)_t = \int_0^t h(s)dW(s) = \sum_{j=1}^d \int_0^t h_j(s)dW_j(s)$$

sa sljedećim svojstvima:

(a) *Proces* $h \circ W$ *je neprekidni lokalni martingal.*

(b) *Linearnost:* $(\lambda g + h) \circ W = \lambda(g \circ W) + h \circ W$ *za svaki* $g, h \in \mathcal{L}$ *i svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) *Za svako vrijeme zaustavljanja* τ *vrijedi:*

$$\int_0^{t \wedge \tau} h(s) dW(s) = \int_0^t \chi_{\{s \leq \tau\}} h(s) dW(s), \ \forall t > 0.$$

(d) *Ako je* $h \in \mathcal{L}^2$ *tada je* $h \circ W$ *martingal i vrijedi:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty h(s) dW(s)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \|h(s)\|^2 \, ds\right].$$

Dokaz. Vidi [3], poglavlje 4. □

Itôv proces je suma apsolutno neprekidnog drifta i neprekidnog lokalnog martingala:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t \rho(s) dW(s), \tag{2.1}$$

gdje je $\rho \in \mathcal{L}$ i a progresivni proces koji zadovoljava $\int_0^t |a(s)| \, ds < \infty$ za svaki $t > 0$. Slijedi važan rezultat.

Lema 1. *Dekompozicija 2.1 od X je jedinstvena u smislu da*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a'(s) ds + \int_0^t \rho'(s) dW(s)$$

implicira $a' = a$ *i* $\rho' = \rho$, $d\mathbb{P} \otimes dt - (g.s.)$.

Itôv proces možemo pisati u kraćem obliku

$$dX(t) = a(t) dt + \rho(t) dW(t), \ \forall t \geq 0.$$

Definicija 12. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *zovemo* $n-$*dimenzionalni Itôv proces ako je svaka komponenta* X_i *Itôv proces.*

Definicija 13.

$$\mathcal{L}^2(X) = \left\{ h \in Prog : \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |h(s)a(s)|^2\, ds\right] < \infty, h\rho \in \mathcal{L}^2 \right\},$$

gdje je $\rho \in \mathcal{L}$ *i* a *progresivni proces koji zadovoljava* $\int_0^t |a(s)|\, ds < \infty$ *za svaki* $t > 0$.

Definicija 14.

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ h \in Prog : \int_0^t |h(s)a(s)|\, ds < \infty, \forall t > 0, h\rho \in \mathcal{L} \right\},$$

gdje je $\rho \in \mathcal{L}$ *i* a *progresivni proces koji zadovoljava* $\int_0^t |a(s)|\, ds < \infty$ *za svaki* $t > 0$.

Za $h \in \mathcal{L}(X)$ definiramo stohastički integral po X sa:

$$\int_0^t h(s)dX(s) = \int_0^t h(s)a(s)ds + \int_0^t h(s)\rho(s)dW(s).$$

Neka je Y Itôv proces dan relacijom:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s).$$

Kovarijacijski proces Itôvih procesa X i Y je definiran

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \rho(s)\sigma(s)ds.$$

$\langle X, X\rangle_t$ zovemo kvadratni varijacijski proces od X.

Definicija 15. *Kažemo da je adaptiran proces* X *u odnosu na filtraciju* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *lokalni martingal ako postoje vremena zaustavljanja* T_n*,* $n \geq 1$ *tako da je*

(a) niz (T_n) *rastući i* $\lim_n T_n = +\infty$ *(g. s.),*

(b) za svaki n*, proces* $X^{T_n}\chi_{[T_n>0]}$ *uniformno integrabilni martingal.*

Teorem 2. $\mathbb{R}^d-$ *neprekidni lokalni martingal* X *koji iščezava za* $t = 0$ *je Brownovo gibanje ako i samo ako vrijedi* $\left\langle X_i, X_j\right\rangle_t = \delta_{i,j}t$*, za svaki* $1 \leq i,\ j \leq d$.

Dokaz. Vidi [3], poglavlje 4, teorem 3.6. □

2.3 Itôva formula

U smislu definicija 13 i 14 vrijedi $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(W)$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}(W)$. Za $h \in \mathcal{L}$ dajemo drugi zapis stohastičkog integrala po X relacijom:

$$(h \circ X)_t = \int_0^t h(s)dX(s) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t h_i(s)dX_i(s).$$

Slijedi iznimno važan teorem stohastičkog računa - Itôva formula.

Teorem 3. *Neka je $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Tada je $f(X)$ Itôv proces i*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f(X(s))}{\partial x_i} dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f(X(s))}{\partial x_i \partial x_j} d\left\langle X_i, X_j \right\rangle_t.$$

Dokaz. Vidi [3], poglavlje 4, teorem 3.3. □

Korolar 1. *Neka su X i Y dva Itôva procesa i neka je $f(x,y) = xy$, tada vrijedi formula parcijalne integracije*

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X, Y \rangle_t.$$

Dokaz. Dokazat ćemo ga u poglavlju *Vasičekov model* 3.2.1. □

Neka su $b : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ i $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times d}$, $\mathit{Prog} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)-$izmjerive funkcije. Neka je v, $\mathcal{F}_0-$izmjeriva početna vrijednost. Proces X je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

$$X(0) = v$$

ako je X Itôv proces koji zadovoljava relaciju

$$X(t) = v + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma((s), X(s))dW(s),$$

za svaki $t \geq 0$.

Kažemo da je X jedinstveno rješenje ako za bilo koje drugo rješenje X' vrijedi, $X = X'$ $d\mathbb{P} \otimes dt - (g.s.)$. Ako su $b(\omega, t, x) = b(t, x)$ i $\sigma(\omega, t, x) = \sigma(t, x)$ determinističke funkcije, rješenje X zovemo (veremenski-nehomogena) difuzija sa matricom difuzije $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma(t, x)^T$ i driftom $b(t, x)$. Slijedi teorem koji nam daje egzistenciju i jedinstvenost difuzije.

Teorem 4. *Pretpostavimo da $b(t,x)$ i $\sigma(t,x)$ zadovoljavaju uvjete Lipschiza i linearnog rasta*

$$\|b(t,x)-b(t,y)\|+\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|\leq K\|x-y\|,$$
$$\|b(t,x)\|^2+\|\sigma(t,x)\|^2\leq K^2(1+\|x\|^2),$$

za svaki $t\geq 0$ i $x,y\in\mathbb{R}^n$, pri čemu je K konstanta. Tada, za svaku početnu točku, $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ postoji jedinstveno rješenje $X=X^{(t_0,x_0)}$ stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX(t)=b(t_0+t,X(t))dt+\sigma(t_0+t,X(t))dW(t), \tag{2.2}$$
$$X(0)=x_0.$$

Dokaz. Vidi [2], teorem 5.2.9. □

Teorem 5. *Pretpostavimo da su $b(t,x)$ i $a(t,x)=\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$ neprekidne funkcije u (t,x) i pretpostavimo da za svaku početnu točku $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ postoji jedinstveno rješenje $X=X^{(t_0,x_0)}$ stohastičke diferencijalne jednadžbe* (2.2). *Tada X ima Markovljevo svojstvo, tj. da za svaku ograničenu izmjerivu funkciju f na $\mathbb{R}^n$, postoji izmjeriva funkcija F na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ tako da vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[f(X(T))|\mathcal{F}_t\right]=F(t,T,X(t)),\ \ t\leq T.$$

Dokaz. Slijedi iz [2], teorem 4.20. □

Drugim riječima, $\mathcal{F}_t$-uvjetna distribucija od $X(t)$ je funkcija po t,T i $X(t)$. Vrijedi da za svaki n-dimenzionalni slučajni vektor Z i σ-podalgebru $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, postoji uvjetna distribucija $\mu(\omega,dz)$ od Z uz dano $\mathcal{G}$. Dakle, $\mu(\omega,\cdot)$ je vjerojatnosna mjera na $\mathbb{R}^n$ za svaki $\omega\in\Omega$, funkcija $\omega\to\mu(\omega,E)$ je $\mathcal{G}$-izmjeriva za svaki $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathbb{E}\left[f(Z)|\mathcal{G}\right]=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\mu(\omega,dz)$ za svaku izmjerivu funkciju f.

