SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Madjerčić

SPRAGUE-GRUNDYJEVA TEORIJA NEPRISTRANIH KOMBINATORNIH IGARA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, srpanj, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu sam se potrudila čitatelju približiti Sprague-Grandyjevu teoriju nepristranih igara. Proučavat ćemo kombinatorne igre namijenjene dvojici igrača koji igraju naizmjenično, s konačnim skupom pozicija i s pravilima koja za oba igrača i za svaku poziciju definiraju na koje druge pozicije se mogu pomaknuti.

Kombinatorne igre su igre sa savršenom informacijom, nisu dozvoljeni nikakvi slučajni, skriveni ili istovremeni potezi. Time su isključene sve igre koje uključuju bacanje kockica, dijeljenje karata i igre kao što su potapanje brodova i kamen-škare-papir.

Također, sve igre koje ćemo proučavati će biti nepristrane. U takvom tipu igre skup mogućih poteza ovisi samo o trenutnoj poziciji igre, a ne i o tome koji od igrača je na potezu. Takve igre određene su skupom pozicija, uključujući i početnu poziciju, i igračem koji je na potezu. Igrači igraju naizmjenično, a igra se kreće s jedne pozicije na drugu, sve dok se ne dostigne završna pozicija. Završna pozicija je ona pozicija s koje se nije moguće pomaknuti. Bavit ćemo se samo onim igrama koje završavaju u konačno mnogo poteza bez obzira na to kako su igrane.

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje daje osnovan uvid kao i definiciju kombinatorne igre te na nekoliko razmjerno jednostavnih primjera pokazuje klasifikaciju pozicija. Postoje dva tipa pozicija, one pobjedničke za prethodnog igrača tj. $P - pozicije$ i one pobjedničke za sljedećeg igrača tj. $N - pozicije$. Klasifikacija pozicija detaljno je objašnjena te potkrijepljena tablicama i slikama za igre "Uzmi", "Reci 100", "Corner the Lady" i "Chomp".

Drugo poglavlje, u kojem je napravljena osnovna Sprague-Grundyjeva teorija, centralno je poglavlje ovog rada. Na početku poglavlja pokazano je kako se igra može reprezentirati pomoću usmjerenog grafa na način da vrhovi reprezentiraju moguće pozicije u igri, a bridovi moguće poteze svakog od igrača. Zatim je dana definicija Sprague-Grundyjeve funkcije, koja je od iznimne važnosti jer daje više informacija od same klasifikacije pozicija kao P ili N. Vjerojatno najbitniji rezultat dokazan u radu je Sprague-Grundyjev teorem koji nam uvelike olakšava računanje Sprague-Grundyjeve funkcije za zbroj kombinatornih igara. Zbroj kombinatornih igara je kombinatorna igra sastavljena od više igara koje se igraju odjednom na način da igrači biraju u kojoj će igri napraviti potez u skladu s pravilima igre. U drugom je poglavlju također obrađena igra "Nim", jedna od najstarijih poznatih kombinatornih igara i to u dvije različite varijante te je obrađena skupina igara pod nazivom "igre okretanja". Zadnji bitan rezultat dokazan u drugom poglavlju je Tartanski teorem koji govori o tome kako se računa vrijednost Sprague-Grundyjeve funkcije za dvodimenzionalnu igru okretanja.

Treće poglavlje posvećeno je igri "Jednobojni Hackenbush". Iako postoje brojne varijante igre objedinjene nazivom "Hackenbush", mi smo se orijentirali na Jednobojni Hackenbush kako je jedino ta varijanta nepristrana. Igra se na neusmjerenom grafu kojem su svi bridovi nekim putem povezani sa specijalnim pravcem, dnom. Potez se sastoji od micanja nekog od bridova te micanja svih ostalih bridova koji više nisu povezani sa dnom. Kako to obično u matematici ide, krenuli smo određivati Sprague-Grundyjevu vrijednost prvo za najjednostavnije primjere, preko onih složenijih pa do u potpunosti općenitih. Prvo smo određivali Sprague-Grundyjevu vrijednost za graf koji se sastoji od nekoliko bambusovih štapova, zatim za graf sastavljen od nekoliko stabala da bi na kraju određivali Sprague-Grundyjevu vrijednost za općeniti graf. Kako nam do tada obrađena teorija nije bila dovoljna u trećem smo poglavlju iskazali i dokazali dva principa, "princip zamjene" i "princip stapanja", pomoću kojih je moguće odrediti Sprague-Grundyjevu vrijednost proizvoljnog grafa. Primjena principa detaljno je objašnjena i potkrijepljena slikama na konkretnom primjeru.

U zadnjem poglavlju napravljena je računalna analiza igre Chomp. Chomp se igra na pravokutnoj ploči sastavljenoj od $m \times n$ kvadratića. Potez se sastoji od odabira kvadratića i uzimanja svih kvadratića s desne i s donje strane odabranog kvadratića. Pomoću programa MatLab prvo je napravljena klasifikacija pozicija kao onih tipa P i onih tipa N za različite dimenzije igre te su određeni početni pobjednički potezi za pojedine dimenzije. Iako program radi za proizvoljne dimenzije $m \times n$, mi smo naveli rezultate za dimenzije $m \times n$ gdje je $m \leq 8$, $n \leq 10$. K. Thompson i M. Beeler prvi su otkrili kako pobjednički potez ne mora biti jedinstven i to na primjeru Chompa 8×10, što smo i mi potvrdili dobivenim rezultatima. Zadnje što smo napravili, uz kod dobiven modifikacijom onog za klasifikaciju pozicija kao P i N, je Sprague-Grundyjeva klasifikacija pozicija. Rezultate smo zapisali u dvije tablice od kojih jedna pokazuje najveći Sprague-Grundyjev broj koji se pojavljuje za igru dimenzije $m \times n$, $m \leq 8$, $n \leq 10$, a druga pokazuje koliko puta se pojavljuje koji Sprague-Grundyjev broj za dimenziju 4×7, kako je to dimenzija u kojoj se Chomp najčešće igra.

Primjena sve iznesene teorije detaljno je objašnjena na konkretnim primjerima te su svi primjeri obilno potkrijepljeni slikama, kako bi razumijevanje teorije bilo što zanimljivije i bezbolnije.

Nadam se da mi nećete zamjeriti ako Vam ukradem još trenutak pažnje kako bih zahvalila mentoru na svoj pomoći i iskazanom strpljenju jer bez njega ovaj rad ne bi bio ovakav kakav jest. Nadalje, zahvaljujem svima koji su bili uz mene i podržavali me, ne samo za vrijeme nastajanja ovog rada, nego i za vrijeme cijelokupnog studiranja. Za kraj se zahvaljujem svim svojim profesorima koji su sve ove godine nesebično dijelili svoje znanje i poticali me na daljnje, samostalno istraživanje svijeta matematike.

Poglavlje 1

Osnove nepristranih kombinatornih igara

U ovom poglavlju definirat ćemo kombinatornu igru te objasniti osnovne pojmove vezane za promatranu teoriju. Cilj nam je familijarizirati se s matematičkim modelima stvarnih igara te s načinom vrednovanja pozicija. Tek u idućem poglavlju ćemo početi sa strogom matematičkom teorijom te ćemo igre koje nas zanimaju modelirati u kontekstu teorije grafova. Ipak, lakše će nam biti savladati općenitu teoriju ako najprije opisno prokomentiramo osnove te navedemo i analiziramo nekoliko konkretnih primjera igara. Neke od njih su preuzete iz opsežne knjige u četiri sveska [16].

1.1 Što je kombinatorna igra?

Definicija 1.1.1. *Kombinatorna igra je igra za koju vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) *Igru igraju dva igrača.*

(2) *Dan je skup, najčešće konačni, mogućih pozicija igre.*

(3) *Za svakog od igrača i za svaku moguću poziciju pravila igre određuju dozvoljene poteze, tj. mogućnosti prelaska na nove pozicije.*

(4) *Igrači igraju naizmjenično.*

(5) *Igra završava kada se dostigne pozicija s koje se nije moguće pomaknuti.*

(6) *Igra uvijek završava u konačno mnogo koraka.*

Valja napomenuti da igrači u svakom trenutku posjeduju potpunu informaciju u vezi igre te da ne dozvoljavamo nikakve elemente slučajnosti. Radi toga se ovaj dio općenite teorije igara naziva *kombinatornim.*

Definicija 1.1.2. *Igra je nepristrana ako i samo ako je za svaku trenutnu poziciju skup svih poteza koje može odigrati prvi igrač jednak skupu svih poteza koje može odigrati drugi igrač.*

Jednostavnije rečeno, ako pravila ne rade razliku među igračima nego oba igrača imaju iste moguće poteze na svakoj od pozicija, igra se naziva nepristranom (eng. *impartial*). U ovom radu ćemo proučavati isključivo takve igre.

Kažemo da se igra vodi po *normalnim pravilima* ako pobjeđuje igrač koji je posljednji odigrao potez, tj. gubi igrač koji potez više ne može odigrati.

1.2 Vrste pozicija

U nepristranim kombinatornim igrama pozicije dijelimo na dva tipa, P-pozicije i N-pozicije. *P-pozicije* su one pozicije koje su pobjedničke za prethodnog (eng. *Previous*) igrača, dok su *N-pozicije* one koje su pobjedničke za sljedećeg (eng. *Next*) igrača. U igrama koje mi proučavamo je, u načelu, moguće odrediti kojem tipu pripada pojedina pozicija korištenjem sljedeće procedure počevši od završnih pozicija:

(Korak 1) Označi sve završne pozicije kao P-pozicije.

(Korak 2) Označi kao N-pozicije sve pozicije iz kojih se u jednom potezu može doći u prethodno označene P-pozicije.

(Korak 3) Nađi sve pozicije za koje potezi vode jedino u N-pozicije i označi takve pozicije kao P-pozicije.

(Korak 4) Ako još ima neoznačenih pozicija, vrati se na Korak 2.

Što smo postigli gore opisanim algoritmom? Rekurzivno smo podijelili sve moguće pozicije igre u dvije klase: P-pozicije i N-pozicije. Prema samoj konstrukciji ta podjela ima sljedeća svojstva:

(1) Sve završne pozicije su P-pozicije.

(2) Sa svake N-pozicije postoji barem jedan dopušteni pomak na P-poziciju.

(3) Sa svake P-pozicije svaki dopušteni pomak vodi na N-poziciju.

Preostaje vidjeti da su sve pozicije označene s P doista dobitne za igrača koji je netom igrao, a pozicije označene s N dobitne za igrača koji je na potezu. To ćemo dokazati u odjeljku 2.1, kada ćemo strogo definirati igre koje nas zanimaju i reprezentirati ih pomoću usmjerenih grafova.

Koja je sada efektivna strategija kod igranja? Svakom igraču je cilj igrati poteze koji dovode igru u P-pozicije, upravo zato jer su završne pozicije takve. Kod savršenog igranja obojice igrača, igrač koji ima pobjedničku strategiju će uvijek prevoditi igru iz N-pozicije u neku od dostupnih P-pozicija, a takva mora postojati prema svojstvu (2). Njegov protivnik u principu nema izbora, nego prevodi igru iz P-pozicija u N-pozicije, jer je tako jedino može zbog svojstva (3).

O tipu početne pozicije ovisi kakva je globalno cijela igra:

- Ako je početna pozicija tipa N, onda igrač koji igra prvi ima strategiju za pobjedu.
- Ako je početna pozicija tipa P, onda igrač koji igra drugi ima strategiju za pobjedu.

Primijetimo da zbog konačnosti igre jedan od igrača mora imati pobjedničku strategiju, ali je ponekad teško utvrditi koji od njih, a još teže eksplicitno naći tu strategiju.

1.3 Što znači "riješiti" igru?

Za igre između dva igrača postoje tri stupnja riješivosti:

(1) super slaba riješenost,

(2) slaba riješenost,

(3) potpuna riješenost.

Igra je *super slabo riješena* ako je samo poznato koji od igrača (bilo prvi, bilo drugi) ima strategiju za pobjedu. Odličan primjer igre koja je samo super slabo riješena je igra Chomp za općenite dimenzije $m \times n$, koju ćemo proučavati u odjeljku 1.7.

Slaba riješenost igre znači da je poznata strategija za početnu poziciju, to jest da postoji algoritam koji jednom od igrača osigurava pobjedu s početne pozicije. Drugim riječima, igra je slabo riješena ako postoji barem jedna u potpunosti savršena igra sa dokazom da je svaki potez optimalan za igrača koji ga radi.

Potpuno riješena igra je ona igra za koju su poznate strategije za svaku moguću poziciju i za oba igrača, to jest postoji algoritam koji osigurava savršenu igru sa bilo koje pozicije, čak i ako igrači do tada nisu igrali optimalno. Jedne od najpoznatijih potpuno riješenih igara su "Connect 4" (u [1] i [3]) i igra Nim o kojoj će biti riječi u odjeljku 2.6.

Pojam *savršena igra* odnosi se na strategiju koja vodi ka pobjedi igrača bez obzira na poteze suparnika.

1.4 Primjer igre "Uzmi"

Do sada naučenu teoriju iskoristit ćemo za analizu jednostavne kombinatorne igre koju ćemo nazvati *Uzmi*. Pravila su sljedeća:

(1) Igru igraju dva igrača. Zovemo ih *igrač 1* i *igrač 2*.

(2) Igra se sastoji od $n \in \mathbb{N}$ žetona poslaganih na sredini stola.

(3) Potez se sastoji od micanja barem jednog, a najviše pet žetona sa hrpe.

(4) Igrači igraju naizmjenično, a igrač 1 započinje igru.

(5) Igrač koji makne zadnji žeton pobjeđuje.

Uzmimo za primjer da je n=17. Igru ćemo analizirati od kraja prema početku.

Ako je ostalo ostala samo jedan, dva, tri, četiri ili pet žetona, igrač koji igra sljedeći pobjeđuje uzimanjem svih žetona. Stoga te pozicije dobivaju oznaku N.

Pretpostavimo da je ostalo šest žetona. Tada igrač koji se miče sljedeći mora ostaviti jedan, dva, tri, četiri ili pet žetona na hrpi i njegov protivnik će biti u mogućnosti pobijediti. Preostalih šest žetona su gubitak za igrača koji je sljedeći na potezu, a dobitak za prethodnog igrača pa je to pozicija tipa P.

Sa sedam, osam, devet, deset ili jedanaest preostalih žetona, igrač koji igra sljedeći može pobijediti micanjem onoliko žetona koliko je potrebno maknuti da bi preostalo šest žetona.

Sa dvanaest preostalih žetona, sljedeći igrač na potezu mora ostaviti sedam, osam, devet, deset ili jedanaest, te prethodni igrač pobjeđuje.

Primjećujemo da su pozicije sa 0, 6 i 12 žetona P-pozicije.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
P	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N

Početna pozicija je tipa N, pa igrač koji igra prvi ima strategiju za pobjedu. Kako kod savršenog igranja igrač koji ima strategiju za pobjedu uvijek prevodi igru iz N-pozicije u P-poziciju, optimalan potez je uzeti pet žetona sa hrpe kako bi na hrpi ostalo 12 žetona, što je P-pozicija.

1.5 Primjer igre "Reci 100"

Analizirat ćemo još jednu jednostavnu kombinatornu igru koju ćemo nazvati *Reci 100*. Pravila su sljedeća: Dva igrača naizmjence govore brojeve. Kreće se od 0 i u svakom potezu igrač treba dodati broj od 1 do 10. Pobijedio je onaj koji kaže 100.

