SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ante Malenica

C*-ALGEBRE I NJIHOVE REPREZENTACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, Rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Kao što je već iz naslova jasno, fokus je ovoga rada na proučavanju C*-algebri. C*-algebre posebna su vrsta Banachovih algebri na kojima je definirana involucija te koje zadovoljavaju određene zahtjeve vezane uz normu.

Korijene proučavanja C*-algebri nalazimo početkom dvadesetog stoljeća u radovima von Neumanna, Heisenberga i drugih. Tada je, naime, začeta ideja da objekti interesa kvantne mehanike odgovaraju hermitskim operatorima na Hilbertovim prostorima. Apstraktni okvir za proučavanje takvih operatora upravo su C*-algebre. Sam pojam C*-algebre početkom 40-ih godina prošloga stoljeća uvode Gelfand i Naimark, dvojac čija imena krase mnoge bitne rezultate ovoga područja. Gelfand i Naimark najprije opisuju reprezentacije komutativnih C*-algebri, a nakon toga se rezultat proširuje na proizvoljne C*-algebre.

Kronološki gledano, pristup sličan Gelfndovu i Naimarkovu prihvaćen je u ovom radu. Izučavana materija podijeljena je u tri poglavlja: prvo postavlja temeljne pojmove i rezultate, drugo uvodi pojmove C*-algebre i pozitivnih elemenata na njima, dok treće koristi sve dotad pokazano kako bi se pokazalo postojanje odgovarajuće reprezentacije proizvoljne C*-algebri.

Prvi dio, kao što naslov sugerira, donosi osnovne rezultate spektralne teorije. Nakon definiranja svih temeljnih pojmova, pokazuju se opće veze između spektra, spektralnog radijusa i norme elemenata. Na kraju, koristeći prostor karaktera algebre, pokazuje se postojanje Gelfandove transformacije elementa komutativne Banachove algebre.

Drugo poglavlje sužava opseg proučavanja s Banachovih na C*-algebre. Pokazuje se da u ovakvom ambijentu postoji još uža veza spektralnog radijusa i norme hermitskih elemenata te da je Gelfandova transformacija na komutativnim C*-algebrama bijektivna. U drugom dijelu poglavlja uvodi se pojam pozitivnog elementa i osnovni rezultati koji se u bitnom koriste u sljedećem pogavlju.

U trećem se poglavlju pokazuje da se svaka C*-algebra može prikazati kao C*-podalgebra prostora ogrničenih operatora na nekom Hilbertovom prostoru. Kako bi se dokazao taj rezultat, uvelike se koriste svojstva pozitivnih linearnih funkcionala i ideala u C*-algebrama, te je stoga prvi dio poglavlja posvećen upravo proučavanju tih objekata. Spomenuta reprezentacija naziva se GNS reprezentacijom C*-algebre i svojevrsna je kruna ovoga rada.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati spektralne teorije

Prva točka ovog rada posvećena je ponavljanju osnovnih pojmova iz teorije Banachovih algebri. U drugoj točki prikazani su osnovni vezani uz spektar elementa, koji se koriste za konstrukciju Gelfandove reprezentacije, što se obrađuje u završnoj točki poglavlja.

1.1 Banachove algebre

Uvedimo najprije temeljne pojmove kojima se bavi teorija predstavljena u ovom radu.

Algebrom nazivamo vektorski prostor A s pridruženim asocijativnim bilinearnim preslikavanjem

$$A^2 \to A, \qquad (a, b) \mapsto ab,$$

koje nazivamo množenjem. Ako u A postoji jedinica, takvu strukturu nazivamo *algebrom s jedinicom*.

Podalgebrom algebre A nazivamo njen vektorski potprostor B koji je usto i zatvoren s obzirom na množenje. Opskrbljen odgovarajućom restrikcijom množenja, B je i sam algebra.

Za normu $\|\cdot\|$ na A kažemo da je *submultipikativna* ako

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \qquad (\forall a, b \in A).$$

Tada uređeni par $(A, \|\cdot\|)$ nazivamo *normiranom algebrom*. Iz nejednakosti

$$\|ab - a'b'\| \leq \|a\|\|b - b'\| + \|a - a'\|\|b'\|$$

lako se vidi da je u normiranoj algebri funkcija množenja neprekidna u obje varijable.

Banachovom algebrom (s jedinicom) nazivamo potpunu normiranu algebru (s jedinicom). Podalgebra normirane algebre je očito opet normirana algebra (s normom dobivenom restrikcijom). Lako se vidi da je zatvorena podalgebra Banachove algebre također Banachova algebra.

Primjer 1.1.1. Za topološki prostor Ω, skup $C_b(\Omega)$ svih omeđenih neprekidnih kompleksnih funkcija na Ω zatvorena je podalgebra skupa $l^\infty(\Omega)$ svih omeđenih kompleksnih funkcija na Ω. Budući da je $l^\infty(\Omega)$ uz normu $\|\cdot\|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup_{x\in S}|f(x)|$) Banachova algebra, slijedi da je i $C_b(\Omega)$ također Banachova. Ako je Ω kompaktan, tada je $C(\Omega)$, skup svih neprekidnih funkcija iz Ω u $\mathbb{C}$, jednak $C_b(\Omega)$. Nadalje, $C_b(\Omega)$ očito sadrži jedinicu.

Primjer 1.1.2. Za lokalno kompaktan Hausdorffov prostor Ω, kažemo da neprekidna funkcija f iščezava u beskonačnosti ako je za svaki pozitivan ϵ skup $\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompaktan. S $C_0(\Omega)$ označimo skup svih neprekidnih kompleksnih funkcija koje iščezavaju u beskonačnosti. Nije teško uočiti da je $C_0(\Omega)$ zatvorena podalgebra od $C_b(\Omega)$, a stoga je i sama Banachova algebra. Jasno je i da $C_0(\Omega)$ sadrži jedinicu ako i samo ako je Ω kompakt, a u tom slučaju vrijedi $C_0(\Omega) = C_b(\Omega)$. Kao što će kasnije biti jasno, $C_0(\Omega)$ je bitan primjer Banachove algebre koji će biti ključan u izučavanju C*-algebri.

Primjer 1.1.3. Kada je X normirani vektorski prostor, s $B(X)$ označavamo skup svih omeđenih linearnh preslikavanja iz X u sebe samog (drugim riječima, skup operatora na X). Lako se vidi da je $B(X)$ normirana algebra s operacijama zbrajanja i množenja skalarom definiranim po točkama, množenjem definiranim s $(u, v) \mapsto u \circ v$, te operatorskom normom:

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|.$$

Ako je X Banachov prostor, $B(X)$ je potpun te stoga i Banachova algebra.

Primjeri i rezultati teorije Banachovih i C*-algebri predstavljeni u ovom radu neće biti ograničeni na komutativne ili isključivo na nekomutativne algebre. Ipak, ovdje napominjemo da se ostatak prvog poglavlja ovog rada odnosi isljučivo na komutativne (Abelove) Banachove algebre.

Ako je $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ familija podalgebri algebre A, tada je $\cap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ također podalgebra iste algebre. Iz ovoga zaključujemo da za svaki skup S postoji najmanja podalgebra B algebre A koja sadrži S (to je upravo algebra dobivena presjekom svih podalgebri algebre A koje sadrže S). Takvu algebru nazivamo podalgebrom od A *generiranom* s S. Ako je $S = \{a\}$ tada je B linearna ljuska svih potencija a^n $(n = 1, 2, \ldots)$ od a. Ako je A normirana algebra, analogno definiramo zatvorenu algebru *generiranu* s S i označimo ju s C. Jasno je da vrijedi $\bar{B} = C$, gdje je B subalgebra generirana s S.

Primjer 1.1.4. Neka je $\mathbf{T}$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$, te sa z označimo inkluziju $z\colon \mathbf{T} \to \mathbb{C}$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu [2, Teorem A.10.1] vrijedi da je zatvorena algebra generirana sa z i njoj konjugiranom funkcijom $\bar{z}$ jednaka $C(\mathbf{T})$.

Lijevi (*desni*) *ideal* u algebri A vektorski je potprostor I takav da

$$a \in A, b \in I \Rightarrow ab \in I \quad \text{(za desni ideal: } ba \in I)$$

Ideal je vektorski potprostor koji je ujedno i lijevi i desni ideal. *Maksimalan* ideal je pravi ideal (različit od A) koji nije sadržan niti u jednom drugom idealu od A. Ideal I je *modularan* akopostoji element $u \in A$ takav da su $a - au$ i $a - ua$ iz I za svaki $a \in A$.

Analogno definiciji podalgebre generirane skupom S, definira se i (zatvoreni) ideal generiran skupom S: to je najmanji (zatvoreni) ideal koji sadrži S. Lako se vidi da je zatvoreni ideal generiran s S jednak zatvaraču ideala generiranog s S.

Za I ideal u A, A/I je algebra s množenjem definiranim s:

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Ako je I modularan, A/I sadrži jedinicu (jedinica je $u + I$, gdje je $u \in A$ iz definicije modularnog ideala). Obrnuto, ako A/I ima jedinicu, I je modularan. Bez dokaza navodimo sljedeći teorem o opskrbljivanju algebre A/I normom:

Teorem 1.1.5. *Ako je I zatvoreni ideal u normiranoj algebri A, tada je A/I normirana algebra opskrbljena kvocijentnom normom*

$$\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|$$

Homomorfizam algebri A i B linearno je preslikavanje $\varphi\colon A \to B$ takvo da $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Poznato je da je $\operatorname{Ker}\varphi$ ideal u A te da je $\operatorname{Im} T$ podalgebra od B. Ako A i B sadrže jedinicu te $\varphi(1) = 1$ kažemo da je φ *unitalan*.

Uočimo dodatno da za neprekidne homomorfizme φ, ψ normiranih algebri A i B vrijedi $\varphi = \psi$ ako se φ i ψ podudaraju na skupu S koji generira A kao normiranu algebru. Ovo slijedi iz činjenice da je skup $\{x \in A \mid \varphi(x) = \psi(x)\}$ zatvorena podalgebra od A.

1.2 Spektar i spektralni radijus

Za $a \in A$ kažemo da je *invertibilan* ako postoji $b \in A$ takav da vrijedi $ab = ba = 1$. Jasno je da skup

$$Inv(A) = \{a \in A \mid a \text{ je invertibilan}\}$$

ima strukturu grupe s obzirom na operaciju množenja.

Spektar elementa a definira se kao skup

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}$$

Nadalje ćemo pisati λ umjesto $\lambda 1$.

Uočimo da za $a, b \in A$, gdje je A algebra s jedinicom, vrijedi da je $1 - ab$ invertibilan ako i samo ako je $1 - ba$ invertibilan. Naime, ako je c inverz od $1 - ab$, onda je $1 + bca$ inverz od $1 + ba$.

Iz ovoga direktno slijedi da za svaka dva $a, b \in A$ vrijedi $\sigma(ab) \backslash \{0\} = \sigma(ba) \backslash \{0\}$.

Primjer 1.2.1. Neka je $A = C(\Omega)$, gdje je Ω kompaktan Hausdorffov prostor. Jasno je da za svaki $f \in A$ vrijedi $\sigma(f) = f(A)$.

Primjer 1.2.2. Neka je A algebra gornje trokutastih $n \times n$ matrica (lako se provjeri da je skup A zaista algebra s obzirom na standardno zbrajanje i množenje matrica). Neka je $a \in A$ oblika

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Trivijalno je vidjeti da vrijedi

$$\sigma(a) = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn}\}.$$

Prethodna dva primjera ukazuju na to da se spektar elementa može shvatiti kao istovremena generalizacija pojmova slike funkcije i svojstvenih vrijednosti konačnih kvadratnih matrica.

Teorem 1.2.3. *Neka je A algebra s jedinicom i a njen proizvoljan element. Ako je $\sigma(a)$ neprazan i $p \in \mathbb{C}[z]$, tada vrijedi*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Dokaz. Pretpostavimo da p nije konstanta (za slučaj $p \equiv c \in \mathbb{C}$ tvrdnja je očita). Za svaki $\mu \in \mathbb{C}$ postoje $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da

$$p - \mu = \lambda_0(z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_n),$$

a stoga i

$$p(a) - \mu = \lambda_0(a - \lambda_1)\dots(a - \lambda_n).$$

Iz posljednje je jednakosti jasno da je $p(a) - \mu$ invertibilan ako i samo ako je svaki od $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$ invertibilan. Dakle, $\mu \in \sigma(p(a))$ po definiciji znači da $p(a) - \mu$ nije inveribilan, što po prethodnom vrijedi ako i samo ako neki $a - \lambda_i$ nije invertibilan, drugim riječima ako $\lambda_i \in \sigma(a)$, za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ostaje uočiti da vrijedi $p(\lambda_i) = \mu$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Dobili smo da vrijedi $\mu \in \sigma(p(a))$ ako i samo ako $\mu = p(\lambda)$ za neki $\lambda \in \sigma(a)$. Dakle, $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

Rezultat o preslikavanju spektara moguće je proširiti na neprekidne funkcije, ali s dodatnim pretpostavkama na elemente i algebru. Ovaj rezultat pokazujemo u drugom poglavlju [Teorem 2.1.16].

Teorem 1.2.4. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom i $a \in A$ takav da $\|a\| \leq 1$. Tada je $(1 - a) \in Inv(A)$ i vrijedi*

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Dokaz. Zbog submultiplikativnosti norme na A i svojstava realnih redova vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = (1 - \|a\|)^{-1} < +\infty$. Apsolutna konvergencija povlači običnu pa možemo zaključiti da $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergira i označimo mu sumu s $b \in A$. Budući da vrijedi $(1 - a)(1 + a + \cdots + a^n) = (1 + a + \cdots + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1}$, djelovanjem limesom na taj niz jednakosti dobivamo $(1 - a)b = b(1 - a) = a$, pa zaključujemo da je b inverz od a. □

Tvrdnja sljedećeg teorema zanimljiva je sama po sebi, a osim toga olakšava ocjenu potpunosti nekih normi (odnosno normiranih prostora), kako će biti jasno iz kasnijeg primjera. Dokaz teorema izostavljamo.

Teorem 1.2.5. *Ako je A Banachova algebra s jedinicom, Inv(A) je otvoren u A, a preslikavanje*

$$Inv(A) \to A, \quad a \mapsto a^{-1},$$

je diferencijabilno.

Tvrdnju prethodnog teorema sada možemo iskoristiti da zaključimo da algebra $\mathbb{C}[z]$ s normom

$$\|p\| = \sup_{|\lambda| \leq 1} |p(\lambda)|$$

nije potpuna.

Naime, uočimo najprije da je $Inv(\mathbb{C}[z]) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pa polinomi $p_n(z) = 1 + z/n$ nisu invertibilni niti za jedan $n \in \mathbb{N}$. Međutim, $lim_{n\to\infty} p_n = 1 \in Inv(\mathbb{C}[z])$, iz čega je jasno da $Inv(\mathbb{C}[z])$ nije otvoren. Sada koristeći tvrdnju Teorema 1.2.5, lako zaključujemo da da $\mathbb{C}[z]$ s gornjom normom nije potpun prostor (da jest, $Inv(A)$ bi bio otvoren).

