

Hopfov svežanj i elektromagnetsko polje

Vuković, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:045885>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-04**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ivana Vuković

HOPFOV SVEŽANJ
I ELEKTROMAGNETSKO POLJE

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: DIPL. ING. FIZIKE

Ivana Vuković

Diplomski rad

**Hopfov svežanj i elektromagnetsko
polje**

Voditelj diplomskog rada: Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2016.

Either the well was very deep, or she fell very slowly.

Sažetak

Baždarne interakcije formalno su opisane jezikom svežnjeva. Među njima posebno zanimljiv primjer je Hopfov svežanj $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, u kojem su vlakno, totalni prostor i bazna mnogostrukost redom sfere. Ovaj svežanj predstavlja geometrijsku pozadinu više fizikalnih fenomena. U ovom radu ćemo detaljnije analizirati dva takva primjera: elektromagnetske čvorove i magnetske monopole. Nakon uvodnih poglavlja o Maxwellovim jednadžbama i Hopfovom svežnju, biti će detaljno izložene konstrukcije spomenutih elektromagnetskih polja. U završnom poglavlju ćemo dati kraći pregled eksperimentalnih potraga za magnetskim monopolima te osnovnih prijedloga generiranja elektromagnetskih čvorova.

Hopf bundles and electromagnetic field

Abstract

Gauge interaction's formal description is that of fibre bundles. A particularly interesting example is the Hopf fibre bundle $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, where the fibre, the total space and the base manifold are all respective spheres. The Hopf bundle is the geometrical representation of many physical phenomena. In this thesis two such examples will be closely inspected: electromagnetic knots and the magnetic monopole. Following introductory chapters on Maxwell's equations and the Hopf bundle, a detailed construction of the aforementioned electromagnetic fields will be studied. In the closing chapter we will provide a short review of experimental searches for magnetic monopoles and attempts and guidelines for creating electromagnetic knots.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Maxwellove jednadžbe	3
2.1	Kovarijantni prikaz elektromagnetskog polja	4
2.2	Svjetlosno elektromagnetsko polje	7
3	Hopfovi svežnjevi	14
3.1	Projektivni prostori	14
3.2	Jednodimenzijski Hopfov svežanj	17
3.3	Hopfov svežanj	20
4	Elektromagnetski čvorovi	24
4.1	Čvorovi i karike	24
4.2	Hopf-Račinov elektromagnetsko polje	26
4.3	Vremenska evolucija elektromagnetskih čvorova	31
4.4	Složeniji elektromagnetski čvorovi	32
4.5	Ulančanost i helicitet elektromagnetskih čvorova	33
5	Magnetski monopoli	35
5.1	Magnetsko i baždarno polje magnetskog monopola	35
5.2	Magnetski monopol i kvantizacija naboja	39
5.3	Magnetski monopol u formalizmu diferencijalnih formi	41
5.4	Svežanj u pozadini magnetskog monopola	42
6	Eksperimentalne potrage	44
6.1	Elektromagnetski čvorovi u laboratoriju	44
6.2	Potraga za magnetskim monopolima	45
7	Zaključak	47
	Dodaci	48
A	Stereografska projekcija	48
B	Mnogostrukosti i tenzori	50
C	Diferencijalne forme	54
D	Svežnjevi	57
E	Heliciteti elektromagnetskog polja	59

1 Uvod

Već su i najstarije ljudske civilizacije bile upoznate s električnim i magnetskim pojavama u prirodi. Primjerice, antički izvori navode statički elektricitet proizveden trljanjem jantara (etimološki trag vidimo u grčkoj riječi za jantar, $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$) i magnetsko polje u željeznoj rudi koje privlači druge komade željeza (grčka riječ Μαγνησ λυθος). Suvremeni, objedinjen opis elektromagnetskog polja rezultat je višestoljetnog sakupljanja empirijskih činjenica. Sredinom 19. stoljeća James Clerk Maxwell je prostornu i vremensku ovisnost električnog i magnetskog polja zapisao pomoću četiri vezane diferencijalne, odnosno integralne jednačbe. Ovaj naizgled jednostavan sustav jednačbi opisuje nepregledno mnoštvo fizikalnih fenomena, od statičnih polja mirujućih naboja i stacionarnih struja do turbulentnih elektromagnetskih polja u plazmi. Stoga ne čudi što se proučavanje elektromagnetskog polja opetovano pokazalo plodnim tlom za primjenu različitih geometrijskih metoda.

U Maxwellovim jednačbama je lako uočljiv “asimetričan odnos” električnih i magnetskih izvora. Naime, dok s jedne strane imamo monopolne, pozitivno ili negativno nabijene izvore električnog polja, u prirodi do sada nisu pronađeni analogni magnetski monopoli, točkaste čestice koje bi bile “nosioci” isključivo jednog od magnetskih polova (vidi 6. poglavlje). Naime, sva do sada opažena magnetska polja dolaze od električnih struja ili magnetskih domena u materijalima s kolektivnim magnetskim poljem mikroskopskih magnetskih dipola (molekule, atomi, subatomske čestice). Jednostavnim raspolavljanjem magnetiziranog feromagneta nećemo dobiti dva odvojena magnetska pola, već dva nova magneta, svaki sa svoja dva pola. Hipotetski magnetski monopoli zanimljivi su nam i zbog jednog teorijskog aspekta, do sada nerazjašnjene činjenice kvantiziranosti električnih naboja u prirodi. Paul Adrien Maurice Dirac 1931. godine [2] otkrio je fascinantnu vezu: samo postojanje magnetskih monopola povlači kako su svi električni naboji u prirodi nužno višekratnici nekog elementarnog električnog naboja (vidi 5. poglavlje). Nažalost, argument ne radi u oba smjera pa sama činjenica kako je električni naboj do sada opaženih čestica kvantiziran ne povlači nužno postojanje magnetskih monopola u prirodi.

Iste godine kada je i Dirac otkrio vezu između magnetskih monopola i kvantizacije električnih naboja, matematičar Heinz Hopf [3] je konstruirao svežanj koji je igrao važnu ulogu u algebarskoj topologiji, a kako će se kasnije pokazati, i u teorijskoj fizici. Jednostavnim jezikom, Hopf je svakoj točki 2-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^2$ “zalijepio” po jednu kružnicu $\mathbb{S}^1$, tako da su svake dvije ulančane te sve zajedno ispunjavaju 3-dimenzionalnu sferu $\mathbb{S}^3$. Trautman [7] i Ryder [9] su detaljnom analizom pokazali kako se ova geometrijska konstrukcija krije u pozadini polja magnetskog monopola. Nešto kasnije, početkom 90-ih godina 20. stoljeća, Rañada i suradnici [13] su pronašli rješenja Maxwellovih jednačbi utemeljena na Hopfovom svežnju, u kojem su silnice električnih i magnetskih polja isprepletene karike.

Cilj ovog rada je opisati matematički formalizam Hopfovih svežnjeva te objasniti na koji način ga koristimo u konstrukciji elektromagnetskih čvorova i prepoznavamo u formalnoj pozadini polja magnetskog monopola. Ovaj rad započinjemo izlaganjem o Maxwellovim

jednadžbama i elektromagnetskom tenzoru, prvo u dobro poznatom vektorskom obliku, a kasnije zapisano preko jezika diferencijalnih formi. Ovaj formalizam je podloga svih kasnijih razmatranja. U trećem poglavlju detaljno iznosimo Hopfov konstrukciju svežnja, počevši od jednostavnijeg primjera $\mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ kako bismo jednostavnije pristupili analizi glavnog objekta $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Sljedeće je poglavlje posvećeno elektromagnetskim čvorovima, odnosno ulančanim elektromagnetskim poljima u vakuumu. Pokazati ćemo kako se takva rješenja Maxwellovih jednadžbi mogu dobiti pomoću Hopfovog svežnja i promotriti neka njihova osnovna svojstva. Peto poglavlje je posvećeno magnetskom polju magnetskog monopola, njegovom formalnom prikazu jezikom svežnjeva te vezi s Hopfovim svežnjem. U šestom poglavlju dan je pregled eksperimentalnih potraga za magnetskim monopolom i pokušaja konstruiranja spomenutih elektromagnetskih čvorova u laboratoriju. U dodacima su izdvojeni kraći pregledi matematičkih koncepata i alata koji su u upotrebi kroz cijelu ovu radnju.

Konvencije. U radu ćemo uglavnom koristiti prirodni sustav jedinica, u kojem su brzina svjetlosti i reducirana Planckova konstanta jedinice, $c = \hbar = 1$. Sva polja se nalaze u prostor-vremenu Minkowskog $\mathbb{M}$, čiju metriku označavamo s $\eta_{\mu\nu}$. Signatura prostorno-vremenske metrike je $(-, +, +, +)$. Za apstraktne indekse tenzora koristimo mala slova s početka latinskog alfabeta, $\{a, b, \dots\}$. Za indekse prostorno-vremenskih komponenti tenzora koristimo mala slova grčkog $\{\mu, \nu, \dots\}$, dok za prostorne komponente tenzora koristimo mala slova iz sredine latinskog alfabeta $\{i, j, \dots\}$. Prostorni 3-vektori su označeni masnim slovima. n -dimenzionalne sfere su označene sa $\mathbb{S}^n$, pri čemu je trivijalna, 0-dimenzionalna sfera $\mathbb{S}^0$ skup dvije točke. Relacije ekvivalencije označene su s $\sim$, a homeomorfizmi s $\cong$.

2 Maxwellove jednadžbe

Fiziku električnih i magnetskih fenomena moguće je svesti na nekolicinu matematičkih jednadžbi. Električno polje kontinuirane raspodjele naboja dano je Coulombovim zakonom

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' \quad (2.1)$$

gdje je ρ volumna gustoća naboja, $\mathbf{r}$ vektor iz ishodišta do točke u kojoj mjerimo polje, a $\mathbf{r}'$ vektor iz ishodišta do izvora polja. Magnetsko polje stacionarne volumne raspodjele struje određeno je Biot-Savartovim zakonom

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' \quad (2.2)$$

gdje je $\mathbf{J}$ volumna gustoća struje. Oba polja na probni naboj Q djeluju silom, električno polje djeluje Coulombovom silom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

a magnetsko polje Lorentzovom silom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (2.4)$$

tako da je ukupna sila na probni naboj Q dana izrazom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (2.5)$$

Spomenute relacije rezultat su opažanja provedenih tijekom 18. i 19. stoljeća i predstavljaju sukus brojnih eksperimentalnih provjera, od kojih možemo izdvojiti nekoliko posebno značajnih. Ørsted je 1820. primjetio da se igla kompasa deflektira kada se približi žici kroz koju teče struja, što je bio prvi pokazatelj povezanosti električnih i magnetskih fenomena. Ampère je kasnije te godine uočio da igla kompasa, kada se prisloni pored duge ravne žice kojom teče struja, iscrtava kružne petlje oko žice u skladu s pravilom desne ruke. U kasnijim eksperimentima, Ampère je primjetio da se dvije žice u kojima naboj teče u istom smjeru privlače, a one u kojima su struje antiparalelne odbijaju. Znamenit je i Faradayev eksperiment iz 1831. godine, kada je Faraday proveo nekoliko pokusa sa strujnom petljom u magnetskom polju. Primjetio je da povlačenje petlje kroz magnetsko polje, kao i povlačenje magneta uz držanje petlje fiksno, rezultira strujom koja poteče kroz petlju, a na temelju čega je Faraday zaključio kako promjena u magnetskom polju inducira električno polje. Maxwell je dotad poznato ponašanje elektromagnetskih fenomena 1861. objedinio u četiri vezane linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.9)$$

koje u potpunosti određuju prostorno-vremensku ovisnost električnog i magnetskog polja, a zakon (2.5) definira silu ovih polja na probni naboj. Ove jednadžbe većinom imaju i zasebna imena, pa se npr. divergencija električnog polja zove Gaussov zakon, rotor električnog polja zovemo Faradayev zakon, a rotor magnetskog polja se naziva i Ampèreov zakon. U Maxwellovim jednadžbama su sadržani i neki zakoni koji se često navode izdvojeni. Na primjer, jednadžbu kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.10)$$

možemo dobiti iz prve i četvrte Maxwellove jednadžbe (tj. Gaussovog i Ampèreovog zakona), primjenom vremenske derivacije na Gaussov zakon i divergencije na Ampèreov.

Kada elektromagnetsko polje prikazujemo pomoću para prostorno i vremenski ovisnih vektorskih polja, električnog i magnetskog, mi implicitno koristimo koordinatni sustav opažačice u kojem su zapisane komponente ovih polja. Objedinjen, kovarijantni zapis je moguć ako elektromagnetsko polje prikažemo pomoću 4-dimenzionalnog antisimetričnog tenzora F_{ab} . Ovdje ćemo kratko izložiti pripadni formalizam kojeg ćemo koristiti u kasnijoj analizi. Pregled definicija osnovnih matematičkih objekata koje ovdje koristimo može se naći u dodacima B i C.

2.1 Kovarijantni prikaz elektromagnetskog polja

Elektromagnetski tenzor F_{ab} je antisimetričan tenzor ranga $(0, 2)$. Ako je 4-vektor opažačice u^a , tada ovaj tenzor možemo rastaviti na električnu i magnetsku 1-formu prema

$$E \equiv -i_u F, \quad B \equiv i_u *F \quad (2.11)$$

gdje i_X označava kontrahiranje s vektorskim poljem X^a . Konkretno, u zapisu s indeksima, ove formule glase

$$E_a \equiv u^b F_{ab}, \quad B_a \equiv u^b *F_{ba} = \frac{1}{2} u^b \epsilon_{bacd} F^{cd} \quad (2.12)$$

Obratno, poznavanjem električnog polja E_a i magnetskog polja B_a možemo “rekonstruirati” elektromagnetski tenzor F_{ab}

$$F = u \wedge E + *(u \wedge B) \quad (2.13)$$

Ovu formulu možemo dokazati koristeći identitet

$$i_X * \omega = *(\omega \wedge X) \quad (2.14)$$

Ovdje je važno napomenuti kako s lijeve strane jednakosti, u kontrakciji, imamo vektorsko polje X^a , a s desne strane jednakosti pripadnu dualnu 1-formu X_a . Promotrimo drugi sumand u (2.13),

$$*(u \wedge B) = -* (B \wedge u) = -i_u *B = -i_u *(i_u *F) = -i_u ** (F \wedge u)$$

Sada koristimo relaciju

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)+s}\omega \quad (2.15)$$

gdje je p red diferencijalne forme ω , n dimenzija prostora, a s broj minusa u signaturi metrike. U našem slučaju je $\omega = F \wedge u$ 3-forma, dakle $p = 3$, a kako su $n = 4$ i $s = 1$, onda je

$$**(F \wedge u) = (-1)^{3 \cdot (4-3)+1}(F \wedge u) = F \wedge u$$

Time smo dobili

$$*(u \wedge B) = -i_u(F \wedge u)$$

Nadalje, za izvrijednjavanje kontrakcije $i_u(F \wedge u)$ koristimo relaciju

$$i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X \alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge i_X \beta_q \quad (2.16)$$

Uzimajući u obzir da je $u_a u^a = -1$, odnosno $i_u u = -1$, možemo pisati

$$\begin{aligned} *(u \wedge B) &= - (i_u F \wedge u + (-1)^2 F \wedge i_u u) = \\ &= - (i_u F \wedge u + F \wedge i_u u) = E \wedge u + F = -u \wedge E + F \end{aligned}$$

odakle slijedi (2.13).