Igru ćemo analizirati od kraja prema početku.

Ako je zadnji rečeni broj 90 ili više, pobjeđuje igrač koji igra sljedeći tako da kaže 100. Pretpostavimo da je zadnji rečeni broj 89. Tada igrač koji je na potezu sljedeći mora dodati broj od 1 do 10 i njegov protivnik će biti u mogućnosti pobijediti. Zadnje rečeni broj 89 je gubitak za igrača koji je sljedeći na potezu, a dobitak za prethodnog igrača.

Ako je zadnje rečeni broj uključivo između 79 i 88, tada igrač koji igra sljedeći može pobijediti dodavanjem onog broja koji je potreban da dođe do broja 89.

Primjećujemo da su pozicije 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1, P-pozicije, dok su sve ostale pozicije N-pozicije.

0	1	2	3	$\cdots$	11	12	13	$\cdots$	$\cdots$	88	89	90	$\cdots$	100
N	P	N	N	$\cdots$	N	P	N	$\cdots$	$\cdots$	N	P	N	$\cdots$	P

Sada je jasno da želimo biti prvi igrač i da je optimalan potez reći 1, što je ciljana P pozicija.

1.6 Primjer igre "Corner the Lady"

Igra "Corner the Lady" se igra na ploči dimenzija 8×8. Figura dame postavlja se na neko od polja, a cilj je damu dovesti u donje lijevo polje pomičući se kao u šahu, za bilo koji broj polja, ali samo dolje, lijevo ili dolje-lijevo. Analizirajmo ovu igru za sve moguće početne položaje dame na ploči. Poziciju poistovjećujemo s poljem na kojem se nalazi dama i u to polje upisujemo tip pozicije: N ili P.

Završna pozicija je P-pozicija, a sve pozicije koje vode u tu P-poziciju su N-pozicije.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	N							N
7	N						N	
6	N					N		
5	N				N			
4	N			N				
3	N		N					
2	N	N						
1	P	N	N	N	N	N	N	N

Sada sve pozicije koje vode samo u N-pozicije označimo kao P-pozicije.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	N							N
7	N						N	
6	N					N		
5	N				N			
4	N			N				
3	N	P	N					
2	N	N	P					
1	P	N	N	N	N	N	N	N

Označimo sve pozicije koje vode u P-pozicije kao N-pozicije.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	N	N	N				N	N
7	N	N	N			N	N	N
6	N	N	N		N	N	N	
5	N	N	N	N	N	N		
4	N	N	N	N	N			
3	N	P	N	N	N	N	N	N
2	N	N	P	N	N	N	N	N
1	P	N	N	N	N	N	N	N

Ponovno označimo sve pozicije koje vode samo u N-pozicije kao P-pozicije.

8	N	N	N				N	N
7	N	N	N			N	N	N
6	N	N	N	P	N	N	N	
5	N	N	N	N	N	N		
4	N	N	N	N	N	P		
3	N	P	N	N	N	N	N	N
2	N	N	P	N	N	N	N	N
1	P	N	N	N	N	N	N	N
	a	b	c	d	e	f	g	h

Označimo sve pozicije koje vode u P-pozicije kao N-pozicije.

8	N	N	N	N		N	N	N
7	N	N	N	N	N	N	N	N
6	N	N	N	P	N	N	N	N
5	N	N	N	N	N	N	N	
4	N	N	N	N	N	P	N	N
3	N	P	N	N	N	N	N	N
2	N	N	P	N	N	N	N	N
1	P	N	N	N	N	N	N	N
	a	b	c	d	e	f	g	h

Preostale dvije pozicije su P-pozicije i time je naša igra u potpunosti riješena.

8	N	N	N	N	P	N	N	N
7	N	N	N	N	N	N	N	N
6	N	N	N	P	N	N	N	N
5	N	N	N	N	N	N	N	P
4	N	N	N	N	N	P	N	N
3	N	P	N	N	N	N	N	N
2	N	N	P	N	N	N	N	N
1	P	N	N	N	N	N	N	N
	a	b	c	d	e	f	g	h

Ako dama kreće s nekog od polja:

$$a1, c2, b3, f4, h5, d6, e8,$$

tada pobjeđuje drugi igrač, a inače pobjeđuje prvi igrač.

1.7 Primjer igre "Chomp"

Igra se na pravokutnoj čokoladnoj ploči sastavljenoj od $m \times n$ kockica. Igrači naizmjenično otkidaju čokoladu birajući kockicu i uz nju uzimajući sve što se nalazi sa njene desne i donje strane. Gornja lijeva kockica je otrovana te je izgubio onaj igrač koji ju pojede.

Ovu formulaciju igre je navodno izmislio poznati američki matematičar i ekonomist David Gale, dok joj je ime dao Martin Gardner u svojoj poznatoj kolumni *Matematičke igre* časopisa *Scientific American* [7]. Formulaciju pomoću djelitelja, koju ćemo navesti na kraju odjeljka, je još ranije publicirao Frederik Schuh [12].

Igra Chomp je primjer super slabo riješene igre. Lako se dokaže da za čokoladnu ploču bilo koje veličine, osim one 1×1, prvi igrač ima strategiju za pobjedu. Za dokaz se koristi argument krađe strategije.

Pretpostavimo, što možemo jer je igra konačna, da drugi igrač ima strategiju za pobjedu. Recimo da je prvi igrač uzeo samo donju desnu kockicu. Tada drugi igrač odigra svoj potez koji je dio pobjedničke strategije. Kada bi takav potez postojao, prvi igrač ga je mogao odigrati odmah na početku čime bi on imao pobjedničku strategiju, što je u kontradikciji s pretpostavkom da drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Stoga, prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

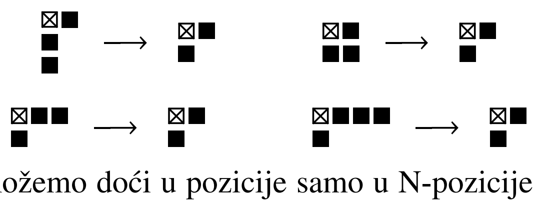
Pokazat ćemo na čokoladnoj ploči veličine 3×4 da čak i za tako male dimenzije nije trivijalno odrediti je li neka pozicija P-pozicija ili N-pozicija. Pozicije ćemo zapisivati kao uređenu trojku, gdje se na prvom mjestu nalazi broj kockica u prvom retku na drugom mjestu broj kockica u drugom retku, te na trećem mjestu broj kockica u trećem retku.

Pozicija (1,0,0) je završna pozicija te je stoga P-pozicija.

Iz pozicija (1,1,0), (1,1,1), (2,0,0), (3,0,0), (4,0,0) možemo u jednom koraku doći u P-poziciju (1,0,0) te su stoga to N-pozicije.

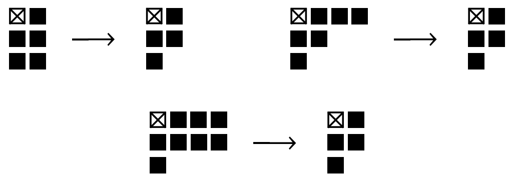
Iz pozicije (2,1,0) u jednom koraku možemo doći u pozicije (2,0,0) i (1,0,0) koje su obje N-pozicije, pa je zato pozicija (2,1,0) P-pozicija.

Iz pozicija (2,1,1), (2,2,0), (3,1,0), (4,1,0) možemo u jednom koraku doći u P-poziciju (2,1,0), što znači da su te pozicije N-pozicije.

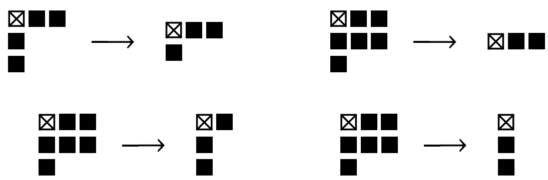


Iz pozicije (2,2,1) možemo doći u pozicije samo u N-pozicije (2,2,0), (2,1,1), (2,0,0), (1,1,1), pa je (2,2,1) P-pozicija.

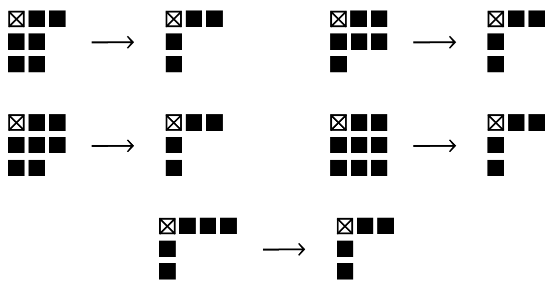
Iz pozicija (2,2,2), (4,2,1), (4,4,1) možemo doći u jednom koraku u P-poziciju (2,2,1), pa su te pozicije N-pozicije.



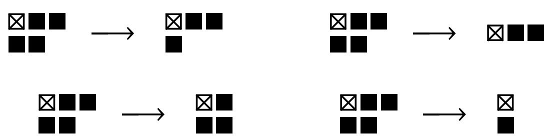
Iz pozicije (3,1,1) možemo u jednom koraku doći samo u N-pozicije (3,1,0), (3,0,0), (2,1,1), (1,1,1), pa je (3,1,1) P-pozicija.



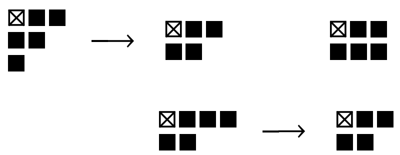
Iz pozicija (3,2,2), (3,3,1), (3,3,2), (3,3,3), (4,1,1) možemo doći u jednom koraku u P-poziciju (3,1,1), pa su to N-pozicije.



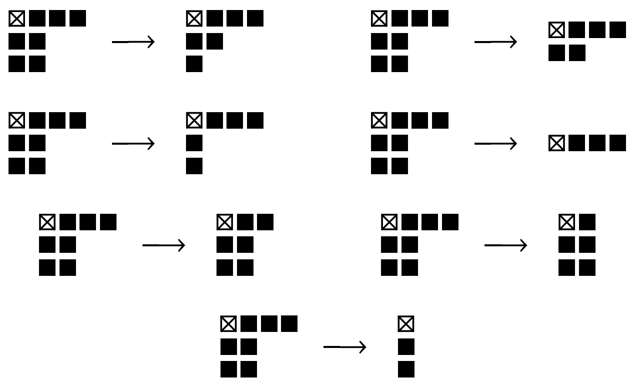
Iz pozicija (3,2,0) možemo u jednom koraku doći samo u N-pozicije (3,1,0), (3,0,0), (2,2,0), (1,1,0), pa je (3,2,0) P-pozicija.



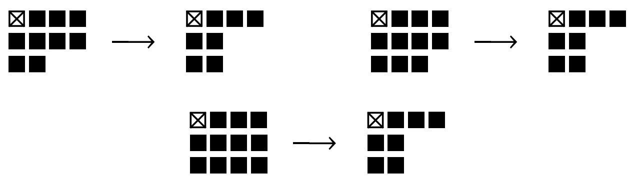
Iz pozicija (3,2,1), (3,3,0), (4,2,0) možemo u jednom koraku doći u P-poziciju (3,2,0), pa su te pozicije N-pozicije.



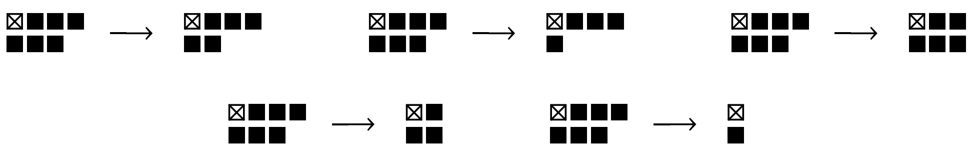
Iz pozicije (4,2,2) možemo u jednom koraku doći samo u N-pozicije (4,4,1), (4,4,0), (4,3,2), (4,2,2), (4,1,1), (3,3,2), (2,2,2), (1,1,1) te je stoga (4,2,2) P-pozicija.



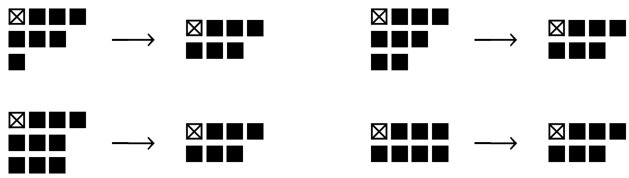
Iz pozicija (4,4,2), (4,4,3), (4,4,4) možemo u jednom koraku doći u P-poziciju (4,2,2), pa su te pozicije N-pozicije.



Iz pozicije (4,3,0) možemo u jednom koraku doći samo u N-pozicije (4,2,0), (4,1,0), (3,3,0), (2,2,0), (1,1,0) te je (4,3,0) P-pozicija.

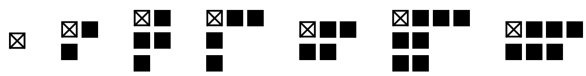


Iz pozicija (4,3,1), (4,3,2), (4,3,3), (4,4,0) možemo u jednom koraku doći u P-poziciju (4,3,0), pa su stoga te pozicije N-pozicije.



Analizom smo došli do zaključka da je svega sedam P-pozicija: (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1), (3,1,1), (3,2,0), (4,2,2), (4,3,0), dok je 27 pozicija tipa N, tj. onih u kojima pobjeđuje igrač koji je sljedeći na redu.

Slijede crteži svih P-pozicija.



Poglavlje 2

Sprague-Grundyjeva teorija

2.1 Reprezentacija igre pomoću usmjerenog grafa

U ovom odjeljku ćemo pokazati kako se igra može reprezentirati pomoću usmjerenog grafa. Često je korisno prikazati igru na maloprije naveden način, u kojem vrhovi reprezentiraju moguće pozicije u igri, a bridovi moguće poteze svakog od igrača. Igrači igraju na način da odabiru jedan od mogućih bridova sve dok ne dođu do neke od završnih pozicija u kojima igrač na potezu nema što odigrati. Dakle, igrač koji nema što odigrati je gubitnik. Slijedi formalna definicija usmjerenog grafa.

Definicija 2.1.1. *Usmjeren graf G je par (X,F), gdje je X neprazan skup vrhova (pozicija), a F funkcija koja za svaki $x \in X$ daje podskup od X, $F(x) \subseteq X$. Za dani $x \in X$, F(x) predstavlja pozicije u koje igrač može doći iz x, tzv. sljedbenike od x. Ako je F(x)=$\emptyset$, pozicija je završna.*

Igre kojima se u ovom radu bavimo mogu se igrati na takvom grafu $G = (X, F)$ upotrebom sljedećih pravila:

(1) Prvi igrač kreće sa pozicije $x_0 \in X$.

(2) Igrači igraju naizmjenično.

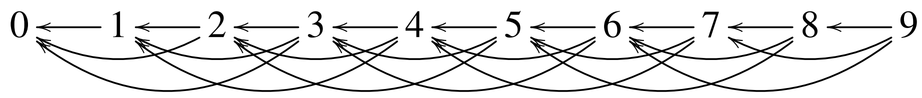
(3) U poziciji x igrač koji je na redu bira jednu od pozicija $y \in F(x)$.

(4) Igrač koji se nađe u završnoj poziciji gubi.

Put u usmjerenom grafu G je konačni niz vrhova $x_0, x_1, \ldots, x_m$ takav da je $x_i \in F(x_{i-1})$ za svaki $i = 1, 2, \cdots, m$. *Duljina* takvog puta je upravo broj m. *Ciklus* u G je put $x_0, x_1, \ldots, x_m$ takav da je $x_0 = x_m$.