Lema 1.2.6. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom i $a \in A$. Spektar $\sigma(a)$ elementa a zatvoren je podskup kruga u $\mathbb{C}$ sa središtem u ishodištu i radijusom $\|a\|$. Preslikavanje*

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(a) \to A, \quad \lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$$

je diferencijabilno.

Dokaz. Ako je $|\lambda| < \|a\|$, tada je $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, pa je $1 - \lambda^{-1}a$ invertibilan po Teoremu 1.2.4, a onda je očito i $\lambda - a$ invertibilan. Dakle, $\lambda \notin \sigma(a)$. Budući da je $Inv(A)$ otvoren u A, slijedi da je $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ otvoren, a onda je $\sigma(a)$ zatvoren. Time dobivamo prvu tvrdnju leme. Tvrdnja o diferencijabilnosti preslikavanja $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ slijedi iz Teorema 1.2.5. □

Sljedeći teorem jedan je od temeljnih teorema teorije Banachovih algebri.

Teorem 1.2.7 (Gelfand)**.** *Spektar svakog elementa Banachove algebre s jedinicom neprazan je.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sigma(a) = \emptyset$ za neki a. Ako je $|\lambda| > 2\|a\|$, tada je $\|\lambda^{-1}a\| < \frac{1}{2}$, a onda je $1 - \|\lambda^{-1}a\| > \frac{1}{2}$. Stoga vrijedi

$$\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| = \|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n\| \leq \frac{\|\lambda^{-1}a\|}{1-\|\lambda^{-1}a\|} \leq 2\|\lambda^{-1}a\| < 1$$

Sada zaključujemo da $\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2$, a onda vrijedi ($a \neq 0$ budući da je $\sigma(a) \neq 0$)

$$\|(a-\lambda)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1}$$

Dobili smo da je preslikavanje $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ ograničeno na $2\|a\|\mathbf{D}$, gdje je $\mathbf{D}$ jedinična kugla (krug) u $\mathbb{C}$. Kako iz prethodne leme znamo da je to preslikavanje neprekidno, ograničeno je na svakom kompaktu, pa i na $2\|a\|\mathbf{D}$. Dakle, $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ je ograničeno na čitavom $\mathbb{C}$, pa postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da $(a-\lambda)^{-1} < M$ $(\forall\lambda \in \mathbb{C})$.
Neka je sada $\tau \in A'$ (A' čine svi ograničeni linearni funkcionali na A). Sada je jasno da funkcija $\lambda \mapsto \tau((a-\lambda)^{-1})$ cijela, budući da je τ linearan operator a $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ diferencijabilno (primijetimo da je promatrano preslikavanje iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$, pa diferencijabilnost povlači da je preslikavanje cijelo). Prema Liuvilleovom Teoremu [3, Teorem 3.2] svaka ograničena cijela funkcija na $\mathbb{C}$ konstantna je, pa posebno vrijedi $\tau((a-1)^{-1}) = \tau(a^{-1})$. Ovo vrijedi za svaki $\tau \in A'$ pa slijedi $(a-1)^{-1} = a^{-1}$ odnosno $a - 1 = a$, to je kontradikcija. Dakle, $\sigma(a) \neq \emptyset$. □

Lako se vidi da postoje algebre u kojima neki elementi imaju przan spektar. Primjerice, $\mathbb{C}(z)$, polje kvocijenata od $\mathbb{C}[z]$, algebra je u kojoj element z ima prazan spektar. Iz prethodnog teorema očito slijedi da $\mathbb{C}(z)$ nije Banachova. Također, iz Teorema 1.2.7 direktno slijedi sljedeći zanimljiv rezultat:

Teorem 1.2.8 (Gelfand-Mazur)**.** *Ako je A Banachova algebra s jedinicom u kojoj je svaki nenul element invertibilan, vrijedi $A = \mathbb{C}1$.*

Spektralni radijus $r(a)$ elementa a Banachove algebre s jedinicom A definiran je izrazom

$$r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|$$

. Podsjetimo se da smo pokazali da za svake $a, b \in A$ vrijedi $\sigma(ab)\backslash\{0\} = \sigma(ba)\backslash\{0\}$, a onda i $r(ab) = r(ba)$. Također, direktno iz Teorema 1.2.3 slijedi $r(a^n) = r(a)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Primjer 1.2.9. Neka je $A = C(\Omega)$, gdje je Ω kompaktan Hausdorffov prostor. Tada vrijedi $r(f) = \|f\|_\infty$ $(\forall f \in A)$.

Primjer 1.2.10. Neka je $A = M_2(\mathbb{C})$ i

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada je jasno $\|a\| = 1$, ali $r(a) = 0$ budući da je $a^2 = 0$. Dakle, moguće je $r(a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| < \|a\|$.

Teorem 1.2.11 (Beurling)**.** *Neka je A Banachova algebra s jedinicom i $a \in A$. Tada vrijedi*

$$r(a) = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Dokaz. Dokaz prve jednakosti može se pronaći u [1, Teorem 7.1.12], a dokaz druge u [1, Teorem 7.1.9]. □

Podsjetimo da za neprazni kompakt $K \subseteq \mathbb{C}$ vrijedi da $\mathbb{C}\backslash K$ ima točno jednu neograničenu komponentu. Ograničene komponente od $\mathbb{C}\backslash K$ zovu se rupe kopakta K. Uočimo da je spektar elementa zatvoren i ograničen prema lemi 1.2.6, pa je stoga i kompaktan.

Teorem 1.2.12. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom i B njena zatvorena podalgebra koja sadrži jedinicu iz A. Tada vrijedi*

(a) Skup $Inv(B)$ je otvoren i zatvoren podskup od $B \cap Inv(A)$.

(b) Za svaki $b \in B$ vrijedi

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \quad i \quad \partial\sigma_B(b) \subseteq \partial\sigma_A(b).$$

(c) Ako je $b \in B$ i $\sigma_A(b)$ nema rupa, onda $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Dokaz. Očito je $Inv(B)$ otvoren u $B\cap Inv(A)$, pa ostaje pokazati zatvorenost. Neka je stoga (b_n) niz u $Inv(B)$ i neka je $b \in B \cap Inv(A)$ njegov limes. Očito je sada (zbog neprekidnosti funkcije uzimanja inverza) niz (b_n^{-1}) u B konvergira k $b^{-1} \in B$, zbog zatvorenosti od B. Dakle, $b \in Inv(B)$ pa je $Inv(B)$ zatvoren u $B \cap Inv(A)$. Time je dokazano (a).

Za (b), najprije uočimo da iz $Inv(B) \subseteq Inv(A)$ direktno slijedi $\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b)$. Neka je sada $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$ i neka je (λ_n) niz u $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(b)$ koji konvergira k λ. Očito je $b - \lambda_n \in Inv(B)$, a $b - \lambda \notin Inv(B)$ zbog zatvorenosti skupa $\sigma_B(b)$. Iz posljednjeg je jasno da mora vrijediti $b - \lambda \notin Inv(A)$, odnosno $\lambda \in \sigma_A(b)$. S druge strane, $b - \lambda_n \in Inv(A)$, pa je $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$ niz koji teži k $\lambda \in \sigma_A(b)$. Zaključujemo $\lambda \in \partial\sigma_A(b)$

Za (c) uočimo da je $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$ povezan, ako $\sigma_A(b)$ nema rupa. Kako je, prema prethodnim dijelovima teorema, $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(b)$ otvoren i zatvoren podskup od $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$, slijedi da $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(b) = \mathbb{C}\backslash\sigma_A(b)$. Dakle, $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. □

Ukoliko promatrana algebra nema jedinicu, možemo ju proširiti dodavanjem jedinice. Ipak, ovaj postupak ne svodi teoriju na promatranje algebri s jedinicom, budući da dodavanje jedinice ne mora biti prirodno, kao što je slučaj s $C_0(\mathbb{R})$.

Preciznije, za algebru A definiramo $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ kao vektorski prostor. Množenje definiramo izrazom

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu),$$

čime $\tilde{A}$ postaje algebra s jedinicom $(0, 1)$. Algebru $\tilde{A}$ nazivamo *unitizacijom* od A ili *proširenjem A jedinicom*.

Preslikavanje

$$A \to \tilde{A}, \quad a \mapsto (a, 0)$$

injektivni je homomorfizam algebri i A poistovjećujemo s $\operatorname{Im} A$ kao idealom u $\tilde{A}$. Također pišemo $a + \lambda$ umjesto (a, λ). Jasno je da je $\tilde{A}$ komutativna ako je A komutativna.

Ako je A normirana algebra, normu na $\tilde{A}$ definiramo s

$$\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|.$$

Također je jasno da je A zatvorena podalgebra od $\tilde{A}$, te da je $\tilde{A}$ Banachova ako je $\tilde{A}$ Banachova.

Konačno, ako A nema jedinicu, stavljamo $\sigma_A(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a)$, te $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda|$. Primijetimo da je u ovom slučaju uvijek $0 \in \sigma_A(a)$.

1.3 Gelfandova reprezentacija

Cilj ove točki uspostaviti je vezu između općenitih komutativnih Banachovih algebri i algebri neprekinutih funkcija na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru. Ovakvim pristupom postavljaju se temelji za proučavanje reprezentacija C*-algebri, čime se bavimo u trećem poglavlju ovog rada.

Najprije bez dokaza navodimo neke rezultate o idealima u Banachovim algebrama.

Teorem 1.3.1. *Neka je I modularan ideal Banachove algebre A. Ako je I pravi ideal, njegov zatvarač $\bar{A}$ također je pravi ideal. Ako je I maksimalan, onda je i zatvoren.*

Lema 1.3.2. *Neka je A Banachova algebra s jedinicom, a I maksimalan i modularan ideal u A. Tada je A/I polje.*

U svjetlu Teorema 1.3.1, napomenimo da lijevi ideal L Banachove algebre A nazivamo modularnim ako postoji $u \in A$ takav da $a - au \in L$ za sve $a \in A$. Ako je L pravi ideal, i njegov zatvarač $\bar{L}$ je također pravi lijevi ideal u A. Nadalje, ako je ideal L modularan i maksimalan, onda je zatvoren.

Uočimo da se svaki homomorfizam $\varphi\colon A \to B$ između algebre A i algebre s jedinicom B na jedinstven način može proširiti do unitalnog homomorfizma $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to B$. Za ovakvo proširenje vrijedi $\tilde{\varphi}(x + \lambda) = \tilde{\varphi}(x) + \lambda$ $(\forall x \in A, \lambda \in \mathbb{C})$.

Ako je $\varphi\colon A \to B$ unitalni homomorfizam između algebri s jedinicom A i B, tada vrijedi $\varphi(Inv(A)) \subseteq \varphi(Inv(B))$ te $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$ $(\forall a \in A)$.

Nadalje, neka je A komutativna algebra. Svaki nenul homomorfizam $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ naziva se *karakteristikom* na A. Skup svih karakteristika na A označavamo s $\Omega(A)$.

Teorem 1.3.3. *Neka je A komutativna Banachova algebra s jedinicom.*

(a) Ako je $\tau \in \Omega(A)$, *onda* $\|\tau\| = 1$.

(b) Skup $\Omega(A)$ *neprazan je, a preslikavanje*

$$\tau \mapsto \operatorname{Ker} \tau$$

bijekcija je iz skupa $\Omega(A)$ *u skup svih maksimalnih ideala u A.*

Dokaz. Neka je $\tau \in \Omega(A)$ i $a \in A$. Jasno je da je $\tau(a) \in \sigma(a)$, pa $|\tau(a)| \le r(a) \le \|a\|$. Dakle $\|\tau\| \le 1$. Kako je $\tau(1)^2 = \tau(1)$ i $\tau(1) = 0$, slijedi $\|\tau\| = 1$. Time je tvrdnja (a) dokazana.

Označimo $I := \operatorname{Ker}(\tau)$. I je pravi ideal budući da je $\tau \neq 0$. Također, $I + \mathbb{C}1 = A$ budući da je $a - \tau(a) \in I$ za svaki $a \in A$.Slijedi da je I maksimalan ideal u A.

Ako su $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$ takvi da $\operatorname{Ker}(\tau_1) = \operatorname{Ker}(\tau_2)$, tada za svaki $a \in A$ vrijedi $\tau_1(a - \tau_2(a)) = 0$, pa slijedi $\tau_1(a) = \tau_2(a)$. Dakle, $\tau_1 = \tau_2$, odnosno preslikavanje $\tau \mapsto \operatorname{Ker} \tau$ je injekcija.

Neka je sada I proizvoljan maksimalan ideal u A. Prema Teoremu 1.3.1, I je zatvoren, a prema lemi 1.3.2, A/I je polje, pa zaključujemo da je zapravo A/I Banachova algebra s jedinicom u kojoj je svaki nenul element invertibilan. Po Teoremu 1.2.8 slijedi $A/I = \mathbb{C}(1 + I)$, pa je $A = I \oplus \mathbb{C}1$. Definiramo li sada $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ s $\tau(a + \lambda) = \lambda, (\forall a \in I, \lambda \in \mathbb{C})$, slijedi da je $\operatorname{Ker}(\tau) = I$. Dakle, preslikavanje $\tau \mapsto \operatorname{Ker} \tau$ je surjekcija u skup maksimalnih ideala u A.

Na kraju, ostaje primijetiti da A sadrži barem jedan maksimalan ideal (jer sadrži jedinicu), pa je $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

Teorem 1.3.4. *Neka je A komutativna Banachova algebra.*

(a) Ako A ima jedinicu, onda

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \quad (\forall a \in A).$$

(b) Ako A nema jedinicu, onda

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\} \quad (\forall a \in A).$$

Dokaz. Neka najprije A ima jedinicu i neka je $a \in A$ takav da $\lambda \in \sigma(a)$. Kako $a - \lambda$ nije invertibilan, slijedi da je ideal $I = (a - \lambda)A$ pravi, pa je sadržan u nekom maksimalnom idealu. Označimo taj maksimalan ideal sa $\operatorname{Ker}\tau$, gdje je $\tau \in \Omega(A)$ (ovakav zapis je moguć zbog Teorema 1.3.3). Sada je jasno $\tau(a) = \lambda$. Time je pokazana inkluzija $\sigma(a) \subseteq \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}$, a obratna inkluzija je očita.

U drugom slučaju, neka A nema jedinicu. Sada je jasno $\Omega(\tilde{A}) = \{\tilde{\tau} \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\tau_\infty\}$, gdje je $\tilde{\tau}$ jedinstvena karakteristika na $\tilde{A}$ koja proširuje τ, a $\tau_\infty \colon \tilde{A} \to \mathbb{C}$ kanonski homomorfizam ($\tau_\infty(a + \lambda) = \lambda$, $\forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$). Sada po (a) dijelu ovog zadatka slijedi $\sigma(a) = \sigma_{\tilde{A}}(a) = \tau(a) \mid \tau \in \Omega(\tilde{A}) = \tau(a) \mid \tau \in \Omega(A) \cup \{0\}$. □

It Teorema 1.3.3 slijedi da je $\Omega(A)$ sadržan u zatvorenoj jediničnoj kugli prostora A'. Topologija na $\Omega(A)$ je w^*-topologija naslijeđena od A'. Ovako definiran topološki prostor $\Omega(A)$ nazivamo *prostor karakteristika* ili *spektar* od A.