Promotrimo sada поближе strukturu elektromagnetskog tenzora F_{ab} u ovom rastavu. U sustavu mirovanja, $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, imamo

$$E_\mu = u^\nu F_{\nu\mu} = u^0 F_{\mu 0} = F_{\mu 0} \quad (2.17)$$

$$B_\mu = u^\nu * F_{\nu\mu} = \frac{1}{2} u^\nu \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} u^0 \epsilon_{0\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{0\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (2.18)$$

Kako su F_{ab} i ϵ_{abcd} antisimetrični tenzori, odmah vidimo da su $E_0 = 0 = B_0$. U prostornim komponentama imamo (uobičajene) električne i magnetske 3-vektore,

$$E^i = \eta^{i\mu} E_\mu = E_i = F_{i0} \quad (2.19)$$

$$B^i = \eta^{i\mu} B_\mu = B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} F^{jk} \quad (2.20)$$

Sve skupa, komponente električnog i magnetskog polja možemo zapisati u obliku

$$E_\mu = (0, F_{10}, F_{20}, F_{30}), \quad B_\mu = (0, F_{23}, F_{31}, F_{12}) \quad (2.21)$$

Komponente elektromagnetskog tenzora F_{ab} se često prikazuju pomoću matričnog prikaza,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Ponekad koristimo i elektromagnetski tenzor s kontravarijantnim indeksima,

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Hodgeov dual elektromagnetskog tenzora u matričnom zapisu glasi

$$*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Prostorno-vremenska ovisnost tenzora F_{ab} zadana je Maxwellovim jednadžbama, koje u kovarijantnom zapisu glase

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J_{(e)}^\mu, \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.27)$$

Ovdje je $J_{(e)}^\mu$ 4-vektor gustoće električne struje, $J_{(e)}^\mu = (\rho_{(e)}, \mathbf{j}_{(e)})$, koji u svojim komponentama sadrži gustoću električnog naboja $\rho_{(e)}$ i 3-vektor gustoće električne struje $\mathbf{j}_{(e)}$. U slučaju kada bi u prirodi imali i magnetske monopole, poopćene Maxwellove jednadžbe bi glasile

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J_{(e)}^\mu, \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 4\pi J_{(m)}^\mu \quad (2.28)$$

gdje je 4-vektor gustoće magnetske struje $J_{(m)}^\mu = (\rho_{(m)}, \mathbf{j}_{(m)})$ definiran analogno 4-vektoru $J_{(e)}^\mu$.

U vakuumu Maxwellove jednadžbe poprimaju jednostavan oblik

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.29)$$

Prevedene u jezik diferencijalnih formi, vakuumske Maxwellove jednadžbe nam govore da su 2-forme F_{ab} i $*F_{ab}$ zatvorene,

$$dF = 0, \quad d*F = 0 \quad (2.30)$$

Time je motivirano uvođenje baždarnog polja, 1-forme A_a preko

$$F = dA \quad (2.31)$$

Uvrštavanjem ovog ansatza odmah vidimo da je jedna Maxwellova jednadžba automatski zadovoljena (vidi dodatak C),

$$dF = d(dA) = d^2A = 0 \quad (2.32)$$

dok druga poprima oblik

$$d * F = d * dA = 0 \quad (2.33)$$

Analogno možemo uvesti i drugo baždarno polje, 1-formu C_a preko

$$*F = dC \quad (2.34)$$

Odavde, upotrebom definicija električnog i magnetskog polja slijedi

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} F^{jk} = \epsilon_{0ijk} \partial^j A^k \quad (2.35)$$

$$E_i = \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} *F^{jk} = \epsilon_{0ijk} \partial^j C^k \quad (2.36)$$

te

$$E_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \quad (2.37)$$

$$B_i = *F_{0i} = \partial_0 C_i - \partial_i C_0 = \partial_0 C^i + \partial_i C^0 \quad (2.38)$$

Upotrebom vektorskog zapisa ove jednakosti možemo sažeti u

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla U + \partial_t \mathbf{C} \quad (2.39)$$

gdje smo uveli pokrate $V = A^0$ i $U = C^0$.

2.2 Svjetlosno elektromagnetsko polje

Pomoću tenzora elektromagnetskog polja možemo konstruirati dva važna skalara $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ i $F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu}$. Korištenjem matričnih zapisa (2.22, 2.24, 2.25, 2.26) lako se uvjerimo da vrijedi

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (2.40)$$

$$F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu} = 4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (2.41)$$

Kako je po konstrukciji očigledno riječ o koordinatno neovisnim veličinama (svi indeksi su kontrahirani pa na lijevim stranama imamo skalare), njih možemo upotrijebiti u kovarijantnom klasificiranju tipova elektromagnetskih polja. Jedan posebno zanimljiv slučaj su elektromagnetski valovi u vakuumu čije su električno i magnetsko polje u svakoj točki

prostora međusobno okomita vektorska polja te (u prirodnom sustavu jedinica) jednakog iznosa,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \quad (2.42)$$

Drugim riječima, za elektromagnetski val u vakuumu skalari (2.40) i (2.41) iščezavaju,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.43)$$

Svako elektromagnetsko polje koje zadovoljava uvjet (2.43) zovemo **svjetlosno elektromagnetsko polje**.

Mi ćemo svjetlosna elektromagnetska polja analizirati pomoću Riemann-Silbersteinovog vektora,

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{E} + i\mathbf{B} \quad (2.44)$$

gdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ 3-vektori električnog i magnetskog polja, te Batemanovog ansatza [4]

$$\mathbf{F} = \nabla\alpha \times \nabla\beta \quad (2.45)$$

gdje su $\alpha, \beta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksne funkcije koje po pretpostavci zadovoljavaju uvjet

$$\nabla\alpha \times \nabla\beta = i(\dot{\alpha}\nabla\beta - \dot{\beta}\nabla\alpha) \quad (2.46)$$

Sada ćemo provjeriti dva važna svojstva ovako definiranog polja.

- (1) Batemanovo polje je svjetlosno elektromagnetsko polje. Promotrimo skalarni produkt izražen preko (2.45) i (2.46)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot i(\dot{\alpha}\nabla\beta - \dot{\beta}\nabla\alpha) \quad (2.47)$$

Komponente vektorskog produkta $(\nabla\alpha \times \nabla\beta)$ dane su s

$$(\nabla\alpha \times \nabla\beta)_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} (\partial_j\alpha)(\partial_k\beta) \quad (2.48)$$

Jedan od članova u (2.47) je oblika

$$(\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot \nabla\beta = \sum_i (\nabla\alpha \times \nabla\beta)_i (\partial_i\beta) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} (\partial_j\alpha)(\partial_k\beta)(\partial_i\beta) = 0 \quad (2.49)$$

Budući da u izrazu (2.49) imamo umnožak simetričnog i antisimetričnog tenzora, rezultat je nula. Analognim postupkom dobijemo da je $(\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot \nabla\alpha = 0$. Time smo zaključili da je $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0$. S druge strane, raspišemo li $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$ preko izraza (2.44), dobivamo

$$0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{E} + i\mathbf{B})(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (2.50)$$

Konačno, iz realnog i imaginarnog dijela jednakosti $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = 0$ slijedi

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \quad (2.51)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.52)$$

Time smo dokazali da je Batemanovo polje uistinu svjetlosno elektromagnetsko polje.

- (2) Batemanovo elektromagnetsko polje zadovoljava vakuumske Maxwellove jednadžbe. Promotrimo divergenciju Riemann-Silbersteinovog vektora izraženu preko Batemanovog ansatza (2.45)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \sum_i \partial_i (\nabla \alpha \times \nabla \beta)_i \quad (2.53)$$

Korištenjem izraza (2.48) možemo izraz (2.53) dalje raspisati kao

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i,j,k} \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j \alpha \partial_k \beta) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} (\partial_i \partial_j \alpha \partial_k \beta + \partial_j \alpha \partial_i \partial_k \beta) = 0 \quad (2.54)$$

koji iščezava zbog kontrahiranja simetričnog i antisimetričnog tenzora. S druge strane, izrazimo li tu divergenciju preko (2.44) dobije se

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{E} + i \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (2.55)$$

Iz realnog i imaginarnog dijela jednakosti $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ slijede dvije Maxwellove vakuumske jednadžbe, divergencije električnog i magnetskog polja,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.56)$$

Promotrimo sada rotor Riemann-Silbersteinovog vektora, izraženu opet preko izraza (2.45) i (2.46)

$$\nabla \times \mathbf{F} = i \nabla \times (\dot{\alpha} \nabla \beta - \dot{\beta} \nabla \alpha) \quad (2.57)$$

Za računanje gornjeg izraza će nam trebati identitet (vidi [20], str. 595)

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.58)$$

koji vrijedi za općenitu derivabilnu funkciju f i vektorsko polje $\mathbf{A}$. Koristeći identitet (2.58), izraz (2.57) možemo zapisati kao

$$\nabla \times \mathbf{F} = i(\nabla \dot{\alpha} \times \nabla \beta + \dot{\alpha} \nabla \times \nabla \beta - \nabla \dot{\beta} \times \nabla \alpha - \dot{\beta} \nabla \times \nabla \alpha) \quad (2.59)$$

U gornjem izrazu se dva puta pojavljuje rotor gradijenta koji je uvijek nula, tako da se sređivanjem gornji izraz pojednostavi u

$$\nabla \times \mathbf{F} = i(\nabla \dot{\alpha} \times \nabla \beta - \nabla \dot{\beta} \times \nabla \alpha) = i \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = i \dot{\mathbf{F}} \quad (2.60)$$

Ako gore dobivenu relaciju $\nabla \times \mathbf{F} = i \dot{\mathbf{F}}$ zapišemo preko relacije (2.44) slijedi

$$\nabla \times \mathbf{E} + i \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{F} = i \dot{\mathbf{F}} = i \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{B}} \quad (2.61)$$

Uspoređujući realne i imaginarne dijelove u gornjoj relaciji, možemo pisati

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}} \quad (2.62)$$

što su preostale dvije Maxwellove jednadžbe u vakuumu.

Možemo se pitati koliko je općenit Batemanov ansatz, odnosno može li se *svako* svjetlosno elektromagnetsko polje prikazati na sličan način? Hogan [11] je pokazao da je odgovarajuće poopćenje Batemanovog ansatza oblika

$$\mathbf{F} = h(\alpha, \beta) \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (2.63)$$

gdje su α i β funkcije koje opet zadovoljavaju uvjet

$$\nabla \alpha \times \nabla \beta = i(\dot{\alpha} \nabla \beta - \dot{\beta} \nabla \alpha), \quad (2.64)$$

gdje točka označava parcijalnu derivaciju po vremenu. Drugim riječima, množenjem osnovnog Batemanovog ansatza s nekom općenitom (holomorfnom) funkcijom h možemo prikazati svako svjetlosno elektromagnetsko polje. Sada ćemo ponoviti postupak provjere u ovom poopćenom slučaju.

- (1) Poopćeno Batemanovo polje je svjetlosno elektromagnetsko polje. Prisustvo funkcije $h(\alpha, \beta)$ u ansatzu ne utječe na ranije izveden zaključak pa on i dalje vrijedi.
- (2) Poopćeno Batemanovo elektromagnetsko polje zadovoljava vakuumske Maxwellove jednačbe. U ovom dijelu će nam trebati identiteti (vidi [20], str.595)

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.65)$$

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.66)$$

koji vrijede za općenitu derivabilnu funkciju f i vektorsko polje $\mathbf{A}$. Promotrimo divergenciju vektora $\mathbf{F}$ izraženu preko poopćenog Batemanovog ansatza (2.63)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (h(\alpha, \beta) \nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.67)$$

Izrazimo li gornju relaciju koristeći prvi od spomenutih identiteta (2.65), dobivamo

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot \nabla h + h \nabla \cdot (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.68)$$

Ako u izraz (2.68) uvrstimo relaciju (2.53) i (2.54) u konačnici možemo pisati

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot \nabla h \quad (2.69)$$

Gradijent funkcije h možemo rastaviti prema

$$\nabla h = \partial_\alpha h \nabla \alpha + \partial_\beta h \nabla \beta \quad (2.70)$$

gdje smo uveli pokrate

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Uvrštavanjem natrag u izraz (2.69) slijedi da je

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot (\partial_\alpha h \nabla \alpha + \partial_\beta h \nabla \beta) = 0 \quad (2.71)$$

gdje smo za izvrijednjavanje zadnje jednakosti koristili izraz (2.49). Ako dobivenu relaciju $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ izrazimo preko $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ pomoću (2.44), a zatim rastavimo na realni i imaginarni dio, dobivamo prve dvije vakuumske Maxwellove jednačbe

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.72)$$

Preostale dvije dobiti ćemo računajući rotor od $\mathbf{F}$. Koristeći općeniti Batemanov ansatz (2.63), pišemo

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \left(h(\alpha, \beta) \nabla \alpha \times \nabla \beta \right) \quad (2.73)$$

a upotrebom identiteta (2.66) slijedi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla h \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + h \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.74)$$

Drugi sumand smo već raspisivali kod osnovnog Batemanovog ansatza (2.57) – (2.60), pa možemo koristiti taj rezultat

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla h \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + ih \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.75)$$

Kada uvrstimo i gradijent funkcije h (2.70), naš izraz izgleda ovako

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_\alpha h \nabla \alpha + \partial_\beta h \nabla \beta) \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + ih \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.76)$$

Za računanje vrijednosti prvog sumanda u izrazu (2.76), prvo ćemo uvrstiti relaciju (2.64), a zatim izmnožiti sve članove

$$\begin{aligned} & (\partial_\alpha h \nabla \alpha + \partial_\beta h \nabla \beta) \times i(\dot{\alpha} \nabla \beta - \dot{\beta} \nabla \alpha) = \\ & = i(\partial_\alpha h \dot{\alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta - \partial_\alpha h \dot{\beta} \nabla \alpha \times \nabla \alpha + \partial_\beta h \dot{\alpha} \nabla \beta \times \nabla \beta - \partial_\beta h \dot{\beta} \nabla \beta \times \nabla \alpha) \end{aligned}$$