Kako se bavimo samo konačnim igrama uvodimo restrikciju na gore definirane usmjerene grafove. U daljnjem tekstu pretpostavljamo da je G konačan (tj. skup X je konačan) i da nema ciklusa. Ti zahtjevi povlače svojstvo da svaki put u G ima duljinu manju ili jednaku n, pri čemu je $n = |X| - 1$. Efektivno to znači da će igra sigurno završiti u najviše n koraka, a obično i u mnogo manje. Zapravo se može definirati i analizirati igra i na beskonačnom grafu G u kojem ne postoji "beskonačno dugački" put; takav graf zovemo *progresivno konačan*. Ipak, mi ćemo ostati kod konačnih igara i grafova.

Za bolje razumijevanje definicije nacrtat ćemo usmjeren graf za igru "Uzmi" uz $n = 9$ i mogućnost uzimanja 1, 2 ili 3 žetona.



Promotrimo pobliže poziciju 4. S obzirom na to da moramo uzeti barem jedan žeton, a možemo ih uzeti najviše 3, iz pozicije 4 je moguće doći u pozicije 1, 2 i 3. Stoga strelice iz pozicije 4 pokazuju na pozicije 1, 2 i 3.

Vrhove usmjerenog grafa koji predstavlja neku općenitu igru možemo rekurzivno označiti na sljedeći način:

(Korak 1) Označi sa P sve vrhove $x \in X$ za koje je $F(x) = \emptyset$, tj. sve završne pozicije.

(Korak 2) Zaustavi algoritam ukoliko su označeni svi vrhovi iz X.

(Korak 3) Uzmi neki vrh $x \in X$ koji još nije označen, ali su označeni svi vrhovi iz $F(x)$.

(a) Ako neki vrh iz $F(x)$ ima oznaku P, dodijeli vrhu x oznaku N.

(b) Ako svaki vrh iz $F(x)$ ima oznaku N, dodijeli vrhu x oznaku P.

(Korak 4) Vrati se na Korak 2.

Pitanja koja se prirodno nameću su:

- Može li se nesmetano izvoditi svaki korak algoritma?
- Staje li algoritam nakon konačno mnogo prolaza?

Odgovor na oba pitanja je potvrdan. Diskutabilno je jedino možemo li svaki put provesti korak 3, tj. možemo li naći neoznačeni $x \in X$ čiji svi sljedbenici su već označeni. Naime, ako postoji neoznačeni $x_0 \in X$ i ako su svi njegovi sljedbenici već označeni, tada uzmemo $x = x_0$. Inače postoji $x_1 \in F(x_0)$ koji nije označen. Ako su pak svi sljedbenici od x_1 označeni, možemo uzeti $x = x_1$. Inače postoji neoznačeni $x_2 \in F(x_1)$, itd. Nastavljajući taj postupak možemo konstruirati po volji dugi put $x_0, x_1, x_2, \ldots$ u G, što je protivno našim pretpostavkama o grafu G. S druge pak strane, algoritam sigurno staje u najviše $|X|$ prolaza, jer se svaki put u koraku 3 označava neki novi vrh iz X.

Preostaje vidjeti da označavanje iz algoritma doista odgovara neformalnoj definiciji N i P pozicija iz Poglavlja 1. To ćemo dokazati induktivno, tj. koristeći tzv. *stukturalnu indukciju* po grafu G.

Propozicija 2.1.1. *Svaki vrh iz X kojem algoritam dodijeli oznaku N je dobitna pozicija za igrača koji je na potezu, a svaki vrh kojem algoritam dodijeli oznaku P je dobitna pozicija za igrača koji nije na potezu.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po prolascima algoritma, koji pak slijede strukturu grafa G.

Baza indukcije je Korak 1 algoritma. Svakoj završnoj poziciji je dodijeljena oznaka P, a po definiciji "pobjednika" znamo da su takve pozicije dobitne za igrača koji nije na potezu. Dakle, Korak 1 "ispravno" označava pozicije.

Prilikom nekog izvođenja Koraka 3 promatra se vrh $x \in X$, čiji svi sljedbenici su već bili razmatrani u prethodnim prolazima. Pretpostavimo da su svi prethodni prolazi ispravno označili pozicije, što posebno znači da tvrdnja propozicije vrijedi za sve vrhove $y \in F(x)$. Razlikujemo dva slučaja.

1° Neki vrh $y \in F(x)$ ima oznaku P.
U ovom slučaju algoritam vrhu x dodijeli oznaku N. S druge strane, po pretpostavci indukcije znamo da je pozicija y dobitna za igrača koji nije na potezu. Dakle, igrač koji je na potezu kod pozicije x može osigurati pobjedu tako da učini potez iz pozicije x u poziciju y.

2° Svaki vrh $y \in F(x)$ ima oznaku N.
Ovdje pak algoritam vrhu x daje oznaku P. Po pretpostavci znamo da su sve pozicije $y \in F(x)$ dobitne za igrača koji je na potezu. Zato je pozicija x dobitna za igrača koji nije na potezu.

U oba slučaja je Korak 3 "ispravno" označio vrh x.

Time je dokaz završen. □

Napomenimo da Propozicija 2.1.1 usput pokazuje i kako navedeni algoritam po svom završetku uvijek jednako označi vrhove grafa G, tj. konačni rezultat ne ovisi o redoslijedu razmatranja vrhova.

2.2 Sprague-Grundyjeva funkcija

U ovom odjeljku ćemo dati definiciju Sprague-Grundyjeve funkcije koja nam, kao što ćemo vidjeti, daje više informacija od same klasifikacije pozicija kao P ili N.

Prvo dajemo formalnu definiciju, koju ćemo potom detaljnije analizirati te ju, u sljedećem odjeljku, bolje objasniti na konkretnim primjerima.

Definicija 2.2.1. *Sprague-Grundyjeva funkcija grafa* (X, F) *je funkcija* $g\colon X \to \mathbb{N}_0$ *koja se rekurzivno definira na sljedeći način:*

$$g(x) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ n \neq g(y) \ \textit{za svaki } y \in F(x)\}.$$

Često se umjesto gornje definicije piše $g(x) = \mathrm{mex}\{g(y) : y \in F(x)\}$, gdje *mex* dolazi od engleskog *minimal excludent*. Drugim riječima, $g(x)$ je najmanji nenegativni cijeli broj koji se ne može naći među Sprague-Grundyjevim vrijednostima sljedbenika od x.

Primijetimo da je definicija rekurzivna i da kreće od završnih pozicija. Iz definicije je jasno da za svaku završnu poziciju x vrijedi $g(x) = 0$, jer je $F(x)$ prazan. Također, za poziciju koja nije završna, ali su joj svi sljedbenici završne pozicije, vrijedi $g(x) = 1$.

Iz sljedeća tri uvijeta će slijediti da je pozicija x tipa P ako je $g(x) = 0$, a sve ostale pozicije su tipa N:

(1) Ako je x završna pozicija, tada vrijedi $g(x) = 0$.

(2) Za poziciju x za koju je $g(x) = 0$, svi su sljedbenici y od x takvi da je $g(y) \neq 0$.

(3) Za poziciju x za koju je $g(x) \neq 0$, postoji barem jedan sljedbenik y za koji je $g(y) = 0$.

Na taj način ćemo lako dokazati sljedeću jednostavnu, ali korisnu propoziciju.

Propozicija 2.2.1. *Vrh grafa* $x \in X$ *ima oznaku P ako i samo ako vrijedi* $g(x) = 0$.

Dokaz. Dokaz tvrdnje provodimo strukturalnom indukcijom po grafu (X, F).

Baza indukcije su sve završne pozicije $x \in X$ i za njih tvrdnja slijedi iz (1).

Za korak indukcije uzmimo neki $x \in X$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve njegove sljedbenike $y \in F(x)$. Razlikujemo dva slučaja.

1° Ako je $g(x) = 0$, tada prema (2) znamo da je $g(y) \neq 0$ za svaki $y \in F(x)$, a po pretpostavci indukcije su onda svi $y \in F(x)$ sigurno N pozicije. Iz prethodnog odjeljka slijedi da je x pozicija tipa P.

2° Ako je $g(x) \neq 0$, tada po (3) postoji $y \in F(x)$ takav da je $g(y) = 0$. Po pretpostavci je y pozicija tipa P, a kao u prethodnom odjeljku zaključujemo da je pozicija x onda sigurno tipa N.

Time je završen dokaz matematičkom indukcijom. □

2.3 Primjeri

U ovom ćemo odjeljku, počevši od najjednostavnijeg primjera, pokazati kako se određuju Sprague-Grundyjevi brojevi za nekoliko igara.

Zamislimo igru u kojoj nam je dana jedna hrpa žetona i jedino pravilo je da moramo maknuti barem pola žetona. Pozicije su nam naprosto trenutni brojevi žetona na hrpi. Jedina završna pozicija je 0. Sprague-Grundyjeva funkcija je očito:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
$g(x)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	$\cdots$

Primjećujemo da je $g(x) = \min\{k : 2^k > x\}$. U stvarnosti ova igra nema smisla jer već prvi igrač može pobijediti uzimanjem svih žetona.

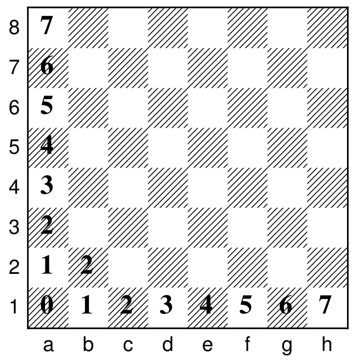
Još jedan jednostavan primjer je igra "Uzmi". Neka se hrpa sastoji od 18 žetona i neka je dozvoljeno uzimanje najmanje jednog, a najviše tri žetona.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$g(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2

Primjećujemo da su Sprague-Grundyjevi brojevi jednaki 0 za sve pozicije oblika $4k$, jednaki 1 za pozicije oblika $4k + 1$, jednaki 2 za pozicije oblika $4k + 2$ i jednaki 3 za pozicije $4k + 3$. To se trivijalno dokazuje matematičkom indukcijom.

Sada ćemo se vratiti na igru "Corner the Lady", čiju klasifikaciju pozicija smo vidjeli u odjeljku 1.6. Kako je Sprague-Grundyjeva funkcija rekurzivna, krećemo od završne pozicije x za koju znamo da je $g(x) = 0$, pošto je za tu poziciju $F(x)$ prazan. Zatim izračunamo Sprague-Grundyjeve brojeve za sve pozicije u stupcu *a* i u retku *1*.

Kako iz pozicije *b2* možemo doći u *a1*, *a2*, *b1* imamo $g(b2) = \text{mex}\{0, 1\} = 2$.



Iz pozicije *b3* možemo u pozicije *a2*, *b1* i *b2* pa je

$$g(b3) = \text{mex}\{g(a2), g(b1), g(b2)\} = \text{mex}\{1, 2\} = 0.$$

Iz pozicije *c2* možemo u pozicije *a2*, *b1*, *b2* i *c1* pa je

$$g(c2) = \text{mex}\{g(a2), g(b1), g(b2), g(c1)\} = \text{mex}\{1, 2\} = 0.$$

Na isti način odredimo Sprague-Grundyjeve brojeve za ostale pozicije.

8	7	8	6	9	0	1	4	5
7	6	7	8	1	9	10	3	4
6	5	3	4	0	6	7	10	1
5	4	5	3	2	7	6	9	0
4	3	4	5	6	2	0	1	9
3	2	0	1	5	3	4	8	6
2	1	2	0	4	5	3	7	8
1	0	1	2	3	4	5	6	7
	a	b	c	d	e	f	g	h

2.4 XOR-zbrajanje

Kako bismo mogli iskazati i dokazati za nas najbitniji teorem, a to je Sprague-Grundyjev teorem, potrebna nam je definicija *XOR-zbrajanja* ili kako se često naziva, *Nim-zbrajanja*.

Svaki nenegativni cijeli broj x ima jedinstveni prikaz u bazi 2, oblika

$$x = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + ... + x_1 2 + x_0$$

za neki m, gdje je svaki x_i jednak 1 ili 0. $(x_m x_{m-1} ... x_1 x_0)_2$ je reprezentacija broja x u bazi 2.

Definicija 2.4.1. *XOR-zbroj* $(x_m x_{m-1} ... x_1 x_0)_2$ *i* $(y_m y_{m-1} ... y_1 y_0)_2$ *je* $(z_m z_{m-1} ... z_1 z_0)_2$, *u oznaci* $(x_m x_{m-1} ... x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} ... y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} ... z_1 z_0)_2$, *gdje je* $z_k = x_k + y_k \ (mod 2)$ *za svaki* k *tj.* $z_k = 1$ *ako je* $x_k + y_k = 1$ *i* $z_k = 0$ *inače.*

Na primjer, $(11011)_2 \oplus (101010)_2 = (110001)_2$, što bi značilo da je $27 \oplus 42 = 49$.

$$\begin{array}{r} 27 = \ \ (11011)_2 \\ \underline{42 = (101010)_2} \\ \oplus = (110001)_2 \end{array}$$

XOR-zbrajanje je asocijativno, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus x)$, i komutativno, $x \oplus y = y \oplus x$, jer je zbrajanje modulo 2 asocijativno i komutativno. Neutralni element je 0 tj. $0 \oplus x = x$, a inverzni element za svaki x je opet x, tj. $x \oplus x = 0$. Također vrijedi da $x \oplus y = x \oplus z$ povlači $y = z$.

Posljednji odlomak dokazuje sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.4.1. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *čini grupu obzirom na operaciju* $\oplus$.

Sljedeća tablica prikazuje XOR zbroj za prvih osam nenegativnih cijelih brojeva.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

2.5 Zbroj kombinatornih igara

Do sada smo uvijek promatrali samo jednu igru odjednom, no možemo formirati novu igru igrajući odjednom više kombinatornih igara i poštujući pravila svake od njih. Tada pričamo o zbroju kombinatornih igara. Dana je početna pozicija u svakoj od igara, igrači igraju naizmjence, a potez se sastoji od odabira bilo koje igre i odabira poteza u skladu sa pravilima te igre. Igra završava kada svaka od komponentnih igara dostigne završnu poziciju, tj. kada nema mogućih poteza. Igrač koji je igrao zadnji je pobjednik.

Najprije ćemo definirati sumu od n igara prikazanih pomoću grafa, a zatim ćemo pokazati kako se pomoću Sprague-Grundyjevih brojeva za svaku komponentnu igru računa vrijednost Sprague-Grundyjeve funkcije za zbroj komponentnih igara.

Definicija 2.5.1. *Suma n igara prikazanih grafovima* $G_1 = (X_1, F_1)$, $G_2 = (X_2, F_2)$, ..., $G_n = (X_n, F_n)$ *je* $G = (X, F)$, *gdje je* $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, *a za* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ *skup sljedbenika se definira kao*

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = {} & F_1(x_1) \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \\ & \cup \{x_1\} \times F_2(x_2) \times ... \times \{x_n\} \\ & \cup \cdots \\ & \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times F_n(x_n). \end{aligned}$$

U tom slučaju pišemo $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$.

Iz definicije se vidi da se potez iz pozicije $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sastoji od micanja točno jednog x_i u neki element iz skupa njegovih sljedbenika $F_i(x_i)$.