Nije teško pokazati da za $\Omega(A)$ vrijedi sljedeći teorem, kojeg ovdje predstavljamo bez dokaza:

Teorem 1.3.5. *Ako je A komutativna Banachova algebra, onda je $\Omega(A)$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Ako A sadrži jedinicu, $\Omega(A)$ je kompaktan.*

Primijetimo da $\Omega(A)$ može biti prazan, kao što je primjerice slučaj za $A = 0$. Promotrimo stoga komutativnu Banachovu algebru A za koju je $\Omega(A)$ neprazan. Za $a \in A$ definiramo funkciju

$$\hat{a} \colon \Omega(A) \to \mathbb{C}, \quad \tau \mapsto \tau(a).$$

Iz definicije w^*-topologije zaključujemo da je topologija na $\Omega(A)$ najmanja topologija za koju je svaka od funkcija $\hat{a}$ neprekidna. Jasno je da je za svaki $\epsilon > 0$ skup $\{\tau \in \Omega(A) \mid |\tau(a)| \geq \epsilon\}$ zatvoren u w^*-topologiji zatvorene jedinične kugle u A'. Kako je, prema Banach-Alaogluovom teoremu (vidjeti, primjerice, u [1, Teorem 5.2.16]), zatvorena jedinična kugla kompaktna u w^*-topologiji prostora A', slijedi i da je skup $\{\tau \in \Omega(A) \mid |\tau(a)| \geq \epsilon\}$ kompaktan za svaki $\epsilon > 0$. Dakle, $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$, za svaki $a \in A$.

Ovako definiran $\hat{a}$ nazivamo *Gelfandovom transformacijom* od A.

Gotovo sve potrebno za dokaz sljedećeg teorema već smo napravili, pa taj, inače bitan rezultat, dobivamo jednostavnom argumentacijom:

Teorem 1.3.6 (Gelfandova reprezentacija)**.** *Pretpostavimo da je A komutativna Banachova algebra i da je $\Omega(A)$ neprazan. Tada je preslikavanje*

$$A \to \mathbb{C}_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a}$$

homomorfizam koji je kontrakcija (ne uvećava normu). Nadalje, vrijedi

$$r(a) = \|\hat{a}\| \quad (\forall a \in A).$$

Ako A sadrži jedinicu, onda $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A))$, a ako A ne sadrži jedinicu, onda $\sigma(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$, za svaki $a \in A$.

Dokaz. Prema Teoremu 1.3.4 vrijedi $\sigma(a) \cup \{0\} = \operatorname{Im} \hat{a} \cup \{0\}$, pa stoga vrijedi $r(a) = \|\hat{a}\|$, to nadalje povlači da je preslikavanje $a \mapsto \hat{a}$ kontrakcija. Konačno lako se provjeri da ovo preslikavanje homomorfizam. $\square$

Jezgru Gelfandove reprezentacije nazivamo *radikalom* algebre A. Radikal algebre A se sastoji od svih elemenata a te algebre za koje je $r(a) = 0$, pa stoga sadrži i sve nilpotentne elemente.

Uočimo da za proizvoljnu Banachovu algebru A i $a, b \in A$ koji komutiraju vrijedi $r(a + b) \leq r(a) + r(b)$ i $r(ab) \leq r(a)r(b)$. Ovo slijedi iz jednakosti $r(a) = \|\hat{a}\|$ iz Teorema 1.3.6, linearnosti preslikavanja $a \mapsto \hat{a}$ te nejednakosti trokuta i submultiplikativnosti norme u A.

Primjer 1.3.7. Pokažimo da spektralni radijus općenito nije aditivno niti submultiplikativno preslikavanje; neka je $A = M_2(\mathbb{C})$ i neka su

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da su a i b nilpotentni, vrijedi $r(a) = r(b) = 0$, ali očito $r(a + b) = r(ab) = 1$.

Teorem koji slijedi opravdava interpretaciju prostora karakteristika kao generalizacije spektra:

Teorem 1.3.8. *Neka je A algebra s jedinicom generirana jedinicom 1 i nekim elementom a. Tada je A komutativna i preslikavanje*

$$\hat{a} \colon \Omega(A) \to \sigma(a), \quad \tau \mapsto \tau(a)$$

je homeomorfizam.

Dokaz. Jasno je da je A komutativna i da je $\hat{a}$ neprekinuta bijekcija [Teorem 1.3.4]. Kako A ima jedinicu, prema Teoremu 1.3.5 oba prostora $\Omega(A)$ i $\sigma(a)$ su kompaktni Hausdorffovi, pa je $\hat{a}$ homeomorfizam. $\square$

Poglavlje 2

C*-algebre i njihovi pozitivni elementi

2.1 C*-algebre

Kako bismo predstavili rezultate teorije C*-algebri, uvedimo najprije osnovne koncepte koji se pritom koriste.

Involucija na agebri A je antilinearno preslikavanje $a \mapsto a^*$ takvo da vrijedi $a^{**} = a$ i $(ab)^* = b^*a^*$, za svake $a, b \in A$. Uređeni par $(A, *)$ naziva se *involutivnom algebrom* ili *$*$-algebrom*. Za $S \subseteq A$ stavimo $S^* = \{a^* \mid a \in S\}$, a ako je $S = S^*$ kažemo da je S *samoadjungiran*. Samoadjungirana podalgebra B algebre A naziva se *$*$subalgebra* od A te je B $*$-algebra s involucijom dobivenom restringiranjem involucije iz većeg prostora. Nadalje, budući da je presjek $*$-algebri ponovno $*$-algebra, za svaki $S \subseteq A$ postoji najmanja $*$-algebra koja sadrži S nazivamo je $*$-algebrm *generiranom* s S.

Ako je I samoadjungirani ideal u A, tada je A/I $*$-algebra s involucijom definiranom s $(a + I)^* = a^* + I$ za svaki $a \in A$.

Na unitizaciji $\tilde{A}$ $*$-algebre A definiramo involuciju stavljajući $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$, za sve $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$. Time $\tilde{A}$ postaje $*$-algebra u kojoj je A samoadjungirani ideal.

Element a $*$-algebre A nazivamo samoadjungiranim ili *hermitskim* ako vrijedi $a^* = a$. Za svaki $a \in A$ postoje jedinstveni hermitski elementi $b, c \in A$ takvi da $a = b + ic$ ($b = \frac{1}{2}(a + a^*)$, $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$). Nadalje, elementi aa^* i a^*a su hermitski.

Skup svih hermitskih elemenata u A označavamo s A_{sa}.

Element a nazivamo *normalnim* ako vrijedi $aa^* = a^*a$. U tom slučaju $*$-algebra koju a generira komutativna je i jednaka linearnoj ljuski elemenata oblika $a^m a^{*n}$, za sve $m, n \in \mathbb{N}, m + n > 0$.

Element p nazivamo *projektorom* ako vrijedi $p = p^* = p^2$.

Ako A ima jedinicu iz očito je $1^* = (11^*)^* = 1$, te za svaki $a \in Inv(A)$ vrijedi $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Iz toga slijedi jednakost $\sigma(a^*) = \sigma(a)^*$.

Za element a kažemo da je *unitaran* ako vrijedi $aa^* = a^*a = 1$.

Homomorfizam $*$-algebri koji čuva involuciju naziva se *$*$-homomorfizmom*. Ako je $*$-homomorfizam bjektivan, naziva se *$*$-izomorfizmom*. Ako je $\varphi\colon A \to B$ $*$-homomorfizam $*$-algebri A i B, onda je $\operatorname{Ker}\varphi$ samoadjungirani ideal u A, a $\operatorname{Im}\varphi$ $*$-podalgebra od B. $*$-izomorfizam iz A u samu sebe naziva se *$*$-automorfizmom*.

Banachovu $*$-algebru A čine $*$-algebra A zajedno s potpunom submultiplikativnom normom takvoom da $\|a^*\| = \|a\|$, za svaki $a \in A$. Ako A dodatno ima jedinicu takvu da $\|1\| = 1$, tada ju nazivamo Banachovom $*$-algebrom s jedinicom.

C-algebra* je Banachova $*$-algebra A takva da za svaki $aa \in A$ vrijedi

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Zanimljivo je da je zahtjev iz definicije C*-algebre prejak i isto se može dobiti ne zahtjevajući striktnu jednakost:

Lema 2.1.1. *Neka je A Banachova algebra opskrbljena involucijom za koju vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$, za svaki $a \in A$. Tada je A C*-algebra.*

Dokaz. Iz $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$ sijedi $\|a\| \leq \|a^*\|$ za svaki $a \in A$. Sada je jasno $\|a^*\| = \|a\|$ pa slijedi $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. Dakle, A je C*-algebra. □

Kako je zatvorena $*$-podalgebra C*-algebre i sama C*-algebra, nazivamo ju C*-podalgebrom. Uočimo da u slučaju C*-algebre s jedinicom mora vrijediti $\|1\| = \|1^*\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$, pa je $\|1\| = 1$.

Slično, za svaki nenul projektor p u C*-algebri imamo $\|p\| = \|p^2\| = \|p^*p\| = \|p\|^2$, pa je $\|p\| = 1$.Isto tako, za unitaran element u vrijedi $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$, pa je $\|u\| = 1$. Također, za $\lambda \in \sigma(u)$ vrijedi $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$. Zaključujemo da $|\lambda|, |\lambda^{-1}| \leq 1$, pa slijedi $|\lambda| = 1$.

Primjer 2.1.2. Za lokalno kompaktan Hausdorffov prostor Ω, $\mathbb{C}_0(\Omega)$ je C*-algebra s involucijom $f \mapsto \bar{f}$.

Primjer 2.1.3. Za Hilbertov prostor H, $B(H)$ je C*-algebra. Involucija na $B(H)$ dana je s $A \mapsto A^*$ $(\forall A \in B(H))$, gdje je A^* jedinstveni operator takav da $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x, y \in H$. Kasnije ćemo pokazati da se svaka C*-algebra može promatrati kao C*-podalgebra od $B(H)$ za neki Hilbertov prostor H [vidi Teorem 3.4.1].

Teorem 2.1.4. *Neka je a hermitski element C*-algebre A. Tada vrijedi $r(a) = \|a\|$.*

Dokaz. Pretpostavke povlače $\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$. Za svaki prirodan broj n indukcijom slijedi $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, pa slijedi $r(a) = lim_{n\to+\infty}\|a^n\|^{1/n} = lim_{n\to+\infty}\|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$. □

Upravo dokazani teorem ima bitan korolar:

Korolar 2.1.5. *Na proizvoljnoj $*$-algebri A postoji najviše jedna norma uz koju A postaje C*-algebra.*

Dokaz. Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme na $*$-algebri A uz koje ona postaje C*-algebra. Kako je aa^* hermitski za svaki $a \in A$, slijedi

$$\|a\|_j^2 = \|aa^*\|_j = r(aa^*) = \sup_{\lambda\in\sigma(aa^*)} |\lambda| \quad (j = 1, 2),$$

pa je $\|a\|_1 = \|a\|_2$ □

U prvom smo poglavlju pokazali da je za svaku Banachovu algebru A njena unitizacija $\tilde{A}$ također je Banachova algebra s normom $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$. Ako je A Banachova $*$-algebra, tada je i $\tilde{A}$ također Banachova $*$-algebra s gore navedenom normom. Analogija ovdje staje, jer promatrana unitizacija (zajedno s odgovarajućom normom) C*-algebre nije nužno i sama C*-algebra. Na primjer, za $A = \mathbb{C}$ i $(a, \lambda) = (-2, 1)$ vrijedi $\|(a, \lambda)\| = 9$, ali $\|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| = 1$.

Ipak, pokazuje se da na unitizaciji $\tilde{A}$ C*-algebre A postoji norma uz koju $\tilde{A}$ postaje C*-algebra. Kako bismo to dokazali, prelazimo nakratko na proučavanje dvostrukih centralizatora C*-algebri. Ovaj pristup vodi nas do željenog rezultata formaliziranog u Teoremu 2.1.9.

Dvostruki centralizator C*-algebre A uređeni je par (L, R) omeđenih linearnih preslikavanja na A takvih da

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b), \quad R(a)b = aL(b) \quad (\forall a, b \in A).$$

Uzmimo $c \in A$ i izrazima $L_c(a) = ca$ i $R_c(a) = ac$, $\forall a \in A$, definirajmo linearna preslikavanja $L_c, R_c \colon A \to A$. Iz submultipikativnosti norme slijedi

$$\sup_{\|b\|\leq 1} \|bc\| \leq \|c\|.$$

Kako se jednakost postiže za $b := c^*/\|c\|$, zaključujemo da u gornjoj nejednakosti uvijek vrijedi jednakost pa slijedi $\|L_c\| = \|c\|$. Potpuno analogno zaključujemo $\|R_c\| = \|c\|$.

Lema 2.1.6. *Ako je (L, R) dvostruki centralizator na C*-algebri A, tada vrijedi $\|L\| = \|R\|$.*

Dokaz. Budući da vrijedi $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\|\|a\|\|b\|$, imamo

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\|\leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\|\|b\|,$$

pa slijedi $\|L\| \leq \|R\|$.

Isto tako, iz $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\|\|a\|\|b\|$, slijedi

$$\|R(b)\| = \sup \|a\| \leq 1\|R(b)a\| \leq \|R\|\|b\|,$$

pa zaključujemo $\|R\| \leq \|L\|$. Dakle, $\|R\| = \|L\|$. □

Za C*-algebru A, sa $M(A)$ označavamo skup dvostrukih centralizatora na A. Na $M(A)$ definiramo zbrajanje po komponentama, a množenje skalarom $\alpha \in \mathbb{C}$ izrazom $(L, R) \mapsto (\alpha L, \alpha R)$, čime $M(A)$ postaje vektorski prostor. Zbog prethodne leme, normu elementa $(L, R) \in M(A)$ možemo definirati izrazom $\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|$. Sada se lako vidi da je $M(A)$ zatvoreni vektorski potprostor prostora $B(A) \oplus B(A)$.

Na $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$ umnožak definiramo izrazom

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2, R_1).$$

Direktnom provjerom dobivamo da je gornji umnožak element skupa $M(A)$ (odnosno da je množenje dobro definirano) i da je $M(A)$ algebra s obzirom na gore definirano množenje.

Za $L\colon A \to A$, definiramo $L^*\colon A \to A$ stavljajući $L^*(a) = (L(a))^*$. L^* je očito linearno te je preslikavanje $L \mapsto L^*$ antilinealna izometrija iz skupa $B(A)$ u sebe samog. Uočimo da vrijedi $L^{**} = L$ te $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$. Ako je $(L, R) \in M(A)$ tada je i $(L, R)^* = (R^*, L^*) \in M(A)$, te je s $(L, R) \mapsto (L, R)^*$ definirana involucija na $M(A)$.