Definicija 16. *Stohastički eksponencijal $\varepsilon(X)$ od Itôvog procesa X je dan sljedećom relacijom*

$$\varepsilon_t(X)=e^{X(t)-\frac{1}{2}\langle X,X\rangle_t}.$$

Lema 2. *Neka su X i Y Itôvi procesi. Tada vrijedi:*

(a) *$U=\varepsilon(X)$ je pozitivni Itôv proces i jedinstveno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$dU=UdX,\ \ U(0)=e^{X(0)}.$$

(b) $\varepsilon(X)$ *je neprekidni lokalni martingal ako je* X *lokalni martingal.*

(c) $\varepsilon(0) = 1$.

(d) $\varepsilon(X)\varepsilon(Y) = \varepsilon(X + Y)e^{\langle X,Y \rangle}$.

(e) $\varepsilon(X)^{-1} = \varepsilon(-X)e^{\langle X,X \rangle}$.

Poglavlje 3

Arbitražna teorija

Ekonomska teorija tvrdi da nerizičan profit nije moguć, te da je na stvarnim financijskim tržištima teško pronaći mogućnost arbitraže. Zato ćemo se nadalje koncentrirati na modele tržišta koja ne dopuštaju arbitražu. Vidjet ćemo kako provjeriti da model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu.

Kako bismo razumijeli matematičke postavke arbitražne teorije prvo ćemo definirati financijsko tržište. Kada govorimo o imovini na financijskom tržištu radi se o dionicama, obveznicama, valutama ili novcu.

Promatramo financijsko tržište $S = (S_0, \ldots, S_n)$ sa ne-rizičnom imovinom, danom sa

$$dS_0 = S_0 r dt, \; S_0(0) = 1,$$

te n rizičnih imovina, čije cijene zadovoljavaju stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_i = S_i(\mu_i dt + \sigma_i dW), \; S_i(0) > 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Ovdje je W $d-$dimenzionalno Brownovo gibanje adaptirano u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ i definirano na potpunom filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

Kod kratkoročnih stopa r, drift μ_i i difuzijski koeficijent $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{id})$ su progresivni procesi takvi da su

$$X_0(t) = \int_0^t r(s)ds$$

i

$$X_i(t) = \int_0^t \mu_i(s)ds + \int_0^t \sigma_i(s)dW(s)$$

dobro definirani Itôvi procesi, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada iz leme 2 slijedi da su

$$S_i(t) = S_i(0)\mathcal{E}_t(X_i)$$

pozitivni Itôvi procesi, za svaki i.

Definicija 17. *Portfelj ili investicijska strategija $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_n)$ je bilo koji $\mathbb{R}^{n+1}$ progresivni proces. Vrijednost tog procesa je dana sa*

$$V = \phi S = \sum_{i=0}^{n} \phi_i S_i.$$

Kažemo da je portfelj ϕ *samofinancirajući* za S ako je $\phi \in \mathcal{L}(S)$ i nema promjene u kapitalu tijekom trgovanja $n+1$ financijskih instrumenata $S_0, \ldots, S_n$. Dakle, trgovinski dobici i gubici tijekom bilo kojeg vremenskog perioda se događaju samo zbog promjene vrijednosti pripadnih financijskih instrumenata:

$$dV = \phi dS = \sum_{i=0}^{n} \phi_i dS_i.$$

Sada ćemo uvesti pojam numerarija (valute). Vrlo važan pojam kod financijskog tržišta budući da su sve cijene dane u terminima neke valute (američki dolar, euro i sl.). No, cijene se mogu izraziti i u drugim terminima, poput S_p, za neki $p \leq n$. Nerijetko se S_0 koristi kao numerarij. Navodimo oznake

$$\mathcal{S} = \frac{S}{S_p}$$

i

$$\mathcal{V} = \frac{V}{S_p} = \sum_{i=0}^{n} \phi_i \mathcal{S}_i$$

za diskontirane (vektor) cijene i vrijednosti procesa, respektivno.

Napomena 1. *Svojstvo samofinanciranja ne ovisi o izboru numerarija.*

Lema 3. *Neka je $\phi \in \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Tada je ϕ samofinancirajući za S ako i samo ako je samofinancirajući za $\mathcal{S}$, preciznije*

$$d\mathcal{V} = \phi d\mathcal{S} = \sum_{i=0,\ i\neq p}^{n} \phi_i d\mathcal{S}_i. \tag{3.1}$$

Budući da je $d\mathcal{S}_p \equiv 0$, broj sumanada u (2.3) se reducira na n. To nam dozvoljava da konstruiramo samofinancirajuće portfelje na sljedeći način.

Neka je $V(0)$ oznaka za neku početnu imovinu (kapital, bankovni račun i sl.) te neka je slučajni vektor $(\phi_0, \ldots, \phi_{p-1}, \phi_{p+1}, \ldots, \phi_n)$ proizvoljan $\mathbb{R}^n$ progresivni proces iz $\mathcal{L}(\mathcal{S}_0, \ldots, \mathcal{S}_{p-1}, \mathcal{S}_{p+1}, \ldots, \mathcal{S}_n)$. Sada ćemo konstruirati ϕ_p tako da rezultirajući $\mathbb{R}^n$ progresivni proces $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_n)$ bude samofinancirajući.

Iz leme 3 znamo da je diskontirana vrijednost procesa dana sa

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(0) + \sum_{i=0,\ i\neq p}^{n} \int_0^t \phi_i(s) d\mathcal{S}_i(s).$$

Preostaje nam definirati

$$\phi_p(t) = \mathcal{V}(t) - \sum_{i=0,\ i\neq p}^{n} \phi_i(t)\mathcal{S}_i(t).$$

Kako je $\mathcal{S}_p \equiv 1$, zaključujemo da je $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ te je stoga ϕ samofinancirajući za $\mathcal{S}$.

Definicija 18. *Arbitražni portfelj je samofinancirajući portfelj ϕ sa vrijednosti procesa koja zadovoljava*

$$V(0) = 0, \quad V(T) \geq 0$$

i

$$P\,[V(T) > 0] > 0, \quad T > 0.$$

Ako za $T > 0$ ne postoji arbitražni portfelj, onda kažemo da je model bez arbitraže (eng., arbitrage-free).