Sljedeći teorem daje metodu za računanje Sprague-Grundyjeve funkcije za sumu igara kada su poznate Sprague-Grundyjeve funkcije za komponentne igre. Teorem kaže da je Sprague-Grundyjeva funkcija sume igara jednaka XOR-zbroju Sprague-Grundyjevih funkcija njenih komponentnih igri.

Teorem 2.5.1. *(R. P. Sprague [15], P. M. Grundy [8]) Ako je g_i Sprague-Grundyjeva funkcija za G_i, $i = 1, ..., n$, tada $G = G_1 + ... + G_n$ ima Sprague-Grundyjevu funkciju $g(x_1, ..., x_n) = g_1(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$.*

Dokaz. Neka je $x = (x_1, ..., x_n)$ proizvoljna točka od X. Neka je $b = g_1(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$. Pokazat ćemo sljedeće dvije stvari za funkciju g.

(1) Za svaki nenegativni cijeli broj $a < b$ postoji sljedbenik od $(x_1, ..., x_n)$ koji ima g-vrijednost a.

(2) Niti jedan sljedbenik od $(x_1, ..., x_n)$ nema g-vrijednost b.

Tada SG-vrijednost od x, najmanja vrijednost koja se ne pojavljuje među njegovim sljedbenicima, mora biti b.

Kako bismo pokazali (1), neka je $d = a \oplus b$ te neka je k broj znamenki u binarnom zapisu od d, tako da je $2^{k-1} \leq d < 2^k$ i neka d ima 1 na k-toj poziciji zdesna. Kako je $a < b$, b ima 1 na k-toj poziciji dok a ima 0. Kako je $b = g_1(x_1) \oplus ... \oplus g_n(x_n)$, postoji barem jedan x_i takav da binarni zapis od $g_i(x_i)$ ima 1 na k-toj poziciji. Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je $i = 1$, što možemo jer je XOR-zbrajanje komutativno. Tada je $d \oplus g_1(x_1) < g_1(x_1)$ pa postoji sljedbenik x'_1 od x_1 tako da je $g_1(x'_1) = d \oplus g_1(x_1)$. Tada je pomak iz $(x_1, x_2, ..., x_n)$ u $(x'_1, x_2, ..., x_n)$ dopušten potez u sumi G i

$g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a$.

Kako bismo pokazali (2) pretpostavit ćemo suprotno, da $(x_1, ..., x_n)$ ima sljedbenika sa istom g-sumom i pretpostavit ćemo, bez smanjenja općenitosti, da to uključuje pomak u prvoj igri. Pretpostavljamo da je $(x'_1, x_2, ..., x_n)$ sljedbenik od $(x_1, x_2, ..., x_n)$ i da je

$$g_1(x'_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus ... \oplus g_n(x_n).$$

Po svojstvu XOR-zbroja slijedi da je $g_1(x'_1) = g_1(x_1)$. No to je kontradikcija pošto niti jedna pozicija ne može imati sljedbenika sa istom SG-vrijednošću. $\square$

Prirodno se postavlja pitanje možemo li pozicije u igri $G_1 \oplus ... \oplus G_n$ klasificirati kao N i P. Odgovor je da možemo ukoliko su nam poznati Sprague-Grundyjevi brojevi za komponentne igre. Sljedeći korolar nam daje metodu klasifikacije pozicija kao N i P za sumu kombinatornih igara.

Korolar 2.5.2. *(a) Ako su $g_1, \ldots, g_n$ Sprague-Grundyjeve funkcije redom za $G_1, \ldots, G_n$, tada je pozicija $(x_1, \ldots, x_n)$ u igri $G_1 + \cdots + G_n$ tipa P ako i samo ako vrijedi $g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = 0$.*

(b) Ako su g_1, g_2 Sprague-Grundyjeve funkcije redom za G_1, G_2, tada je pozicija (x_1, x_2) u igri $G_1 + G_2$ tipa P ako i samo ako vrijedi $g_1(x_1) = g_2(x_2)$.

Dokaz. (a) Neka je g Sprague-Grundyjeva funkcija za zbroj igara $G_1 + \cdots + G_n$. Iz propozicije 2.1.1 znamo da je $(x_1, \ldots, x_n)$ pozicija tipa P ako i samo ako vrijedi $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Nadalje, iz teorema 2.5.1 to vrijedi ako i samo ako je $g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = 0$.

(b) Ovdje treba specijalizirati za $n = 2$ i još primijetiti da je $g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) = 0$ ako i samo ako je $g_1(x_1) = g_2(x_2)$, prema svojstvima XOR zbrajanja.

□

Sada ćemo na jednostavnom primjeru vidjeti kako se klasificiraju pozicije za zbroj kombinatornih igara. Igra se sastoji od jedne hrpe bijelih žetona i jedne hrpe crnih žetona. Bijela hrpa se sastoji od 12 žetona dok se crna sastoji od 9 žetona. Potez se sastoji od odabira hrpe te ukoliko je to bijela hrpa uzimanja barem jednog, a najviše četiri žetona te ako je to crna hrpa uzimanja barem jednog, a najviše tri žetona.

Pozicije su oblika (x_1, x_2) gdje $x_1 \in \{0, 1, 2, ..., 12\}$, $x_2 \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ označava broj preostalih žetona na bijeloj, tj. crnoj hrpi.

Slijede Sprague-Grundyjeve funkcije za obje komponentne igre g_1, g_2.

x_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g_1(x)$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2

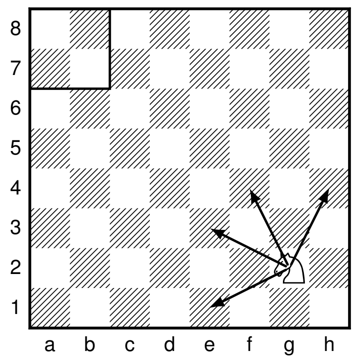
x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_2(x)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

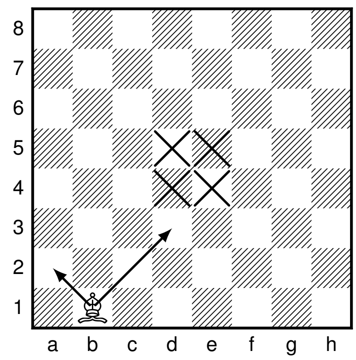
Početna pozicija ima Sprague-Grundyjeve brojeve $(2, 1)$ pa je očito N pozicija po prethodnom korolaru i pobjeđuje prvi igrač.

Slijedi popis svih pozicija tipa P: (0,0), (0,4), (0,8), (5,0), (5,4), (5,8), (10,0), (10,4), (10,8), (1,1), (1,5), (1,9), (6,1), (6,5), (6,9), (11,1), (11,5), (11,9), (2,2), (2,6), (7,2), (7,6), (12,2), (12,6), (3,3), (3,7), (8,3), (8,7).

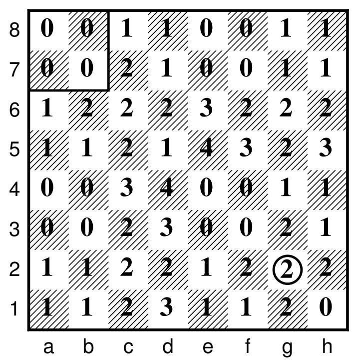
U sljedećem primjeru je također potrebno izračunati Sprague-Grundyjeve brojeve za dvije igre te primijeniti prethodni korolar za određivanje tipova pozicija u njihovoj sumi.

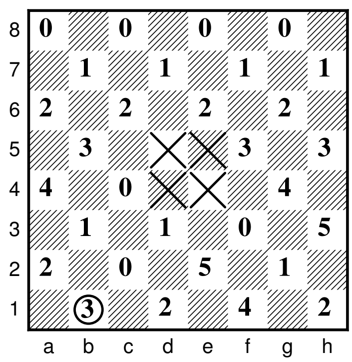
Igra se sastoji od “Skakačeve igre” i “Igre lovca”. U Skakačevoj igri skakač je postavljen na polje $g2$ i dozvoljeno mu je kretanje u 4 smjera kao što je prikazano na slici. Završne pozicije su *a7*, *b7*, *a8*, *b8*. “Igra lovca” se sastoji od lovca postavljenog na polje *b2* koji se kreće dijagonalno po bijelim poljima. Prekrižena polja su mu zabranjena. Završne pozicije su *a8*, *c8*, *e8*, *g8*.





Sljedeće dvije slike prikazuju Sprague-Grundyjeve brojeve za svaku od igara.





Po prethodnom korolaru znamo da je početna pozicija (*g2*,*b1*) tipa N pa pobjeđuje prvi igrač. Početni dobitni potez je pomaknuti lovca na polje $a2$ jer su Sprague-Grundyjevi brojevi za pozicije *g2* i *a2* jednaki.

Kada bi početna pozicija bila (*g2*,*d2*), tada bi pobjeđivao drugi igrač. Oba polazna polja imaju Sprague-Grundyjev broj 2 pa je pozicija (*g2*,*d2*) tipa P po prethodnom korolaru.

2.6 Igra Nim i njene varijante

Nim se igra još od antičkog doba, a navodno je podrijetlom iz Kine. Sadašnje ime dao joj je Charles L. Bouton koji je i razvio cijelu teoriju 1901. godine. Više na [5] i [10].

Najpoznatija varijanta Nima se sastoji od tri hrpe, redom od x_1, x_2, x_3 štapića. Igrači igraju naizmjenično uzimajući bilo koji broj štapića sa jedne hrpe, sve dok ima štapića. Potez se sastoji od odabira hrpe i broja štapića koji će se sa nje maknuti. U jednom potezu nije moguće uzimati štapiće sa različitih hrpa, ali je sa izabrane hrpe moguće maknuti proizvoljno mnogo štapića. Pobjednik, u normalnoj varijanti, je onaj koji je zadnji igrao. Igra Nim se očito sastoji od sume tri komponentne igre. Jasno je da postoji samo jedna završna pozicija (0,0,0), koja je stoga i P-pozicija. Također je jasno da je svaka pozicija oblika (0,0,x), $x > 0$ N-pozicija. Ako promatramo Nim sa točno jednom praznom hrpom, nije teško za zaključiti da su one pozicije koje imaju jednak broj štapića na dvije neprazne hrpe P-pozicije. Ako je igrač 2 na redu, a pozicija je takva da dvije neprazne hrpe imaju jednak broj štapića, on svojim potezom mijenja broj štapića na jednoj hrpi, te onda igrač 1 može igrati tako da hrpe ponovno imaju jednak broj štapića (potencijalno završna pozicija). Pozicije koje na dvije hrpe imaju jednak broj štapića, te ni jedna hrpa nije prazna su očito N-pozicije jer se u jednom potezu mogu svesti na P-poziciju.

Ovo je bila kratka preliminarna analiza igre Nim, no Nim je potpuno riješena igra što znači da svaku poziciju možemo klasificirati kao poziciju tipa P ili N. Promotrit ćemo najopćenitiju varijantu igre: s n hrpa štapića, čije trenutne veličine označavamo s $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Korolar 2.6.1. *Pozicija* $(x_1, ..., x_n), n \in \mathbb{N}$ *u igri Nim je pozicija tipa P ako i samo ako je* $x_1 \oplus ... \oplus x_n = 0$.

Dokaz. Obzirom da je sa odabrane hrpe moguće maknuti proizvoljan broj štapića, Sprague-Grundyjeve funkcije za svaku od hrpa su identitete, $g_i(x_i) = x_i$ pa je korolar direktna posljedica Teorema 2.5.1. □

Uzmimo za primjer Nim sa tri hrpe od 5, 7 i 9 štapića.

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

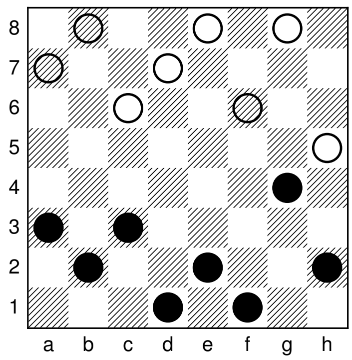
Početna pozicija (5,7,9)

$$\begin{array}{r} 5 = \ (101)_2 \\ 7 = \ (111)_2 \\ \underline{9 = (1001)_2} \\ \oplus = (1011)_2 \end{array}$$

je očito tipa N pa prvi igrač pobjeđuje. Pobjednički potez je uzeti sa zadnje hrpe 7 štapića tako da se dođe u poziciju (5,7,2), koja je tipa P.

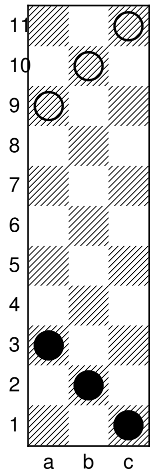
$$\begin{array}{rr} 5 = & (101)_2 \\ 7 = & (111)_2 \\ 2 = & (10)_2 \\ \hline \oplus = & (000)_2 \end{array}$$

Jedna od najpoznatijih verzija igre Nim je Northcottova igra. Igra se na šahovskoj ploči, gdje se u svakom stupcu nalaze po dva žetona, jedan bijeli i jedan crni. Jedan igrač može micati samo crne, a drugi samo bijele žetone. Potez se sastoji od odabira stupca te micanja žetona za bilo koji broj polja, ako je to bijeli žeton onda prema dolje, a ako je crni onda prema gore, ali bez preskakanja drugog žetona. Igra završava onda kada niti jedan od igrača ne može pomaknuti niti jedan žeton. Iako igra nije nepristrana, pravila se mogu formulirati tako da bude, a nama je zanimljiva jer se zapravo radi o varijanti igre Nim. Sljedeća slika prikazuje jednu moguću početnu poziciju.



Northcottovu igru možemo promatrati kao Nim na način da gledamo razmake između žetona u istom stupcu i to poistovjetimo sa brojem štapića u odgovarajućoj hrpi Nima.

Ploča ne mora biti standardnih dimenzija pa primjer Nima sa početnom pozicijom (5,7,9) može izgledati kao na sljedećoj slici.



2.7 Igre okretanja

Igre okretanja, eng. *turning games* su skupina igara u kojima je zadan konačan broj kovanica u nizu gdje svaka pokazuje glavu ili pismo. Potez se sastoji od okretanja svih kovanica u skupu kovanica koje je dopušteno okrenuti (sa glave na pismo ili obrnuto) s time da najdesnija kovanica mora biti okrenuta sa glave na pismo. Time je osigurano da igra završava u konačno mnogo koraka. Skup kovanica koje je dopušteno okrenuti ovisi samo o poziciji najdesnije kovanice. Zadnji igrač koji je igrao pobjeđuje.

Najjednostavniji primjer igre ovog tipa je *Turning Turtles*. Igra se sastoji od n horizontalno posloženih kovanica koje nasumično pokazuju glavu G ili pismo P. Primjer početne pozicije u toj igri je $PPGGPGPPG$. Potez se sastoji od okretanja jedne od kovanica sa G na P i još eventulano (po želji) okretanja jedne kovanice lijevo od nje (sa G na P ili sa P na G). Premda ova igra izgleda bitno drukčijom od dosad promatranih, ona je zapravo prikriveni Nim. Obrazložimo zašto je tako.

Neka su kovanice redom numerirane $1, 2, \ldots, n$ slijeva nadesno. Svakoj kovanici okrenutoj na G koja se nalazi na poziciji k pridružimo Nim hrpu od k štapića. Tako se naprimjer spomenutoj poziciji $PPGGPGPPG$ pridružuju Nim hrpe od 3, 4, 6 i 9 štapića te će vrijediti

$$g(PPGGPGPPG) = 3 \oplus 4 \oplus 6 \oplus 9 = 8.$$

Tvrdimo da je Sprague-Grundyjeva funkcija pozicije u igri Turning Turtles jednaka Sprague-Grundyjevoj funkciji u igri Nim s odgovarajućim brojevima štapića na hrpama. Čak i više od toga, uspostavit ćemo korespondenciju između dozvoljenih poteza u te dvije igre.