Uočimo dodatno da koristeći treću jednakost u definiciji dvostrukog centralizatora i primjenjujući ju na $(L, R)^* = (R^*, L^*) \in M(A)$, dobivamo

$$\|L^*(a^*)L(a)\| = \|L^*(a^* L(a))\| = \|a^* R^* L(a))\|.$$

Ovime smo na $M(A)$ dobili strukturu C*-algebre, što je sadržaj sljedećeg teorema:

Teorem 2.1.7. *Ako je A C*-algebra, tada je $M(A)$ također C*-algebra s gore definiranim množenjem, involucijom i normom.*

Dokaz. Jedino što već nije pokazano je da za $T = (L, R) \in M(A)$ vrijedi $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Za $a \in A$, ako vrijedi $\|a\| \leq 1$ imamo $\|L(a)\|^2 = \|(L(a))^* L(a)\| = \|L^*(a^*)L(a)\| = \|a^* R^* L(a)\| \leq \|R^* L\| = \|T^*T\|$, pa slijedi

$$\|T\|^2 = \sup_{\|a\| \leq 1} \|L(a)\| \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2.$$

Dakle, pokazali smo $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

Do sada smo pokazali da je preslikavanje

$$A \to M(A), \quad a \mapsto (L_a, R_a)$$

izometričan $*$-homomorfizam te stoga možemo A identificirati s C*-podalgebrom od $M(A)$. Štoviše, vrijedi:

Lema 2.1.8. *A je ideal u $M(A)$.*

Dokaz. Neka je $T = (A, B) \in M(A)$ i označimo $S := (L_a, R_a)$. Tada je $TS = (A, B)(L_a, R_a) = (AL_a, R_aB)$, i za svaki $b \in A$ vrijedi $AL_a(b) = A(ab) = A(a)b = L_{A(a)}$, te $R_aB(b) = B(b)a = bA(a) = R_{A(a)}$. Dakle, $TS \in M(A)$. Potpuno analogno pokazujemo $ST \in M(A)$. □

Dodatno, uočimo da $M(A)$ ima jedinicu (id_A, id_A), pa je $A = M(A)$ ako i samo ako A ima jedinicu. Sada smo spremni dokazati sljedeći teorem:

Teorem 2.1.9. *Neka je A C*-algebra. Postoji jedinstvena norma na unitizaciji $\tilde{A}$ koja proširuje normu na A, a s kojom prostor $\tilde{A}$ postaje C*-algebra.*

Dokaz. Iz Korolar 2.1.5 slijedi jedinstvenost takvog prošireja, pa ostaje pokazati egzistenciju. Dokaz o postojanju takve norme provodimo najprije za A koji sadrži jedinicu, a onda za A koji ne sadrži jedinicu.

Pretpostavimo da A sadrži jedinicu e. Preslikavanje $\varphi : \tilde{A} \to A \oplus \mathbb{C}$, $\varphi(a, \lambda) = (a + \lambda e \lambda)$, je $*$-izomorfizam. Jasno je da se $\tilde{A}$ opskrbljen normom $\|(a, \lambda)\| = \|\varphi(a, \lambda)\|$ ima strukturu C*-algebre.

Ako A ne sadrži jedinicu, i 1 je jedinica u $M(A)$, tada očito vrijedi $A \cap \mathbb{C}1 = \{0\}$. Sada je jasno da je preslikavanje $\varphi : \tilde{A} \to A \oplus \mathbb{C}1$, gdje je $A \oplus \mathbb{C}1$ C*-podalgebra od $M(A)$, dano s $\varphi(a, \lambda) = a + \lambda 1$, je $*$-izomorfizam. Lako se vidi da $\tilde{A}$ opskrbljen normom $\|(a, \lambda)\| = (\|\varphi(a, \lambda)\|$ postaje C*-algebra. □

Ubuduće, kada govorimo o normi na $\tilde{A}$, uvijek ćemo misliti na normu uz koju je $\tilde{A}$ C*-algebra i koja proširuje normu na A.

Napomenimo da u slučaju kada A nema jedinicu, $M(A)$ općenito može biti pun veći prostor od $\tilde{A}$. Primjerice, za lokalno kompaktan Ω i $A = C_0(\Omega)$ vrijedi $M(A) = C_b(\Omega)$.

Uočimo da se svaki $*$-homomorfizam izeđu $*$-algebri A i B na jedinstven način proširuje na unitalni $*$-homomorfizam između njihovih unitizacija $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$.

Teorem 2.1.10. *Neka je A Banachova $*$-algebra i B C*-algebra. Tada je $*$-homomorfizam $\varphi\colon A \to B$ kontrakcija.*

Dokaz. Prema netom napomenutome, možemo pretpostaviti da A i B sadrže jedinicu i da je φ unitaln. Zbog $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$, koristeći Teorem 2.1.4, slijedi $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) \leq \|a^*a\| \leq \|a\|^2$. Dakle, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. □

Napomena 2.1.11. Uočimo da iz upravo dokazanog slijedi da svaki $*$-izomorfizam C*-algebri mora biti izometrija.

Jedno od zanimljivih svojstava hermitskih elemenata u C*-algebrama jest da im je spektar sadržan $\mathbb{R}$. Koristeći tu činjenicu, dobivamo sljedeći rezutat:

Teorem 2.1.12. *Svaka karakteristika na C*-algebri A čuva adjungiranje.*

Dokaz. Neka je $a \in A$ i $\tau \in \Omega(A)$. Zapišimo $a = b + ic$ gdje su $b, c \in A_{sa}$. Znamo da $\tau(b) \subseteq \sigma(b) \subseteq \mathbb{R}$ i $\tau(c) \subseteq \sigma(c) \subseteq \mathbb{R}$, pa vrijedi $\tau(a^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{(\tau(b) + i\tau(c))} = \overline{\tau(a)}$. □

Prema Teoremu 1.3.3, prostor karakteristika komutativne Banachove algebre s jedinicom neprazan je, pa isto vrijedi za komutativne C*-algebre s jedinicom. S druge strane, postoje nenul komutativne Banachove algebre bez jedinice čiji je prostor karakteristika prazan. Na sreću, to nije moguće u slučaju C*algebri.

Naime, neka je A nenul komutatativna C*-algebra bez jedinice. A mora sadržavati nenul element a. Iz a rastavom na realni i imaginarni hermitski dio dobivamo nenul hermitski element $b \in A$. Kako je za takve b $r(b) = \|b\|$, slijedi da postoji karakteristika τ na $\tilde{A}$ takva da $|\tau(b)| = \|b\| \neq 0$. Restrikcija funkcije τ na A nenul je homomorfizam iz A u $\mathbb{C}$- drugim riječima, karakteristika na A.

Sljedeći teorem vrlo je značajan jer u potpunosti opisuje komutativne C*-algebre.

Teorem 2.1.13 (Gelfand)**.** *Neka je A nenul komutativna C*-algebra. Gelfandova reprezentacija*

$$\varphi\colon A \to C_0(\Omega), \quad a \mapsto a^*$$

izometričan je $*$-izomorfizam.

Dokaz. Iz diskusije koja je prethodila ovom teoremu slijedi da je $\Omega(A)$ neprazan, a onda iz Teorema 1.3.6 dobivamo da je φ kontraktivni homomorfizam i vrijedi $\|\varphi(a)\| = r(a)$. Za $\tau \in \Omega(A)$ imamo $\varphi(a^*)(\tau) = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \varphi(a)^*(\tau)$, pa je φ $*$-homomorfizam. Nadalje, φ je izometrija budući da vrijedi $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sada je jasno da je $\operatorname{Im}\varphi$ zatvorena C*-podalgebra od $C_0(\Omega(A)$, te da za svaki $\tau \in \Omega(A)$ postoji $a \in \Omega$ takav da $\varphi(a)(\tau) \neq 0$. Prema Stone-Weierstrassovom teoremu [2, Teorem A.10.1] sada slijedi $\varphi(A) = C_0(\Omega(A))$. □

Neka je A C*-algebra i $a \in A$. Označimo s $C^*(a)$ najmanju C*-podalgebru od A koja sadrži a. Ako je a normalan, $C^*(a)$ je komutativna. Jednako tako, ako A ima jedinicu, onda je C*-algebra generirana s $\{1, a\}$ također komutativna. Koristeći Teorem 1.2.7 i primjenjujući Teorem 2.1.13 na $C^*(a)$ dobivamo da za normalan element $a \in A$ vrijedi $r(a) = \|a\|$.

Teorem 2.1.14. *Neka je B C*-podalgebra C*-algebre s jedinicom A. Neka B sadrži jedinicu u A. Tada vrijedi*

$$\sigma_B(b) = \sigma_A(b), \quad \forall b \in B.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je b hermitski. Budući da je tada $\sigma_B(b) \subseteq \mathbb{R}$, jasno je da $\sigma_B(b)$ nema rupa, pa po Teoremu 2.1.14 vrijedi $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$. Dodatno zaključujemo da je b invertibilan u B ako i samo ako je invertibilan u A.

Sada neka je b proivoljan element u B koji je invertibilan u A. Neka je $a \in A$ njegov inverz. Vrijedi $a^*b^* = b^*a^* = 1 = ab = ba$, pa slijedi $bb^*a^*a = 1$. Dakle, bb^* je invertibilan u A, a kako je hermitski, prema upravo pokazanom, invertibilan je i u B. Označimo s $c \in B$ njegov inverz u B, pa imamo $bb^*c = 1$, pa vidimo da je b^*c inverz od b, pa mora vrijediti $b^*c = a$. Dakle, $a \in B$. Tvrdnja teorema sada direktno slijedi. □

Uzmimo dva kompaktna Hausdorffova prostora Ω i Ω', te proizvoljno neprekidno preslikavanje $\theta\colon \Omega \to \Omega'$. Definiramo *transpoziciju* na $C(\Omega')$ jednakošću

$$\theta^t\colon C(\Omega') \to C(\Omega), \quad f \mapsto f\theta$$

i ono je unitalni $*$-homomorfizam. Nadalje, ako je θ homeomorfizam, θ^t je $*$-izomorfizam.

Teorem 2.1.15. *Neka je a normalan element C*-algebre A i neka je $z\colon \sigma(a) \to \mathbb{C}$ inkluzija. Tada postoi jedinstven unitalni $*$-homomorfizam $\varphi\colon C(\sigma(a)) \to A$ takav da $\varphi(z) = a$. Nadalje, φ je izometrija i $\operatorname{Im}\varphi$ je C*-podalgebra od A generirana s 1 i a.*

Dokaz. Označimo s B komutativnu C*-algebru generiranu s 1 i a te neka je $\psi\colon B \to C(\Omega(B))$ Gelfandova reprezentacija. Po Teoremu 2.1.13 ψ je $*$-izomorfizam, a budući da je svaki $\tau \in \Omega(B)$ u potpunosti određen djelovanjem na a, vidimo da je $\hat{a}\colon \Omega(B) \to \sigma(a)$ homeomorfizam. Iz ovoga slijedi da je $\hat{a}^t\colon C(\sigma(a)) \to C(\Omega(B))$ $*$-izomorfizam, pa možemo definirati $*$-homomorfizam $\varphi := (\psi)^{-1}\hat{a}^t\colon C(\Omega(B)) \to A$. Preslikavanje φ je očito unitalno i vrijedi $\varphi(z) = (\psi)^{-1}(\hat{a}^t(z)) = (\psi)^{-1}(\hat{a}) = a$. Budući da iz Stone-Weierstrassovog teorema slijedi da je $C(\sigma(a))$ generirano s 1 i z, dobivamo i tvrdnju o jedinstvenosti.

Budući da je $\varphi'\colon C(\Omega(B)) \to b$, $\varphi'(x) = \varphi(x)$ $*$-izomorfizam C*-algebri, ono je nužno izometrija. Stoga je i φ izometrija i $\operatorname{Im}\varphi = B$. □

Neka su A, B, a i φ kao iz tvrdnje prethodnog teorema. Primijetim da za polinom p vrijedi $\varphi(p) = p(a)$, pa za svaki $f \in C(\sigma(a))$ pišemo $f(a)$ umjesto $\varphi(f)$. Uz ovakvu uznaku vrijedi $f(a) \in A$.

Za proizvoljan $\tau \in \Omega(B)$ vrijedi da se preslikavanja $f \mapsto f(\tau(a)$ i $f \mapsto \tau(f(a))$ podudaraju na 1 i z, koji su generatori od $C(\sigma(a))$, pa vrijedi $f(\tau(a)) = \tau(f(a))$.

Teorem 2.1.16 (Preslikavanje spektra)**.** *Neka je a normalan element C*-algebre s jedinicom A i neka je $f \in A$. Vrijedi*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Nadalje, za $g \in C(\sigma(f(a)))$ vrijedi

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Dokaz. Označimo s B C*-podalgebru generiranu s 1 i a. Iz prethodne diskusije slijedi $\sigma(f(a)) = \{\tau(f(a)) \mid \tau \in \Omega(B)\} = \{f(\tau(a)) \mid \tau \in \Omega(B)\} = f(\sigma(a))$.

Neka je D C*-podalgebra generirana s 1 i $f(a)$. Jasno je da $D \subseteq B$ te da je za svaki $\tau \in \Omega(B)$ njegova restrikcija τ_D karakteristika na D. Sada koristeći prvi dio dokaza dobivamo $\tau((g \circ f)(a)) = ((g \circ f)(\tau(a))) = g(f(\tau(a))) = g(\tau_D(f(a))) = \tau_D(g(f(a))) = \tau(g(f(a)))$. Iz ovoga slijedi i druga tvrdnja teorema. □

Na kraju ove točke donosimo rezultat o prostoru karakteristika C*-algebre $C(A)$ za kompaktan Hausdorffov prostor A. Dokaz izostavljamo, a može se pronaći u [4, Teorem 2.1.15].

Teorem 2.1.17. *Neka je A kompaktan Hausdorffov prostor. Za svaki $\omega \in A$ s δ_ω označimo karakteristiku na $C(A)$ danu s $\delta_\omega(f) = f(\omega)$. Tada je preslikavanje*

$$A \to \Omega(C(A)), \quad \omega \mapsto \delta_\omega$$

homeomorfizam prostora.

2.2 Pozitivni elementi C*-algebri

U ovoj točki uvodi se parcijalni uređaj na hermitskim elementima C*-algebre. Najvažniji rezultati koje ovdje pokazujemo su postojanje jedinstvenog pozitivnog korijena svakog pozitivnog elementa te dokaz da je svaki element oblika a^*a pozitivan.