Kako je $\nabla \alpha \times \nabla \alpha = 0$ i $\nabla \beta \times \nabla \beta = 0$, izraz se svodi na

$$(\partial_\alpha h \nabla \alpha + \partial_\beta h \nabla \beta) \times i(\dot{\alpha} \nabla \beta - \dot{\beta} \nabla \alpha) = i(\partial_\alpha h \dot{\alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta - \partial_\beta h \dot{\beta} \nabla \beta \times \nabla \alpha)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u relaciju (2.76) dobijemo

$$\nabla \times \mathbf{F} = i(\partial_\alpha h \dot{\alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta - \partial_\beta h \dot{\beta} \nabla \beta \times \nabla \alpha) + ih \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.77)$$

odnosno, kada izlučimo zajednički član

$$\nabla \times \mathbf{F} = i(\nabla \alpha \times \nabla \beta)(\partial_\alpha h \dot{\alpha} + \partial_\beta h \dot{\beta}) + ih \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \quad (2.78)$$

Konačno, kako je

$$\partial_\alpha h \dot{\alpha} + \partial_\beta h \dot{\beta} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.79)$$

iz izraza (2.63) slijedi da je

$$\nabla \times \mathbf{F} = i \frac{\partial}{\partial t} (h \nabla \alpha \times \nabla \beta) = i \dot{\mathbf{F}} \quad (2.80)$$

Uvrstimo li u gornju jednadžbu $\mathbf{F}$ iskazan preko polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ (2.44), dobiti ćemo

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\nabla \times \mathbf{B} = i(\dot{\mathbf{E}} + i\dot{\mathbf{B}}) = -\dot{\mathbf{B}} + i\dot{\mathbf{E}} \quad (2.81)$$

Uspoređujući realni i imaginarni dio slijede preostale dvije Maxwellove jednadžbe

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}} \quad (2.82)$$

Primjer. Promotrimo jedan jednostavan primjer ovakve konstrukcije, gdje smo za h , α i β odabrali redom ove funkcije

$$h = ie^{i\alpha}, \quad \alpha = z - t, \quad \beta = x + iy$$

To znači da će poopćeni Batemanov ansatz (2.63) biti oblika

$$\mathbf{F} = ie^{i\alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta$$

Vektorskim množenjem slijedi

$$\nabla \alpha \times \nabla \beta = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \cdot (0 - i) - \hat{\mathbf{y}} \cdot (0 - 1) = -i\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$$

Provjerimo da li ovako odabrane α i β zadovoljavaju uvjet nad tim funkcijama kod poopćenog Batemanovog ansatza (2.64)

$$i(\partial_t \alpha \nabla \beta - \partial_t \beta \nabla \alpha) = i(-(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) - 0) = -i(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) = -i\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$$

Vidimo da smo dobili upravo isti izraz kao kod vektorskog množenja $\nabla \alpha \times \nabla \beta$, dakle uvjet je zadovoljen. Uvrštavanjem ovog produkta natrag u ansatz dobije se

$$\mathbf{F} = i(-i\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) e^{i(z-t)} = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) e^{i(z-t)}$$

Izrazimo li sada $\mathbf{F}$ preko realnih i imaginarnih komponenti, dobijemo

$$\mathbf{F} = (\hat{\mathbf{x}} \cos(z - t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(z - t)) + i(\hat{\mathbf{x}} \sin(z - t) + \hat{\mathbf{y}} \cos(z - t))$$

gdje u realnoj komponenti prepoznavamo električno, a u imaginarnoj magnetsko polje

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \cos(z - t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(z - t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \sin(z - t) + \hat{\mathbf{y}} \cos(z - t)$$

Ovo je elektromagnetsko polje kružno polariziranog ravnog vala koji putuje u $\hat{\mathbf{z}}$ smjeru.

Ideju zapisa elektromagnetskog polja pomoću Riemann-Silbersteinovog vektora možemo jednostavno prenijeti u formalizam diferencijalnih formi. Ovdje uvodimo Riemann-Silbersteinovu 2-formu,

$$\mathcal{F} \equiv F + i * F \quad (2.83)$$

Također, poopćeni Batemanov ansatz možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{F} = h(\alpha, \beta) d\alpha \wedge d\beta \quad (2.84)$$

uz pretpostavku da funkcije α i β zadovoljavaju zahtjev analogan relaciji (2.64)

$$d\alpha \wedge d\beta = f * (d\alpha \wedge d\beta) \quad (2.85)$$

uz neku funkciju f . Primjenom vanjske derivacije odmah vidimo da je

$$d\mathcal{F} = dh \wedge d\alpha \wedge d\beta = (\partial_\alpha h d\alpha + \partial_\beta h d\beta) \wedge d\alpha \wedge d\beta = 0 \quad (2.86)$$

S druge strane, znamo da je

$$d\mathcal{F} = dF + i d * F \quad (2.87)$$

Stoga, usporedbom realnog i imaginarnog dijela, slijede vakuumske Maxwelllove jednadžbe (2.30).

Uvjeriti ćemo se i da je ovako zapisano polje svjetlosno, odnosno da je zadovoljen uvjet (2.43). Raspišemo li umnožak $\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{ab}$ dobije se

$$\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{ab} = (F_{ab} + i * F_{ab})(F^{ab} + i * F^{ab}) = F_{ab}F^{ab} - *F_{ab} * F^{ab} + 2i F_{ab} * F^{ab} \quad (2.88)$$

Pokazati ćemo da su prva dva člana međusobno jednaka. Zapišemo li te Hodge duale preko izraza (C.11), dobijemo

$$(*F)_{ab} (*F)^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd} \cdot \frac{1}{2} \epsilon^{abgh} F_{gh} \quad (2.89)$$

gdje možemo primjetiti kontrahirane Levi-Civita tenzore, koje računamo pomoću izraza (C.12). Raspisivanjem i daljnjim sređivanjem dobijemo

$$(*F)_{ab} (*F)^{ab} = \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 2! \delta_{cd}^{gh} F^{cd} F_{gh} = -\frac{1}{2} (\delta_a^g \delta_b^h - \delta_b^g \delta_a^h) F^{ab} F_{gh} \quad (2.90)$$

Kontrahiranje s Kroneckerima će proizvesti dva jednaka člana, pa smo time dobili sljedeću jednakost

$$(*F)_{ab} (*F)^{ab} = -\frac{1}{2} \cdot 2 F^{ab} F_{ab} = -F^{ab} F_{ab} \quad (2.91)$$

Uvrštavanjem ovog rezultata natrag u izraz (2.88) slijedi

$$\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{ab} = 2(F_{ab}F^{ab} + i F_{ab} * F^{ab}) \quad (2.92)$$

S druge strane, izrazimo li $\mathcal{F}$ preko poopćenog Batemanovog ansatza (2.84), dobije se

$$\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{ab} = h^2 (d\alpha \wedge d\beta)_{ab} (f * (d\alpha \wedge d\beta))^{ab} \quad (2.93)$$

Ovaj izraz se korištenjem (C.13) svodi na

$$\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{ab} = 2f h^2 * (d\alpha \wedge d\beta \wedge d\alpha \wedge d\beta) = 0 \quad (2.94)$$

čime smo dokazali da je ovo elektromagnetsko polje svjetlosno.

3 Hopfovi svežnjevi

Svežnjevi svoju primjenu u fizici prije svega nalaze u formalnom opisu baždarnih polja. Osnovna ideja lokalne baždarne invarijantnosti polazi od slobode neovisnog odabira baždarenja (elementa baždarne grupe) u svakoj točki fizičkog, “baznog” prostora. Ovdje nailazimo na geometrijski problem prikaza sveukupne baždarne slobode na cijelom prostoru. Lokalno, na otvorenim skupovima, to je uvijek samo Kartezijev produkt promatranog otvorenog skupa i prostora baždarne slobode (“vlakna”). Globalno, ovakvi lokalni dijelovi mogu biti spojeni u “totalni” prostor na netrivialan način, onaj koji nije nužno opet Kartezijev produkt baznog prostora i vlakna. Ova geometrijska slika formalizirana je jezikom svežnjeva (osnovni pojmovi su definirani u Dodatku D).

Heinz Hopf otkrio je [3] važan slučaj svežnja u kojem su vlakno, totalni prostor i bazna mnogostrukost sfere,

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

Osnovna ideja polazi od odabira projekcije koja svakoj kružnici unutar 3-sfere $\mathbb{S}^3$ pridružuje po jednu točku u 2-sferi $\mathbb{S}^2$. Danas znamo kako je ovo jedan od četiri slična svežnja [25],

F	E	B
$\mathbb{S}^0$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$
$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$
$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{H}P^1 \cong \mathbb{S}^4$
$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{S}^{15}$	$\mathbb{O}P^1 \cong \mathbb{S}^8$

Ovdje $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ predstavljaju, redom, polja realnih brojeva, kompleksnih brojeva, kvaterniona i oktoniona, a $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{H}P^1$ i $\mathbb{O}P^1$ su pripadni projektivni prostori.

3.1 Projektivni prostori

Definicija 3.1. Za relaciju $\sim$ na nepraznom skupu S kažemo da je **relacija ekvivalencije** akko je

- (a) refleksivna, $\forall x \in S : x \sim x$,
- (b) simetrična, $\forall x, y \in S : x \sim y \Rightarrow y \sim x$ i
- (c) tranzitivna, $\forall x, y, z \in S : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Jednom kada je na skupu S zadana relacija ekvivalencije, tada za svaki $x \in S$ možemo definirati skup

$$[x] \equiv \{y \in S \mid x \sim y\} \tag{3.1}$$

kojeg zovemo **klasa ekvivalencije** elementa x . Sve klase ekvivalencije na nekom skupu su ili jednake ili disjunktne, što znači da klase ekvivalencije skup S razdjeljuju na disjunktne dijelove. Klase ekvivalencije možemo okupiti u **kvocijentni skup**

$$S/\sim \equiv \{[x] \mid x \in S\} \quad (3.2)$$

Koristan pomoćni pojam na skupu s relacijom ekvivalencije je projekcija $p : S \rightarrow S/\sim$, definirana s $p(x) = [x]$. Na primjer, ako na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definiramo relaciju ekvivalencije “ $x \sim y$ akko je $x - y$ paran cijeli broj”, tada je $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1]\}$. U ovom primjeru projekcija p svakom parnom cijelom broju pridjeljuje klasu $[0]$, a svakom neparnom klasu $[1]$.

Ako je na skupu s relacijom ekvivalencije bila zadana i topologija, tada postoji i “prirodan” odabir topologije na kvocijentalnom skupu.

Definicija 3.2. Neka je $(X, \mathcal{T}_X)$ topološki prostor na kojem je definirana relacija ekvivalencije $\sim$ i pripadna projekcija $p : X \rightarrow X/\sim$. Tada **kvocijentni prostor** definiramo kao skup $X/\sim$ s topologijom

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \equiv \{O \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X\} \quad (3.3)$$

Provjera svojstava topološkog prostora temelji se na jednakostima

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(O_\alpha), \quad p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n O_i\right) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(O_i) \quad (3.4)$$

Primjer. Promotrimo Euklidsku ravninu $\mathbb{R}^2$ sa standardnom topologijom te izdvojimo jednu točku T . Ako na ovom skupu definiramo relaciju ekvivalencije “ $A \sim B$ akko $|AT| = |BT|$ ”, tada su klase ekvivalencija koncentrične kružnice sa središtem u točki T . Nadalje, prema gornjoj definiciji skup koncentričnih kružnica s radijusom $r \in \langle 1, 2 \rangle$ je otvoren skup, a skup koncentričnih kružnica s radijusom $r \in [1, 2]$ zatvoren skup.

Nama posebno zanimljivi slučajevi su topološki prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (sa standardnom topologijom) u kojima su kao klase ekvivalencija izdvojeni pravci koji prolaze kroz nulu. Označimo s $\mathbb{K}$ polje ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), s “0” nulu u polju (aditivni neutralni element) te s $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} - \{0\}$. Nadalje, označimo s $\mathbb{K}^n$ Kartezijev produkt n kopija prostora $\mathbb{K}$ (s produktnom topologijom) i opet, radi jednostavnosti, s “0” ishodište ovog prostora. Tada na skupu $\mathbb{K}^n - \{0\}$ definiramo relaciju ekvivalencije,

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^\times : a = \lambda b$$

i pripadni kvocijentni prostor

$$\mathbb{K}P^{n-1} \equiv (\mathbb{K}^n - \{0\})/\sim \quad (3.5)$$

Promotriti ćemo malo detaljnije dva najjednostavnija primjera, $\mathbb{R}P^1$ i $\mathbb{C}P^1$.

(1) Realni projektivni prostor $\mathbb{R}P^1$ sastoji se od klasa ekvivalencije oblika

$$[(x, y)] = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times : (x', y') = (\lambda x, \lambda y)\} \quad (3.6)$$

Pokrijemo li $\mathbb{R}P^1$ s dva otvorena skupa,

$$O_1 = \{[(x, y)] \in \mathbb{R}P^1 \mid x \neq 0\}, \quad O_2 = \{[(x, y)] \in \mathbb{R}P^1 \mid y \neq 0\} \quad (3.7)$$

tada je kanonski odabir lokalnih koordinata, homeomorfizama $\psi_i : O_i \rightarrow \mathbb{R}$, dan s

$$\psi_1([(x, y)]) = \frac{y}{x}, \quad \psi_2([(x, y)]) = \frac{x}{y} \quad (3.8)$$

Ove koordinate možemo, pomoću stereografske projekcije (vidi Dodatak 1) preslikati na kružnicu $\mathbb{S}^1$. Na primjer, kompozicijom inverza projekcije iz sjevernog pola kružnice,

$$a \mapsto \left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \right), \quad (3.9)$$

s lokalnom koordinatnom kartom ψ_2 možemo uvesti preslikavanje

$$\beta : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

preko

$$\beta([(x, y)]) = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.10)$$

pri čemu je važno naglasiti kako ova definicija ne ovisi o izboru reprezentanta klase ekvivalencije. Primjetimo kako je ovdje klasa $[(x, 0)]$ preslikana u sjeverni pol $(0, 1)$. Isti rezultat dobili bismo kompozicijom inverza projekcije iz južnog pola kružnice s lokalnom koordinatnom kartom ψ_1 . Nešto jasniji uvid dobivamo upotrebom polarnih koordinata,

$$\beta([(\cos \phi, \sin \phi)]) = (\sin(2\phi), \cos(2\phi)) \quad (3.11)$$

Odavde se lako provjeri da je $\mathbb{R}P^1$ homeomorfan s kružnicom $\mathbb{S}^1$.