- Nim potezu koji popuno uklanja hrpu veličine k odgovara okretanje kovanice na mjestu k sa G na P.

- Nim potezu koji smanjuje hrpu veličine k tako da ostane samo $1 \leq j \leq k-1$ štapića na hrpi, uz pretpostavku da već nije postojala hrpa veličine j, odgovara okretanje kovanice na mjestu k sa G na P te kovanice na mjestu j sa P na G.
- Nim potezu koji smanjuje hrpu veličine k tako da ostane samo $1 \leq j \leq k-1$ štapića na hrpi, uz pretpostavku da već postoji hrpa veličine j, odgovara okretanje obiju kovanica na mjestima k i j sa G na P. U ovom slučaju Nim potezom dobivamo višak od dvije hrpe sa po j štapića naspram odgovarajuće pozicije u igri Turning Turtles, ali dvije jednake Nim hrpe ionako u sumi imaju Sprague-Grundyjev broj jednak 0 pa se mogu ignorirati.

Nešto složeniji primjer je dvodimenzionalna igra okretanja pod nazivom *Turning Corners*. Igra se na pravokutnom polju kovanica, pri čemu će nam ovog puta biti praktičnije numerirati njihove koordinate (x, y) počevši od 0. Potez se sastoji od okretanja četiri različite kovanice koje čine vrhove pravokutnika, (a, b), (a, y), (x, b) i (x, y) za $0 \leq a < x$ i $0 \leq b < y$. Uvjet da najdesnija kovanica mora biti okrenuta sa glave na pismo postaje uvjet da kovanica u donjem desnom kutu mora biti okrenuta sa glave na pismo.

Sprague-Grundyjeva funkcija ove igre je XOR zbroj od $g(x, y)$, pri čemu (x, y) prolazi svim pozicijama kovanica okrenutih na G, a funkcija g zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$g(x, y) = \text{mex}\{g(x, b) \oplus g(a, y) \oplus g(a, b) : 0 \leq a < x, 0 \leq b < y\}:$$

Pošto pravila zahtijevaju da se okreću četiri različite kovanice, očito je da vrijedi $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ za sve x i y. Također vrijedi $g(1, 1) = 1$ i $g(x, 1) = mex\{g(a, 1), 0 \leq a < x\}$, gdje posljednje vrijedi po indukciji.

Gornja formula nam je dovoljna za određivanje vrijednosti $g(x, y)$ za proizvoljne x i y.

Sljedeća tablica prikazuje vrijednosti $g(x, y)$ za $x, y \leq 7$.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	3	1	8	10	11	9
3	0	3	1	2	12	15	13	14
4	0	4	8	12	6	2	14	10
5	0	5	10	15	2	7	8	13
6	0	6	11	13	14	8	5	3
7	0	7	9	14	10	13	3	4

2.8 Nim-množenje

Tablica u predhodnom odjeljku kao i formula za $g(x, y)$ oblik su Nim-množenja. Oznaka za Nim-množenje je $\otimes$ pa $g(x, y)$ postaje $x \otimes y$.

Definicija 2.8.1. *Nim množenje je binarna operacija $\otimes$ definirana na skupu nenegativnih cijelih brojeva rekurzivnom formulom*

$$x \otimes y := \text{mex}\{(x \otimes b) \oplus (a \otimes y) \oplus (a \otimes b) : 0 \le a < x,\ 0 \le b < y\}.$$

Vrijedi $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$ i $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ za svaki x. Nim-množenje je komutativno, $x \otimes y = y \otimes x$, asocijativno, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ za sve x, y, z. U kombinaciji sa XOR-zbrajanjem vrijedi i distributivnost, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$. Ustvari se može pokazati da nenegativni cijeli brojevi uz operacije $\oplus$ i $\otimes$ čine polje karakteristike 2. Nećemo dokazivati tu tvrdnju jer nam ne treba u daljnjem izlaganju.

Postoje dva pravila koja nam mogu olakšati Nim-množenje.

(1) Nim-umnožak broja oblika 2^{2^n} i bilo kojeg manjeg broja je njihov uobičajeni umnožak.

(2) Nim-umnožak broja oblika 2^{2^n} sa samim sobom je $\frac{3}{2}2^{2^n}$.

Sada ćemo se osvrnuti na skupinu igara pod nazivom *Tartan Games*, nazvanih tako prema tradicionanom škotskom uzorku. Ako su dane dvije jednodimenzionalne igre okretanja G_1 i G_2, tada je prirodno definirana dvodimenzionalna igra okretanja $G_1 \times G_2$. Ako je okretanje kovanica na pozicijama $x_1, x_2, ..., x_m$ dozvoljen potez u igri G_1 i ako je okretanje kovanica na pozicijama $y_1, y_2, ..., y_n$ dozvoljeno u igri G_2, tada je okretanje kovanica na pozicijama (x_i, y_j) za $1 \le i \le m$ i $1 \le j \le n$ dozvoljen potez u igri $G_1 \times G_2$. Novu igru $G_1 \times G_2$ je prirodno zvati i *produkt* igara G_1 i G_2.

Teorem 2.8.1. *(Tartanski teorem) Ako je g_1 Sprague-Grundyjeva funkcija od G_1 i g_2 Sprague-Grundyjeva funkcija od G_2 tada je Sprague-Grundyjeva funkcija $g(x, y)$ od $G_1 \times G_2$ jednaka $g(x, y) = g_1(x) \otimes g_2(y)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da teorem vrijedi za sve pozicije $(x', y') \neq (x, y)$ gdje je $x' \le x$ i $y' \le y$. Razmotrimo poziciju u Turning corners sa samo jednom glavom na (v_1, v_2) i poziciju u $G_1 \times G_2$ sa samo jednom glavom na (x, y) uz $g_1(x) = v_1, g_2(y) = v_2$. Pokazat ćemo da postoji potez u igri Turning corners sa (v_1, v_2) u poziciju sa SG vrijednosti u ako i samo ako postoji potez u $G_1 \times G_2$ iz pozicije (x, y) u poziciju sa SG vrijednosti u. Iz toga slijedi da (v_1, v_2) u Turning corners i (x, y) u $G_1 \times G_2$ imaju istu vrijednost.

Fiksirajmo u. Pretpostavimo da postoje a, b takvi da vrijedi

$$(a \otimes b) \oplus (v_1 \otimes b) \oplus (a \otimes v_2) = u$$

za neke $0 \le a < v_1,\ 0 \le b < v_2$. To znači da postoji potez u Turning corners iz (v_1, v_2) u poziciju sa vrijednosti u gdje su kovanice sa glavama na $(a, b), (v_1, b)$ i (a, v_2).

Kako je $0 \le a < v_1$ postoji potez u G_1 iz x u poziciju sa vrijednosti a; neka je to okretanje kovanica $a_1, a_2, ..., a_m$. Kako je $0 \le b < v_2$ postoji potez u G_2 iz y u poziciju sa vrijednosti b; neka je to okretanje kovanica $b_1, b_2, ..., b_n$. Okretanje kovanica (a_i, b_j) za sve i, j, kovanica (x, b_j) za sve j te kovanica (a_i, y) za sve i, ukupno $(m+1)(n+1)$ okretanja, je dozvoljen potez u Turning corners. Glave se nalaze na svim mjestima $(a_i, b_j), (x, b_j)$ i (a_i, b_j). Imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(a_i, b_j) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_1(a_i) \otimes g_2(b_j)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} g_1(a_i)\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} g_2(b_j)\right)\\ &= a \otimes b, \text{ gdje je } \textstyle\sum \text{ XOR-zbroj. Slično imamo}\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g(x, b_j) = \sum_{j=1}^{n}(g_1(x) \otimes g_2(b_j)) = g_1(x) \otimes \sum_{j=1}^{n} g_2(b_j) = g_1(x) \otimes b = v_1 \otimes b.$$

i

$$\sum_{i=1}^{m} g(a_i, y) = \sum_{i=1}^{m}(g_1(a_i) \otimes g_2(y)) = \left(\sum_{i=1}^{m} g_1(a_i)\right) \otimes g_2(y) = a \otimes v_2.$$

Sve glave na poziciji u koju smo došli zajedno imaju vrijednost $(a \otimes b) \oplus (v_1 \otimes b) \oplus (a \otimes v_2)$, što je u po definiciji.

Za dokaz suprotnog smjera pretpostavimo da iz pozicije (x, y) u Turning corners možemo doći u poziciju sa vrijednosti u okretanjem kovanica na pozicijama u skupu

$$\{a_1, a_2, ..., a_m, x\} \times \{b_1, b_2, ..., b_n, y\}.$$

Želimo naći potez u Turning corners iz pozicije (v_1, v_2) u poziciju sa vrijednosti u.

Neka je $a = \sum_{i=1}^{m} g_1(a_i)$, $b = \sum_{j=1}^{n} g_2(b_j)$. Tada je okretanje kovanica

$$(a, b), (a, v_2), (v_1, b), (v_1, v_2)$$

potez u Turning corners. Nadalje, potez kreće iz pozicije sa vrijednosti $v_1 \otimes v_2 = g_1(x) \otimes g_2(y) = g(x, y)$ u poziciju sa vrijednosti $(a \otimes b) \oplus (a \otimes v_2) \oplus (v_1 \otimes b)$, što je u. Time smo našli odgovarajući potez u igri Turning corners, čime je dokaz završen. □

Dokaz je prilagođen prema dokazu iznesenom u zabilješci [13].

Tartanski teorem daje algoritam za pronalazak pobjedničkog poteza. Igrajući $G_1 \times G_2$ pretpostavimo da se nalazimo u poziciji (x, y) sa vrijednosti $g_1(x) \otimes g_2(y) = v$ i da želimo doći u poziciju sa vrijednosti u. Algoritam se sastoji od tri koraka.

(1) Neka je $v_1 = g_1(x)$ i $v_2 = g_2(y)$. Prvo nađemo potez u Turning Corners koji iz (v_1, v_2) prelazi u poziciju (u_1, u_2) sa vrijednosti u.

(2) Nađemo potez M_1 u igri G_1 koji ide iz pozicije x, sa vrijednosti $g_1(x)$, u poziciju sa vrijednosti u_1.

(3) Nađemo potez M_2 u igri G_2 koji ide iz pozicije y, sa vrijednosti $g_2(y)$, u poziciju sa vrijednosti u_2.

Tada je potez $M_1 \times M_2$ u $G_1 \times G_2$ potez u poziciju sa SG-vrijednosti u, kao što je i bio cilj.

Poglavlje 3

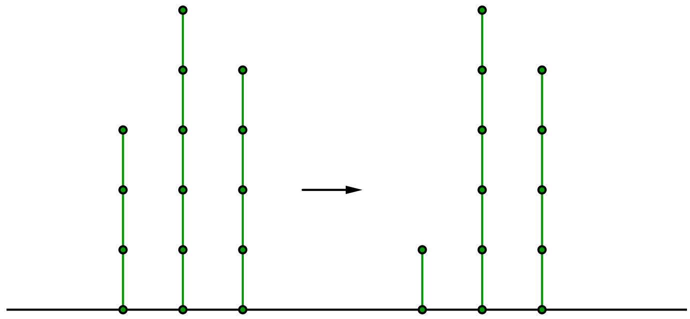
Jednobojni Hackenbush

Skupina igara pod imenom *Hackenbush* igra se na neusmjerenom grafu kojem su svi vrhovi i bridovi nekim putem povezani sa specijalnim pravcem kojeg ćemo zvati *dno*. Igra se tako da igrači naizmjence miču neki od bridova pritom mičući sve ostale dijelove grafa koji više nisu povezani sa dnom. Kako se mi bavimo samo nepristranim igrama orijentirat ćemo se na jednobojne Hackenbush igre, jer jedino za njih vrijedi da svaki igrač može maknuti bilo koji brid. Varijanta koju ovdje proučavamo u literaturi se zove *Zeleni Hackenbush*. Od ostalih verzija igre Hackenbush možda je najpoznatija *Plavo-crveni Hackenbush*, koja se sastoji od bridova plave te bridova crvene boje. Jedan igrač smije micati samo plave dok drugi smije micati samo crvene bridove pa to nije nepristrana igra. Postoji i općenitija verzija Hackenbusha koja se sastoji od bridova plave boje koje smije micati samo jedan igrač, od bridova crvene boje koje smije micati drugi igrač te od bridova zelene boje koje smiju micati oba igrača.

3.1 Štapovi bambusa

Kao najjednostavniji primjer Hackenbusha navodimo slučaj gdje se graf sastoji od nekoliko okomito na dno postavljenih štapova bambusa, tj. jednostavnih grafova kao na slici. Potez se sastoji od micanja jednog segmenta štapa kao i micanja svih segmenata iznad odabranog pošto oni više nisu povezani sa dnom. Igrači igraju naizmjenično i onaj koji je zadnji igrao je pobjednik. Štap bambusa koji se sastoji od n bridova u jednom potezu može postati štap sa $0, 1, \ldots n - 1$ bridova što znači da je ekvivalentan Nim hrpi od n štapića. Kako se graf sastoji samo od štapova bambusa igra je ekvivalenta igri Nim.

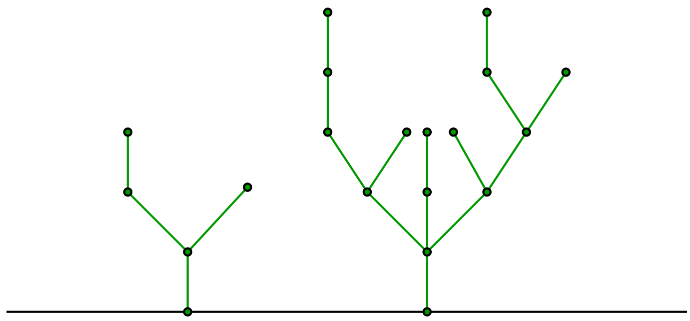
Sljedeća slika pokazuje jednu moguću igru i početni pobjednički potez. Igra se sastoji od tri štapa sa redom 3, 5 i 4 brida. Po korolaru 2.6.1 znamo da $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ mora biti jednako 0 da bi pozicija bila tipa P. Zbog $3 \oplus 5 \oplus 4 = 2$ je početna pozicija tipa N. Kako je $1 \oplus 5 \oplus 4 = 0$ potrebno je uzeti drugi brid sa prvog štapa kako bi na tom štapu ostao samo jedan brid.



3.2 Princip zamjene

U ovom ćemo se odjeljku orijentirati na Hackenbush koji se sastoji od nekoliko stabala. Svi bridovi su jedinstvenim putem povezani sa dnom. Specijalno, to znači da nema ciklusa. Potez se kao i prije sastoji od micanja nekog brida i svega što nije povezano sa dnom.

Sljedeća slika pokazuje jedan primjer gore opisane igre. Igra na slici sastoji se od dva stabla.



Kako sada nije očito koji je Sprague-Grundyjev broj početne pozicije niti koji je početni dobitnički potez, u tome će nam pomoći *princip zamjene*.