Primjer 2.2.1. Neka je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i $A = C_0(\Omega)$. Tada je A_{sa} jednak skupu realnih funkcija na A, a parcijalni je uređaj na A_{sa} zadan po točkama ($f \leq g$ ako $f(a) \leq g(a)$, za svaki $a \in A$. Element $f \in C_0(\Omega)$ je pozitivan, odnosno $f \geq 0$, ako je $f = g\bar{g}$ za neki $g \in A$. Ovakav f ima jedinstven pozitivan korijen (konkretno, to je funkcija $\omega \mapsto \sqrt{f(\omega)}$). Za $t \in \mathbb{R}^+$, uočimo da je f pozitivan ako $\|f - t\| \leq t$. S druge strane, ako je $\|f\| \leq t$ i $f \geq 0$, tada $\|f - t\| \leq t$. Ovaj primjer motivacija je za definiranje parcijalnog uređaja i pozitivnih elemenata na proizvoljnoj C*-algebri.

Neka je A algebra s jedinicom i B njezina podalgebra takva da $B + \mathbb{C}1 = A$. Direktnom proovjerom po slučajevima (kada B nema jedinicu, kada B ima jedinicu i $1_A \neq 1_B$ te B ima jedinicu i $1_A = 1_B$) dobivamo $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$. Odavde zaključujemo da za svaku C*-podalgebru B C*-algebre A vrijedi $\sigma_B(b) \cup \{0\} = \sigma_A(b) \cup \{0\}$.

Element a C*-algebre A nazivamo *pozitivnim* ako je a hermitski i ako vrijedi $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Tada pišemo $a \geq 0$ i skup svih pozitivnih elemenata označavamo s A^+.

Primijetimo da za $a, b \in A$ vrijedi $a \leq b$ ako i samo ako za svaki $\tau \in \Omega(C * (a, b))$ vrijedi $\tau(a) \leq \tau(b)$. Iz ovoga vidimo da korištenjem Gelfandove reprezentacije dobivamo da je $a \leq b$ ako i samo ako $\hat{a} \leq \hat{b}$.

Uočimo da je za hermitski $a \in A$ C*-algebra $C^*(a)$ jednaka zatvaraču skupa svih polinoma u a kojima je slobodni član jednak 0.

Teorem 2.2.2. *Neka je A C*-algebra i $a \in A^+$. Tada postoji jedinstven $b \in A^+$ takav da $b^2 = a$.*

Dokaz. Neka je Ω prostor karakteristika C*-algebre $C^*(a)$. Sada je, prema teoremu 2.1.13, $C^*(a)$ izometrički $*$-izomorfno s $C_0(\Omega)$. Sada uz pomoć Primjera 2.2.1 dobivamo egzistenciju pozitivnog korijena pozitivnog elementa a. Dokažimo sada jedinstvenost: neka su $b, c \in A^+$ takvi da $b^2 = a = c^2$. Budući da c komutira s a, mora komutirati i s b budući da je B limes niza polinoma u a. Neka je B C*-podalgebra geerirana s b i c, koja je očito komutativna. Neka je $\varphi\colon B \to C_0(\Omega)$ Gelfandova reprezentacija, pa su tada $\varphi(b)$ i $\varphi(c)$ pozitivni korijeni od $\varphi(a)$ u $C_0(\Omega)$. Koristeći Primjer 2.2.1 imamo $\varphi(b) = \varphi(c)$, pa slijedi $b = c$. □

Neka je a pozitivan element C*-algebre A. Jedinstveni b iz upravo dokazanog teorema označavamo s $a^{1/2}$.

Za hermitski element c, c^2 je pozitivan. Označimo s $|c| := (c^2)^{1/2}$, $c^+ := \frac{1}{2}(|c| + c)$ i $c^- := \frac{1}{2}(|c| - c)$. Korištenjem Gelfandove reprezentacije C*-algebre $C^*(a)$, slično kao u dokazu jedinstvenosti pozitivnog korijena, odobivamo da su $|c|$, c^+ i c^- pozitivni elementi takvi da $c = c^+ - c^-$, $|c| = c^+ + c^-$, te $c^+c^- = 0$.

Lema 2.2.3. *Neka je A C*-algebra s jedinicom, $a \in A$ hermitski i $t \in \mathbb{R}$. Tada je $a \geq 0$ ako $\|a - t\| \leq t$. Obrnuto, ako je $\|a\| \leq t$ i $a \geq 0$ tada $\|a - t\| \leq t$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti $A = C^*(1, a)$ komutativna C*-algebra. Prema Teoremu 2.1.13 A je izometrički $*$-izomorfno s $C_0(\Omega(A))$, pa uz korištenje Primjera 2.2.1 dobivamo traženi rezultat. □

Iz ovoga direktno slijedi da je A^+ zatvoren u A.

Lema 2.2.4. *Suma pozitivnih elemenata pozitivan je element.*

Dokaz. Neka su $a, b \in A^+$ gdje je A C*-algebra (možemo pretpostaviti da sadrži jedinicu). Po prethodnoj lemi vrijedi $\|a - \|a\|\| \leq \|a\|$ i $\|b - \|b\|\| \leq \|b\|$, pa imamo $\|a + b - (\|a\| + \|b\|)\| \leq \|a - \|a\|\| + \|b - \|b\|\| \leq \|a\| + \|b\|$. Opet koristeći prethodnu lemu za $t = \|a\| + \|b\|$ dobivamo rezultat. □

Teorem 2.2.5. *Za proizvoljan a element C*-algebre A, a^*a je poztivan.*

Dokaz. Najprije pokažimo da $-a^*a \in A^+$ povlači $a = 0$. Stoga, pretpostavimo $-a^*a \in A^+$. Budući da $\sigma(-a^*a)\backslash\{0\} = \sigma(-aa^*)\backslash\{0\}$, pa $-aa^* \in A^+$. Zapišimo $a = b + ic$ gdje su $b, c \in$

A_{sa}, pa direktnim računom slijedi $a^*a = 2b^2+2c^2-aa^* \in A^+$. Stoga $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$. Sada imamo $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0$.

Neka je sada $a \in A$ proizvoljan. Označimo s $b = a^*a$. Jasno je da je b hermitski te stoga možemo pisati $b = b^+ - b^-$. Za $c = ab^-$ vrijedi $-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3 \in A^+$. Prema prvom dijelu dokaza slijedi $c = 0$, pa mora vrijediti $b^- = 0$, odnosno $a^*a = b^+ \in A^+$. □

Iz upravo dokazanog teorema slijedi da možemo proširiti definiciju apsolutne vrijednosti na sve elemente $a \in A$: definiramo $|a| := (a^*a)^{1/2}$, $\forall a \in A$.

Sada je jasno da je na A_{sa}, skupu hermitskih elemenata u A, definiran parcijalnu uređaj $\leq$ tako da vrijedi $a \leq b$ ako vrijedi $b - a \in A^+$. Relacija $\leq$ tranzitivna je (drugim riječima, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall a, b, c, \in A^+$). Također vrijedi $a \leq b \Rightarrow ta \leq tb$, za svaki $t \in \mathbb{R}^+$, te $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$.

Teorem 2.2.6. *Neka je A C*-algebra.*

(a) Vrijedi $A^+ = \{a^*a \mid a \in A\}$.

(b) Ako su $a, b \in A_{sa}$, *tada* $a \leq b$ *povlači* $c^*ac \leq c^*bc$.

(c) Ako je $0 \leq a \leq b$ *onda* $\|a\| \leq \|b\|$.

(d) Ako A ima jedinicu i $a, b \in A^+ \cap Inv(A)$, *onda* $a \leq b$ *povlači* $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Dokaz. Uočimo da iz postojanja pozitivnog korijena pozitivnih elemenata i Teorema 2.2.4 slijedi tvrdnja (a).

Neka su $a, b \in A_{sa}$, takvi da $a \leq b$, odnosno $b - a \in A^+$, pa imamo $b - a = dd^*$, za neki $d \in A^+$, prema tvrdnji (a). Sada $c^*bc - c^*ac = c^*(d - a)c = c^*dd^*c = e^*e$, za $e = d^*c \in A$. Primienjujući (a) dobivamo tvrdnju (b).

Kako bismo pokazali tvrdnju (c), možemo pretpostaviti da A ima jedinicu. Iz Gelfandove reprezentacije primijenjene na $C^*(1, b)$ slijedi $b \leq \|b\|$, pa onda i $a \leq \|b\|$. Sada primijenimo Gelfandove reprezentacije na $C^*(1, a)$ i dobivamo $\|a\| \leq \|b\|$.

Za dokaz tvrdnje (d) najprije uočimo da vrijedi $c \geq 1 \Rightarrow \sigma(c) \subseteq [1, +\infty\rangle \Rightarrow c \in Inv(A)$. Primijenom Gelfandove reprezentacije na $C^*(1, c)$ dobivamo $c^{-1} \leq 1$. Sada uočimo da vrijedi $a \leq b \Rightarrow 1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leq a^{-1/2}ba^{-1/2} \Rightarrow (a^{-1/2}ba^{-1/2})^{-1} \leq 1 \Rightarrow a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leq 1$. Sada je jasno $b^{-1} \leq (a^{1/2})^{-1}(a^{1/2})^{-1} = a^{-1}$. □

Teorem 2.2.7. *Neka su a i b pozitivni elementi C*-algebre A. Tada* $a \leq b$ *povlači* $a^{1/2} \leq b^{1/2}$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da A ima jedinicu i pokazujemo da za $a, b \in A$ vrijedi $a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$. Neka je $t > 0$ i neka su c, d realni i imaginarni hermitski dio elementa $(t + b + a)(t + b - a)$. Imamo

$$c = \frac{1}{2}[(t + b + a)(t + b - a) + (t + b - a)(t + b + a)] = t^2 + 2tb + b^2 - a^2 \geq t^2 > 0.$$

Dakle, c je invertibilan i pozitivan. Budući da za svaki $x \in A_{sa}$ i proizvoljan $\tau \in \Omega(\mathbb{C}^*(1, x))$ vrijedi $\tau(1 + ix) = 1 + i\tau(x) \neq 0$, zaključujemo da je $1 + x \in Inv(C^*(1, x))$. Sada vidimo da je $1 + ic^{-1/2}dc^{-1/2} = c^{-1/2}(c + id)c^{-1/2}$ invertibilan, slijedi da je $c + id$ invertibilan. Iz toga zaključujemo da $t+b-a$ ima lijevi inverz, pa, budući da je hermitski, mora biti invertibilan. Dakle, $-t \notin \sigma(b - a)$. Kako ovo vrijedi za svaki $t > 0$, imamo $\sigma(b - a) \subseteq \mathbb{R}^+$, pa je $b - a$ pozitivan. □

Napomenimo na kraju da $0 \leq a \leq b$ općenito ne povlači $a^2 \leq b^2$. Kao primjer C*-algebre u kojoj to ne vrijedi navodimo $M_2(\mathbb{C})$. Može se pokazati da navedena implikacija vrijedi samo u komutativnim C*-algebrama [5, Propozicija 1.3.9].

Primjer 2.2.8. Neka je $A = M_2(\mathbb{C})$. Na toj C*-algebri involucija je definirana izrazom

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}.$$

Neka su $p, q \in A$ projekcije

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada vrijedi $p \leq p + q$, ali $p = p^2 \nleq (p + q)^2 = p + q + pq + qp$ budući da

$$q + pq + qp = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ima negativnu svojstvenu vrijednost.

Poglavlje 3

Ideali i pozitivni funkcionali

Glavni je cilj ovog poglavlja dokazati Gelfand-Naimarkov teorem, koji tvrdi da se svaka C*-algebra može prikazati kao C*-podalgebra od $B(H)$ za neki Hilbertov prostor H. Kako bismo došli do tog rezultata, potrebno je pokazati vezu između pozitivnih linearnih funkcionala i nekih reprezentacija algebre. Također, bitnom se pokazuje veza između pozitivnih linearnih funkcionala i zatvorenih (lijevih) ideala algebre.

3.1 Ideali u C*-algebrama

U ovoj točki pokazujemo postojanje aproksimativne jedinice u C*-algebri. Iako smo pokazali da postoji mogućnost unitizacije svake C*-algebre, napomenuli smo da ovakav pristup nije uvijek odgovarajući. Postojanje aproksimativne jedinice koristimo da bismo pokazali razne rezultate o idealima i homomorfizmima u C*-algebrama.

Aproksimativna jedinica C*-algebre A rastući je hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli prostora A takav da $a = \lim_\lambda au_\lambda$, za svaki $a \in A$. Ekvivalentan je zahtjev $a = \lim_\lambda u_\lambda a$, za svaki $a \in A$.

Neka je A proizvoljna C*-algebra i sa Λ označimo skup svih pozitivnih elemenata $a \in A$ takvih da $\|a\| \leq 1$. Ovaj skup je parcijalno uređen kao podskup od A_{sa}. Da bismo vidjeli da je Λ usmjeren skup, ostaje samo pokazati da za svake $a, b \in \Lambda$ postoji $c \in \Lambda$ takav da $a, b \leq c$.

Lema 3.1.1. *Neka je Λ skup svih pozitivnih elemenata $a \in A$ takvih da $\|a\| \leq 1$. Tada je Λ usmjeren.*

Dokaz. Neka su $a, b \in A^+$. Očito je $1+a$ invertibilan u $\tilde{A}$ i vrijedi $a(1+a)^{-1} = 1-(1+a)-1$. Tvrdimo da vrijedi

$$a, b \in A^+ \text{ i } a \leq b \Rightarrow a(1 + a)^{-1} \leq b(1 + b)^{-1}.$$

Naime, zbog $0 \leq a \leq b$ vrijedi $1 + a \leq 1 + b$ što povlači $(1 + a)^{-1} \geq (1 + b)^{-1}$ po Teoremu 2.2.6. Sada imamo $1 - (1 + a)^{-1} \leq 1 - (1 + b)^{-1}$, odnosno $a(1 + a)^{-1} \leq b(1 + b)^{-1}$.

Koristeći Gelfandovu reprezentaciju od $C^*(1, a)$ dobivamo da za $a \in A^+$ slijedi $a(1 + a)^{-1} \in \Lambda$. Neka su sada $a, b \in \Lambda$. Označimo $a' = a(1 - a)^{-1}$ i $b' = b(1 - b)^{-1}$ i $c = (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}$. Vidimo da $c \in \Lambda$ i $a' \leq a' + b'$, stoga vrijedi $a = a'(1 + a')^{-1} \leq c$ primijenjujući nejednakost dokazanu u prvom dijelu leme. Analogno dobivamo $b \leq c$, čime je lema dokazana. □

Primijetimo da so u dokazu prethodne leme većinu dokaza provodili u $\tilde{A}$ umjesto u A. Sličnu taktiku provodit ćemo, najčešće prešutno, i u ostatku poglavlja.

Teorem 3.1.2. *Svaka C*-algebra A ima aproksimativnu jedinicu. Preciznije, za skup* Λ *defniran kao ranije i* $u_\lambda = \lambda$ *za sve* $\lambda \in \Lambda$*, hiperniz* $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *aproksimativna je jedinica u A i zovemo je kanonskom aproksimativnom jedinicom.*

Dokaz. Kao što je pokazano u Lemi 3.1.1, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ je rastući hiperniz u zatvorenoj jediničnoj kugli prostora A. Stoga samo trebamo pokazati da vrijedi $a = lim_\lambda a u_\lambda$, za svaki $a \in A$. Uočimo da se svaki element može prikazati kao linearna kombinacija hermitskih, a svaki hermitski kao linearna kombinacija pozitivnih, pa slijedi da Λ linearno razapinje A. Stoga je traženu jednakost dovoljno pokazati za svaki $a \in \Lambda$.