(2) Kompleksni projektivni prostor $\mathbb{C}P^1$ sastoji se od klasa ekvivalencije oblika

$$[(z, w)] = \{(z', w') \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : (z', w') = (\lambda z, \lambda w)\} \quad (3.12)$$

Pokrijemo li $\mathbb{C}P^1$ s dva otvorena skupa,

$$O_1 = \{[(z, w)] \in \mathbb{C}P^1 \mid z \neq 0\}, \quad O_2 = \{[(z, w)] \in \mathbb{C}P^1 \mid w \neq 0\} \quad (3.13)$$

tada je kanonski odabir lokalnih koordinata, homeomorfizama $\psi_i : O_i \rightarrow \mathbb{C}$, dan s

$$\psi_1([(z, w)]) = \frac{w}{z}, \quad \psi_2([(z, w)]) = \frac{z}{w} \quad (3.14)$$

Ove koordinate možemo, pomoću stereografske projekcije (vidi Dodatak 1) preslikati na sferu $\mathbb{S}^2$. Na primjer, kompozicijom inverza projekcije iz sjevernog pola sfere,

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right), \quad (3.15)$$

s lokalnom koordinatnom kartom ψ_2 možemo uvesti preslikavanje

$$\gamma : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

preko

$$\gamma([z, w]) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(\bar{z}w)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right) \quad (3.16)$$

Na primjer, prva komponenta je izračunata prema

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1} &= \frac{2\operatorname{Re}(z/w)}{(\operatorname{Re}(z/w))^2 + (\operatorname{Im}(z/w))^2 + 1} = \frac{2\operatorname{Re}(z/w)}{1 + |z/w|^2} = \\ &= \frac{|w|^2 \cdot 2\operatorname{Re}(z/w)}{|w|^2 + |z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(w\bar{w} \frac{z}{w})}{|w|^2 + |z|^2} = \frac{2\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|w|^2 + |z|^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

i analogno za ostale komponente.

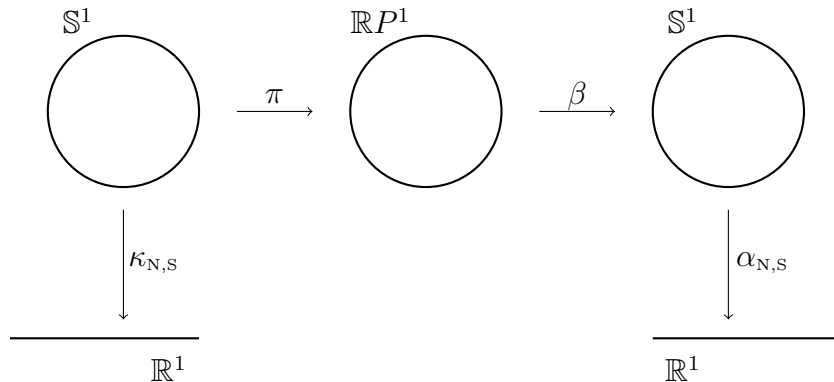
Opet valja naglasiti kako definicija preslikavanja γ ne ovisi o izboru reprezentanta klase ekvivalencije. Primjetimo kako je ovdje klasa $[(z, 0)]$ preslikana u sjeverni pol $(0, 0, 1)$. Isti rezultat dobili bismo kompozicijom inverza projekcije iz južnog pola kružnice s lokalnom koordinatnom kartom ψ_1 . Odavde se može provjeriti da je kvocijentni prostor $\mathbb{C}P^1$ homeomorfan sa sferom $\mathbb{S}^2$, poznatom još kao **Riemannova sfera**.

Spomenimo usput kako je kvocijentni prostor $\mathbb{R}P^3$ homeomorfan je s Liejevom grupom $SO(3)$ koja parametrizira rotacije u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

3.2 Jednodimenzionalni Hopfov svežanj

Sada ćemo promotriti najjednostavniju verziju Hopfovog svežnja,

$$\mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$$



Slika 3.1. Shematski prikaz jednodimenzionalnog Hopfovog svežnja.

Konstrukcija polazi od totalnog prostora, kružnice

$$E = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (3.18)$$

i bazne mnogostrukosti, projektivnog prostora $B = \mathbb{R}P^1$. Projekcija $\pi : E \rightarrow B$ s totalnog prostora na baznu mnogostrukost definirana je preko

$$\pi((x, y)) = [(x, y)] \quad (3.19)$$

Svako vlakno je prasluka točke (u ovom slučaju klase ekvivalencije) u baznoj mnogostrukosti,

$$F = \pi^{-1}([(x, y)]) \quad (3.20)$$

Drugim riječima, ovdje tražimo sve one točke $(x', y') \in E$ čija je projekcija zadana točka $[(x, y)] \in B$,

$$[(x', y')] = \pi((x', y')) = [(x, y)] \quad (3.21)$$

Klase su jednake kad su njihovi elementi u relaciji

$$(x', y') \sim (x, y) \quad (3.22)$$

što znači da postoji $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, takav da je

$$(x', y') = (\lambda x, \lambda y) \quad (3.23)$$

Kako su (x', y') i (x, y) točke na jediničnoj kružnici, imamo

$$1 = x'^2 + y'^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 \quad (3.24)$$

odakle slijedi

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad (3.25)$$

Dakle,

$$F = \{(x, y), (-x, -y)\} \quad (3.26)$$

Radi jasnije usporedbe s kasnijim, složenijim primjerom, ovdje naglašavamo kako je ovo vlakno (par točaka) moguće prepoznati kao 0-dimenzionalnu sferu,

$$F \cong \mathbb{S}^0 \cong \{-1, +1\} \subseteq \mathbb{R} \quad (3.27)$$

Lokalne trivijalizacije

$$\tau_i : O_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(O_i) \subseteq E$$

definiramo na otvorenim skupovima

$$O_1 = \{[(x, y)] \in B \mid x \neq 0\}, \quad O_2 = \{[(x, y)] \in B \mid y \neq 0\} \quad (3.28)$$

Iz praktičnih razloga jednostavnije je prvo definirati inverze lokalnih trivijalizacija,

$$\tau_1^{-1}((x, y)) = \left(\frac{y}{x}, \frac{x}{|x|} \right), \quad \tau_2^{-1}((x, y)) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{|y|} \right) \quad (3.29)$$

Ovdje smo točke vlakna obilježili s ± 1 ,

$$x/|x| = \operatorname{sgn}(x) \in \{-1, +1\}, \quad y/|y| = \operatorname{sgn}(y) \in \{-1, +1\} \quad (3.30)$$

Potražimo sada lokalne trivijalizacije τ_1 i τ_2 :

- upotrebom pokrata $r = y/x$ i $s = x/|x|$ imamo

$$1 + r^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}$$

$$x = s|x| = \frac{s}{\sqrt{1 + r^2}}, \quad y = rx = \frac{rs}{\sqrt{1 + r^2}}$$

te je stoga

$$\tau_1(r, s) = \left(\frac{s}{\sqrt{1 + r^2}}, \frac{rs}{\sqrt{1 + r^2}} \right) \quad (3.31)$$

- upotrebom pokrata $r = x/y$ i $s = y/|y|$ imamo

$$1 + r^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow |y| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}$$

$$y = s|y| = \frac{s}{\sqrt{1 + r^2}}, \quad x = ry = \frac{rs}{\sqrt{1 + r^2}}$$

te je stoga

$$\tau_2(r, s) = \left(\frac{rs}{\sqrt{1 + r^2}}, \frac{s}{\sqrt{1 + r^2}} \right) \quad (3.32)$$

Konačno, prijelazna funkcija $\tau_1^{-1} \circ \tau_2 : O_2 \times F \rightarrow O_1 \times F$ dana je izrazom

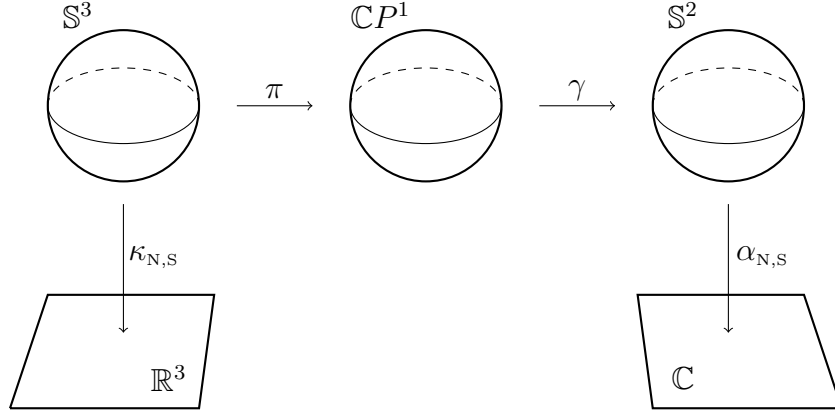
$$(\tau_1^{-1} \circ \tau_2)(r, s) = \tau_1^{-1} \left(\frac{rs}{\sqrt{1 + r^2}}, \frac{s}{\sqrt{1 + r^2}} \right) = \left(\frac{1}{r}, \frac{r}{|r|} s \right)$$

Na vlaknu stoga imamo preslikavanje $s \mapsto (r/|r|)s$, a kako je $r/|r| = \operatorname{sgn}(r) \in \{-1, +1\}$, vidimo da je strukturna grupa u ovom slučaju $G = \mathbb{Z}_2$. Kako je grupa $\mathbb{Z}_2$ homeomorfna vlaknu $F = \mathbb{S}^0$, ovo je stoga primjer glavnog svežnja, $P(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}_2)$.

3.3 Hopfov svežanj

Nama posebno zanimljiv slučaj je Hopfov svežanj

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$$



Slika 3.2. Shematski prikaz Hopfovog svežnja.

Konstrukcija opet polazi od totalnog prostora, u ovom slučaju 3-sfere $\mathbb{S}^3$,

$$E = \mathbb{S}^3 = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\} \quad (3.33)$$

i bazne mnogostrukosti, kompleksnog projektivnog prostora $\mathbb{C}P^1$. Sferu $\mathbb{S}^3$ je teško zorno predočiti. Na primjer, možemo je prikazati pomoću dvije disjunktne kugle čiji su rubovi formalno identificirani, a spojišna sfera $\mathbb{S}^2$ predstavlja “ekvator” sfere $\mathbb{S}^3$. Nama je praktično smjestiti sferu $\mathbb{S}^3$ u prostor $\mathbb{C}^2$ s koordinatama $z = x + iy$ i $w = u + iv$. U ovakvom prikazu za svaku točku $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ vrijedi

$$|z|^2 + |w|^2 = 1 \quad (3.34)$$

Projekcija $\pi : E \rightarrow B$ definirana je s

$$\pi((z, w)) = [(z, w)] \quad (3.35)$$

Vlakno je prasluka točke u baznoj mnogostrukosti,

$$F = \pi^{-1}([(z, w)]) \quad (3.36)$$

Označimo s $(z', w') \in E$ točku čija je projekcija zadana točka $[(z, w)] \in B$. Ponavljanjem procedure iz prethodnog poglavlja imamo jednadžbu

$$[(z', w')] = \pi((z', w')) = [(z, w)] \quad (3.37)$$

Jednakost među klasama ekvivalencije vrijedi ako su njihovi elementi u relaciji, $(z', w') \sim (z, w)$, pa po definiciji postoji kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, takav da je

$$(z', w') = (\lambda z, \lambda w) \quad (3.38)$$

Kako obje točke, (z, w) i (z', w') , zadovoljavaju relaciju (3.34), vrijedi

$$1 = |z'|^2 + |w'|^2 = |\lambda z|^2 + |\lambda w|^2 = |\lambda|^2 (|z|^2 + |w|^2) = |\lambda|^2 \quad (3.39)$$

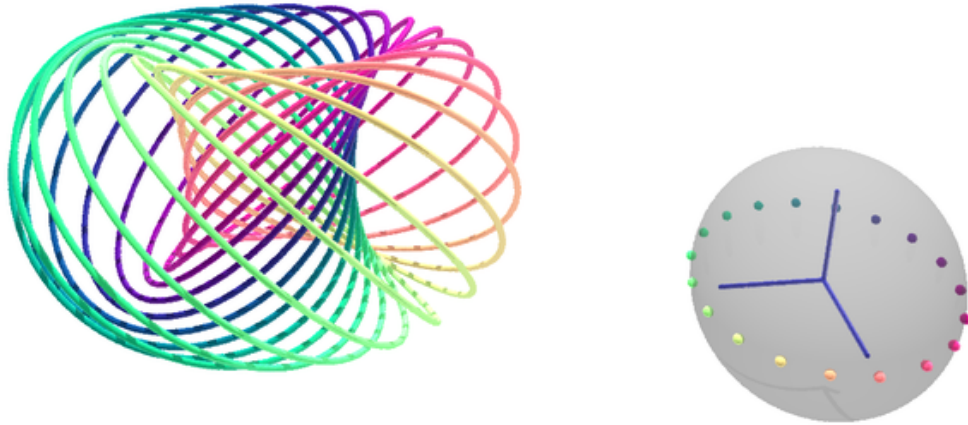
odnosno, λ leži na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravnini,

$$\lambda = e^{i\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Vidimo da sve točke (z', w') koje projekcija preslikava u točku $[(z, w)]$ leže na *kružnici* u $\mathbb{S}^3$ koja je zadana fazom ϕ

$$(z', w') = (\lambda z, \lambda w) = (e^{i\phi} z, e^{i\phi} w) \quad (3.40)$$

Time smo ustanovili kako je vlakno promatranog svežnja kružnica $\mathbb{S}^1$ u 3-sferi $\mathbb{S}^3$.



Slika 3.3. Hopfov svežanj. Istaknuto je nekoliko točaka u bazi i pripadna vlakna u totalnom prostoru.

Lokalne trivijalizacije

$$\tau_i : O_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(O_i) \subseteq E$$

definiramo na otvorenim skupovima

$$O_1 = \{(z, w) \in B \mid z \neq 0\}, \quad O_2 = \{(z, w) \in B \mid w \neq 0\} \quad (3.41)$$

Iz praktičnih razloga jednostavnije je prvo definirati inverze lokalnih trivijalizacija,

$$\tau_1^{-1}((z, w)) = \left(\frac{w}{z}, \frac{z}{|z|} \right), \quad \tau_2^{-1}((z, w)) = \left(\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|} \right) \quad (3.42)$$

Ovdje smo točke vlakna obilježili s kompleksnim fazama,

$$z/|z| = e^{i\phi_z}, \quad w/|w| = e^{i\phi_w} \quad (3.43)$$

Potražimo sada lokalne trivijalizacije τ_1 i τ_2 :

- upotrebom pokrata $\rho = z/w$ i $\sigma = w/|w|$ imamo

$$1 + |\rho|^2 = 1 + \frac{|w|^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2 + |w|^2}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}$$

$$z = \sigma|z| = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad w = \rho|z| = \frac{\sigma\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}$$

te je stoga

$$\tau_1(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \frac{\sigma\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}} \right) \quad (3.44)$$

- upotrebom pokrata $\rho = w/z$ i $\sigma = z/|z|$ imamo

$$1 + |\rho|^2 = 1 + \frac{|z|^2}{|w|^2} = \frac{|z|^2 + |w|^2}{|w|^2} = \frac{1}{|w|^2} \Rightarrow |w| = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}$$

$$w = \sigma|w| = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad z = \rho|w| = \frac{\sigma\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}$$

te je stoga

$$\tau_2(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}} \right) \quad (3.45)$$

Prijelazne funkcije su dane kompozicijom lokalnih trivijalizacija

$$(\tau_1^{-1} \circ \tau_2)(\rho, \sigma) = \tau_1^{-1} \left(\frac{\rho\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \frac{\sigma}{\sqrt{1 + |\rho|^2}} \right) = \left(\frac{1}{\rho}, \frac{\rho}{|\rho|} \sigma \right) \quad (3.46)$$

Promatranjem uočavamo da se faza σ množi s fazom od ρ , dakle dobili smo da je djelovanje s vlakna na vlakno kod naše prijelazne funkcije zadano množenjem faza, a to znači da je u ovom slučaju grupa $G = U(1)$. Kako je grupa $U(1)$ homeomorfna vlaknu $\mathbb{S}^1$, vidimo da je Hopfov svežanj glavni svežanj $P(\mathbb{S}^2, U(1))$.