Lema 4. *Pretpostavimo da postoji samofinancirajući portfelj sa vrijednosti procesa*

$$dU = Ukdt,$$

za neki progresivni proces k. Ako je tržište bez arbitraže, onda nužno vrijedi

$$r = k, \quad dP \otimes dt - (g.s.).$$

Sada ćemo proučiti kada je dani model bez arbitraže. Radi jednostavnijeg zapisa imamo da je S_0 numerarij.

Napomena 2. *Sljedeće postavke vrijede za izbor bilo kojeg numerarija.*

Definicija 19. *Vjerojatnosna mjera* P^* *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se martingalna mjera ili mjera neutralna na rizik, ako vrijedi da je proces diskontiranih cijena* $\mathcal{S}_i$ *martingal u odnosu na* P^* *(kraće* P^*-*martingal) za svaki* i.

Primjetimo da je $\frac{S^i(1)}{1+r}$ diskontirana vrijednost $i-$te financijske imovine u $t = 1$. Definicija kaže da je očekivanje te diskontirane vrijednosti po martingalnoj mjeri P^* jednako cijeni imovine u trenutku $t = 0$.

Uz P^* očekivana vrijednost rizične imovine jednaka je vrijednosti nerizične imovine. Dakle, ta mjera je neutralna na rizik, za razliku od objektivne mjere P uz koju diskontirana rizična imovina ima veće očekivanje od nerizične (jer ako već preuzimamo rizik očekujemo veći povrat).

Definicija 20. *Za vjerojatnost* P^* *kažemo da je ekvivalentna s* P *i pišemo* $P^* \approx P$, *ako za* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi* $P^*(A) = 0$ *ako i samo ako je* $P(A) = 0$.

Definicija 21. *Familija svih martingalnih mjera ekvivalentnih s* P *je dana sa*

$$\mathcal{P} = \{P^* : P^* \text{je martingalna mjera i } P^* \approx P\}$$

Lema 5. *Model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako je* $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *(tj. ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera).*

Teorem 6. *(Girsanovljev teorem) Neka je* $\gamma \in \mathcal{L}$ *takav proces da je stohastički eksponencijal* $\mathcal{E}(\gamma \circ W)$ *uniformno integrabilni martingal sa* $\mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W) > 0$. *Tada* $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W)$ *definira ekvivalentnu vjerojatnosnu mjeru* $Q \approx P$, *te je proces* $W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)ds$ $Q-$*Brownovo gibanje.*

Dokaz. Vidi [3], poglavlje 8, teorem 1.12. □

Lema 6. *Ako je*

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty \|\gamma(s)\|^2 ds}\right] < \infty \tag{3.2}$$

onda je stohastički eksponencijal $\mathcal{E}(\gamma \circ W)$ *uniformno integrabilni martingal sa* $\mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W) > 0$.

Napomena 3. *Ovako konstruiran proces* W^* $Q-$*Brownovog gibanja zovemo Girsanovljeva transformacija od* W.

Uvjet (2.4) je dovoljan za uniformnu integrabilnost od $\mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W)$, ali nije nužan.

Pretpostavimo da je sada $\mathbb{Q}$ ekvivalentna martingalna mjera oblika $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W)$ i neka je $W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)ds$ Girsanovljeva transformacija od W. Integriranjem dobivamo dinamiku od $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}_i &= \mathcal{S}_i(\mu_i - r)dt + \mathcal{S}_i\sigma_i dW \\ &= \mathcal{S}_i(\mu_i - r + \sigma_i\gamma)dt + \mathcal{S}_i\sigma_i dW^*, \end{aligned}$$

pri čemu je $i = 1, \ldots, n$.

Budući da je $\mathcal{S}$ $\mathbb{Q}$–martingal, iz leme 1 slijedi da drift iščezava. Dakle γ zadovoljava $d\mathbb{Q} \otimes dt - (g.s.)$,

$$-\sigma_i \cdot \gamma^T = \mu_i - r, \tag{3.3}$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Rješenje relacije (2.5) uvijek postoji jer je $\sigma^T\sigma$ pozitivno definitna matrica. Množenjem relacije (2.5) sa σ^T imamo:

$$\begin{aligned} \sigma^T\sigma\gamma &= \sigma^T(\mu - r \cdot \mathbf{1}_n) \\ \gamma &= (\sigma^T\sigma)^{-1}(\sigma^T(\mu - r \cdot \mathbf{1}_n)) \end{aligned}$$

Dakle relacija (2.5) ima jedinstveno rješenje, $\gamma \in \mathbb{R}^d$.

Slijedi ekonomska interpretacija relacije (2.5). Desna strana sadrži višak od povrata ne-rizične stope r za imovinu i. Lijeva strana je linearna kombinacija volatilnosti σ_{ij} imovine i u odnosu na pripadne rizične faktore W_j sa faktorima opterećenja $-\gamma_j$. Stoga se vektor $-\gamma$ zove tržišna cijena rizika. Uočimo da je $-\gamma$ jednaka za svu rizičnu imovinu $i = 1, \ldots, n$.

Naposlijetku, imamo da iz leme 2 slijedi kako se $\mathcal{S}_i$ može napisati kao stohastički eksponencijal $\mathcal{S}_i = S_i(0)\mathcal{E}(\sigma_i \circ W^*)$.

Postojanje ekvivalentne martingalne mjere znači da nema arbitraže.

Poglavlje 4

Modeli kratkoročnih stopa

Prvi stohastički modeli kamatnih stopa su bili modeli kratkoročnih stopa. Ovo poglavlje daje uvod u difuzijske kratkoročne modele i analizu najvažnijih poznatih modela sa naglaskom na tzv. afine modele.

4.1 Difuzija modela kratkoročnih stopa

Neka su zadani potpun vjerojatnosni prostor sa filtracijom $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ i $W = (W_1, \ldots, W_d)$ $d-$dimenzionalno $(\mathcal{F}_t)-$adaptirano Brownovo gibanje. Pretpostavimo da vrijedi:

- kratkoročne stope su Itôv proces

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

  određujući obračun tržišta novca $B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$;

- ne postoji arbitraža, tj. postoji ekvivalentna martingalna mjera Q definirana sa $\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \circ W)$ tako da proces diskontiranih cijena obveznica $\frac{P(t,T)}{B(t)}$, $t \leq T$ je $Q-$martingal i $P(T,T) = 1$ za svaki $T > 0$.

Teorem 7. *Neka je ispunjen zahtjev ekvivalentne martingalne mjere odnosno model tržišta koji ne dopušta arbitražu. Tada imamo:*

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathcal{F}_t\right] \tag{4.1}$$

Naime, u praksi je vrlo teško naći arbitražu na tržištu (neefikasno tržište), stoga promatramo modele koji ne dopuštaju arbitražu.

Neka je $W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)ds$ Girsanovljeva transformacija kao u teoremu 6.

Generalna interpretacija: budući da gledamo tržište bez arbitraže započinjemo definiranjem $P-$dinamike kratkoročnih stopa i time određujući obračun tržišta novca $B(t)$. Međutim, pomoću obračuna tržišta novca ne možemo replicirati isplate obveznica (a kamoli prinose i ostale izvedenice) jer model nije potpun. Prema teoremu 4.9 to se odražava u nejedinstvenosti postojanja ekvivalentne martingalne mjere ili cijene rizika tržišta. A priori, Q može biti bilo koja ekvivalentna vjerojatnosna mjera $Q \approx P$. Ukratko kratkoročni model nije potpun ako nije zadana fiksna cijena rizika tržišta. Stoga je "algoritam" određivanja modela takav da prvo postavimo $Q-$dinamiku od r odnosno prema 4.1 $Q-$dinamiku svih cijena obveznica. Tada cijenu rizika tržišta (i objektivnu mjeru P) možemo odrediti nekom statističkom metodom koristeći povijesne podatke promjena cijena.