Teorem 3.2.1. *(Princip zamjene) Neka je G proizvoljni graf s odabranim vrhom x. Nadalje, uzmimo povezane grafove H_1 i H_2 s istaknutim korijenima koji imaju jednake Sprague-Grundyjeve brojeve. Kreiramo nove grafove $G_1 = G : H_1$ i $G_2 = G : H_2$ tako da grafu G na vrh x nalijepimo korijen od H_1, odnosno korijen od H_2. Tada grafovi G_1 i G_2 također imaju jednake Sprague-Grundyjeve brojeve.*

Dokaz. Želimo dokazati da novodobiveni grafovi G_1 i G_2 imaju jednake Sprague-Grundyjeve brojeve, a to je ekvivalentno s činjenicom da je pozicija (G_1, G_2) tipa P u zbroju igara, tj. kada grafove G_1 i G_2 odvojeno spojimo za dno. To slijedi iz korolara 2.5.2(b). Tu tvrdnju pak dokazujemo potpunom matematičkom indukcijom po ukupnom broju bridova u (G_1, G_2), tj. po broju

$$2 \times \text{ broj bridova od } G + \text{ broj bridova od } H_1 + \text{ broj bridova od } H_2.$$

Baza indukcije. Ako je gornji zbroj jednak 0, tada u G, H_1 i H_2 uopće nema bridova, tj. svi oni se sastoje samo od vrha x. Tada tvrdnja vrijedi jer je riječ o završnoj poziciji.

Korak indukcije. Neka su G, H_1, H_2 grafovi takvi da H_1 i H_2 imaju istu vrijednost Sprague-Grundyjeve funkcije. Po rekurzivnoj definiciji N i P pozicija je dovoljno dokazati da je svaki sljedbenik od (G_1, G_2) pozicija tipa N. Zbog očigledne simetrije bez smanjenja općenitosti možemo promatrati pozicije-sljedbenike od (G_1, G_2) kod kojih je uklonjen neki brid grafa G_1, tj. diskutiramo moguće sljedbenike od G_1. Razlikujemo tri slučaja.

1. Promatrani sljedbenik od G_1 je oblika G' za neki podgraf G' od G, tj. učinjen je potez unutar grafa G koji uklanja vrh x i cijeli dodani graf H_1. U ovom slučaju je G' također sljedbenik od G_2 te vidimo da je (G', G') P-pozicija u koju se može neposredno doći iz (G', G_2). Slijedi da (G', G_2) mora biti pozicija tipa N.

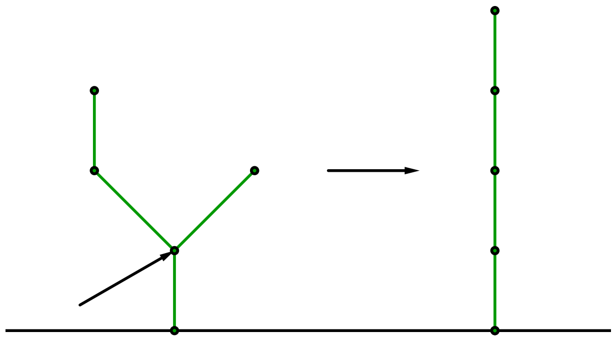
2. Promatrani sljedbenik od G_1 je oblika $G'_x : H_1$, tj. učinjen je potez unutar grafa G koji ostavlja vrh x i time ostavlja i cijeli dodani graf H_1. Sada je $G'_x : H_2$ sljedbenik od G_2 i po pretpostavci indukcije je $(G'_x : H_1, G'_x : H_2)$ pozicija tipa P. (Naime, podgraf G' ima manje bridova od G pa se pretpostavka indukcije doista može primijeniti.) Kako se u nju može pomaknuti iz $(G'_x : H_1, G_2)$, slijedi da ova posljednja mora biti N-pozicija.

3. Promatrani sljedbenik od G_1 je oblika $G_x : H'_1$, tj. uklonjen je neki brid grafa H_1. Kako je po pretpostavci teorema i korolaru 2.5.2.(b) pozicija (H_1, H_2) tipa P, vidimo da (H'_1, H_2) mora biti tipa N. Znamo da se iz nje može doći u neku P-poziciju (H''_1, H''_2), pri čemu je $H''_1 = H'_1$ ili $H''_2 = H_2$. Opet po korolaru 2.5.2.(b) grafovi

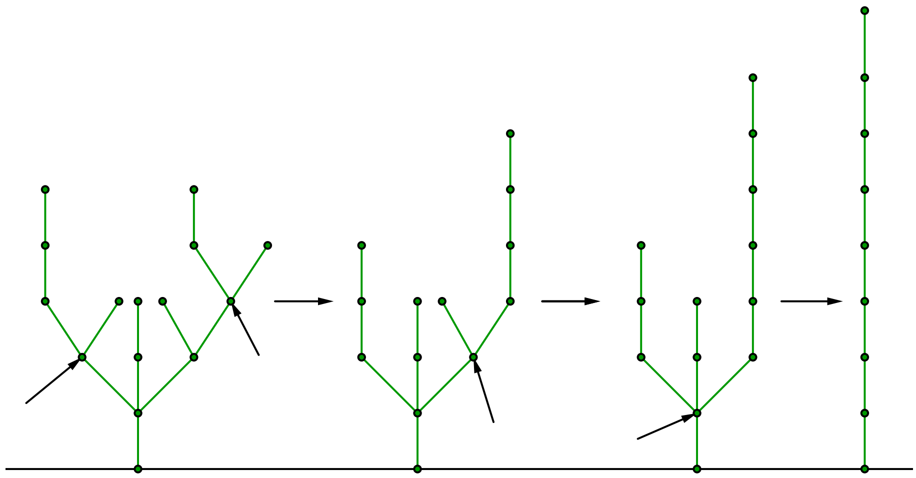
H_1'' i H_2'' imaju jednake S-G brojeve, ali i ukupno manje bridova nego H_1 i H_2. Po pretpostavci indukcije je $(G_x : H_1'', G_x : H_2'')$ pozicija tipa P. U nju se jednim potezom (u H_1' ili H_2) može doći iz $(G_x : H_1', G_2)$ pa je ovo posljednje N-pozicija.

Time je dokaz indukcijom završen. □

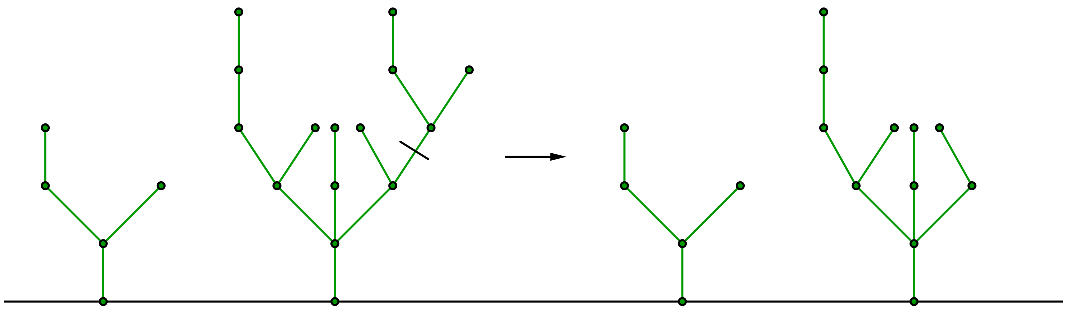
Sada ćemo iskoristiti princip zamjene kako bismo odredili Sprague-Grundyjevu vrijednost početne pozicije u igri prikazanoj na prethodnoj slici. Krećemo od lijevog stabla. Ono što nam prethodni teorem govori o stablima koja sada proučavamo je da se grane sa istim početnim vrhom mogu zamijeniti jednom ravnom granom (bambusovim štapom) duljine jednake Nim-sumi duljina početnih grana. Iz vrha na koji pokazuje strelica na lijevom dijelu slike izlaze dvije grane, jedna duljine 2, druga duljine 1. Princip zamjene kaže da to podstablo možemo zamijeniti sa ravnom granom duljine $2 \oplus 1 = 3$. Stablo nakon primjene principa zamjene prikazano je na desnom dijelu slike.



Sljedeća slika prikazuje primjenjivanje principa zamjene na desno stablo iz početne igre. Dvije grane koje izlaze iz vrha na koji pokazuje lijeva od dvije strelice na prvom stablu sa slike možemo zamijeniti jednom ravnom granom duljine $3 \oplus 1 = 2$, dok grane koje izlaze iz vrha na koji pokazuje desna strelica možemo zamijeniti ravnom granom duljine $2 \oplus 1 = 3$. Time je početno stablo ekvivaletno onom drugom na slici. Zatim promatramo vrh na koji pokazuje strelica na drugom stablu sa slike. Taj vrh možemo zamijeniti ravnom granom duljine $1 \oplus 4 = 5$, čime dobivamo treće stablo sa slike. Konačno, još jednom primjenom principa zamjene grane iz vrha na koji pokazuje strelica na trećem stablu zamijenimo sa ravnom granom duljine $3 \oplus 2 \oplus 6 = 7$. Time smo dobili stablo ekvivalentno početnom koje je zapravo štap bambusa duljine 8.



Sada možemo izračunati Sprague-Grundyjevu vrijednost početne igre koja se sastoji od dva stabla gdje je prvo ekvivalentno štapu bambusa duljine 4, a drugo štapu bambusa duljine 8. Sprague-Grundyjeva vrijednost igre je $4 \oplus 8 = 12$, što znači da je početna pozicija tipa N. Sljedeća slika prikazuje početni dobitni potez.



Na kraju ovog odjeljka istaknimo još jedan jednostavni princip koji će biti direktna posljedica principa zamjene i induktivnog razmatranja poput onog u prethodnom primjeru. On sam za sebe nije dovoljan za računanje Sprague-Grundyjeve funkcije, ali ga navodimo jer ima iznimno elegantnu formulaciju, a i koristit će nam u dokazu rezultata u idućem odjeljku.

Korolar 3.2.2. *(Princip parnosti za stabla) Ako se graf sastoji od unije disjunktnih stabala, tada njegova Sprague-Grundyjeva vrijednost ima istu parnost kao i ukupni broj bridova grafa.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po broju bridova grafa.

Baza indukcije. Ako graf nema bridova, tada je njegov Sprague-grundyjev broj 0 pa tvrdnja vrijedi.

Korak indukcije. Uzmimo neki graf G kao u iskazu s $n \geq 1$ bridova te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve unije disjunktnih stabala koje ukupno imaju manje od n bridova.

Razlikujemo dva slučaja.

1. Graf G se sastoji od stabala $T_1, T_2, \dots, T_k$, $k \geq 2$ koja su ili disjunktna ili dijele korijen na samom dnu. U ovom slučaju Sprague-Grundyjeva funkcija g zadovoljava

$$g(G) = g(T_1) \oplus g(T_2) \oplus \cdots \oplus g(T_k),$$

a taj broj ima istu parnost kao

$$g(T_1) + g(T_2) + \cdots + g(T_k).$$

(Iskoristili smo jednostavnu činjenicu da su $a \oplus b$ i $a + b$ iste parnosti za svake $a, b \in \mathbb{N}_0$.) Po pretpostavci indukcije svaki od brojeva $g(T_j)$ ima istu parnost kao broj bridova u T_j pa zaključujemo da $g(G)$ ima istu parnost kao ukupni broj bridova.

2. Graf G je stablo iz čijeg korijena se izdiže samo jedan brid, koji spaja korijen s podstablom T. U ovom slučaju princip zamjene garantira da se Sprague-Grundyjev broj od G neće promijeniti ako zamijenimo T bambusovim štapom duljine $g(T)$. Na taj način dobivamo $g(G) = g(T) + 1$. Primjenom pretpostavke indukcije na stablo T znamo da $g(T)$ ima istu parnost kao i broj bridova od T. Dodavanjem jedinice obama brojevima zaključujemo da isto vrijedi i za stablo G.

Principom matematičke indukcije je dokazana željena tvrdnja. □

3.3 Princip stapanja

U ovom odjeljku proučavamo proizvoljne grafove bez ikakvih dodatnih zahtjeva. Sada graf može imati petlje, cikluse te više segmenata može biti pričvrščeno za dno. Više nam princip zamjene neće biti dovoljan kako bismo mogli odrediti Sprague-Grundyjevu vrijednost proizvoljnog grafa pa uvodimo novi princip naziva *princip stapanja*.

Operacija *stapanja* dvaju vrhova grafa rezultira novim grafom u kojem su ta dva vrha poistovjećena. Bridovi grafa ostaju nepromijenjeni, uz izuzetak da bridovi koji spajaju dva poistovjećena vrha postaju petlje. Uzastopnom primjenom te operacije možemo stopiti i veći skup vrhova S nekog grafa G. Kažemo još i da se podgraf od G određen vrhovima iz S *stopio* ili da je *kolabirao*.

Teorem 3.3.1. *(Princip stapanja) Prilikom stapanja bilo kojeg ciklusa u grafu G ne dolazi do promjene vrijednosti Sprague-Grundyjeve funkcije cijelog grafa G.*

Primjenjujući uzastopno princip stapanja na cikluse danog grafa dobivamo graf koji više nema ciklusa, uz izuzetak petlji. Nadalje, svaka petlja se može zamijeniti bambusovim stapom od jednog brida pa konačno dobivamo uniju stabala. Na taj način će računanje Sprague-Grundyjeve funkcije za općenite grafove biti svedeno na stabla, koja su nam pak poznata iz prethodnog odjeljka.

Očigledno je ekvivalentna formulacija principa stapanja da se “smiju” stopiti bilo koja dva vrha koja pripadaju nekom ciklusu. Naime, cijeli ciklus se može stopiti uzastopnim stapanjem njegovih susjednih vrhova, a obratno se stapanjem bilo kojih dvaju vrhova ciklusa dobiju jedan ili dva manja ciklusa na koje se također može primijeniti princip.

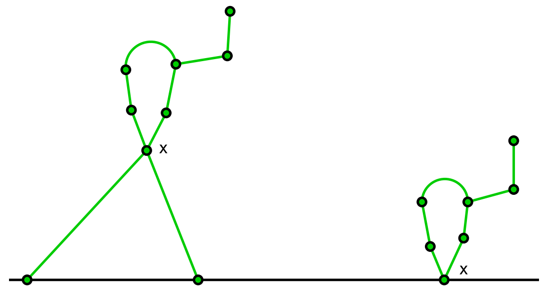
Dokaz. Teorem ćemo dokazati kontradikcijom.

Pretpostavimo da postoji primjer koji ne zadovoljava princip stapanja i izaberimo onaj sa najmanjim brojem bridova n. Ako postoji više takvih primjera sa n bridova izabiremo onaj graf G sa najmanjim brojem vrhova tako da ne postoje dva vrha koja se mogu stopiti. Primjetimo da vrijedi:

1. G može imati samo jedan čvor na dnu jer bi inače bilo moguće stopiti sve čvorove sa dna.

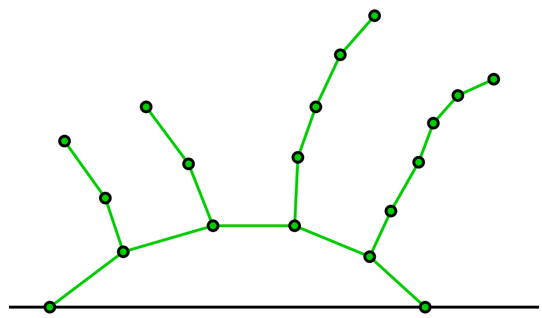
2. G ne može sadržavati par čvorova a i b koji su spojeni sa tri ili više bridom razdvojena puta. Pretpostavimo suprotno. Tada bi igra H, dobivena stapanjem čvorova a i b imala različit Nim zbroj od igre G pa bi postojao pobjednički potez u igri $G + H$. Bilo da je pobjednički potez u igri G, bilo da je u igri H, igranjem odgovarajućeg poteza u drugoj igri dolazimo do igre $G' + H'$. Kako G' i H' imaju najviše $n - 1$ čvorova možemo stopiti bilo koji ciklus u jednu točku bez da se njihova SG vrijednost promijeni te kako i dalje postoji ciklus koji sadrži i a i b pa zaključujemo kako je $G' + H' = 0$. Maloprije dobiveno $G' + H' = 0$ je u kontradikciji sa pretpostavljenim pobjedničkim potezom u $G + H$.