Na kraju ove analize ćemo prikazati važna preslikavanja u Hopfovom svežnju u kombinaciji sa stereografskim projekcijama. Upotrebom projekcije $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ i preslikavanja $\gamma : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$, definiranog u (3.16), te uzimajući u obzir uvjet (3.34), dobivamo

$$(\gamma \circ \pi)((z, w)) = (2\operatorname{Re}(\bar{z}w), 2\operatorname{Im}(\bar{z}w), |z|^2 - |w|^2) \quad (3.47)$$

U realnim koordinatama, $z = x + iy$, $w = u + iv$, ovo preslikavanje možemo zapisati u narednom obliku

$$(x, y, u, v) \mapsto (2(xu + yv), 2(xv - yu), x^2 + y^2 - u^2 - v^2) \quad (3.48)$$

Valja napomenuti kako Hopf u originalnom članku [3] ima nešto drugačiji odabir zapisa koordinata, $z = x - iy$ te $w = u - iv$, kojeg koriste i neki moderniji autori.

Nadalje, upotrebom stereografskih projekcija $\alpha_N, \alpha_S : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ imamo

$$(\alpha_N \circ \gamma \circ \pi)((z, w)) = z/w \quad \text{za} \quad w \neq 0 \quad (3.49)$$

$$(\alpha_S \circ \gamma \circ \pi)((z, w)) = w/z \quad \text{za} \quad z \neq 0 \quad (3.50)$$

Konačno, inverz stereografske projekcije $\kappa_N : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ glasi

$$\kappa_N^{-1}((x_1, x_2, x_3)) = \left(\frac{2x_1}{1 + \rho^2}, \frac{2x_2}{1 + \rho^2}, \frac{2x_3}{1 + \rho^2}, \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2} \right) \quad (3.51)$$

gdje je uvedena pokrata $\rho^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$, pa kompozicijom dobivamo

$$(\alpha_N \circ \gamma \circ \pi \circ \kappa_N^{-1})((x_1, x_2, x_3)) = \frac{2(x_1 + ix_2)}{2x_3 + i(\rho^2 - 1)} \quad (3.52)$$

Za ovu kompoziciju uvodimo posebnu pokratu

$$\varphi \equiv \alpha_N \circ \gamma \circ \pi \circ \kappa_N^{-1} \quad (3.53)$$

4 Elektromagnetski čvorovi

Sada ćemo analizirati detalje Rañadine konstrukcije elektromagnetskih čvorova pomoću Hopfovog svežnja [12–14, 16, 18]. Ukratko, glavna ideja je povući volumnu 2-formu sa sfere $\mathbb{S}^2$ u Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ pomoću projekcije u Hopfovom svežnju i stereografskih projekcija, te pokazati kako ona tamo predstavlja 2-formu elektromagnetskog polja u početnom trenutku (naknadno možemo dobiti i njegovu vremensku evoluciju).

4.1 Čvorovi i karike

Nefomalno, čvor (engl. *knot*) je zatvorena glatka krivulja smještena u prostor $\mathbb{R}^3$, a karika (engl. *link*) skup više međusobno isprepletenih, disjunktnih čvorova u prostoru. Povijesno se čvorovi u različitim oblicima primjene pojavljuju u nizu drevnih kultura: kao način zapisivanja i praćenja informacija kod Inka i drugih andalskih naroda, kao dekorativni element u kineskoj narodnoj umjetnosti, kao duhovni simbol u tibetanskom budizmu (beskonačni čvor), kao umjetnički motiv kod Kelta, zatim u nordijskim kulturama (*valknut*, inačica takozvanih Boromejskih prstenova, može se primjetiti kao često prisutan motiv u pronađenim isklesanim kamenim pločama), i tako dalje. Začetak moderne matematičke teorije čvorova nalazimo u Gaussovim radovima, koji je u 19. stoljeću definirao broj ulančavanja pomoću integralne formule. William Thomson (Lord Kelvin) pokušao je atome objasniti pomoću stabilnih vrtloga etera koji su svezani u čvorove [1]. Kelvin je bio inspiriran Helmholtzovim otkrićima u mehanici fluida, strukturi vrtloga koje je moguće opisati zapetljanim jednodimenzionalnim nitima. Kelvinova teorija je kasnije oborena Michelson–Morleyevim eksperimentom, a svojstva atoma su objašnjena kvantnom fizikom. Pa ipak, čvorovi i karike danas se pojavljuju u fizici kvantnih fluida kao i u nekim drugim kvantnim fenomenima, npr. kod teorijski previđenih aniona (engl. *anyons*).

Definicija 4.1. Neka su X i Y topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ kažemo da je **topološko smještenje** ako je f homeomorfizam prostora X i topološkog prostora $f(X)$ s (relativnom) topologijom induciranom iz prostora Y .

Definicija 4.2. Neka su M i N glatke mnogostrukosti. Za preslikavanje $f : M \rightarrow N$ kažemo da je

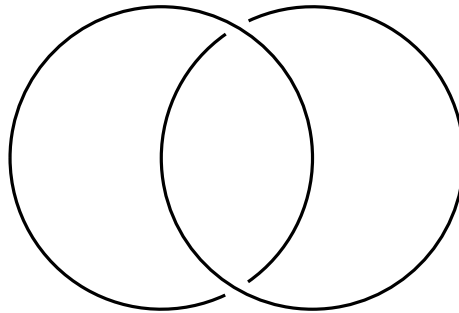
- **imerzija** ako je $f_* : TM \rightarrow TN$ injektivno u svakoj točki mnogostrukosti M ;
- **glatko smještenje** ako je f glatka imerzija koja je topološko smještenje.

Primjeri:

- preslikavanje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definirano s $f(x) = (x, |x|)$ je topološko smještenje, ali nije imerzija jer nije derivabilno u $x = 0$
- preslikavanje $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definirano s $g(x) = (x^3, x^2)$ je derivabilno topološko smještenje, ali nije imerzija jer $g'(0) = (0, 0)$ pa $g_* : T_0\mathbb{R} \rightarrow T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ preslikava sve tangentne vektore u nul-vektor
- preslikavanje $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definirano s $h(x) = (x^3 - 4x, x^2 - 4)$ je imerzija, ali nije topološko (a stoga niti glatko) smještenje jer krivulja $h(\mathbb{R})$ presjeca samu sebe u $x = \pm 2$

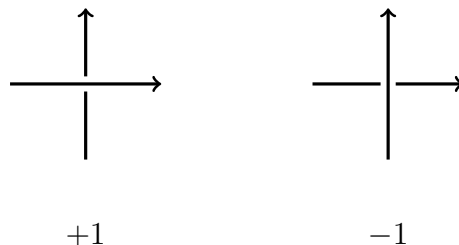
Definicija 4.3. Čvor (engl. *knot*) je glatko smještenje kružnice $\mathbb{S}^1$ u prostor $\mathbb{R}^3$. **Karika** (engl. *link*) je glatko smještenje $k \in \mathbb{N}$ disjunktne kopije kružnice $\mathbb{S}^1$ u prostor $\mathbb{R}^3$.

Mi ćemo promatrati samo karike s dvije komponente. Najjednostavnija takva je Hopfova karika,

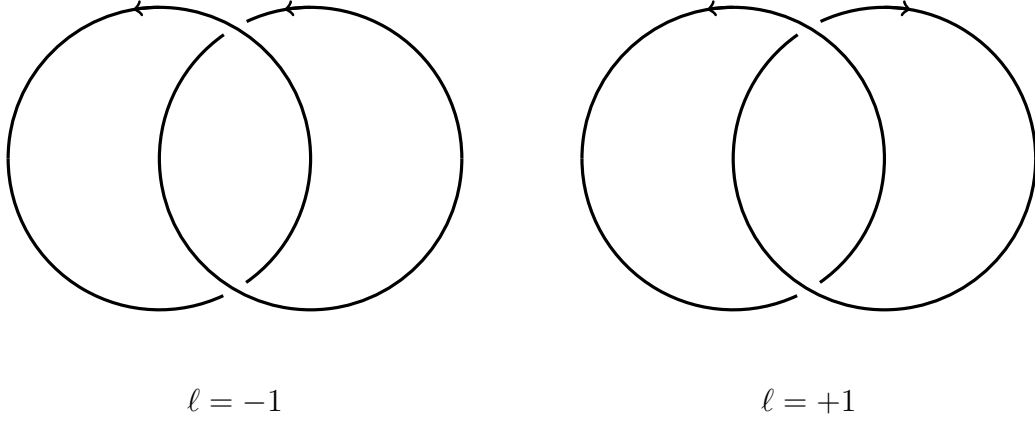


Slika 4.1. Hopfova karika.

Neka je zadana karika s orijentiranim komponentama, nacrtana projicirana na dvodimenzionalnu Euklidsku ravninu $\mathbb{R}^2$. Svakoј točki gdje se sijeku projicirane komponente karike možemo pridružiti jedan od brojeva ± 1 prema pravilu kako je skicirano na crtežu ispod



Tada **broj ulančavanja** (engl. *linking number*) definiramo kao sumu svih brojeva koji su pridruženi točkama presjecišta, podijeljenu s 2. Na primjer, u slučaju Hopfove karike imamo dvije moguće orijentacije, kao što je prikazano na crtežu ispod.



Slika 4.2. Broj ulančavanja dvije različite orijentacije Hopfove karike.

4.2 Hopf-Raňadino elektromagnetsko polje

Kao što je spomenuto u uvodu, projekciju u Hopfovom svežnju ćemo upotrijebiti za konstrukciju 2-forme koja će predstavljati tenzor F_{ab} elektromagnetskog polja.

U n -dimenzionalnoj mnogostrukosti s metrikom g_{ab} volumna forma je oblika

$$\epsilon = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (4.1)$$

gdje je g determinanta metrike. Na jediničnoj sferi $\mathbb{S}^2$ u sfernom koordinatnom sustavu (ϕ, θ) , normalizirana volumna forma $\tilde{\sigma} \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ (dobivena dijeljenjem s površinom sfere) glasi

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (4.2)$$

Promotrimo sad sferu $\mathbb{S}^2$ uronjenu u Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ s Kartezijevim koordinatama (s_1, s_2, s_3) .

$$\begin{aligned} \sin \theta d\theta &= -d(\cos \theta) = -ds_3 \\ \phi &= \arctan \frac{s_2}{s_1} \quad \Rightarrow \quad d\phi = \frac{s_1 ds_2 - s_2 ds_1}{s_1^2 + s_2^2} \end{aligned}$$

Kako koordinate $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{S}^2$ zadovoljavaju uvjet

$$(s_1)^2 + (s_2)^2 + (s_3)^2 = 1 \quad (4.3)$$

odmah imamo

$$s_1 ds_1 + s_2 ds_2 + s_3 ds_3 = 0 \quad (4.4)$$

pa u svim točkama gdje je $s_3 \neq 0$ možemo pisati

$$\sin \theta d\theta = \frac{s_1}{s_3} ds_1 + \frac{s_2}{s_3} ds_2 \quad (4.5)$$

Uvrštavamo natrag u izraz za $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \frac{(s_1^2 + s_2^2)(ds_1 \wedge ds_2)}{4\pi s_3(s_1^2 + s_2^2)} = \frac{ds_1 \wedge ds_2}{4\pi s_3} \quad (4.6)$$

Sada ćemo ovu 2-formu “povući” u kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$ pomoću inverza stereografske projekcije α_N ,

$$\sigma = (\alpha_N^{-1})^* \tilde{\sigma} \in \Omega^2(\mathbb{C}) \quad (4.7)$$

Pomoću stereografske projekcije možemo lako iščitati koordinate točke na sferi $\mathbb{S}^2$ čija je projekcija u kompleksnoj ravnini točka $\xi = a + ib$

$$\alpha_N^{-1}(a + ib) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right) \quad (4.8)$$

Uvrstimo li to u gore navedeni izraz za σ

$$\begin{aligned} \sigma &= (\alpha_N^{-1})^* \left(\frac{ds_1 \wedge ds_2}{4\pi s_3} \right) = \frac{d((\alpha_N^{-1})^* s_1) \wedge d((\alpha_N^{-1})^* s_2)}{4\pi (\alpha_N^{-1})^* s_3} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 + b^2 + 1}{a^2 + b^2 - 1} d\left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}\right) \wedge d\left(\frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

Raspisivanjem dobijemo

$$\sigma = -\frac{1}{\pi} \frac{da \wedge db}{(a^2 + b^2 + 1)^2} \quad (4.9)$$

Želimo σ zapisati pomoću ξ . Uočimo prvo

$$d\xi \wedge d\bar{\xi} = (da + idb) \wedge (da - idb) = -ida \wedge db + idb \wedge da = -2i da \wedge db \quad (4.10)$$

$$da \wedge db = \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{-2i}$$

Vratimo li to u izraz za volumnu formu, slijedi

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{(1 + |\xi|^2)^2} \quad (4.11)$$

Dobivena forma σ je zatvorena forma, $d\sigma = 0$, jer je maksimalnog ranga na mnogostrukosti $\mathbb{C}$.

Hopfova konstrukcija nam nudi nekoliko preslikavanja iz $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{C}$, koja možemo upotrijebiti za povlačenje 2-forme σ u (fizikalni) prostor $\mathbb{R}^3$.