Neka je stohastična baza $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, Q)$, gdje je Q martingalna mjera. Neka je $d = 1$ i W^* jednodimenzionalno $Q-$ Brownovo gibanje. Neka je $Z \subset \mathbb{R}$ zatvoren interval sa nepraznim interiorom te neka su b i σ neprekidne funkcije na $\mathbb{R}_+ \times Z$. Tada za svako $(t_0, r_0) \in \mathbb{R}_+ \times Z$ stohastička diferencijalna jednadžba:

$$dr(t) = b(t_0 + t, r(t))dt + \sigma(t_0 + t, r(t))dW^*(t), \ r(0) = r_0 \tag{4.2}$$

daje jedinstveno rješenje (na Z) $r = r^{(t_0, r_0)}$. Neka je cijena $T-$obveznica $P(t, T)$ definirana sa 4.1. Tada se ona može prikazati kao funkcija po $r(t), t$ i T. Sljedeća lema nam daje taj prikaz.

Lema 7. *Neka je $T > 0$ i ϕ neprekidna funkcija na Z te pretpostavimo da je $F = F(t, r) \in C^{1,2}([0, T] \times Z)$ rješenje rubnog problema na $[0, T] \times Z$:*

$$\partial_t F(t, r) + b(t, r)\partial_r F(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\partial_r^2 F(t, r) - rF(t, r) = 0, \ (t, r) \in [0, T\rangle \times Z, \tag{4.3}$$

$$F(T, r) = \phi(r), \ r \in Z.$$

Tada je

$$M(t) = F(t, r(t))e^{-\int_0^t r(u)du}, \ t \leq T$$

lokalni martingal. Dodatno, ako vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:
(a) $\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T \left|\partial_r F(t, r(t))e^{-\int_0^t r(u)du}\sigma(t, r(t))\right|^2 dt\right] < \infty$
(b) M je uniformno ograničen,
tada je M martingal i vrijedi

$$F(t, r(t)) = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^T e^{-\int_0^t r(u)du}\phi(t, r(t))|\mathcal{F}_t\right], \ t \leq T. \tag{4.4}$$

Relaciju (3.3) zovemo jednadžba ročne struktutre za ϕ. Za $\phi = 1$ imamo cijenu $T-$obveznice $P(t,T)$ oblika:

$$P(t,T) = F(t,r(t);T).$$

Napomena 4. *Pokazali smo da ako glatko rješenje F od* (3.3) *postoji i zadovoljava dodatne uvjete (ili uvjet (a) ili uvjet (b)) tada je desna strana od* (3.4) *jednaka $F(t,r(t))$. Vrijedi i obrat.*

Time smo odredili "algoritam" za vrednovanje obveznica. Ipak takav način nije numerički efikasan budući da u svakom koraku moramo rješavati parcijalne diferencijalne jednadžbe funkcije $F(.,.;T)$, $T > 0$ za cijenu svake obveznice bez kupona. Za druge izvedenice bi se postupak još više zakomplicirao. Stoga nadalje gledamo kratkoročne modele za $\phi = 1$ u 4.3. Slijede najstariji modeli kratkoročnih stopa (kratkoročni modeli) dani u smislu relacije 4.2:

- Vasiček $Z = \mathbb{R}$
$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW^*(t)$$
- Cox-Ingersoll-Ross $Z = \mathbb{R}_+$, $b \geq 0$
$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW^*(t)$$

Oba modela pripadaju klasi modela koje nazivamo afinima.

4.2 Afini modeli

U praksi se afini modeli koriste za cijene obveznica oblika:

$$F(t, r; T) = exp(-A(t, T) - B(t, T)r),$$

pri čemu su A i B glatke funkcije. Takvi modeli daju afinu ročnu strukturu (eng. *affine term structure*). Za $F(T, r; T) = 1$ imamo da je $A(T, T) = B(T, T) = 0$. Sljedeća propozicija nam daje karakterizaciju afinog modela.

Teorem 8. *Kratkoročni model (4.2) daje afinu ročnu strukturu ako i samo ako su difuzija i drift oblika:*

$$\sigma^2(t, r) = a(t) + \alpha(t)r \tag{4.5}$$

$$b(t, r) = b(t) + \beta(t)r$$

gdje su a, α, b, β neprekidne te funckije A i B zadovoljavaju sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\partial_t A(t, T) = \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \tag{4.6}$$

$$\partial_t B(t, T) = \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, \tag{4.7}$$

za svaki $t < T$, uz rubne uvjete

$$A(T, T) = 0,$$

$$B(T, T) = 0.$$

Dokaz. Dovoljnost dokazujemo tako da stavimo $F(t, r; T) = exp(-A(t, T) - B(t, T)r)$ u jednadžbu ročne strukture (4.3). Tada kratkoročni model (4.2) daje afinu ročnu strukturu ako i samo ako vrijedi:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) - b(t, r)B(t, T) = \partial_t A(t, T) + (\partial_t B(t, T) + 1)r, \tag{4.8}$$

za svaki $t \leq T$ i svaki $r \in Z$. Budući da 4.5-4.7 zadovljavaju (4.8), tvrdnja slijedi. Nužnost (4.5)-(4.7). Fiksirajmo $t \geq 0$ i pretpostavimo da su funkcije $B(t, .)$ i $B^2(t, .)$ linearno nezavisne. Tada možemo naći $T_1 > T_2 > t$ tako da je matrica M regularna (invertibilna),

$$M = \begin{pmatrix} B^2(t, T_1) & -B(t, T_1) \\ B^2(t, T_2) & -B(t, T_2) \end{pmatrix}.$$

Iz (4.8) imamo:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(t,r)/2 \\ b(t,r) \end{pmatrix} = M^{-1}\left(\begin{pmatrix} \partial_t A(t,T_1) \\ \partial_t A(t,T_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_t B(t,T_1)+1 \\ \partial_t B(t,T_2)+1 \end{pmatrix}\right).$$

Dakle $\sigma^2(t,r)$ i $b(t,r)$ su afine funkcije po r što pokazuje (4.5). Sada iz toga imamo da je lijeva strana od (4.8) jednaka:

$$\frac{1}{2}a(t)B^2(t,T) - b(t)B(t,T) + \left(\frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t,T) - \beta(t)B(t,T)\right)r.$$

Iz ovoga slijede relacije (4.6) i (4.7). □

4.2.1 Vasičekov model

Eksplicitno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW^*(t)$$

je dano sa:

$$r(t) = r(0)e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s).$$

Koristimo Itôvu formulu koja je dana sa:

$$f(X_t,Y_t) = f(X_0,Y_0) + \int_0^t \partial_x f(X_s,Y_s)dX_s + \int_0^t \partial_y f(X_s,Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(X_s,Y_s)d\langle X,X\rangle_s$$
$$+ \int_0^t \partial_{xy} f(X_s,Y_s)d\langle X,Y\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{yy} f(X_s,Y_s)d\langle Y,Y\rangle_s.$$

U našem slučaju imamo $f(x,y) = xy$, te je $\partial_x f(x,y) = y$, $\partial_y f(x,y) = x$, $\partial^2_{xx} f(x,y) = 0$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = 1$ i $\partial^2_{yy} f(x,y) = 0$.