3. Niti jedan ciklus ne može isključivati dno. Pretpostavimo da postoji ciklus C koji isključuje dno. Ako je G' pozicija u koju smo došli nakon odsjecanja svih čvorova iz C tada G' ne može sadržavati dva različita čvora od C jer bi isti bili spojeni sa tri bridom razdvojena puta, dva u C i jedan u G'. To znači da G' sadrži samo jedan čvor x od C te da G izgleda kao na donjoj lijevoj slici. Kada bi x bio dio dna mogli bi primjeniti princip stapanja na sve čvorove manjeg grafa (desna slika) te nam potom princip zamjene dozvoljava stapanje čvorova iznad dna.

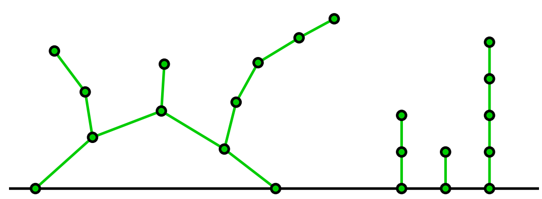


4. G sadrži samo jedan ciklus koji uključuje dno jer bi u protivnom bio suma manjih grafova pošto čvorovi iz različitih ciklusa ne mogu biti spojeni drugim putevima. Tada bi mogli primjeniti princip stapanja na manje grafove što je kontradikcija s izborom igre G.

   Sada je jasno da G mora izgledati kao most na sljedećoj slici (donja dva čvora trebala bi biti spojena u jedan, ali je to ekvivalentno mostu) za koji zbog principa zamjene možemo pretpostaviti da su čvorovi, koji nisu dio konstrukcije mosta, bambusovi štapovi.

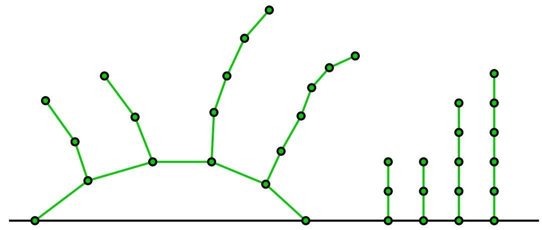


   Broj bridova koji čine konstrukciju mosta tj. *duljina mosta* je neparna. Pretpostavimo da je duljina mosta parna, gledamo most sa kopijama svih bambusovih štapova koji kreću iz čvorova na mostu (sljedeća slika).



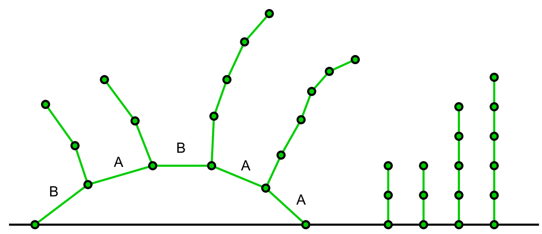
Uklanjanje bilo kojeg brida u slučaju parne duljine mosta je loše jer po principu parnosti rezultira neparnom Nim vrijednosti. To znači da takav graf ima nim vrijednost 0 pa vrijedi princip stapanja.

Princip stapanja za most neparne duljine tvrdi da njegovu vrijednost možemo naći dodavanjem SG vrijednosti različite od 0 na sumu njegovih bambusovih štapova. Trebamo pokazati da sljedeći graf ima SG vrijednost različitu od 0.

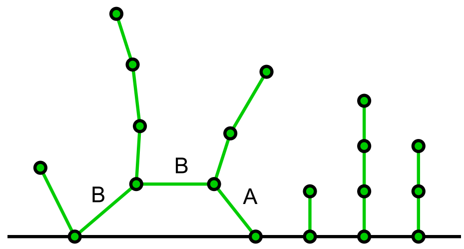


Očito niti jedna opcija nema SG vrijednost različitu od 0 jer micanje bilo kojeg brida mosta rezultira parnom Nim vrijednosti po principu parnosti, a micanje brida iz bambusovih štapova može dovesti do SG vrijednosti različite od 0 nakon čega je moguće primjeniti princip stapanja na manje grafove.

Dovoljno je naći opciju vrijednosti 0. Kako bi to učinili dodjelili smo bridovima koji su dio mosta oznake *A* ili *B* te dajući susjednom bridu istu oznaku ako je među njima bambusov štap sa neparnim brojem segmenata, a različitu ako bambusov štap ima paran broj segmenata.



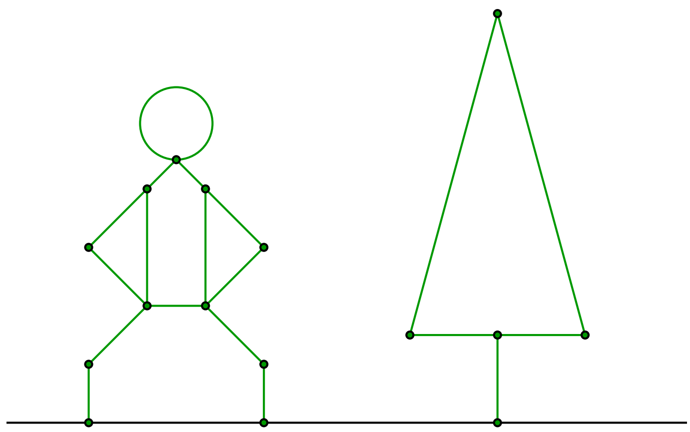
Bridovi označeni oznakom koja se pojavljuje paran broj puta, u ovom slučaju *B*, su loš izbor za uklanjanje pošto vode sumi dva stabla i nekoliko bambusovih štapova gdje je Nim vrijednost sume kongruentna 2 mod 4 te je stoga različita od 0. Micanje bilo kojeg brida označenom sa oznakom koja se pojavljuje neparan broj puta, u ovom slučaju *A*, vodi sumi sa Nim vrijednosti kongruentnoj 0 mod 4. Kako bi izabrali dobar brid od svih sa oznakom *A* reduciramo graf pretvaranjem svih bridova sa oznakom *B* u točku i prepolavljanjem duljina bambusovih štapova (zaokružujemo na dole u slučaju neparne duljine). Može se pokazati da takva redukcija prepolavlja Nim vrijednost. Primjenom maloprije opisanog postupka dobivamo sljedeći graf.



Označimo bridove na jednak način kao i na prošlom grafu. U ovom slučaju imamo jedan brid s oznakom A pa micanje tog brida pobjednički potez u ovoj igri te je micanje odgovarajućeg brida pobjednički potez u početnoj igri.

Time je dokaz gotov. □

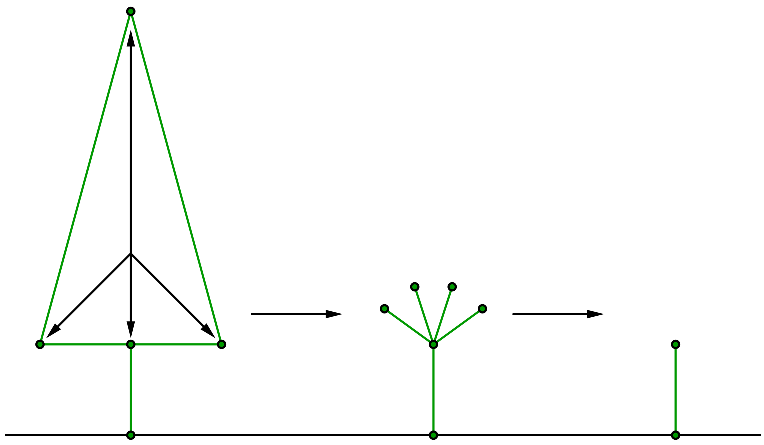
Sljedeća slika je primjer igre za koju je potreban princip stapanja kako bismo mogli odrediti Sprague-Grundyjevu vrijednost igre.



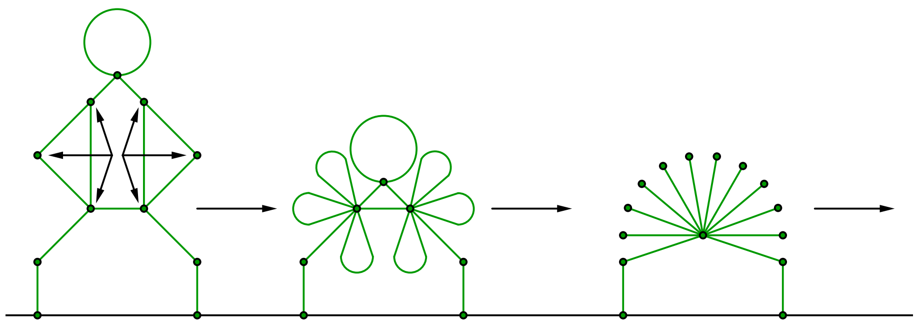
Kako bismo odredili Sprague-Grundyjevu vrijednost moramo prvo odrediti Sprague-Grundyjevu vrijednost oba grafa od kojih se igra sastoji. Prvo ćemo odrediti SG vrijednost desnog grafa pošto je jednostavniji.

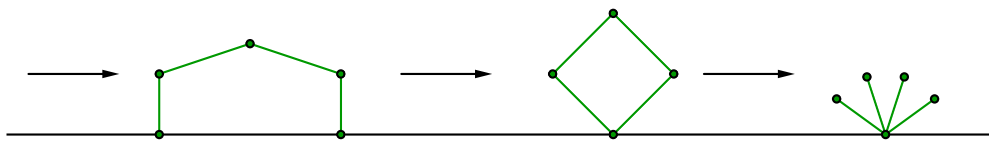
Druga slika dobivena je stapanjem četiri vrha na koje pokazuju strelice te zamjenom svake dobivene petlje ravnim bridom. Treća slika dobivena je primjenom principa zamjene.

Kako iz istog vrha izlaze četiri štapa duljine 1 njih možemo zamjeniti jednim štapom duljine $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$. Time smo odredili da je Sprague-Grundyjeva vrijednost ovog grafa jednaka 1.



Sljedeće slike pokazuju, korak po korak, redukciju prvog grafa igre primjenama principa zamjene i principa stapanja. Druga slika dobivena je stapanjem vrhova na koje pokazuju strelice, vrhova koji čine lijevi trokut zajedno i onih koji čine desni trokut zajedno. Treća slika dobivena je stapanjem središnja tri vrha koja čine trokut te zamjenom svake petlje jednim ravnim bridom. Četvrta slika dobivena je primjenom principa zamjene. Kako iz istog vrha izlazi 10 štapova duljine 1 njih možemo zamijeniti jednim štapom duljine $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$. Peta slika dobivena je stapanjem vrhova pri dnu, dok je šesta slika dobivena stapanjem svih vrhova te zamjenom petlji ravnim bridovima.





Zadnji dobiveni graf ekvivalentan je štapu duljine $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$ što znači da je Sprague-Grundyjeva vrijednost ovog grafa 0.

Primjenama principa zamjene i principa stapanja dobili smo da je Sprague-Grundyjeva vrijednost lijevog grafa 0. Sprague-grundyjeva vrijednost igre je $0 \oplus 1 = 1$ što znači da je početna pozicija tipa N. Početni dobitni potez je iz desnog grafa uzeti brid koji kreće iz dna tj. uzeti cijeli desni graf.

Sada smo u mogućnosti dokazati i sasvim općenitu formulaciju principa parnosti.

Korolar 3.3.2. *(Princip parnosti za proizvoljne grafove) Sprague-Grundyjeva vrijednost svakog Hackenbush grafa ima istu parnost kao i ukupni broj njegovih bridova.*

Dokaz. Svaki graf G se višestrukom primjenom principa stapanja može svesti na stablo T s istim Sprague-Grundyjevim brojem i istim brojem bridova kao G.

Primjenom principa parnosti za stablo T zaključujemo da on ostaje vrijediti i za graf G. □

Valja još jednom napomenuti kako ovakvi principi parnosti nisu dovoljni da bi se odredila vrijednost Sprague-Grundyjeve funkcije grafa, ali su vrlo elegantni i mogu poslužiti za brzu provjeru rezultata.

Poglavlje 4

Računalna analiza igre "Chomp"

U ovom poglavlju ćemo pomoću računala i programa MatLab određivati tipove pozicija za "Chomp" $m \times n$, $m \leq 8, n \leq 10$, prebrojati za sve veličine pozicije tipa P, te određivati Sprague-Grundyjeve brojeve.

4.1 Računanje P-pozicija za "Chomp" $m \times n$

Algoritam se sastoji od glavnog programa i jedne pomoćne funkcije. Kada se pokrene glavni program potrebno je unijeti željenu dimenziju igre $m \times n$. Za zadane m i n program generira datoteku u koju napiše funkciju sa potrebnim brojem for petlji m kako bi se generirale sve moguće pozicije te pozove napisanu funkciju koja vrati sve moguće pozicije y. Potom program pozove funkciju *pozicije*, koja vrati sve pozicije tipa P i početne dobitne poteze. Zadnje što program napravi je prebrojavanje svih P-pozicija.