- Ranije smo uveli preslikavanje φ ,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{2(x_1 + ix_2)}{2x_3 + i(\rho^2 - 1)} \quad (4.12)$$

- Preslikavanje ϑ dobije se cikličkom zamjenom koordinata

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1) : \quad \vartheta(x_1, x_2, x_3) = \frac{2(x_2 + ix_3)}{2x_1 + i(\rho^2 - 1)} \quad (4.13)$$

- Preslikavanje χ dobije se cikličkom zamjenom koordinata

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2) : \quad \chi(x_1, x_2, x_3) = \frac{2(x_3 + ix_1)}{2x_2 + i(\rho^2 - 1)} \quad (4.14)$$

Projekciju φ ćemo, kao što smo već najavili, upotrijebiti za konstrukciju 2-forme u $\mathbb{R}^3$, definiranu kao

$$F = -\sqrt{a} \varphi^* \sigma \quad (4.15)$$

gdje je a dimenzionalna konstanta uvedena za potrebu kasnije normalizacije polja. Pogledajmo kako izgleda to povlačenje kada se uvrsti dobiveni izraz za 2-formu σ (4.11)

$$\begin{aligned} \varphi^* \sigma &= \frac{1}{2\pi i} \varphi^* \left(\frac{d\xi \wedge d\bar{\xi}}{(1 + |\xi|^2)^2} \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi^*(d\xi) \wedge \varphi^*(d\bar{\xi})}{\varphi^*(1 + |\xi|^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{(d\varphi^* \xi) \wedge (d\varphi^* \bar{\xi})}{\varphi^*(1 + |\xi|^2)^2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\varphi \wedge d\bar{\varphi}}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Napomena: u posljednoj jednakosti smo uveli “pokratu” koja se često koristi u literaturi,

$$(\varphi^* \xi)(\mathbf{r}) = (\xi \circ \varphi)(\mathbf{r}) = \xi(\varphi(\mathbf{r})) \equiv \varphi \quad (4.17)$$

Uvrštavanjem ovako dobivene vrijednosti $\varphi^* \sigma$, slijedi da je F

$$F = -\frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{d\varphi \wedge d\bar{\varphi}}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} \quad (4.18)$$

gdje je F Hopf-Raňadino elektromagnetsko polje. Uvjerimo se da je F stvarno elektromagnetski tenzor, tj. da ovako definirana 2-forma $F_{\mu\nu}$ zadovoljava Maxwelllove jednadžbe (2.30). Uvrštavanjem (4.15) u prvu Maxwellovu jednadžbu se lako provjeri da je jednadžba zadovoljena:

$$dF = d(-\sqrt{a} \varphi^* \sigma) = -\sqrt{a} d(\varphi^* \sigma) = -\sqrt{a} \varphi^*(d\sigma) = 0 \quad (4.19)$$

Kod provjere valjanosti druge Maxwelllove jednadžbe koristiti ćemo relaciju koja povezuje preslikavanja φ i ϑ

$$*(\varphi^* \sigma) = -\vartheta^* \sigma \quad (4.20)$$

Jednostavnim računom vidimo da je i druga Maxwelllova diferencijalna jednačba zadovoljena:

$$d * F = d(-\sqrt{a} * (\varphi^* \sigma)) = -\sqrt{a} d * (\varphi^* \sigma) = -\sqrt{a} d(-\vartheta^* \sigma) = \sqrt{a} \vartheta^* (d\sigma) = 0 \quad (4.21)$$

U oba slučaja, posljednja jednakost vrijedi zato što je σ forma maksimalnog ranga, pa je automatski zatvorena, $d\sigma = 0$.

Da bismo izrazili elektromagnetski tenzor F po komponentama, treba izračunati vanjski produkt iz izraza (4.18). Pogledajmo prvo čemu je općenito jednako $\alpha \wedge \beta$

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_\mu dx^\mu) \wedge (\beta_\nu dx^\nu) = \alpha_\mu \beta_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\alpha_\mu \beta_\nu - \alpha_\nu \beta_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Usporedbom ovog raspisa sa (C.2) lako iščitamo da je

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu\nu} = \alpha_\mu \beta_\nu - \alpha_\nu \beta_\mu \quad (4.22)$$

U našem slučaju se u 2-formi F (4.18) javlja vanjski produkt oblika $d\varphi \wedge d\bar{\varphi}$, gdje su $d\varphi$ i $d\bar{\varphi}$ 1-forme za koje vrijedi da je $d\varphi = (\partial_\mu \varphi) dx^\mu$, tj. pišemo $(d\varphi)_\mu = \partial_\mu \varphi$. Izvrijednimo li produkt $d\varphi \wedge d\bar{\varphi}$ po relaciji (4.22), slijedi

$$(d\varphi \wedge d\bar{\varphi})_{\mu\nu} = d\varphi_\mu d\bar{\varphi}_\nu - d\varphi_\nu d\bar{\varphi}_\mu = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \bar{\varphi} - \partial_\nu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} \quad (4.23)$$

Uvrstimo li to natrag u izraz (4.18), dobije se

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \varphi \partial_\nu \bar{\varphi} - \partial_\nu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi}}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \bar{\varphi} \partial_\nu \varphi - \partial_\nu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} \quad (4.24)$$

Elektromagnetski tenzor $F_{\mu\nu}$ ćemo, radi čitkijeg zapisa, izraziti uz pokratu

$$g(\varphi, \bar{\varphi}) = -\frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{1}{(1 + \bar{\varphi}\varphi)^2} \quad (4.25)$$

pa je dakle

$$F_{\mu\nu} = -g(\varphi, \bar{\varphi}) (\partial_\mu \bar{\varphi} \partial_\nu \varphi - \partial_\nu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi) \quad (4.26)$$

Rastav elektromagnetskog tenzora na električnu i magnetsku 1-formu smo već proveli u poglavlju 2.1. U sustavu mirovanja opažačice $u^\mu = (1, 0)$ električno i magnetsko polje su

$$E_\mu = (0, F_{10}, F_{20}, F_{30}), \quad B_\mu = (0, F_{23}, F_{31}, F_{12}) \quad (4.27)$$

Uvrstimo to natrag u naš izraz za $F_{\mu\nu}$ (4.26)

$$E^i = E_i = F_{i0} = -g(\varphi, \bar{\varphi}) (\partial_i \bar{\varphi} \partial_0 \varphi - \partial_0 \bar{\varphi} \partial_i \varphi) \quad (4.28)$$

Dakle, vektorski zapisano, slijedi da je električno polje dano izrazom

$$\mathbf{E} = -g(\varphi, \bar{\varphi}) (\nabla \bar{\varphi} \partial_t \varphi - \partial_t \bar{\varphi} \nabla \varphi) \quad (4.29)$$

U izrazu (4.29) se pojavljuje vremenska ovisnost funkcije φ , koja nam nije poznata (jer smo φ konstruirali u $\mathbb{R}^3$), tako da električno polje nećemo računati ovim putem. No, pogledajmo što je s magnetskim poljem, tj. što se dobije uvrštavanjem u (4.26) za magnetsko polje

$$\begin{aligned} B^i &= B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{0i}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_i^{kl} F_{kl} = -\frac{1}{2} \epsilon_i^{kl} g(\varphi, \bar{\varphi}) [\partial_k \bar{\varphi} \partial_l \varphi - \partial_l \bar{\varphi} \partial_k \varphi] = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_i^{kl} g(\varphi, \bar{\varphi}) \cdot 2 \partial_k \bar{\varphi} \partial_l \varphi = -\epsilon_i^{kl} g(\varphi, \bar{\varphi}) \partial_k \bar{\varphi} \partial_l \varphi = -g(\varphi, \bar{\varphi}) (\vec{\nabla} \bar{\varphi} \times \vec{\nabla} \varphi)_i \end{aligned} \quad (4.30)$$

Odnosno, vektorski zapis magnetskog polja $\mathbf{B}$ dan je izrazom

$$\mathbf{B} = -g(\varphi, \bar{\varphi}) \nabla \bar{\varphi} \times \nabla \varphi \quad (4.31)$$

Magnetsko polje možemo izračunati jer su nam poznate prostorne derivacije funkcije φ .

Kako se oblik $\nabla \bar{\varphi} \times \nabla \varphi$ pokazao pogodniji za računanje polja, istim ćemo putem odrediti i električno polje, koristeći pri tome dualni elektromagnetski tenzor $*F_{\mu\nu}$. Dualni elektromagnetski tenzor se dobije povlačenjem 2-forme σ pomoću preslikavanja ϑ , a od tenzora $F_{\mu\nu}$ se razlikuje po zamjeni mjesta električnog i magnetskog polja, tj. njihovih položaja u matrici (vidi 2.22 i 2.25). Dakle, računanjem analognog izraza oblika $\sim \nabla \bar{\vartheta} \times \nabla \vartheta$ dobiti ćemo traženo električno polje.

$$\mathbf{E} = -g(\vartheta, \bar{\vartheta}) \nabla \bar{\vartheta} \times \nabla \vartheta \quad (4.32)$$

Električno i magnetsko polje kao realnu i imaginarnu komponentu elektromagnetskog tenzora F možemo dobiti i preko poopćenog Batemanovog ansatza (2.63), odaberemo li za kompleksne funkcije α i β te funkciju h sljedeće vrijednosti

$$\alpha = 1 + 2 \frac{1 - iy}{r^2 + 1}, \quad \beta = \frac{2(iz - x)}{r^2 + 1}, \quad h = \frac{\sqrt{a}\lambda^2}{\pi} \quad (4.33)$$

Pogodno je raditi u bezdimenzionalnim koordinatama (X, Y, Z, T) , koje se od fizičkih koordinata (x_1, x_2, x_3, t) razlikuju za λ

$$(X, Y, Z, T) = \lambda(x_1, x_2, x_3, t) \quad (4.34)$$

gdje je λ konstanta sa dimenzijom inverzne duljine. Na ovaj smo način, pomoću programskog paketa *Mathematica* izračunali magnetsko i električno polje, te smo dobili sljedeće izraze:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1 + R^2)^3} (2(Y - XZ), -2(X + YZ), -1 - Z^2 + X^2 + Y^2) \quad (4.35)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1 + R^2)^3} (1 + X^2 - Y^2 - Z^2, 2(-Z + XY), 2(Y + XZ)) \quad (4.36)$$

Iz gornjih izraza za $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$, preko relacija $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ i $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C}$, također pomoću *Mathematice*, dobivamo izraze za vektorske potencijale $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) = \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1 + R^2)^2}(Y, -X, -1) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, 0) = \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1 + R^2)^2}(1, -Z, Y) \quad (4.38)$$

4.3 Vremenska evolucija elektromagnetskih čvorova

Za pronaći elektromagnetski čvor definiran u svakom trenutku, iz početnih uvjeta Cauchyve zadaće, koristiti ćemo Fourierovu analizu. Sljedeći postupak iz članka [24] radimo Fourierov rastav vektora $\mathbf{B} + i\mathbf{E}$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + i\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{R}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{R}_2(\mathbf{k})) e^{ik \cdot x} \quad (4.39)$$

gdje je $k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, $\omega^2 = \mathbf{k}^2$, a realni vektori $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ moraju, da bi vrijedile Maxwelllove jednačbe, zadovoljavati sljedeće relacije:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 = 0 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{R}_2 = \omega \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{R}_1 = -\omega \mathbf{R}_2 \quad (4.41)$$

Rastavom na realni i imaginarni dio dobivamo magnetsko i električno polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{R}_1(\mathbf{k}) \cos(k \cdot x) - \mathbf{R}_2(\mathbf{k}) \sin(k \cdot x)) \quad (4.42)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{R}_1(\mathbf{k}) \sin(k \cdot x) + \mathbf{R}_2(\mathbf{k}) \cos(k \cdot x)) \quad (4.43)$$

Vektore $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$ računamo iz početnih uvjeta Cauchyve zadaće elektromagnetskog polja

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{R}_2(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r (\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) + i\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.44)$$

U konačnici se dobije

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}\lambda^2} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} (k_1 k_3, \omega k_3 + k_2 k_3, -\omega k_2 - k_1^2 - k_2^2) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}\lambda^2} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} (\omega k_2 + k_2^2 + k_3^2, -\omega k_1 - k_1 k_2, -k_1 k_3) \quad (4.46)$$

Konačno, upotrebom formula (4.42) i (4.43) dobivamo vremenski ovisno električno i magnetsko polje

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3} (Q\mathbf{H}_1 + P\mathbf{H}_2) \quad (4.47)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3}(Q\mathbf{H}_2 - P\mathbf{H}_1) \quad (4.48)$$

gdje su vrijednosti A, P, Q dane relacijama

$$A = \frac{R^2 - T^2 + 1}{2}, \quad P = T(T^2 - 3A^2), \quad Q = A(A^2 - 3T^2) \quad (4.49)$$

a vektori $\mathbf{H}_1$ i $\mathbf{H}_2$ su

$$\mathbf{H}_1 = \left(Y + T - XZ, -X - (Y + T)Z, \frac{-1 - Z^2 + X^2 + (Y + T)^2}{2} \right) \quad (4.50)$$

$$\mathbf{H}_2 = \left(\frac{1 + X^2 + Z^2 - (Y + T)^2}{2}, -Z + X(Y + T), Y + T + XZ \right) \quad (4.51)$$

Ovakvo rješenje zadovoljava relacije $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ i $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

Direktnom provjerom se vidi da naredne funkcije generiraju gore navedeno vremenski ovisno električno i magnetsko polje (4.47) i (4.48)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{(AX - TZ) + i(AY + T(A - 1))}{(AZ + TX) + i(A(A - 1) - TY)} \quad (4.52)$$

$$\vartheta(\mathbf{r}, t) = \frac{(AY + T(A - 1)) + i(AZ + TX)}{(AX - TZ) + i(A(A - 1) - TY)} \quad (4.53)$$

Zanimati će nas još i gustoća energije

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{a\lambda^4}{4\pi^2} \frac{(1 + X^2 + (Y + T)^2 + Z^2)^2}{(A^2 + T^2)^3} \quad (4.54)$$

Iz gornjeg izraza vidimo da se gustoća energije elektromagnetskog čvora u vremenu smanjuje. Drugim riječima, elektromagnetski čvor se “raspršuje” u vremenu.

4.4 Složeniji elektromagnetski čvorovi

U Hopfovom svežnju svako vlakno je povezan prostor, kružnica $\mathbb{S}^1$, a svaka dva vlakna su ulančana u Hopfov kariku. Želimo li pronaći elektromagnetsko polje koje je složenije od osnovnog Hopf-Raňadinog rješenja, potrebno je nekako zakomplicirati ovu geometrijsku konstrukciju.

- Multiplicitet m preslikavanja $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ je broj povezanih komponenti vlakna $f^{-1}(T)$ iznad točke $T \in \mathbb{S}^2$. Kod Hopf-Raňadinog rješenja očigledno imamo $m = 1$.

Raňada i Trueba [16, 24] su pokazali kako dobiti elektromagnetske čvorove s općenitim multiplicitetom. Osnovna ideja je upotreba “rotiranja” kompleksnih brojeva operacijom

$$\rho_m(z) \equiv |z| \exp(m \operatorname{Arg}(z)) \quad (4.55)$$

za svaki $m \in \mathbb{Z}$. Zamjenom preslikavanja φ, ϑ s

$$\varphi^{(m)} \equiv \rho_m(\varphi), \quad \vartheta^{(m)} \equiv \rho_m(\vartheta) \quad (4.56)$$

dobivamo elektromagnetski čvor izgrađen iz svežnja s projekcijom multipliciteta m . Pripadno električno i magnetsko polje su samo višekratnici osnovnih polja

$$\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4.57)$$

- Elektromagnetski čvorovi s većim brojem ulančavanja su prvi put pronađeni u članku [32]. Ideja je poopćiti Hopf-Raňadino rješenje zapisano u Batemanovom obliku,

$$\mathbf{F} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$$

s potenciranim funkcijama,

$$\mathbf{F} = \nabla \alpha^p \times \nabla \beta^q \quad (4.58)$$

za neke $p, q \in \mathbb{Z}$. Pri tom silnice postaju tzv. (p, q) torusni čvorovi.