Tada dobijemo

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \langle X,Y\rangle_s.$$

Primjetimo da smo time dobili korolar 1 iz poglavlja *Itŏva formula* 2.3.

Mi imamo sljedeći problem

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW^*(t)$$

$$dr(t) - \beta r(t)dt = bdt + \sigma dW^*(t)$$

Množimo relaciju sa $e^{-\beta t}$, pa slijedi

$$d(r(t)e^{-\beta t}) = be^{-\beta t} + \sigma e^{-\beta t}dW^*(t)$$

Sada integriramo promatranu relaciju, te koristeći Itovu formulu i uz $X_s = r(s)$, $Y_s = e^{-\beta s}$ i $dY_s = -\beta e^{-\beta s}ds$ slijedi

$$\int_0^t e^{-\beta s}dr(s) = b\int_0^t e^{-\beta s}ds + \beta\int_0^t e^{-\beta s}r(s)ds + \sigma\int_0^t e^{-\beta s}dW^*(s)$$

$$\int_0^t e^{-\beta s}dr(s) - \beta\int_0^t e^{-\beta s}r(s)ds = \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma\int_0^t e^{-\beta s}dW^*(s)$$

Lako dolazimo do rješenja uz već korištenu supstituciju

$$e^{-\beta t}r(t) - r(0) = \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma\int_0^t e^{-\beta s}dW^*(s)$$

Naposlijetku imamo

$$r(t) = e^{\beta t}r(0) + \frac{b}{\beta}(e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}dW^*(s). \tag{4.9}$$

Slijedi da je $r(t)$ Gaussovski proces sa očekivanjem:

$$\mathbb{E}_Q\left[r(t)\right] = r(0)e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)$$

i varijancom:

$$Var_Q(r(t)) = \sigma^2 e^{2\beta t}\int_0^t e^{-2\beta s}ds = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(e^{2\beta t} - 1\right).$$

Dakle imamo da je $Q\left(r(t) < 0\right) > 0$ što nije zadovoljavajuće iako se radi o vrlo maloj vjerojatnosti.

Vasičekov model pretpostavlja da je cijena tržišnog rizika konstantna (u konačnom intervalu vremena). Iz toga slijedi i da je $P-$dinamika od $r(t)$ istog prikaza kao i za Q martingalnu mjeru.

Ako je $\beta < 0$ onda je $r(t)$ (eng. *Mean - reverting*) proces sa nivoom povratka očekivanju $\frac{b}{|\beta|}$. Tada se može pokazati da kada t teži ka ∞, $r(t)$ konvergira prema Gaussovoj stacionarnoj distribuciji sa očekivanjem:

$$\frac{b}{|\beta|}$$

i varijancom:

$$\frac{\sigma^2}{2\,|\beta|}.$$

Iz relacija (4.6) i (4.7) slijedi:

$$\partial_t A(t,T) = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t,T) - bB(t,T), \;\; A(T,T) = 0,$$

$$\partial_t B(t,T) = -\beta B(t,T) - 1, \;\; B(T,T) = 0.$$

Egzaktna rješenja su:

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left(e^{\beta(T-t)} - 1\right), \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} A(t,T) &= A(T,T) - \int_t^T \partial_s A(s,T)ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s,T)ds + b\int_t^T B(s,T)ds \\ &= \frac{\sigma^2(4e^{\beta(T-t)} - e^{2\beta(T-t)} - 2\beta(T-t) - 3)}{4\beta^3} + \frac{b(e^{\beta(T-t)} - 1 - \beta(T-t))}{\beta^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Iz definicije cijene obveznice bez kupona imamo da je:

$$P(t,T) = exp(-A(t,T) - B(t,T)r(t)).$$

4.2.2 CIR model

Ovaj model ima jedinstveno nenegativno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^*, \;\; r(0) \geq 0.$$

Ako je $b \geq \frac{\sigma^2}{2}$ tada je $r > 0$ kada je $r(0) > 0$.
Imamo da je sada 4.7:

$$\partial_t B(t,T) = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t,T) - \beta B(t,T) - 1, \;\; B(T,T) = 0.$$

Ovo je Riccatijeva diferencijalna jednadžba te znamo egzaktno rješenje:

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma},$$

pri čemu je $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$. Iz toga integriranjem slijedi:

$$A(t,T) = -\frac{2b}{\sigma^2} log\left(\frac{2\gamma e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right).$$

Iz definicije cijene obveznice bez kupona imamo da je:

$$P(t,T) = exp(-A(t,T) - B(t,T)r(t)).$$

Poglavlje 5

Terminske mjere

U ovom poglavlju ćemo umjesto ne-rizičnih instrumenata promatrati $T-$obveznice. Standardni numerarij (američki dolar, euro i sl.) ćemo zamijeniti sa $T-$obveznicom. Ovaj način zamjene numerarija se najčešće koristi u praksi kod vrednovanja opcija.

5.1 T-obveznica kao numerarij

Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera Q za tržište obveznica kod kojeg je proces cijena $T-$obveznice $Q-$martingal. Neka je W^* Brownovo gibanje i neka je $T > 0$ fiksno. Budući da je $P(0,T)B(T) > 0$ i

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{1}{P(0,T)B(T)}\right] = \mathbb{E}_Q\left[\frac{P(T,T)}{P(0,T)B(T)}\right],$$

možemo definirati ekvivalentnu vjerojatnosnu mjeru $Q^T \approx Q$ na $\mathcal{F}_T$ sa

$$\frac{dQ^T}{dQ} = \frac{1}{P(0,T)B(T)}.$$

Za $t \leq T$ imamo:

$$\frac{dQ^T}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}_Q\left[\frac{dQ^T}{dQ}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{P(t,T)}{P(0,T)B(T)}.$$

Definicija 22. *Kažemo da je Q^T $T-$terminska mjera.*

Diskontirana cijena $T-$obveznice zadovoljava relaciju

$$\frac{P(t,T)}{B(t)} = P(0,T)\mathcal{E}_t(v(\cdot,T)\circ W^*),\ \ t \leq T.$$

Slijedi da je

$$\frac{dQ^T}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t(\nu(\cdot, T) \circ W^*), \ t \leq T.$$

Sada koristimo teorem 6 te imamo da je:

$$W^T(t) = W^*(t) - \int_0^t \nu(s, T)ds, \ t \leq T,$$

Q^T-Brownovo gibanje. Sljedeća lema nam daje svojstvo $T-$terminske mjere kod financijskog modeliranja.