Slijede kodovi glavnog programa te funkcije *pozicije*.

```
m=input('Unesite broj redaka (m) \n');
n=input('Unesite broj stupaca (n) \n');
fid=fopen('funkcija.m', 'w');
fprintf(fid, 'function [y]=funkcija(m, n) \n');
fprintf(fid, '\t x=zeros(1,m); \n');
fprintf(fid, '\t y=[]; \n');
for i=1:m
    if (i==1)
        fprintf(fid, '\t for x_1=1 : n \n');
        fprintf(fid, '\t\t x(1)=x_1; \n');
    else
```

```
        a='';
        for j=1:i
            a=strcat(a, '\t');
        end
        a=strcat(a, 'for x_', int2str(i), '=0 : x(', int2str(i-1),
          ')\n');
        for j=1:i+1
            a=strcat(a, '\t');
        end
        a=strcat(a, 'x(',int2str(i), ')=x_',int2str(i),'; \n');
        fprintf(fid, a);
    end
end
a='';
for i=1:m
    a=strcat(a, '\t');
end
a=strcat(a, 'y=[y; x]; \n');
fprintf(fid, a);
for i=m:-1:1
    a='';
    for j=1:i
        a=strcat(a, '\t');
    end
    a=strcat(a, 'end \n');
    fprintf(fid, a);
end
fprintf(fid, 'end');
fclose(fid);
y=funkcija(m, n);
mat=size(y);
mat2=mat(1);
[P,Pdp]=pozicije(y)
vel=size(P);
broj_p_pozicija=vel(1)
udio_p_pozicija=broj_p_pozicija/mat2*100

function [P,Pdp]=pozicije(y)
s=size(y);
m=s(2);
```

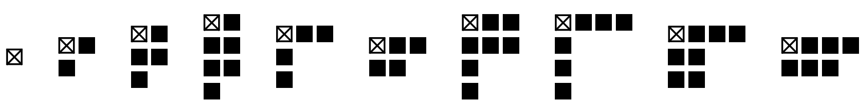
```
r=s(1);
P(1,1:m)=y(1,1:m);
br=1;
poc=0;
for i=2:r
    k=0;
    for xs=1:m
       for xr=1:y(i,xs)
           if (xs~=1 || xr~=1)
          poz=[y(i,1:xs-1),min(y(i,xs:m),xr-1)];
          t=ismember(P,poz,'rows');
          k=k+any(t);
          if (i==r && any(t))
              poc=poc+1;
              Pdp(poc,1:m)=poz(1:m);
          end
           end
       end
    end
         if(k==0)
          br=br+1;
          P(br,1:m)=y(i,1:m);
          P(br,1:m)
        end
end
end
```

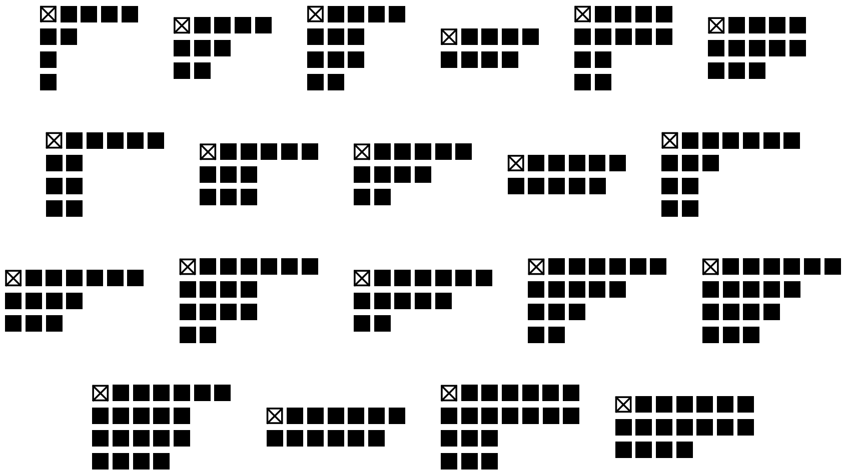
Sve pozicije spremljene su u matricu y gdje i-ti redak označava i-tu poziciju. Po pozicijama se krećemo "for" petljom od prvog do zadnjeg retka. U matricu P spremamo pozicije tipa P. Završnu poziciju spremimo odmah jer znamo da je ona P pozicija. Za svaku poziciju, osim završne, računamo u koje sve pozicije iz nje možemo doći na način da prođemo po svim (xr, xs) gdje je $1 \leq xs \leq m$, $1 \leq xr \leq y(i, xs)$ uz uvijet da xr i xs nisu istodobno jednaki 1. (xr, xs) predstavlja koordinate najgornje-najlijevije kockice čokolade koja je odgrižena. Nakon odigranog poteza u kojem je odgrižena kockica (xr, xs) ostaje nam pozicija oblika $(y(i, 1), ..., y(i, xs - 1), min\{y(i, xs), xr - 1\}, ..., min\{y(i, m), xr - 1\})$. Ako niti jedna od pozicija u koju možemo doći iz promatrane pozicije nije tipa P, onda je promatrana pozicija tipa P pa ju dodamo u matricu P. U algoritmu, kada dođemo do zadnje pozicije koja je zapravo početna pozicija, u posebnu matricu Pdp spremimo sve početne dobitne poteze koje dobijemo tako da provjeravamo je li pozicija u koju možemo doći tipa P i ako je dodamo ju u matricu Pdp. Na kraju algoritma su u matrici P spremljene sve pozicije tipa P, a u matrici Pdp svi početni dobitni potezi.

Kako smo se orijentirali na velik broj dimenzija, popisati ćemo pozicije tipa P samo za dimenziju 4×7. Ovo su P-pozicije koje algoritam ispiše za čokoladu veličine 4×7:

1	0	0	0
2	1	0	0
2	2	1	0
2	2	2	1
3	1	1	0
3	2	0	0
3	3	1	1
4	1	1	1
4	2	2	0
4	3	0	0
5	2	1	1
5	3	2	0
5	3	3	2
5	4	0	0
5	5	2	2
5	5	3	0
6	2	2	2
6	3	3	0
6	4	2	0
6	5	0	0
7	3	2	2
7	4	3	0
7	4	4	2
7	5	2	0
7	5	3	2
7	5	4	3
7	5	5	4
7	6	0	0
7	7	3	3
7	7	4	0

Slijede i crteži svih P-pozicija:





Sada kada znamo sve P-pozicije možemo uspješno igrati protiv računala na [4]. Mi igramo prvi pa imamo priliku odmah doći u P-poziciju tako da računalo nema izbora nego mora otići u N-poziciju što nama opet daje priliku da odemo u P-poziciju i na taj način možemo pobijediti. Početni dobitni potez je otići u poziciju (7, 7, 3, 3).

4.2 Broj P pozicija, početni dobitni potezi

U ovom odjeljku ćemo za dimenzije $m \times n$, $m \leq 8$, $n \leq 10$ prebrojati pozicije tipa P, izračunati njihov udio u ukupnom broju pozicija te napisati početne dobitne poteze za sve dimenzije. Rezultate ćemo prikazati u obliku tablica. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $m \leq n$. Svi računi su izvedeni uz pomoć programskog koda iz prethodnog odjeljka.

Sljedeća tablica prikazuje broj pozicija tipa P.

$m \times n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			5	7	10	13	17	20	25	29
4				10	16	20	30	38	54	75
5					23	35	48	77	109	141
6						48	88	142	179	287
7							129	225	312	447
8								322	594	1000

Naredna pak tablica prikazuje udjele P pozicija u ukupnom broju poziciju, izražene u postocima.

$m \times n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	100	50	33.33	25	20	16.67	14.29	12.5	11.11	10
2		40	33.33	28.57	25	22.22	20	18.18	16.67	15.38
3			26.32	20.59	18.18	15.66	14.29	12.2	11.41	10.18
4				14.5	12.8	9.57	9.12	7.7	7.56	7.5
5					9.16	7.6	6.07	5.99	5.45	4.7
6						5.2	5.13	4.73	3.58	3.59
7							3.76	3.5	2.73	2.3
8								2.5	2.44	2.29

Konačno navodimo popis početnih dobitnih poteza. Naime, znamo da je početna pozicija u Chompu $m \times n$ tipa N čim je $\max\{m, n\} \geq 2$ pa se iz nje može doći u barem jednu P poziciju.

$m \times n$	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	1	1	1	1	1
2		2,1	3,2	4,3	5,4	6,5	7,6
3			3,1,1	4,2,2	5,5,3	6,3,3	7,7,4
4				4,1,1,1	5,5,2,2	6,2,2,2	7,7,3,3
5					5,1,1,1,1	6,6,3,3,3	7,2,2,2,2
6						6,1,1,1,1,1	7,7,7,7,4,4
7							7,1,1,1,1,1,1
8							

$m \times n$	8	9	10
1	1	1	1
2	8,7	9,8	10,9
3	8,4,4	9,9,6	10,5,5
4	8,3,3,3	9,9,9,7	10,10,5,5
5	8,8,8,8,6	9,9,5,5,5	10,3,3,3,3
6	8,8,3,3,3,3	9,2,2,2,2,2	10,10,4,4,4,4
7	8,8,2,2,2,2,2	9,9,3,3,3,3,3	10,2,2,2,2,2,2
8	8,1,1,1,1,1,1,1	9,9,9,9,9,6,6,6	10,10,10,8,8,8,8,8
			10,10,10,10,5,5,5,5

David Gale je primijetio da je za dimenzije $3 \times n$, $n \leq 100$, $2 \times n$, $n \times n$, 4×5 i 4×6 pobjednički potez jedinstven. Kasnije je pomoću računala provjereno da je pobjednički potez jedinstven za dimenzije $3 \times n$, $n \leq 130000$.

K. Thompson i M. Beeler su prvi otkrili da pobjednički potez ne mora biti jedinstven i to na primjeru Chompa 8×10, što smo i mi potvrdili gornjom tablicom.

4.3 Sprague-Grundyjeva klasifikacija pozicija za "Chomp" 4×7

Algoritam se sastoji od glavnog programa te pomoćnih funkcija *sg_brojevi* i *mex*. U glavnom programu generiraju se sve moguće pozicije za unesene dimenzije igre $m \times n$, pozove se funkcija *sg_brojevi*, koja za svaku poziciju računa njen Sprague-Grundyjev broj. Funkcija *sg_brojevi* koristi funkciju *mex* koja vraća najmanji SG broj koji se ne pojavljuje među SG brojevima sljedbenika promatrane pozicije. Glavni program za zadanu dimenziju prebroji koliko puta se pojavi svaki od SG brojeva.

Slijede redom kodovi glavnog programa, funkcije *mex* i funkcije *sg_brojevi*.

```
m=input('Unesite broj redova (m) \n');
n=input('Unesite broj stupaca (n) \n');
fid=fopen('funkcija.m', 'w');
fprintf(fid, 'function [y]=funkcija(m, n) \n');
fprintf(fid, '\t x=zeros(1,m); \n');
fprintf(fid, '\t y=[]; \n');
for i=1:m
    if (i==1)
        fprintf(fid, '\t for x_1=1 : n \n');
        fprintf(fid, '\t\t x(1)=x_1; \n');
    else
        a='';
        for j=1:i
            a=strcat(a, '\t');
        end
        a=strcat(a, 'for x_', int2str(i), '=0 : x(', int2str(i-1),
          ')\n');
        for j=1:i+1
            a=strcat(a, '\t');
        end
        a=strcat(a, 'x(',int2str(i), ')=x_',int2str(i),'; \n');
        fprintf(fid, a);
    end
end
a='';
for i=1:m
    a=strcat(a, '\t');
end
```

```
a=strcat(a, 'y=[y; x]; \n');
fprintf(fid, a);
for i=m:-1:1
    a='';
    for j=1:i
        a=strcat(a, '\t');
    end
    a=strcat(a, 'end \n');
    fprintf(fid, a);
end
fprintf(fid, 'end');
fclose(fid);
y=funkcija(m, n);

[SG]=sg_brojevi(y)
for i=1:max(SG)+1
   suma=sum(SG==i-1);
   S(i,:)=[i-1,suma];
end
S

function [m]=mex(SG)
A(1)=0;
for i=1:100
   A(i+1)=i;
end
m=setdiff(A,SG);
m=min(m);

function [SG]=sg_brojevi(y)
s=size(y);
m=s(2);
r=s(1);
SG(1)=0;
br=1;
poc=0;
for i=2:r
    k=1;
    B=0;
    for xs=1:m
```

```
        for xr=1:y(i,xs)
            if (xs~=1 || xr~=1)
           poz=[y(i,1:xs-1),min(y(i,xs:m),xr-1)];
           t=ismember(y,poz,'rows');
           for ppr=1:r
               if t(ppr)>0
                B(k)=SG(ppr);
               end
           end
           k=k+1;
            end
        end
    end
        nksnp=mex(B);
        SG(i)=nksnp;
       end
end
```

Slijedeća tablica prikazuje najveći Sprague-Grundyjev broj koji se pojavljuje za igru dimenzije $m \times n$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $m \leq n$.

$m \times n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1	4	5	7	8	10	11	13	14
3			4	9	11	12	14	16	19	21
4				9	13	16	19	21	26	28
5					15	21	23	25	28	32
6						22	28	32	35	38
7							28	36	41	43
8								37	47	51

Naredna tablica prikazuje koliko se puta pojavljuje koji Sprague-Grundyjev broj za dimenziju 4×7.

SG broj	broj pojavljivanja
0	30
1	38
2	31
3	19
4	29
5	17
6	18
7	30
8	26
9	17
10	18
11	19
12	9
13	10
14	7
15	4
16	3
17	2
18	1
19	1

Kao što smo i prije pokazali, za dimenziju 4×7 postoji 30 pozicija tipa P, tj. broj pojavljivanja SG broja 0 je 30. Najveći SG broj koji poprima pozicija u igri dimenzije 4×7 je 19.

Bibliografija

[1] V. Allis, *A Knowledge-based Approach of Connect-Four*, magistarski rad, Vrije Universiteit, 1988.

[2] A. E. Brouwer, *Chomp*, dostupno na `http://www.win.tue.nl/~aeb/games/chomp.html` (studeni 2013.).

[3] J. Tromp, *Connect-4 Data Set* (1995), dostupno na `http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Connect-4` (ožujak 2014.).

[4] T. S. Ferguson *Game of Chomp*, dostupno na `http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html` (studeni 2013.).

[5] *Nim*, dostupno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Nim` (siječanj 2014.).

[6] T. S. Ferguson, *Game theory* (skripta), University of California at Los Angeles, dostupno na `http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf`

[7] M. Gardner, *Mathematical Games*, Scientific American (1973), 110–111.

[8] P. M. Grundy, *Mathematics and games*, Eureka 2 (1939), 6–8.

[9] V. Kovač, I. Madjerčić, *Matematičke igre na šahovskoj ploči*, Matematičko-fizički list, prihvaćen za objavljivanje.

[10] K. Ye, *Nim*, dostupno na `http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Ye.pdf` (siječanj 2014.)

[11] J. H. Conway, *On numbers and games*, A K Peters, drugo izdanje , Wellesey, SAD, 2000.

[12] F. Schuh, *Spel van delers*, Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde **39** (1952) 299–304.

[13] M. Lugo, *Tartan Theorem*, dostupno na
`http://www.stat.berkeley.edu/~mlugo/stat155-f11/tartan.pdf`
(veljača, 2014.)

[14] J. Li, M. Gymrek, *Theory of Impartial Games*, dostupno na
`http://web.mit.edu/sp.268/www/nim.pdf` (listopad 2013.)

[15] R. P. Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tohoku Mathematical Journal 41 (1935), 438–444.

[16] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, Richard K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, A K Peters, drugo izdanje, Wellesey, SAD, 2001.

Sažetak

Ovaj rad daje kratki pregled teorije nepristranih kombinatornih igara. Osnovni obrađeni koncepti i rezultati su: klasifikacija pozicija kao pobjedničkih za prvog, odnosno drugog igrača, definicija Sprague-Grundyjeve funkcije, dokaz istoimenog teorema, primjena teorije na rješavanje igara Nim i Hackenbush te analiza igre Chomp korištenjem računala. Općenita teorija je detaljno ilustrirana na velikom broju primjera kombinatornih igara, od nekih dobro poznatih i često igranih do onih izmišljenih samo za potrebe ovog rada.

Summary

This paper gives a brief overview of impartial combinatorial games. The main concepts and results are as follows: clasification of positions as winning for the first, and second player, definition of Sprague-Grundy's function, the proof of homonymous theorem, application of theory on solving Nim and Hackenbush games and the analysis of the game of Chomp by using the computer. The basic theory is illustrated in detail on a variety of examples of combinatorial games, ranging from some well known and often used to the ones invented for the purpose of this paper.

Životopis

Zovem se Iva Madjerčić, rođena sam 19. siječnja 1991. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Frana Krste Frankopana završila sam 2005. godine s odličnim uspjehom. Školske godine 2005./06. upisala sam V. gimaziju u Zagrebu te sam u istoj maturirala 2009. godine s odličnim uspjehom. Akademske godine 2009./10. upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu te sam ga završila u redovitom roku. Akademske godine 2012./13. upisala sam Diplomski studij *Financijska i poslovna matematika*, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.