4.5 Ulančanost i helicitet elektromagnetskih čvorova

Ulančanost parova silnica električnog ili magnetskog polja Hopf-Raňadinog rješenja dana je brojem ulančavanja, koji je usko povezan s helicitetima promatranog elektromagnetskog polja [23, 24, 31]. Općenito, postoji veza (vidi [24], str. 207) između tzv. *Hopfovog indeksa* n (zapisanog pomoću integrala 3-forme $A \wedge F$ po totalnom prostoru $\mathbb{S}^3$), broja ulančavanja ℓ i multipliciteta m

$$\ell m^2 = n = \int_{\mathbb{S}^3} A \wedge F \quad (4.59)$$

Kod osnovnog Hopf-Raňadinog rješenja imamo $m = 1$ pa je $\ell = n$ a direktnim računom dobijemo $\ell = 1$. Korištenjem formula iz Dodatka E,

$$h_{ee} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, d^3r \quad (4.60)$$

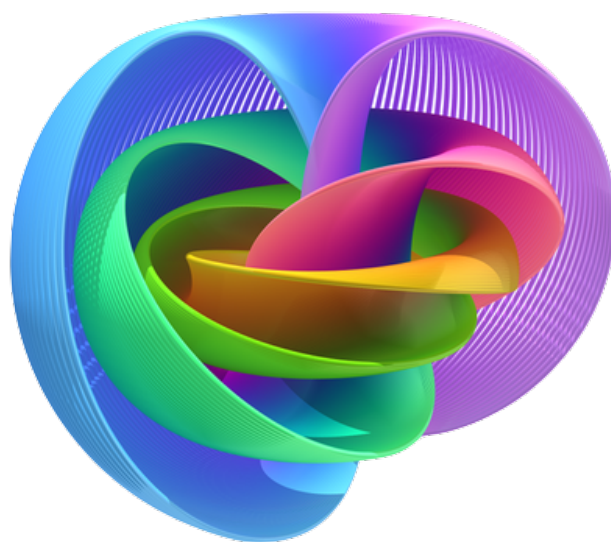
$$h_{mm} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r \quad (4.61)$$

i gore navedenih izraza za električno i magnetsko polje te pripadne baždarne potencijale, dobivamo

$$h_{ee} = a m^2 = h_{mm} \quad (4.62)$$

Jednakost električnog i magnetskog heliciteta ovdje nije iznenađenje, s obzirom da je Hopf-Raňadino rješenje jedan specijalan slučaj Batemanovog rješenja. Ovdje je posebno zanimljivo to što su helicitet i Hopfov indeks dovedeni u direktnu vezu: ove dvije veličine su proporcionalne s dimenzionalnim faktorom a ,

$$h = \frac{1}{2} (h_{ee} + h_{mm}) = an$$



Slika 4.1. Prikaz vlakana u totalnom prostoru Hopfovog svežnja. Možemo primjetiti da su svake dvije kružnice međusobno ulančane.

5 Magnetski monopoli

Magnetski monopol je točkasta čestica koja nosi magnetski naboj i izvor je magnetskog polja na analogan način kao što je točkasti električni naboj izvor električnog polja. U ovom poglavlju ćemo pokazati da se magnetsko polje magnetskog monopola može prikazati pomoću vektorskih potencijala $\mathbf{A}$ koji su lokalno definirani na otvorenim skupovima oko monopola a međusobno se razlikuju do na baždarnu transformaciju. Zahtjev konzistentnosti baždarne transformacije rezultira izrazom koji povezuje električni i magnetski naboj, tzv. Diracovim kvantizacijskim uvjetom koji povezuje postojanje magnetskih monopola i kvantiziranost električnog naboja. Polje i baždarni potencijal monopola izraziti ćemo i jezikom diferencijalnih formi, te pokazati da se fizika magnetskog monopola može matematički prikazati Hopfovим svežnjem.

5.1 Magnetsko i baždarno polje magnetskog monopola

Kao što smo već naveli u 2. poglavlju, Maxwelllova jednadžba $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (2.7) dopušta izražavanje magnetskog polja pomoću vektorskog potencijala $\mathbf{A}$ (2.39), budući da je divergencija rotora nula

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (5.1)$$

Pogledajmo bi li ovakav zapis bio zadovoljen u slučaju postojanja magnetskog monopola. Polje magnetskog monopola u ishodištu dano je izrazom

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \frac{g}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.2)$$

gdje smo uveli pokratu $k_m \equiv \mu_0/4\pi$. Uvrštavanjem ovog izraza u (2.7) dobijemo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (5.3)$$

Za $r > 0$ divergencija je stvarno nula, no problem nastaje u točki u kojoj se nalazi monopol, za $r = 0$. Integriranjem po kugli $\mathcal{K}$ radijusa R te korištenjem Gaussovog teorema za prijelaz na integral po rubnoj sferi $\mathcal{S} = \partial\mathcal{K}$ dobivamo

$$\int_{\mathcal{K}} (\nabla \cdot \mathbf{B}) d\tau = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = k_m \frac{g}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k_m g = \mu_0 g \quad (5.4)$$

Sve skupa dakle možemo zapisati

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 g \delta(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

S druge strane, upotrebom magnetskog potencijala i integracijom po rubnoj sferi $\mathcal{S}$ dobije se

$$4\pi k_m g = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.6)$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je rub sfere $\partial\mathcal{S}$ prazan skup. Nekonzistentnost nastaje zbog toga što je u prethodnom izrazu pretpostavljeno da postoji globalno definirano vektorsko magnetsko polje $\mathbf{A}$ koje možemo bez problema integrirati po sferi $\mathcal{S}$.

Problem se može jednostavnije pristupiti izrazimo li magnetsko polje $\mathbf{B}$ i potencijal $\mathbf{A}$ preko sfernih koordinata. Zapišimo prvo izraz za rotor općenitog vektora $\mathbf{v}$ u sfernim koordinatama

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Izrazimo li magnetsko polje $\mathbf{B}$ preko ovog zapisa, dobijemo

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (\sin \theta A_\phi) - \partial_\phi A_\theta) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi A_r - \partial_r (r A_\phi) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ & + \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\quad (5.8)$$

Kako je $\mathbf{B}$ proporcionalan samo s $\hat{\mathbf{r}}$, vrijedi da je

$$\frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0 \quad (5.9)$$

Vidimo da je jedan konzistentan odabir komponenti

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\phi = A_\phi(r, \theta) \quad (5.10)$$

Uvrštavanjem ovakvog odabira u izraz za dio polja u $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ smjeru u relaciji (5.8), koje je također nula, dobijemo

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi A_r - \partial_r (r A_\phi) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{r} (-\partial_r (r A_\phi)) \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad (5.11)$$

Iz gornjeg izraza vidimo da je $\partial_r (r A_\phi) = 0$, odnosno da $r A_\phi$ nema ovisnosti o r . Dakle, možemo zaključiti da je ovisnost isključivo o kutu $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pa pišemo

$$r A_\phi = f(\theta) \Rightarrow A_\phi = \frac{f(\theta)}{r} \quad (5.12)$$

Vratimo li to u izraz za magnetsko polje (5.8) i izjednačimo li sve skupa sa poljem magnetskog monopola (5.2), dobijemo

$$\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta \left(\sin \theta \frac{f(\theta)}{r} \right) = k_m \frac{g}{r^2} \quad (5.13)$$

Uređivanjem ovog izraza dobije se

$$\partial_\theta (f(\theta) \sin \theta) = k_m g \sin \theta \quad (5.14)$$

Integriranjem posljednje jednakosti slijedi da je

$$f(\theta) \sin \theta = -k_m g \cos \theta + C \quad (5.15)$$

Za određivanje konstante C pozivamo se na jednadžbu (2.39)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.16)$$

koja povezuje integrale po plohi S i njenom rubu ∂S . Integraciju ćemo provesti u dva slučaja: za plohu integracije ćemo prvo koristiti gornju polusferu S_+ , pa donju polusferu S_- . U oba slučaja krivulja $C = \partial S$ je “ekvator”, kružnica u $\theta = \pi/2$ ravnini.

a) Pretpostavimo li da je $\mathbf{A}$ nesingularno na $0 \leq \theta \leq \pi/2$, imamo

$$A_\phi \cdot 2\pi R = k_m \frac{g}{R^2} \cdot 2\pi R^2 \quad (5.17)$$

Znamo da je $A_\phi = f_+(\theta)/r$, pa je

$$A_\phi(r = R, \theta) = \frac{f_+(\theta)}{R} \quad (5.18)$$

Uvrstimo li to u (5.17), slijedi

$$\frac{f_+(\theta)}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi k_m g \quad (5.19)$$

odnosno, uz $\theta = \pi/2$ smo dobili da je funkcija f_+ dana izrazom

$$f_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = k_m g \quad (5.20)$$

Ovu ćemo relaciju upotrijebiti za određivanje konstante, koristeći prethodno dobijen izraz

$$f(\theta) \sin \theta = -k_m g \cos \theta + C \quad (5.21)$$

Uvrštavanjem $\theta = \pi/2$ u izraz (5.21) konačno se dobije

$$C_+ = f_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = k_m g \quad (5.22)$$

b) Ako pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ nesingularno za $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, smjer integracijske krivulje je tada obrnut, pa vrijedi

$$-A_\phi \cdot 2\pi R = k_m \frac{g}{R^2} \cdot 2\pi R^2 \quad (5.23)$$

Kako je $A_\phi = f_-(\theta)/r$, slijedi

$$A_\phi(r = R, \theta) = \frac{f_-(\theta)}{R} \quad (5.24)$$

Kada to uvrstimo u (5.23), uz $\theta = \pi/2$, dobije se

$$f_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k_m g \quad (5.25)$$

Konstantu opet računamo pomoću relacije (5.21), uvrštavanjem u koju se dobije da je

$$C_- = f_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k_m g \quad (5.26)$$

U konačnici oba rezultata možemo zapisati ovako

$$f_{\pm}(\theta) \sin \theta = -k_m g \cos \theta \pm k_m g = \pm k_m g (1 \mp \cos \theta) \quad (5.27)$$

$$f_{\pm}(\theta) = \pm k_m g \frac{1 \mp \cos \theta}{\sin \theta} \quad (5.28)$$

Uvrstimo li ovaj izraz za $f_{\pm}(\theta)$ u prethodno navedeni odabir (5.10)

$$A_{\phi}(r, \theta) = \frac{f(\theta)}{r}, \quad A_r = 0, \quad A_{\theta} = 0 \quad (5.29)$$

dobijemo izraz za magnetski potencijal

$$\mathbf{A}_{\pm}(r, \theta) = \pm k_m g \frac{1 \mp \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (5.30)$$

Sad vidimo pozadinu prethodno spomenute nekonzistentnosti - ispravno integriranje valja zasebno napraviti na svakoj od polusfera s pripadnim nesingularnim dijelom vektorskog potencijala $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} &= \int_{S_+} (\nabla \times \mathbf{A}_+) \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_-} (\nabla \times \mathbf{A}_-) \cdot d\mathbf{a} = \\ &= \int_C \mathbf{A}_+ \cdot d\mathbf{l} - \int_C \mathbf{A}_- \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Linijski element u sfernim koordinatama je općenito

$$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (5.32)$$

U našem slučaju se integracija vrši po kružnici u ekvatorijalnoj ravnini, dakle r je konstanta, $\theta = \pi/2$, pa je onda linijski element

$$d\mathbf{l} = 0 + 0 + R \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot d\phi \hat{\phi} = R d\phi \hat{\phi} \quad (5.33)$$

Ostaje nam uvrstiti dobiveni $d\mathbf{l}$ u (5.31)

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_C (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \left(f_+\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_-\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot R d\phi = \\ &= (k_m g + k_m g) \phi \Big|_0^{2\pi} = 2k_m g \cdot 2\pi = 4\pi k_m g \end{aligned} \quad (5.34)$$

Vidimo da uz ovako zadan magnetski potencijal $\mathbf{A}$ integriranje daje točan rezultat, u skladu s relacijom (5.4).

Pogledajmo kako izgleda razlika $\mathbf{A}_+$ i $\mathbf{A}_-$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- &= k_m g \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} - (-) k_m g \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} = \\ &= \frac{k_m g}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta) \hat{\phi} = \frac{2k_m g}{r \sin \theta} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (5.35)$$

U gornjem izrazu prepoznamo gradijent. Pogledajmo prvo kako je zadan gradijent u sfernom koordinatnom sustavu neke općenite skalarne funkcije T

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.36)$$

Kada je $T = \phi$ imamo da je

$$\nabla \phi = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.37)$$

Uvrstimo li to u (5.35), dobijemo da je

$$\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- = 2k_m g \nabla \phi \quad (5.38)$$

Dakle, polja $\mathbf{A}_+$ i $\mathbf{A}_-$ razlikuju se do na baždarnu transformaciju

$$\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_- + \nabla \lambda, \quad \lambda = 2k_m g \phi \quad (5.39)$$

5.2 Magnetski monopol i kvantizacija naboja

Neka je ψ valna funkcija fermiona mase m i naboja q , opisanog Diracovim Lagranžijanom

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \quad (5.40)$$

Kod lokalne baždarne simetrije zahtjevamo da Lagranžijan bude invarijantan na transformaciju

$$\psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi \quad (5.41)$$

Parametar transformacije θ možemo zamijeniti parametrom λ

$$\lambda(x) = -\frac{\hbar c}{q} \theta(x) \quad (5.42)$$

pa se transformacija derivacije polja može zapisati na sljedeći način

$$\partial_\mu \psi \rightarrow e^{-iq\lambda/\hbar c} \left(\partial_\mu - i \frac{q}{\hbar c} (\partial_\mu \lambda) \right) \psi \quad (5.43)$$

Vidimo da se derivacijom polja dobio dodatni član. Međutim, ako u Lagranžijanu svaku derivaciju zamijenimo s kovarijantnom derivacijom $\mathcal{D}_\mu$

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \quad (5.44)$$

gdje se baždarno polje A_μ transformira prema $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$, svi će se dodatni članovi poništiti i Lagranžijan će uistinu biti invarijantan.