Lema 8. *Za proizvoljan* $S > 0$*, proces cijena* $T-$*obveznice diskontirane* $S-$*obveznicom:*

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \frac{P(0, S)}{P(0, T)}\mathcal{E}_t(\sigma_{S,T} \circ W^T)$$

jest Q^T-*martingal gdje je*

$$\sigma_{S,T}(t) = -\sigma_{T,S}(t) = \nu(t, S) - \nu(t, T) = \int_S^T \sigma(t, u)du.$$

Osim toga, $S-$ *i* $T-$*terminske mjere su u vezi danoj relacijom:*

$$\frac{dQ^S}{dQ^T}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t, S)P(0, T)}{P(t, T)P(0, S)} = \mathcal{E}_t(\sigma_{S,T} \circ W^T), \ t \leq S \wedge T.$$

Dakle, time smo dobili cijelu "kolekciju" ekvivalentnih martingalnih mjera jer svaki Q^T odgovara drugom numerariju, tj. drugoj $T-$obveznici.

Budući da je Q u vezi sa ne-rizičnim instrumentom, često je zovemo i ne-rizična mjera.

$T-$terminske mjere daju sljedeću formulu za vrednovanje opcija. Neka je X $T-$opcija takva da je

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{|X|}{B(T)}\right] < \infty.$$

Tada je njezina cijena u vremenu $t \leq T$ dana sa:

$$\pi(t) = B(t)\mathbb{E}_Q\left[\frac{X}{B(T)}|\mathcal{F}_t\right].$$

Kako bismo izračunali $\pi(t)$ moramo znati zajedničku distribuciju $\frac{1}{B(t)}$ i X, te integrirati u odnosu na tu distribuciju. Dakle, morali bismo rješavati dvostruki integral, što je teško.

Kada bi $\frac{1}{B(t)}$ i X bile nezavisne u odnosu na Q uvjetno sa $\mathcal{F}_t$, imali bismo:

$$\pi(t) = P(t,T)\mathbb{E}_Q\left[X|\mathcal{F}_t\right],$$

što je puno jednostavnije. Naime, trebali bismo izračunati samo jedan integral, tj. $\mathbb{E}_Q\left[X|\mathcal{F}_t\right]$ i cijenu $P(t,T)$ možemo promatrati u vremenu t odnosno ne moramo je računati unutar modela.

U našem slučaju imamo da su $\frac{1}{B(t)}$ i X nezavisne u odnosu na Q^T, tj. relacija iznad je dobro definirana u odnosu na Q^T. O tome govori sljedeća tvrdnja.

Teorem 9. *Neka je X $T-$opcija takva da vrijedi $\mathbb{E}_Q\left[\frac{|X|}{B(T)}\right] < \infty$. Tada je $\mathbb{E}_{Q^T}\left[|X|\right] < \infty$ i vrijedi*

$$\pi(t) = P(t,T)\mathbb{E}_{Q^T}\left[X|\mathcal{F}_t\right].$$

Očekivanje u odnosu na terminsku mjeru dobro definirano, tj. da je terminski tečaj $f(t,T)$ upravo uvjetno očekivanje u odnosu na $T-$terminsku mjeru od budućeg promptnog tečaja $r(T)$.

Dakle, imamo da je:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)dW^T(s).$$

Ako je $\sigma(\cdot,T) \in \mathcal{L}^2$ (drugi moment postoji i konačan je), onda je $f(t,T), \quad t \leq T$ Q^T-martingal.

Lema 9. *Ako je $\sigma(\cdot,T) \in \mathcal{L}^2$, onda je očekivanje u odnosu na $T-$terminsku mjeru dobro definirano sa*

$$f(t,T) = \mathbb{E}_{Q^T}\left[r(T)|\mathcal{F}_t\right],\ t \leq T.$$

5.2 Vrednovanje opcije u odnosu na obveznicu

U ovom poglavlju promatramo opciju na $S-$obveznice sa datumom dospijeća $T < S$ i cijenom izvršenja ugovora K.

Opcije se mogu koristiti kao poluga *(eng., leverage)* za povećanje izloženosti ulagača prema cijeni temeljnog instrumenta ili za zaštitu *(eng., hedging)* od promjene cijene temeljnog instrumenta kako bi se smanjili gubici prilikom pada vrijednosti. U našem slučaju je opcija takva da je u trenutku T imamo pravo kupiti ili prodati po cijeni K.

Razlikujemo dvije vrste opcija: opcija na kupnju *(eng., call option)* i opcija na prodaju *(eng., put opcija)*. Call opcija daje njenom kupcu, u zamjenu za plaćenu premiju, pravo kupnje od prodavača, opcije ugovorenih vrijednosnih papira ili druge vezane imovine po izvršnoj cijeni u opciji na određeni dan (europski tip call opcije) ili kroz određeno razdoblje do istjecanja njena važenja (američki tip call opcije). Pravo iz opcije iskoristit će njezin kupac u slučaju da je tržišna cijena vrijednosnog papira veća od izvršne cijene u opciji. Na taj način vlasnik opcije može ostvariti kapitalni dobitak razlikom između veće tržišne cijene vrijednosnog papira kojeg stječe uz manju izvršnu cijenu. S druge strane, sastavljač opcije pretrpjet će određeni gubitak. Put opcija daje njenom vlasniku pravo prodaje ugovorenih vrijednosnih papira ili neke druge vezane imovine po izvršnoj cijeni u opciji na određeni dan ili tijekom određenog razdoblja. Pravo prodaje vezane imovine (vrijednosnih papira) stječe kupac put opcije u zamjenu za premiju koju plaća prodavaču. Ne radi se o obligaciji jer će kupac opcije iskoristiti svoje pravo prodaje u slučaju ako cijena vezane imovine padne ispod izvršne cijene u put opciji. Na taj će način kupac opcije ostvariti određeni kapitalni dobitak od prodaje vezane imovine (vrijednosnih papira) po cijeni višoj od tekuće tržišne cijene.

Arbitražna cijena call opcije u trenutku $t = 0$ je dana sa

$$\pi = \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(P(T,S) - K)^+\right].$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\pi &= \mathbb{E}_Q\left[B(T)^{-1}(P(T,S) - K)^+\chi_{P(T,S)\geq K}\right] - K\mathbb{E}_Q\left[B(T)^{-1}\chi_{P(T,S)\geq K}\right]\\ &= P(0,S)\mathbb{Q}^S\left[P(T,S) \geq K\right] - KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left[P(T,S) \geq K\right].\end{aligned}$$

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\mathbb{Q}^S\left[P(T,S)\geq K\right]=\mathbb{Q}^S\left[\frac{P(T,T)}{P(T,S)}\leq\frac{1}{K}\right],$$

$$\mathbb{Q}^T\left[P(T,S)\geq K\right]=\mathbb{Q}^T\left[\frac{P(T,S)}{P(T,T)}\geq K\right].$$

Prema lemi 8 sada promatramo modele gdje je $\sigma_{T,S}$ deterministička funkcija pa su time $\frac{P(T,T)}{P(T,S)}$ i $\frac{P(T,S)}{P(T,T)}$ lognormalno distribuirane slučajne varijable u odnosu na respektivne terminske mjere.

Dakle, pretpostavimo da je

$$\sigma(t,T)=(\sigma_1(t,T),\ldots,\sigma_d(t,T)) \tag{5.1}$$

deterministička funkcija varijable (t,T) te je terminski tečaj $f(t,T)$ normalno distribuiran.