Neka je sada $a \in \Lambda$ i $\epsilon > 0$.Neka je $\varphi \colon C^*(a) \to C_0(\Omega)$ Gelfandova reprezentacija. Ako je $f = \varphi(a)$, onda je $K = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompaktan. Prema Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $a \colon \Omega \to [0, 1]$ s kompaktnim nosačem takva da $g(\omega) = 1$ za svaki $\omega \in K$. Izaberimo $\delta > 0$ takav da $\delta < 1$ i $1 - \delta < \epsilon$. Tada $\|f - \delta g f\| \leq \epsilon$. Ako označimo $\lambda_0 = \varphi^{-1}(\delta g)$, onda $\lambda_0 \in \Lambda$ i $\|a - u_{\lambda_0} a\| \leq \epsilon$. Pretpostavimo da je $\lambda \in \Lambda$ i $\lambda \geq \lambda_0$. Tada $1 - u_\lambda \leq 1 - u_{\lambda_0}$, pa slijedi $a(1 - u_\lambda)a \leq a(1 - u_{\lambda_0})a$. Stoga imamo $\|a - u_\lambda a\|^2 = \|(1 - u_\lambda)^{1/2}(1 - u_\lambda^{1/2} a\|^2 \leq \|(1 - u_\lambda)^{1/2} a\|^2 = \|a(1 - u_\lambda)a\| \leq \|a(1 - u_{\lambda_0})a\| \leq \|(1 - u_{\lambda_0})a\| \leq \epsilon$. Dakle, $a = lim_\lambda a u_\lambda$. □

Napomena 3.1.3. Ako je C*-algebra A separabina, onda u A postoji aproksimativna jedinica koja je niz. Uzmimo rastući niz konačnih skupova $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takav da je $F = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ gust u A i neka je $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u A. Za $\epsilon > 0$ i $F_n = \{a_1, \ldots, a_m\}$ postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takvi da $\|a_j - a_j u_\lambda\| < \epsilon$ za $\lambda \geq \lambda_j$. Izaberimo $\lambda_\epsilon \in \Lambda$ takav da $\lambda_\epsilon \geq \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Tada vrijedi $\|a - a u_\lambda\| < \epsilon$ za sve $a \in F_n$ i sve $\lambda \geq \lambda_\epsilon$. Stoga za $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon = \frac{1}{n}$ te niz $\lambda_n = \lambda_\epsilon \in \Lambda$ vrijedi $\|a - a u_n\| < 1/n$, za svaki $a \in F_n$. Također, jasno je da možemo birati λ_n tako da $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ za svaki n. Budući da je F gust u A, imamo $\lim_{n \to +\infty} \|a - a u_{\lambda_n}\| = 0$ za svaki $a \in A$. Dakle, niz $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je aproksimativna jedinica u A.

Teorem 3.1.4. *Neka je L zatvoreni lijevi ideal u C*-algebri A. Tada postoji rastući hiperniz* $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli od L takav da* $a = \lim_\lambda a u_\lambda$ *za svaki* $a \in L$.

Dokaz. Stavimo $B = L \cap L^*$. Budući da je B C*-algebra, po Teoremu 3.1.2 ona sadrži aproksimativnu jedinicu $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Za svaki $a \in A$ vrijedi $a^*a \in B$, pa slijedi $0 = \lim_\lambda a^*a(1 - u_\lambda)$, pa imamo $\lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \leq \lim_\lambda \|a^*a(1 - u_\lambda)\| = 0$. Dakle, $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je aproksimativna jedinica u L. $\square$

Teorem 3.1.5. *Neka je I zatvoreni ideal u C*-algebri A. Tada je I samoadjungiran i stoga je C*-podalgebra od A. Ako je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u I, onda za svaki $a \in A$ vrijedi*

$$\|a + I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$$

Dokaz. Prema Teoremu 3.1.4 postoji rastući hiperniz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata u zatvorenoj jediničnoj kugli od I takav da $a = \lim_\lambda au_\lambda$ za svaki $a \in I$. Stoga vrijedi $a^* = \lim_\lambda u_\lambda a^*$, pa je $a^* \in I$ budući da je I zatvoreni ideal, a $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq I$. Dakle, I je samoadjungiran pa je i C*-podalgebra od A.

Neka je sada $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ proizvoljna aproksimativna jedinica u I, $a \in A$ i $\epsilon > 0$. Tada postoji $b \in I$ takav da $\|a + b\| < \|a + I\| + \epsilon/2$. Budući da vrijedi $b = \lim_\lambda u_\lambda b$, postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da $\|b - u_\lambda b\| < \epsilon/2$ za sve $\lambda \geq \lambda_0$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\| &\leq \|(1 - u_\lambda)(a + b)\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &\leq \|a + b\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &< \|a + I\| + \epsilon/2 + \epsilon/2.\end{aligned}$$

Slijedi da je $\|a + I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|$ te stoga i $\|a + I\| = \|a^* + I\| = \lim_\lambda \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|$. $\square$

Napomena 3.1.6. Neka je I zatvoreni idea u C*-algebri A, a J zatvoreni ideal u I. Koristeći svojstva aproksimativne jedinice pokazujemo da je tada J ideal u A. Kako bismo ovo dokazali, dovoljno je pokazati da su ab i ba u J za svaki $a \in A$ i $b \in J^+$ (sjetimo se da J^+ linerno razapinje J). Uzmimo $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativnu jedinicu u I, i uočimo $b^{1/2} \in C^*(a) \subseteq J \subseteq I$, pa $b^{1/2} = \lim_\lambda u_\lambda b^{1/2}$. Stoga vrijedi $ab = \lim_\lambda au_\lambda b^{1/2}b^{1/2}$, pa slijedi $ab \in J$ budući da je $b^{1/2} \in J$, $au_\lambda b^{1/2} \in I$, a J ideal u I. Na kraju ostaje uočiti $a^*b \in J$, pa i $ba \in J$ budući da je J samoadjungiran.

Teorem 3.1.7. *Neka je I zatvoreni ideal C*-algebre A. Tada je kvocijentni prostor A/I i sam C*-algebra s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja te kvocijentnom normom.*

Dokaz. Dobra definiranost zbrajanja i množenja je jasna. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u I. Za $a \in A$ i $b \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|a + I\|^2 &= \lim_{\lambda} \|a - au_\lambda\|^2 \\
&= \lim_{\lambda} \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \\
&\leq \sup_{\lambda} \|(1 - u_\lambda)(a^*a + b)(1 - u_\lambda)\| + \lim_{\lambda} \|(1 - u_\lambda)b(1 - u_\lambda)\| \\
&\leq \|a^*a + b\| + \lim_{\lambda} \|b - bu_\lambda\| \\
&= \|a^*a + b\|.
\end{aligned}$$

Stoga $\|a + I\|^2 \leq \|a^*a + I\|$. Prema Lemi 2.1.1 slijedi da je A/I C*-algebra. □

Teorem 3.1.8. *Neka je $\varphi\colon A \to B$ injektivan $*$-homomorfizam C*-algebri A i B. Tada je φ izometrija.*

Dokaz. Pokazujemo da vrijedi $\|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2$, za svaki $a \in A$. Ekvivalentna je tvrdnja $\|\varphi(a^*a)\| = \|a^*a\|$, za svaki $a \in A$. Sada vidimo da se možemo pretpostaviti da su A i B komutativne (ako je potrebno ograničimo domenu na $C^*(a^*a)$, a kodomenu na $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$). Nadalje, ako je potrebno promatramo proširenje funkcije $\tilde{\varphi}\colon \tilde{A} \to \tilde{B}$. Dakle, možemo pretpostaviti da su A, B i φ unitalni.

Ako je τ karakteristika na B, tada je $\tau \circ \varphi$ karakteristika na A. Jasno je da je preslikavanje

$$\varphi'\colon \Omega(A) \to \Omega(B), \quad \tau \mapsto \tau \circ \varphi$$

neprekidno. Stoga je $\operatorname{Im}\varphi'$ kompakt (kao neprekidna slika komapakta), a kako je i $\Omega(A)$ kompaktan skup, slijedi da je $\varphi(\Omega(A))$ zatvoren u $\Omega(A)$. Ako je $\varphi'(\Omega(A)) \neq \Omega(A)$, onda po Urysohnovoj lemi postoji nenul neprekidna funkcija $f\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ takva da se f poništava na $\varphi'(\Omega(A))$. Prema Teoremu 2.1.13 slijedi da je $f = \hat{a}$ za neki $a \in A$. Dakle, za svaki $\tau \in \Omega(B)$ vrijedi $\tau(\varphi(a)) = \hat{a}(\tau \circ \varphi) = 0$. Sada zaključujemo $\varphi(a) = 0$, pa zbog injektivnosti slijedi $a = 0$. Dobili smo kontradikciju s $\hat{a} = f \not\equiv 0$. Zaključujemo da je jedino moguće $\varphi'(\Omega(B)) = \Omega(A)$, pa za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau \in \Omega(A)} |\tau(a)| = \sup_{\tau \in \Omega(A)} \tau(\varphi(a)) = \|\varphi(a)\|.$$

Dakle, φ je izometrija. □

Teorem 3.1.9. *Za $\varphi\colon A \to B$, $*$-homomorfizam C*-algebri, $\varphi(A)$ je C*-podalgebra od B.*

Dokaz. Preslikavanje

$$A/\operatorname{Ker}\varphi \to B, \quad a + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(a)$$

injektivni je $*$-homomorfizam C*-algebri. Prema tvrdnji prethodnog teorema, φ je izometrija, pa je $\varphi(A)$ poptun prostor. Slijedi da je $\varphi(A)$ zatvoren u B. □

Teorem 3.1.10. *Neka je B C*-podalgebra, a I zatvoreni ideal C*-algebre A. Tada je $B+I$ C*-podalgebra od A.*

Dokaz. Sve osim potpunosti prostora $B+I$ je trivijalno, stoga pokazujemo samo tu činjenicu. Budući da je I potpun, dovoljno je pokazati da je $(B+I/I$ potpun. Presjek $B\cap I$ zatvoren je ideal u B, a preslikavanje $\varphi\colon B/(B\cap I)\to A/I$ dano s $\varphi(b+B\cap I)=b+I$ je $*$-homomorfizam sa slikom $(B+I)/I$. Iz tvrdnje prošlog teorema dobivamo da je $(B+I)/I$ C*-algebra, pa je i potpun prostor. □

3.2 Hereditarne C*-podalgebre

U ovoj se točki izučava posebna vrsta C*-podalgebri- hereditarne C*-podalgebre. Ova vrsta C*-algebre ističe se nekim dobrim svojstvima, posebice što se tiče proširivanja pozitivnih linearnih funkcionala. U nastavku pokazujemo i dobra svojstva hereditarnih C*-podalgebri u vezi s konceptom jednostavnosti algebri.

C*-podalgebra B C*-algebre A naziva se *hereditarnom* ako za svaki $a\in A^+$ i $b\in B^+$ nejednakost $a\le b$ povlači $a\in B$. Očito su 0 i A hereditarne C*-podalgebre od A te da je svaki presjek heredutarnih C*-podalgebri od A ponovno hereditarna C*-podalgebra od A. Stoga možemo definirati hereditarnu C*-podalgebru *generiranu* skupom S kao najmanju hereditarnu C*-podalgebru od A koja sadrži S.

Primjer 3.2.1. Za p projektor u C*-algebri A, C*-podalgebra pAp je hereditarna. Pokažimo ovo: za $0\le b\le pap$ slijedi $0\le(1-p)b(1-p)\le(1-p)pap(1-p)=0$ te stoga imamo $(1-p)b(1-p)=0$. Slijedi $\|b^{1/2}(1-p)\|^2=\|(1-p)b(1-p)\|=0$, pa vrijedi $b(1-p)=0$. Sada izravno zaključujemo $b=pbp\in pAp$.

Teorem 3.2.2. *Neka je A C*-algebra.*

(a) Ako je L zatvoreni lijevi ideal u A, onda je $L\cap L^*$ hereditarna c-podalgebra od A. Preslikavanje $L\mapsto L\cap L^*$ bijekcija je sa skupa zatvorenih ideala u A i skupa hereditarnih C*-podalgebri od A.*

(b) Ako su L_1 i L_2 zatvoreni lijevi ideali od A, tada vrijedi $L_1\subseteq L_2$ ako i samo ako $L_1\cap L_1^*\subseteq L_2\cap L_2^*$.

(c) Za B hereditarnu C-podalgebru od A, skup*

$$L(B)=\{a\in A\mid a^*a\in B\}$$

jedinstveni je zatvoreni lijevi ideal od A pridružen B.

Dokaz. Neka je L zatvoren lijevi ideal u A. Tada je $B = L \cap L^*$ očito C*-podalgebra od A. Neka su$a \in A^+$ i $b \in B^+$ takvi da $a \leq b$. Iz Teorema 3.1.2 slijedi da u B postoji aproksimativna jedinica $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Imamo $0 \leq (1-u_\lambda)a(1-u_\lambda) \leq (1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)0$, pa slijedi $\|a^{1/2} - a^{1/2}u_\lambda\|^2 = \|(1-u_\lambda)a(1-u_\lambda)\| \leq \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \leq \|b - bu_\lambda\|$. Dakle, $a^{1/2} = \lim_{\lambda\in\Lambda} a^{1/2}u_\lambda$, pa $a^{1/2} \in L$, budući da je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L$. Stoga je i $a^{1/2} \in B$, pa je B hereditarna. Time je dokazan prvi dio tvrdnje iz (a) dijela.

Dokažimo sada (b). Neka su L_1, L_2 zatvoreni lijevi ideali u A. Implikacija $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$ očita je, pa dokazujemo suprotan smjer. Neka vrijedi $L_1 \cap L_1^* \subseteq L_2 \cap L_2^*$ i neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u $L_1 \cap L^*$. Uzmimo $a \in L_1$ pa zaključujemo: $\lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| \leq \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a^*a(1-u_\lambda)\| = 0$ budući da je $a^*a \in L_1 \cap L_1^*$. Time je (b) dokazan.

Kako bismo dokazali (c), uzmimo najprije B hereditarnu C*-podalgebru od A i stavimo $L = L(B)$. Za $a, b \in L$, vrijedi $(a+b)^*(a+b) \leq (a+b)^*(a+b)+(a-b)^*(a-b) = 2a^*a+2b^*b \in B$, pa imamo $a + b \in L$. Ako je $a \in A$ i $b \in L$, tada $(ab)^*(ab) = b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b \in B$, pa je $ab \in L$. Slično dobivamo zatvorenost skupa L na množenje skalarima. Dakle, L je lijevi ideal i očito je zatvoren, budući da je B zatvoren. Za $b \in B$ slijedi $b^*b \in B$, pa je $b \in L$. Stoga $B \subseteq L \cap L^*$. Ako je $0 \leq b \in L \cap L^*$, tada $b^2 \in B$, pa je i $b \in C^*(b^2) \subseteq B$. Zaključujemo $L \cap L^* \subseteq B$ te stoga vrijedi (c).