Teorem 10. *Neka je $\sigma(t,T)=(\sigma_1(t,T),\ldots,\sigma_d(t,T)$ deterministička funkcija varijable (t,T) te neka je terminski tečaj $f(t,T)$ normalno distribuiran. Tada je cijena opcije na obveznicu*

$$\pi=P(0,S)\phi(d_1)-KP(0,T)\phi(d_2),$$

pri čemu je ϕ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe i

$$d_{1,2}=\frac{log\left[\frac{P(0,S)}{KP(0,T)}\right]\pm\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}{\sqrt{\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}}.$$

Dokaz. Dovoljno je uočiti da su

$$\frac{log\frac{P(T,T)}{P(T,S)}-log\frac{P(0,T)}{P(0,S)}+\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}{\sqrt{\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}}$$

i

$$\frac{log\frac{P(T,S)}{P(T,T)}-log\frac{P(0,T)}{P(0,S)}+\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}{\sqrt{\int_0^T\left\|\sigma_{T,S}(s)\right\|^2ds}}$$

standardne normalno distribuirane slučajne varijable u odnosu na terminske mjere $\mathbb{Q}^S$ i $\mathbb{Q}^T$ respektivno. □

Poglavlje 6

Primjer

U ovom poglavlju koristimo Vasičekov model za vrednovanje cijene ATM put opcije. Pratimo primjer iz [1].

Vasičekov model kratkoročnih stopa ($d = 1$):

$$dr = (b + \beta r)dt + \sigma dW^*$$

ima rješenje dano relacijom (3.9). Budući da je volatilnost deterministička funckija varijable (t, T) slijedi da možemo primijeniti teorem 10. U našem primjeru ćemo koristiti sličan oblik formule, ali za put opciju.

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}
\pi &= \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}(K - P(T,S))^+\right] \\
&= K\mathbb{E}_Q\left[B(T)^{-1}\chi_{[K \geq P(T,S)]}\right] - \mathbb{E}_Q\left[B(T)^{-1}P(T,S)\chi_{[K \geq P(T,S)]}\right] \\
&= KP(0,T)\mathbb{Q}^T\left[K \geq P(T,S)\right] - P(0,S)\mathbb{Q}^S\left[K \geq P(T,S)\right]. \\
&= KP(0,T)\phi(-d_2) - P(0,S)\phi(-d_1).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Dobivenom formulom ćemo vrednovati cijenu put opcije. Prije svega je potrebno izračunati kratkoročnu stopu r koristeći (3.9). Zadani su koeficijenti $\beta = -0.86$, $\dfrac{b}{|\beta|} = 0.09$, $\sigma = 0.0148$ i $r(0) = 0.08$. Promatrano vrijeme $t_0 = 0$ (danas), $T_0 = \dfrac{1}{4}$ (prvo vrijeme dospijeća ugovora) i $T_i - T_{i-1} = \dfrac{1}{4}$, za $i = 1, \ldots, 119$. Posljednje vrijeme dospijeća je $T_{119} = 30$.

Koristili smo kod u Matlabu[1].

```
beta = -0.86;
sigma = 0.0148;
b = 0.09*abs(beta);
r_e = zeros(122,1);
r_e(1) = 0.08;
r_i = zeros(122,1);
r_i(1) = 0.08;
K = 1;
d_1 = 0;
d_2 = 0;

h = 0.25;
T = 30;
S = T + h;
```

Nakon što smo definirali sve zadane koeficijente i vremenski tok ugovora koristimo teorem 10 i izvedenu formulu za cijenu put opcije (5.1).

Teorem 8 i relacije (3.10), (3.11) nam daju formule kako računamo funkcije A i B u Vasičekovom (afinom) modelu.

U poglavlju *Difuzija kratkoročnih modela* 2.3, dajemo jednadžbu ročne strukture te imamo da je cijena $T-$obveznice $P(t,T)$ oblika $P(t,T) = F(t,r(t);T)$.

```
A_T = zeros(122,1);
A_T(1) = sigma^2 * (4*exp(beta*T) - exp(2*beta*T) - 2*beta*T -3 )
         / (4*beta^3) + (b*(exp(beta*T) - 1 - beta*T)) / (beta^2);
B_T = zeros(122,1);
B_T(1) = (exp(beta*T) - 1) / beta;
P_T = zeros(122,1);
P_T(1) = exp(-A_T(1) - B_T(1)*r_e(1)); % staviti r_i(1) za implicitnog Eulera
```

[1]MATLAB and Statistics Toolbox Release 2010b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States., licencu izdaje Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

```
A_S = zeros(122,1);
A_S(1) = sigma^2 * (4*exp(beta*S) - exp(2*beta*S) - 2*beta*S -3 )
        / (4*beta^3) + (b*(exp(beta*S) - 1 - beta*S)) / (beta^2);
B_S = zeros(122,1);
B_S(1) = (exp(beta*S) - 1) / beta;
P_S = zeros(122,1);
P_S(1) = exp(-A_S(1) - B_S(1)*r_e(1)); % staviti r_i(1) za implicitnog Eulera

% integral od sigma_{T,S}(s) po [0,T]
integral = sigma^2 * (abs(exp(beta*T) - exp(beta*S))^2) * (exp(-2*beta*T) - 1)
           / (abs(beta)^2 * 2 * (-beta));


cijena = zeros(122,1);
```

Za računanje kratkoročne stope r koristimo Eulerovu metodu za numeričko rješavanje inicijalnog problema za običnu diferencijalnu jednadžbu. Odlučili smo se za eksplicitnu metodu te je implicitna dana u komentaru koda.

Imamo problem oblika

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq t_0 \tag{6.2}$$
$$y(t_0) = y_0$$

Riješiti problem (5.2) numerički znači izračunati aproksimacije vrijednosti $y(t_i)$ u konačno točaka $t_1, \ldots, t_n$ u zadanom intervalu $[t_0, T]$. Eulerova metoda je primjer *eksplicitne jednokoračne metode* - vrijednost y_{i+1} je dobivena eksplicitnim izrazom koji koristi informaciju samo iz koraka t_i. Diskretne vrijednosti $t_1, \ldots, t_n$ biramo ekvidistantnim koracima $h = t_{i+1} - t_i$ za sve $i = 0, \ldots, n$. Slijedi pseudokod $i-$te iteracije:

$[y] = Euler(f, y_0, h, n)$
for $i = 0, \ldots, n-1$ **do**
  $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$
end

Algorithm 1: Eulerova metoda

```
for i=1:120
    % eksplicitni Euler
```

```
    r_e(i+1) = h*b + r_e(i) + beta*h*r_e(i) + sigma*sqrt(h)*randn(1, 1);


    % implicitni Euler
    % r_i(i+1) = ( (h*b + r_e(i)) / (1-h*beta) ) + sqrt(h)*randn(1, 1);

    A_T(i+1) = sigma^2 * (4*exp(beta*(T-i*h)) - exp(2*beta*(T-i*h))
               - 2*beta*(T-i*h) -3 ) / (4*beta^3) + (b*(exp(beta*(T-i*h))
               - 1 - beta*(T-i*h))) / (beta^2);
    B_T(i+1) = (exp(beta*(T-i*h)) - 1) / beta;
    P_T(i+1) = exp(-A_T(i+1) - B_T(i+1)*r_e(i+1));


    A_S(i+1) = sigma^2 * (4*exp(beta*(S-i*h)) - exp(2*beta*(S-i*h))
               - 2*beta*(S-i*h) -3 ) / (4*beta^3) + (b*(exp(beta*(S-i*h))
               - 1 - beta*(S-i*h))) / (beta^2);
    B_S(i+1) = (exp(beta*(S-i*h)) - 1) / beta;
    P_S(i+1) = exp(-A_S(i+1) - B_S(i+1)*r_e(i+1));


    integral = sigma^2 * (abs(exp(beta*T) - exp(beta*S))^2) * (exp(-2*beta*T)
               - exp(-2*beta*i*h)) / (abs(beta)^2 * 2 * (-beta));

    d_1 = ( log(P_S(i+1) / (K*P_T(i+1))) + 0.5*integral ) / sqrt(integral);
    d_2 = ( log(P_S(i+1) / (K*P_T(i+1))) - 0.5*integral ) / sqrt(integral);

    cijena(i+1) = K * P_T(i+1) * normcdf(-d_2, 0, 1) - P_S(i+1)
                  * normcdf(-d_1, 0, 1);
end
```

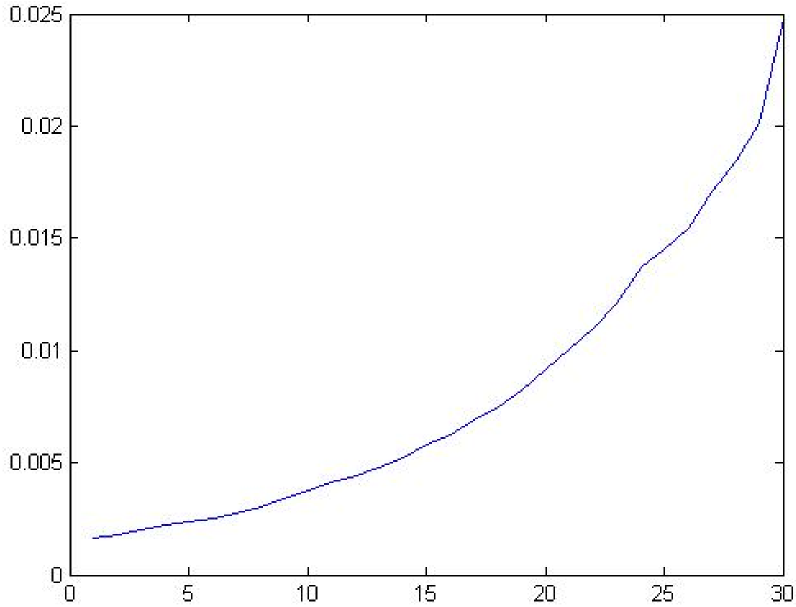
Crtamo graf dobivenih cijena 'vrednovane cijene opcije na temelju obveznice', slika 5.1.

```
graf = zeros(30, 1);

for i = 1:30
    graf(i) = cijena(1+4*i)
```

```
end

plot(1:30, graf)
```



Slika 6.1: ATM vrednovane cijene Vasičekovim modelom

Slijedi tablica dobivenih vrednovanih cijena.

```
graf =

    0.0017
    0.0018
    0.0020
    0.0023
    0.0024
    0.0026
```

```
0.0027
0.0030
0.0034
0.0038
0.0041
0.0044
0.0048
0.0052
0.0058
0.0062
0.0069
0.0075
0.0082
0.0091
0.0101
0.0110
0.0121
0.0137
0.0145
0.0154
0.0170
0.0185
0.0201
0.0248
```

Bibliografija

[1] Damir Filipović, *Term-Structure Models*, Springer, 2009.

[2] Ioannis Karatzas, Steven Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York 1991.

[3] Daniel Revuz, Marc Yor, *Continous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin 2005.

[4] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] Lixin Wu, *Interest Rate Modeling, Theory and Practice*, CRC Press, 2009.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo se bavili vrednovanjem financijskih instrumenata, preciznije vredovanjem opcije na temelju obveznice. Prvo poglavlje daje pregled, karakterizaciju te definicije osnovnih financijskih instrumenata. U drugom i trećem poglavlju navodimo glavne tvrdnje potrebne za razumijevanje arbitražne teorije Brownovog financijskog tržišta. Spomenuti su važni teoremi stohastičkog računa. Prvi stohastički modeli kamatnih stopa su bili modeli kratkoročnih stopa. Četvrto poglavlje daje uvod u difuzijske kratkoročne modele i analizu najvažnijih poznatih modela sa naglaskom na tzv. afine modele. U petom poglavlju promatramo $T-$obveznice. Standardni numerarij (američki dolar, euro i sl.) ćemo zamijeniti sa $T-$obveznicom. Ovaj način zamjene numerarija se u praksi koristi kod vrednovanja opcija te daje uvod u posljednje poglavlje. Šesto poglavlje daje primjer gdje koristimo Vasičekov model za vrednovanje cijene ATM put opcije.

Summary

In this master thesis we were working on estimation of financial instruments, precisely, bond option pricing. First chapter gives introduction, characterization and properties of the main financial instruments. In the second and third chapter we give main results necessary for understanding of arbitrage theory of Brownian financial markets. We annotate important theorems regarding stochastic calculus. First stochastic models were the short rate models. Fourth chapter gives introduction in the diffusion of short rate models and analysis of the Vasiček and CIR affine models. In the fifth chapter we observe $\boldsymbol{T}-$bonds. Standard numeraire (American dollar, euro etc.) we substitute with the $\boldsymbol{T}-$bond. Process of switching a numeraire is standard in the industry for bond option pricing and it is giving us an introduction into the last chapter. Sixth chapter is an example where we use Vasiček's model for ATM option pricing.

Životopis

Rođena sam 13. svibnja 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene V. gimnazije u Zagrebu, 2008. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Cleveland State University-u u Cleveland, Ohio. U listopadu 2009. godine nastavljam školovanje na PMF - Matematičkom odjelu. U rujnu 2013. upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu.

Tijekom svog osnovnog i srednjeg obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz fizike, matematike i povijesti. Bila sam članica juniorske i seniorske reprezentacije Hrvatske u plivanju te polufinalistica Europskog Juniorskog prvenstva 2006. godine. Državni rekord u disciplini 50m slobodno sam ostvarila 2006. godine.

Za vrijeme studija sudjelovala sam u organizaciji projekta "Noć istraživača" 2013. kao član studentske udruge PMF-a PRIMUS. Sudjelovala sam u organizaciji te kao predavač na "Ljetnoj Tvornici Znanosti" na Mediteranskom Institutu u Splitu 2013. godine. Iste godine taj projekt osvaja Google RISE nagradu za popularizaciju prirodnih znanosti i matematike. Kao član novinarske sekcije PMF-a, popularno-znanstvenog časopisa PRIMAT, pomažem oko prvih izdanja časopisa. U siječnju 2013. godine objavljen mi je stručni rad "Izometrije u Escherovim radovima" u znanstveno-stručnom časopisu Hrvatskog društva za geomeriju i grafiku KOG.

2014. godine radim kao analitičar rizika investicijskih portfelja u timu investicijskih strategija u Deutsche Bank AG, Frankfurt am Main. Tamo sudjelujem na znanstvenom projektu "State Space Model and Affine Term-Structure Models Applied on Non-core European Government Bonds".

Na fakultetu sam bila demonstrator iz kolegija: Eukldiski prostori, Seminar: Matematika izvan matematike, Konstruktivne metode u geometriji, Primijenjena matematička analiza, Vjerojatnost i statistika.