Uočimo da smo pokazali da je svaka hereditarna C*-podalgebra oblika $L \cap L^*$ gdje je L zatvoreni lijevi ideal u A (iz (c) imamo točan oblik ideala L) te da je svaki $L \cap L^*$ hereditarna C*-algebra. Time dobivamo drugu tvrdnju iz (a) dijela (onu o bijektivnosti). □

Teorem 3.2.3. *Neka je B C*-podalgebra C*algebre A. Tada je B hereditarna u A ako i samo ako $bab' \in B$ za sve $b, b' \in B$ i $a \in A$.*

Dokaz. Ako je B hereditarna, onda po prethodnom teoremu vrijedi $B = L \cap L^*$ za neki zatvoreni lijevi ideal L od A. Stoga, ako su $b, b' \in B$ i $a \in A$, slijedi $b(ab') \in L$ te $b'^*(ab^*) \in L$. Dakle, $bab' \in B$.

Za suprotni smjer, pretpostavimo da je B takva da $bab' \in B$ za sve $b, b' \in B$ i $a \in A$. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u B i $a \in A^+$, $b \in B^+$ te $a \leq b$. Tada $0 \leq (1 - u_\lambda)a(1-u_\lambda) \leq (1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)$, pa $\|a^{1/2} - a^{1/2}u_\lambda\| \leq \|b^{1/2} - b^{1/2}u_\lambda\|$. Budući da je $b^{1/2} \in B$, vrijedi $b^{1/2} = \lim_\lambda b^{1/2}u_\lambda$, pa stoga i $a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2}u_\lambda$, pa je $a = \lim_\lambda u_\lambda a u_\lambda \in B$. Dakle, B je hereditarna. □

Direktno slijedi sljedeći korolar:

Korolar 3.2.4. *Svaki zatvoreni ideal C*-algebre hereditarna je C*-podalgebra.*

Korolar 3.2.5. *Neka je A C*-algebra i $a \in A^+$. Tada je $\overline{aAa}$ hereditarna C*-algebra od A generirana s a.*

Dokaz. Iz Teorema 3.2.3 slijedi da je $\overline{aAa} \subseteq H$ za svaku hereditarnu C*-podalgebru H koja sadrži a. Pokažimo da je $a \in \overline{aAa}$: uzmemo $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u A pa vrijedi $a^2 = \lim_\lambda au_\lambda a$, pa $a^2 \in \overline{aAa}$. Kako je $\overline{aAa}$ C*-algebra, slijedi $a = (a^2)^{1/2} \in \overline{aAa}$. Nadalje, jasno je da se $\overline{aAa} = \overline{Aa} \cap (\overline{Aa})^*$, pa je po Teoremu 3.2.2 hereditarna C*-podalgebra od A. □

Sljedeći teorem pokazuje da je u separabilnom slučaju svaka hereditarna C*-podalgebra oblika kao u prethodnom korolaru:

Teorem 3.2.6. *Neka je B separabilna hereditarna C*-podalgebra C*-algebre A. Tada postoji $a \in B^+$ takav da $B = \overline{aAa}$.*

Dokaz. Kako je B separabilna C*-algebra, postoji niz $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ koji je aproksimativna jedinica u B. Neka je sada $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n/2^n$ (niz konvergira jer konvergira apsolutno). Uočimo da je $a \in B^+$, pa B sadrži $\overline{aAa}$. Kako je $u_n/2^n \leq a$ i $a \in \overline{aAa}$ te je $\overline{aAa}$ hereditarna, imamo $u_n \in \overline{aAa}$. Za $b \in B$ imamo $b = \lim_{n\to+\infty} u_\lambda b u_\lambda$ i $u_\lambda b u_\lambda \in \overline{aAa}$ pa slijedi $b \in \overline{aAa}$. Ovime smo pokazali da vrijedi $B = \overline{aAa}$. □

Teorem 3.2.7. *Neka je B hereditarna C*-podalgebra C*-algebre s jedinicom A i neka je $a \in A^+$. Ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $b \in B^+$ takav da $a \leq b + \epsilon$, tada je $a \in B$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Po pretpostavci teorema postoji $b_\epsilon \in B^+$ takav da $a \leq b_\epsilon^2 + \epsilon^2$, pa $a \leq (b_\epsilon + \epsilon)^2$. Dakle, $(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} a (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \leq 1$, a stoga i $\|(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} a (b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\| \leq 1$. Iskoristimo li $1 - b_\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} = \epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}$, dobivamo

$$\begin{aligned}\|a^{1/2} - a^{1/2}b_\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\|^2 &= \epsilon^2\|a^{1/2}(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\|^2 \\ &= \epsilon^2\|(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}a(b_\epsilon + \epsilon)^{-1}\| \\ &\leq \epsilon^2.\end{aligned}$$

Dobili smo

$$a^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} a^{1/2} b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1},$$

pa adjungiranjem imamo

$$a^{1/2} = \lim_{\epsilon\to 0} (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a^{1/2}.$$

Dakle,

$$a = \lim_{\epsilon\to 0} (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1}.$$

Kako je $b_\epsilon(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \in B$, budući da je B hereditarna $((b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \leq b_\epsilon^{-1} \in B))$, slijedi $(b_\epsilon + \epsilon)^{-1} b_\epsilon a b_\epsilon (b_\epsilon + \epsilon)^{-1} \in B$. Stoga je i $a \in B$. □

U posljednja dva teorema u ovoj točki sagledat ćemo vezu između strukture ideala C*-algebre i njenih hereditarnih C*-podalgebri.

Teorem 3.2.8. *Neka je B hereditarna C*-podalgebra C*-algebre A te neka je J zatvoreni ideal od B. Tada postoji zatvoreni ideal I od A takav da vrijedi $J = B \cap I$.*

Dokaz. Stavimo $I = AJA$. Tada je očito I zatvoren ideal od A. Budući da je J zatvoreni ideal od B, iz Korolara 3.2.4 slijedi da je C*-algebra, pa vrijedi $J^3 = J$ (iskoristimo postojanje aproksimativne jedinice u J). Kako je B hereditarna u A, imamo $B \cap I = BIB$ (za jednu inkluziju iskoristimo Teorem 3.2.3 i činjenicu da je I ideal u A, a za drugu zaključivanje analogno onome da je $J^3 = J$). Sada znamo $b \cap I = BIB = B(AJA)B = BAJ^3AB \subseteq BJB$ budući da su BAJ i JAB sadržani u B po Teoremu 3.2.3. Kako $BJB = J$ slijedi $B \cap I \subseteq J$, dok je obrnuta inkluzija jasna iz postojanja aproksimativne jedinice u A. Time je tvrdnja dokazana. □

Za C*-algebru A kažemo da je *jednostavna* ako su 0 i A njezini jedini zatvoreni ideali. Budući da se jednostavne algebre pokazuju bitnim za teoriju C*-algebri, ovdje donosimo jedan rezultat o njihovoj vezi s hereditarnim C*-podalgebrama.

Teorem 3.2.9. *Svaka hereditarna C*-podalgebra jednostavne C*-algebre jednostavna je.*

Dokaz. Neka je B hereditarna C*-podalgebra jednostavne C*-algebre A. Ako je J zatvoreni ideal u B, onda je prema prethodnom teoremu $J = B \cap I$ za neki I zatvoreni ideal u A. Kako je $I \in \{0, A\}$ slijedi da je $J \in \{0, B\}$, pa je B jednostavna. □

3.3 Pozitivni linearni funkcionali

Podsjetimo se da smo strukturu komutativnih C*-algebri u potpunosti odredili Teoremom 2.1.13 u terminima prostora karakteristika, što možemo shvaćati kao svojevrsnu jednodimenzionalnu reprezentaciju. Situacija u nekomutativnom slučaju je drugačija i reprezentaciju ćemo općenito morati tražiti u višim dimenzijama. Budući da postoji duboka veza između reprezentacija i pozitivnih linearnih funkcionala C*-algebri, u ovoj točki posvećujemo se proučavanju potonjih objekata.

Linearno preslikavanje $\varphi\colon A \to B$ naziva se *pozitivnim* ako vrijedi $\varphi(A^+) \subseteq B^+0$. U ovo slučaju je $\varphi(A_{sa}) \subseteq B_{sa}$ i preslikavanje $\varphi\colon A_{sa} \to B_{sa}$ je rastuće. Uočimo da je svaki $*$-homomorfizam pozitivan.

Primjer 3.3.1. Neka je $A = M_n(\mathbb{C})$. Linearni funkcional (kojeg nazivamo tragom)

$$tr\colon A \to \mathbb{C}, \quad (\lambda_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij},$$

pozitivan je. Uočimo da ne postoji nenul $*$-homomorfizam iz $M_n(\mathbb{C})$ u $\mathbb{C}$ za $n > 1$.

Neka je H vektorski prostor i $\sigma\colon H^2 \to \mathbb{C}$. Preslikavanje σ nazivamo *seskvilinearnom formom* na H ako je linearno u prvoj i antilinearno u drugoj varijabli. Za svaku seskvilinearnu formu vrijedi polarizacijska jednakost:

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \sigma(x + i^k y, x + i^k y).$$

Uočimo da iz ovoga slijede da su seskvilinearne forme jednake ako se poklapaju na $(x, x) \in H^2$, za svaki $x \in H$. Dodatno, seskvilinearnu formu nazivamo pozitivnom ako vrijedi $\sigma(x, x) \geq 0$, za svki $x \in H$.

Neka je A C*-algebra i τ pozititvan linearni funkcional na A. Tada je funkcija

$$A^2 \to \mathbb{C}, \quad (a, b) \mapsto \tau(b^* a),$$

seskvilinearna forma na A. Iz polarizacijske formule slijedi $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b}$, a iz Schwartz-Cauchyjeve nejednakosti $|\tau(b^*a)| \leq \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$. Nadalje, funkcija $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ je polunorma na A.

Pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}^+$ takav da $|\tau(a)| \leq M$ za sve pozitivne elemente zatvorene jedinične kugle od A. Tada iz rastava elementa na realni i imaginarni hermitski dio, a hermitskih elemnata na zbroj pozitivnih dobivamo da je τ omeđen i norme $\|\tau\| \leq 4M$.

Teorem 3.3.2. *Neka je τ pozitivni linearni funkcional na C*-algebri A. Tada je τ ograničen.*

Dokaz. Ako τ nije ograničen, onda prema diskusiji prije iskaza teorema vrijedi $\sup_{a\in S} \tau(a) = +\infty$, gdje je S skup pozitivnih elemenata od A norme manje ili jednake 1. Stoga postoji niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ takav da je $2^n \leq \tau(a_n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Stavimo $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n/2^n$ (apsolutna konvergencija reda povlači običnu), pa je $a \in A^+$. Očito je $N \leq \tau(\sum_{n=0}^{N-1} a_n/2^n) \leq \tau(a)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovo nije moguće (svaki element ima konačnu funkcijsku vrijednost), pa zaključujemo da je τ ograničen. □

Teorem 3.3.3. *Neka je τ pozitivan linearni funkcional na C*-algebri A. Tada vrijedi $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ i $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$.*

Dokaz. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za A. Tada vrijedi

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \tau(a^* u_\lambda) = \lim_\lambda \overline{\tau(u_\lambda a)} = \overline{\tau(a)}$$

. Također vrijedi $|\tau(a)|^2 = \lim_\lambda |\tau(u_\lambda a)|^2 \leq \sup_\lambda \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \|\tau\|\tau(a^*a)$. □

Dokaz sljedećeg teorema izostavljamo, a može se pronaći u [4, Teorem 3.3.3].

Teorem 3.3.4. *Neka je τ omeđeni linearni funkcional na C*-algebri A. Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(a) *τ je pozitivan.*

(b) *Za svaku aproksimativnu jedinicu $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od A, vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.*

(c) *Za neku aproksimativnu jedinicu $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ od A, vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.*

Korolar 3.3.5. *Neka je τ omeđeni linearni funkcional na C*-algebri s jedinicom. Tada je τ pozitivan ako i samo ako $\tau(1) = \|\tau\|$.*

Dokaz. Konstantni hiperniz jedinica je aproksimativna jedinica C*-algebri s jedinicom. Iz Teorema 3.3.4 slijedi tvrdnja korolara. □

Korolar 3.3.6. *Neka su τ_1 i τ_2 pozitivni linearni funkcionali na C*algebri. Tada vrijedi $\|\tau_1 + \tau_2\| = \|\tau_1\| + \|\tau_2\|$.*

Dokaz. Ako je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za promatranu C*-algebru, tada vrijedi $\|\tau_1 + \tau_2\| = \lim_\lambda(\tau_1 + \tau_2)(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau_1(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau_2(u_\lambda) = \|\tau_1\| + \|\tau_2\|$. □

Pozitivni linearni funkcional f na C*-algebri naziva se *stanje* ako vrijedi $\|f\| = 1$. Skup svih stanja na A označavamo s $S(A)$.

Teorem 3.3.7. *Neka je a normalan element nenul C*-algebre A. Tada postoji stanje τ od A takvo da $\|a\| = |\tau(a)|$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti $a \neq 0$. Neka je $B = C^*(1, a) \subseteq \tilde{A}$. Budući da je B komutativna i $\hat{a}$ neprekidna na kompaktu $\Omega(B)$, postoji $\tau_2 \in \Omega(B)$ takav da $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\tau_2(a)|$. Po Hahn-Banachovom teoremu postoji omeđeni linearni funkcional $\tau_1 \in \Omega(\tilde{A})$ koji proširuje τ_2 i čuva normu, pa vrijedi $\|\tau_1\| = 1$. Budući da je $\tau_1(1) = \tau_2(1) = 1$, prema Korolaru 3.3.5 slijedi da je τ_1 pozitivan. S τ označimo restrikciju funkcionala τ_1 na A i tada je τ pozitivan linearan funkcional na A te vrijedi $\|a\| = |\tau(a)|$. Sada imamo $\|\tau\|\|a\| \geq |\tau(a)| = \|a\|$, pa $\|\tau\| \geq 1$. Suprotna nejednakost slijedi zbog $\|\tau_1\| = 1$. Dakle, τ je stanje na A. □

Teorem 3.3.8. *Neka je τ pozitivan linearni funkcional na C*-algebri A.*

(a) *Za svaki $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ ako i samo ako $\tau(ba) = 0$ za svaki $b \in A$.*

(b) *Nejednakost*

$$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$$

vrijedi za sve $a, b \in A$.

Dokaz. Iz Schwartz-Cauchyjeve nejednakosti direktno slijedi tvrdnja (a).

Da bismo pokazali tvrdnju (b), možemo zbog (a) dijela teorema, pretpostaviti $\tau(b^*b) > 0$. Funkcija

$$\rho \colon A \to \mathbb{C}, \quad c \mapsto \tau(b^*cb)/\tau(b^*b),$$

linearna je i pozitivna. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za A. Tada vrijedi

$$\|\rho\| = \lim_\lambda \rho(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(b^*u_\lambda b)/\tau(b^*b) = \tau(b^*b)/\tau(b^*b) = 1,$$

pa slijedi $\rho(a^*a) \leq \|a^*a\|$. Stoga zaključujemo $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$. □

Teorem 3.3.9. *Neka je B C*-podalgebra C*-algebre A te pretpostavimo da je τ pozitivni linearni funkcional na B. Tada postoji pozitivni linearni funkcional τ' na A koji proširuje τ takav da vrijedi $\|\tau'\| = \|\tau\|$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $A = \tilde{B}$. Definirajmo τ' funkcional na A stavljajući $\tau'(b + \lambda) = \tau(b) + \lambda\|\tau\|$, za sve $b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za B. Prema Teoremu 3.3.4, vrijedi $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Uzmimo sada $b \in B$, $\mu \in \mathbb{C}$. Vrijedi $|\tau'(b + \lambda)| = |\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)| = |\lim_\lambda \tau((b+\mu)(u_\lambda))| \leq \sup_\lambda \|\tau\|\|(b+\mu)u_\lambda\| \leq \|\tau\|\|b+\mu\|$. Stoga vrijedi $\|\tau'\| \leq \|\tau\|$, dok je obrnuta nejednakost očita. Dakle, $\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1)$, što prema Korolaru 3.3.5 povlači da je τ' pozitivan. Ovime je tvrdnja pokazana za $A = \tilde{B}$.

Neka je sada A proizvoljna C*-algebra koja sadrži B kao C*-podalgebru. Zamjenimo li B s $\tilde{B}$ i A s $\tilde{A}$ ako je potrebno, možemo pretpostaviti da A ima jedinicu koja leži u B. Po Hahn-Banachovom teoremu postoji funkcional $\tau' \in A'$ koji proširuje τ i ima jednaku normu. Budući da vrijedi $\tau'(1) = \tau(1) = \|\tau\| = \|\tau'\|$, zbog Korolara 3.3.5 zaključujemo da je τ' pozitivan. □

Teorem 3.3.10. *Neka je B hereditarna C*-podalgebra C*-algebre A. Ako je τ pozitivni linearni funkcional na B, onda postoji jedinstven pozitivni linearni funkcional τ' na A koji proširuje τ i čuva normu. Štoviše, ako je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za B, onda vrijedi*

$$\tau'(a) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda), \quad \forall a \in A.$$

Dokaz. Iz prošlog teorema imamo egzistenciju proširenja, pa trebamo dokazati jedinstvenost. Neka je τ' pozitivni linearni funkcional na A koji proširuje τ i čuva normu. Sada možemo proširiti τ' na $\tilde{A}$ i to tako da je norma i dalje očuvana. Nazovimo ovakvo proširenje τ''. Neka je $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za B. Vrijedi $\lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \|\tau\| = \|\tau''\| = \tau''(1)$, pa vrijedi $\lim_\lambda \tau''(1 - u_\lambda) = 0$. Stoga za svaki $a \in A$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|\tau''(a) - \tau(u_\lambda a u_\lambda)| &\leq |\tau''(a - u_\lambda a)| + |\tau''(u_\lambda a - u_\lambda a u_\lambda)| \\
&\leq \tau''((1 - u_\lambda)^2)^{1/2}\tau''(a^*a)^{1/2} + \tau''(a^*u_\lambda^2 a)^{1/2}\tau''((1 - u_\lambda)^2)^{1/2} \\
&\leq \tau''((1 - u_\lambda))^{1/2}\tau''(a^*a)^{1/2} + \tau''(a^*a)^{1/2}\tau''((1 - u_\lambda))^{1/2},
\end{aligned}$$

gdje smo koristili Schwartz-Cauchyjevu nejednakost tečinjenicu da je $1 - u_\lambda$ pozitivan te da vrijedi $(1 - u_\lambda)^2 \leq 1 - u_\lambda$. Kako $\lim_\lambda \tau''(1 - u_\lambda) = 0$, iz gornjih nejednakosti dobivamo $\lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda) = \tau''(a) = \tau'(a)$. □

3.4 Gelfand-Naimarkova reprezentacija

U ovoj točki pokazujemo da svaku C*-algebru možemo shvaćati kao C*-podalgebru od $B(H)$, gdje je H neki Hilbertov prostor. Ova reprezentacija razlog je zašto je teorija C*-algebri pristupačnija od genearalne teorije Banachovih algebri.

Reprezentacija C*-algebre A je uređeni par (H, φ), gdje je H Hilbertov prostor i $\varphi\colon A \to B(H)$ $*$-homomorfizam. Kažemo da je reprezentacija *vjerna* ako je φ injektivna.

Ako je $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ familija reprezentacija od A, direktnu sumu reprezentacija (H, φ) dobivamo stavljajući $H = \oplus_\lambda H_\lambda$ i $\varphi(a)((x_\lambda)_\lambda) = (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$, za sve $a \in A$ i $(x_\lambda)_\lambda \in H$. Jasno je da je ovako definirana (H, φ) zaista reprezentacija od A. Također, ako za svaki $a \in A$ postoji $\lambda \in \Lambda$ takav da $\varphi_\lambda(a) \neq 0$, onda je (H, φ) vjerna.

Napomenimo da za unitarni prostor H postoji skalarni produkt na njegovom upotpunjenju do Banachovog prostora $\hat{H}$ takav da je norma dobivena od skalarnog produkta upravo norma na $\hat{H}$. Ovakav $\hat{H}$ zajedno sa spomenutim skalarnim produktom nazivamo *upotpunjenjem prostora H do Hilbertovog prostora*.

Sada ćemo svakom pozitivnom linearnom funkcionalu τ na A pridružiti reprezentaciju. Stavimo

$$N_\tau = \{a \in A \mid \tau(a^*a) = 0\} = \{a \in A \mid \tau(ba) = 0, \forall b \in A\},$$

gdje druga nejednakost slijedi iz Teorema 3.3.8. Jasno je da je N_τ zatvoreni lijevi ideal u A, te da je preslikavanje

$$(A/N_\tau)^2 \to \mathbb{C}, \quad (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \tau(b^*a)$$

dobro definiran skalarni produkt na A/N_τ. Upotpunjenje prostora A/N_τ do Hilbertovog prostora označimo s H_τ.

Za $a \in A$ definirajmo operator $\varphi(a) \in B(A/N_\tau)$ jednakošću

$$\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau.$$

Korištenjem Teorema 3.3.8 imamo $\|\varphi(a)(b + N_\tau)\|^2 = \tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\tau(b^*b) = \|a\|^2\|b + N_\tau\|^2$, zaključujemo $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. Lako se vidi da operator $\varphi(a)$ ima jedinstveno proširenje do omeđenog operatora $\varphi_\tau(a)$ na H_τ. Preslikavanje

$$\varphi_\tau\colon A \to B(H_\tau), \quad a \mapsto \varphi_\tau(a)$$

je $*$-homomorfizam.

Reprezentacija (H_τ, φ_τ) od A naziva se *Gelfand-Naimark-Segalova reprezentacija* (ili *GNS reprezentacija*) pridružena τ.

Ako je A netrivijalan, *univerzalna reprezentacija* definira se kao direktna suma reprezenracija (H_τ, φ_τ), gdje τ uzimamo iz $S(A)$.

Teorem 3.4.1 (Gelfand-Naimark)**.** *Svaka C*-algebra A ima vjernu reprezentaciju. Specijalno, njezina univerzalna reprezentacija je vjerna.*

Dokaz. Neka je (H, φ) univerzalna reprezentacija od A i pretpostavimo da je $a \in A$ takav da $\varphi(a) = 0$. Prema Teoremu 3.3.7 postoji stanje τ na A takvo da je $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$. Sada za $b = (a^*a)^{1/4}$ vrijedi $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \tau(a^*a) = \tau(b^4) = \|\varphi_\tau(b)(b + N_\tau)\|^2 = 0$ budući da je $\varphi_\tau(b^4) = \varphi_\tau(a^*a) = 0$, pa i $\varphi_\tau(b) = 0$. Dakle, $a = 0$ pa je φ injekcija. $\square$

Primijenimo upravo dokazani teorem na algebru kvadratnih matrica.

Neka je A algebra i $M_n(A)$ algebra $n \times n$ matrica s elementima u A (operacije se definiraju kao za matrice nad skalarnim poljem). Ako je A $*$-algebra, tada je i $M_n(A)$ $*$-algebra, s involucijom $(a_{ij})^*_{i,j} = (a^*_{ji})_{i,j}$.

Za $*$-homomorfizam $\varphi \colon A \to B$ definiramo $*$-homomorfizam (iste oznake)

$$\varphi \colon M_n(A) \to M_n(B), \quad (a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij})).$$

Ako je H Hilbertov prostor, ortogoalnu sumu n kopija od H označimo s $H^{(n)}$ (norma na $H^{(n)}$ dana je s $\|(f_1, \ldots, f_n)\| = \sum_{i=1}^n \|f_i\|$).Za $u \in M_n(B(H))$ definiramo $\varphi(u) \in B(H^{(n)}$ izrazom

$$\varphi(u)(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_{1j}(x_j), \ldots, \sum_{j=1}^n u_{nj}(x_j) \right),$$

za svaki $(x_1, \ldots, x_n) \in H^{(n)}$. Nije teško uočiti da je

$$\varphi \colon M_n(B(H)) \to B(H^{(n)}), \quad u \mapsto \varphi(u)$$

$*$-izomorfizam te ga nazivamo *kanonskim*$*$-izomorfizmom $M_n(B(H))$ i $B(H^{(n)})$, pa ove dvije algebre poistovjećujemo. Ako je v operator u $B(H^{(n)})$ takav da $v = \varphi(u)$, tada u zovemo *matricom operatora v*. Normu na $M_n(B(H))$ definiramo jednakošću $\|u\| = |\varphi(u)\|$ čineći je C*-algebrom. Lako se provjere sljedeće nejednakosti za $u \in M_n(B(H))$:

$$\|u_{ij}\| \leq \|u\| \leq \sum_{k,l=1}^n \|u_{kl}\|, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Sljedeći teorem navodimo zbog toga što se algebra matrica pokazuje bitnom u proučavanju K-teorije C*-algebri.

Teorem 3.4.2. *ZA C*-algebru A postoji jedinstvena norma na $M_n(A)$ uz koju je potonja C*-algebra.*

Dokaz. Za (H, φ) univerzalnu reprezentaciju od A, $*$-homomorfizam $\varphi \colon M_n(A) \to M_n(B(H))$ je injektivan. Jednakošću $\|a\| = |\varphi(a)\|$ definirana je norma na $M_n(A)$ uz koju ona postaje C*-algebra (potpunost slijedi iz gore iskazanih nejednakosti). Jedinstvenost je posljedica Korolara 2.1.5. $\square$

Na kraju navodimo još jednu zanimljivu posljedicu Gelfand-Naimarkove reprezentacije.

Teorem 3.4.3. *Neka je a hermitski elemetn C*-algebre A. Tada je $a \in A^+$ ako i samo ako $\tau(a) \geq 0$ za sve pozitivne linearne funkcionale τ na A.*

Dokaz. Jedna implikacija je jasna, pa dokazujemo samo da $\tau(a) \geq 0$ za sve pozitivne linearne funkcionale τ na A povlači $a \in A^+$. Neka je (H, φ) univerzalna reprezentacija od A i neka je $x \in H$. Tada je linearni funkcional

$$\tau \colon A \to \mathbb{C}, \quad b \mapsto \langle \varphi(b)x, x \rangle$$

pozitivan, pa vrijedi $\tau(a) \geq 0$, odnosno $\langle \varphi(a)x, x \rangle \geq 0$. Budući da ovo vrijedi za svaki $x \in H$, i budući da je $\varphi(a)$ hermitski, zaključujemo da je $\varphi(a)$ pozitivan operator na H. Dakle, $\varphi(a) \in \varphi(A)^+$, pa je $a \in A^+$ budući da je φ $*$-izomorfizam. $\square$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, (pristupljeno: rujan 2015.), http://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/np_final_14_15.pdf.

[2] A. Deitmar i S. Echterhoff, *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, 2008.

[3] W. Fischer i I. Lieb, *A Course in Complex Analysis: From Basic Results to Advanced Topics*, Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

[4] G. J. Murphy, *C*-algebras and Operator Theory*, Academic Press Ltd., 1990.

[5] G. K. Pedersen, *C*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.

Sažetak

Banachove algebre s involucijom koje zadovoljavaju $\|a^*a\| = \|a\|^2$ za svaki njihov element a nazivaju se C*-algebrama. U ovom su radu pokazana osnovni rezultati teorije C*-algebri, a razradi problema pristupljeno je najprije predstavljajući neke od rezultata teorije Banachovih algebri.

Nakon što je pokazano postojanje Gelfandove transformacije na komutativnim Banachovim algebrama, taj se rezultat proširuje na komutativne C*-algebre gdje je navedeno preslikavanje izometrički $*$-izomorfizam. Osim toga, pokazana je uska veza zatvorenih lijevih ideala i hereditarnih C*-podalgebri koje se, dodatno, u slučaju separabilnosti početnog prostora, usko povezuju s pozitivnim elementima originalne C*-algebre. Konačno, u poznatom teoremu Gelfanda i Naimarka pokazano je postojanje vjerne reprezentacije svake C*-algebre.

Summary

A Banach algebra supplied with an involution and a norm satisfying the condition $||a^*a|| = ||a||^2$, for every element a, is called a C*-algebra. The approach used in this thesis was to first introduce the main ideas and theorems of the theory of Banach algebras and then to move on to the theory C*-algebra and presented its important results.

After proving the existence of Gelfand transformation of abelian Banach algebras, this result has been generalized to abelian C*-algebras, where the said mapping has been proved to be an isometric $*$-isomophism. Additionally, we have shown a close relationship between closed left ideals and hereditary C*-subalgebras, and the latter are, in the case of separability of the original space, closely related to positive elements of the observed C*-algebra. Finally, we have presented a famous resut of Gelfand and Naimark stating the existence of a faithful representation of an arbitrary C*-algebra.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 30.12.1991. godine. Nakon završene osnovne škole, upisujem Petu gimnaziju u Zagrebu , gdje sam maturirao 2010. godine. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam i osvajao nagrade na državnim natjecanjima iz matematike i fizike, kao i na Srednjeeuropskoj matematičkoj olimpijadi iz matematike.

Preddiplomski sveučiišni studij Matematike na Prirodosovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisujem 2010. godine, a Diplomski studij Teorijske matematike na istom fakultetu pohađam od 2013. godine. Od jeseni 2011. godine paralelno studiram na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gdje 2015. godine završavam Preddiplomski sveučilišni studij Ekonomije. Od jeseni 2015. godine student sam Diplomskog studija Ekonomije Sveučilišta u Zurichu.