U sustavu jedinica u kojem je $c = 1$, baždarna transformacija je oblika

$$\psi \rightarrow \exp \left(-\frac{iq\lambda}{\hbar} \right) \psi \quad (5.45)$$

U našem slučaju, na dijelu prostora u kojem je baždarno polje $A_{\pm}$ imamo pripadnu valnu funkciju $\psi_{\pm}$, te su valne funkcije vezane gore navedenom baždarnom transformacijom

$$\psi_+ = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\lambda\right)\psi_- \quad (5.46)$$

Uvrstimo li λ iz izraza (5.39), dobije se

$$\psi_+ = \exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}\phi\right)\psi_- \quad (5.47)$$

Za $\phi = 0$ vrijedi jednakost

$$\psi_+(\phi = 0) = \exp(0)\psi_- = \psi_-(\phi = 0) \quad (5.48)$$

Nadalje, mora vrijediti i

$$\psi_+(\phi = 2\pi) = \psi_+(\phi = 0) \quad (5.49)$$

$$\psi_-(\phi = 2\pi) = \psi_-(\phi = 0) \quad (5.50)$$

Raspišimo sada relaciju između valnih funkcija koristeći gornje relacije

$$\begin{aligned} \psi_+(\phi = 2\pi) &= \exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}2\pi\right)\psi_-(\phi = 2\pi) = \\ &= \exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}2\pi\right)\psi_-(\phi = 0) = \\ &= \exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}2\pi\right)\psi_+(\phi = 0) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Dakle, dobili smo

$$\psi_+(\phi = 0) = \psi_+(\phi = 2\pi) = \exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}2\pi\right)\psi_+(\phi = 0) \quad (5.52)$$

odakle slijedi da je

$$\exp\left(-i\frac{2qk_m g}{\hbar}2\pi\right) = 1 \quad (5.53)$$

pa u konačnici možemo pisati

$$\frac{2qk_m g}{\hbar} = n \in \mathbb{Z} \quad (5.54)$$

Dobiveni uvjet možemo interpretirati kao kvantizaciju električnog naboja

$$q = \frac{\hbar}{2k_m g}n = \frac{h}{\mu_0 g}n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.55)$$

Drugim riječima, samo postojanje magnetskih monopola bi bilo dovoljno za teorijsko objašnjenje kvantiziranosti električnog naboja.

5.3 Magnetski monopol u formalizmu diferencijalnih formi

Sada ćemo analizirati magnetsko polje magnetskog monopola,

$$\mathbf{B}(r) = B(r) \hat{\mathbf{r}} = B^r \mathbf{e}_{(r)} \quad (5.56)$$

u formalizmu diferencijalnih formi. Koristimo sferni koordinatni sustav u kojem metrika Minkowskog ima naredne komponente

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Računanjem vidimo da su kovarijantna i kontravarijantna komponenta jednake

$$B_r = \eta_{r\mu} B^\mu = \eta_{rr} B^r = B^r \quad (5.58)$$

odnosno, drugim riječima, magnetsko polje kao 1-forma je $B = B(r)dr$. Uvrstimo li to u relaciju (2.13)

$$F = u \wedge E + *(u \wedge B) \quad (5.59)$$

gdje je sada električno polje $E = 0$, a 4-vektor opažačice je $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, tj. $u_\mu = (-1, \mathbf{0})$, dobije se

$$F = *(u \wedge B) = *(-dt \wedge B(r)dr) = -B(r) * (dt \wedge dr) \quad (5.60)$$

Izračunajmo sada Hodgeov dual 2-forme $dt \wedge dr$. Identitet (C.14) za $\alpha = \beta$ svodi se na

$$\alpha \wedge *\alpha = \frac{\sqrt{|\eta|}}{p!} (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \alpha^{\mu_1 \dots \mu_p}) dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\phi \quad (5.61)$$

Uvrstimo sada $\alpha = dt \wedge dr$. Determinanta metrike Minkowskog u sfernom koordinatnom sustavu je

$$|\eta| = |-1 \cdot 1 \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta| = |r^4 \sin^2 \theta| \Rightarrow \sqrt{|\eta|} = r^2 \sin \theta \quad (5.62)$$

Relacija (5.61) nam daje

$$\begin{aligned} dt \wedge dr \wedge *(dt \wedge dr) &= \eta^{tt} \eta^{rr} r^2 \sin \theta dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\phi = \\ &= -r^2 \sin \theta dt \wedge dr \wedge d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (5.63)$$

Usporedimo li lijevu i desnu stranu dobivene jednakosti, možemo primjetiti da je

$$*(dt \wedge dr) = -r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (5.64)$$

Uvrstimo dobiveni rezultat natrag u izraz (5.60)

$$F = -B(r) * (dt \wedge dr) = k_m g \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (5.65)$$

Dobiveni izraz možemo zapisati i na sljedeći način

$$F = k_m g \sin \theta d\theta \wedge d\phi = d(-k_m g \cos \theta d\phi) \quad (5.66)$$

gdje u derivaciji prepoznavamo baždarni potencijal A zadan relacijom $F = dA$. Konkretno, baždarna 1-forma je oblika

$$A = -k_m g \cos \theta d\phi + d\lambda \quad (5.67)$$

gdje λ predstavlja baždarnu slobodu u izboru, budući je $dd\lambda = 0$. Usporedbom s ranije dobivenim baždarnim potencijalima (5.30) možemo pisati

$$A_{\pm} = \pm k_m g (1 \mp \cos \theta) d\phi \quad (5.68)$$

5.4 Svežanj u pozadini magnetskog monopola

Kako bismo magnetski monopol doveli u vezu s Hopfovим svežnjem, valja prvo prevesti gornje razmatranje vektorskog potencijala i baždarnih transformacija u formalni jezik svežnjeva. Na ovu vezu je prvi ukazao Trautman [7], dok su detalje razradili Minami [8] i Ryder [9].

Fizikalni prostor u kojem je definirano polje magnetskog monopola je Euklidski prostor $\mathbb{R}^3$ bez ishodišta (u kojem je smješten monopol). Na ovom prostoru želimo prikazati baždarne slobode koje su nam na “raspolaganju” kod primjene principa lokalne baždarne invarijantnosti. Stoga, prirodno je za baznu mnogostrukost odabrati $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Međutim, valja uočiti da je ovu mnogostrukost moguće neprekidnim preslikavanjem

$$H : [0, 1] \times M \rightarrow M, \quad H(t, \mathbf{r}) = (1 - t)\mathbf{r} + \frac{t}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}$$

deformirati u jediničnu sferu $\mathbb{S}^2$. Stoga, jednostavnosti radi (vidi teorem 9.1 u [27]), ekvivalentno možemo za baznu mnogostrukost odabrati sferu $\mathbb{S}^2$. Ovu sferu ćemo pokriti s dva otvorena skupa,

$$O_+ = \mathbb{S}^2 - S, \quad O_- = \mathbb{S}^2 - N$$

gdje su N i S , redom, sjeverni i južni pol. Elektromagnetsko polje je $U(1)$ baždarna interakcija, što znači da će vlakno svežnja biti Liejeva grupa $U(1)$, homeomorfna s kružnicom $\mathbb{S}^1$. Lokalne trivijalizacije svežnja možemo zapisati s

$$O_+ \times U(1) = \{((\theta, \phi), e^{i\alpha_+}) \mid \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi], \alpha_+ \in [0, 2\pi]\} \quad (5.69)$$

$$O_- \times U(1) = \{((\theta, \phi), e^{i\alpha_-}) \mid \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi], \alpha_- \in [0, 2\pi]\} \quad (5.70)$$

Spajanje vlakana u svežnju zadano je strukturnom grupom koja je ovdje opet grupa $U(1)$ (kružnice međusobno spajamo pomoću rotacija). Primjetimo, ovdje imamo strukturnu grupu jednaku vlaknu pa je posrijedi glavni svežanj $P(\mathbb{S}^2, U(1))$. Time smo uspostavili geometrijsku vezu između Hopfovog svežnja i svežnja baždarnog polja magnetskog monopola.

Diracov argument kvantizacije električnog naboja povezan je s prvim Chernovim brojem, jednom od topoloških invarijanti koje karakteriziraju sveženjeve,

$$C_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{F} \in \mathbb{Z} \quad (5.71)$$

pri čemu je $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ te $\mathcal{A} = i(q/\hbar)A$. Uvrštavanjem ranije izvedenih izraza za baždarne potencijale dobivamo

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{F} = \frac{i}{2\pi} \left(\int_{S_+} d\mathcal{A}_+ + \int_{S_-} d\mathcal{A}_- \right) = \frac{i}{2\pi} \left(\int_{\partial S_+} \mathcal{A}_+ + \int_{\partial S_-} \mathcal{A}_- \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} (\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-) = \frac{i}{2\pi} \frac{iq}{\hbar} 2k_m g \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{2k_m q g}{\hbar} \end{aligned} \quad (5.72)$$

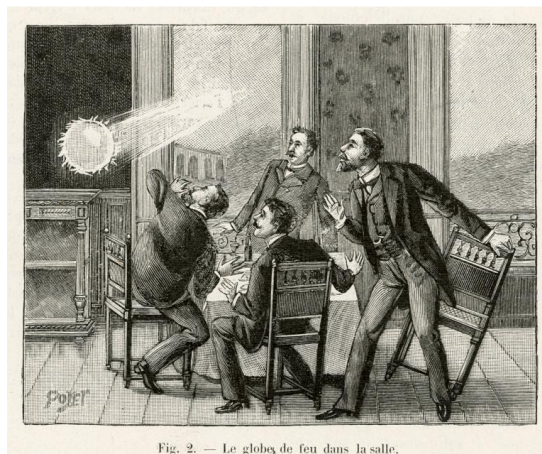
Ovaj račun nam daje uvid u topološku pozadinu kvantizacije električnog naboja.

6 Eksperimentalne potrage

U ovom poglavlju ćemo dati kratak pregled eksperimentalnih potraga za magnetskim monopolima, pokušaj povezivanja elektromagnetskih čvorova s opaženim pojavama u prirodi i jedan prijedlog generiranja elektromagnetskih čvorova u laboratorijskim uvjetima.

6.1 Elektromagnetski čvorovi u laboratoriju

Kuglaste munje su elektromagnetski čvorovi? Kuglaste munje [17, 21, 22, 28] su rijedak, ali dobro dokumentiran meteorološki fenomen. Najčešće su opisane kao električni izboj (neki oblik plazme) sfernog ili elipsoidnog oblika koji se ponekad javlja za olujnog vremena, obično u neposrednoj blizini tla. Tipično su promjera između 10 cm i 1 m, horizontalne brzine od nekoliko metara u sekundi, s vremenima života u rasponu od 1 do 10 s. Opažene su u nekoliko boja: bijeloj, žutoj, crvenoj, ljubičastoj i zelenoj. Unatoč brojnim pokušajima preciznog teorijskog objašnjenja kuglastih munja i njihovog formiranja, do sada nisu proizvedene u laboratoriju.



Slika 6.1: Dva prikaza kuglastih munja na ilustracijama na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće.

Rañada i Trueba [17, 22, 28] su predložili objašnjenje kuglastih munja pomoću elektromagnetskih čvorova. Njihov prijedlog je da bi elektromagnetski čvor formiran za vrijeme udara munje, kad je zrak ioniziran a temperatura jako visoka, prvo zračio energiju u skladu sa Stefan-Boltzmannovim zakonom. Dok god je plazma dovoljno vruća vrijedi pretpostavka o idealnoj vodljivosti, što povlači za sobom očuvanje magnetskog heliciteta, odnosno priječi rasap kuglaste munje. No, zbog spomenutog isijavanja energije dolazi do smanjenja temperature i vodljivosti, dakle prestaje očuvanje heliciteta što dovodi do rastakanja strukture kuglaste munje.

Međutim, s obzirom na nedavno opažanje grupe kineskih meteorologa [33] ovo objašnjenje uzroka kuglastih munja vjerojatno nije točno. Spomenuta je grupa meteorologa

vršila spektralna istraživanja kod munja koje se javljaju u direktnoj blizini tla, prilikom tih mjerenja spontano se dogodio električni izboj koji je prepoznat kao kuglasta munja. Događaj je detaljno zabilježen i analiziran, te su tokom cijelog trajanja kuglaste munje opažene emisijske linije silicija, željeza i kalcija, koji čine glavne komponente tla. Ovakav rezultat snažno upućuje na to da kuglaste munje nastaju udarom munje u tlo. Ovo je objašnjenje u skladu sa Abrahamson-Dinnissovom teorijom [21] da se, prilikom udara munje u tlo, kemijska energija pohrani u nanočestice Si, SiO ili SiC koji se onda rasprše u zraku. Prilikom postupne oksidacije dolazi do emisije pohranjene energije u obliku topline i svjetlosti. Abrahamson i Dinniss [21] su obavili eksperiment gdje su uzorke tla izlagali električnim izbojima, što je produciralo nanočestice koje su oksidirale brzinama koje su u skladu s vremenima života kuglastih munja.

Laboratorijska priprema elektromagnetskih čvorova. Irvine i Bouwmeester [30] su dali prijedlog kako ostvariti elektromagnetske čvorove u laboratoriju pomoću lasera. Oni su Hopf-Raňadina elektromagnetska polja izrazili u bazi vektorskih sfernih harmonika i dobili jednostavan zapis gdje je Hopfovo polje superpozicija dva vektorska sferna harmonika koja odgovaraju jednom multipolu $\ell = m = 1$. Ova superpozicija je tzv. Chandrasekhar-Kendalovo stanje, vlastito stanje rotora $\nabla \times$. Činjenica da Hopf-Raňadina polja čine Chandrasekhar-Kendall vlastita stanja sa samo jednom vrijednosti ℓ i m uputila ih je na prijedlog uporabe zraka Laguerre-Gaussovog tipa. Gaussove zrake su zrake monokromatskog elektromagnetskog zračenja (obično proizvedenog u laserima) gdje je profil amplituda magnet-skog i električnog polja dan Gaussovom krivuljom. Laguerre-Gaussovi modovi koriste se u modeliranju laserskih zraka čiji profil posjeduje osnu simetriju, pa je prirodan odabir cilindričnog koordinatnog sustava u kojem se javljaju Laguerrovi polinomi. Irvine i Bouwmeester su naveli kako jako fokusirana Laguerre-Gaussova zraka nultog reda sa kružnom polarizacijom konvergira čistom $\ell = m = 1$ multipolnom polju kada se kut fokusiranja povećava prema 90 stupnjeva. To znači da bi se eksperimentalna realizacija elektromagnetskih čvorova mogla dobiti koristeći kružno polariziranu pulsnu zraku koju bi trebalo jako fokusirati. Oblik pulsa i profil zrake bi se dodatno mogao kontrolirati svjetlosnim modulatorom, koristeći holografske tehnike. Kružne putanje koje bi svjetlost formirala distorzirale bi se tijekom vremena, no moguće je da bi ostale stabilne u specijalnim uvjetima kad svjetlost umjesto kroz zrak prolazi kroz plazmu.

6.2 Potraga za magnetskim monopolima

Prema dosadašnjim saznanjima, ako i postoje u prirodi, magnetski monopoli su iznimno rijetki [29]. Brojnost magnetskih monopola možemo ograničiti indirektnim procjenama i direktnim mjerenjima. Dva najpoznatija indirektna ograničenja dolaze od kozmoloških mjerenja (potencijalni udio monopola u tamnoj materiji) i opažanja magnetskih polja galaksija (Parkerova granica). Direktna opažanja koriste elektromagnetsku indukciju i pro-

matranje raspada elementarnih čestica u različitim sudarima.

- Takozvana kozmička međa proizlazi iz zahtjeva da masena gustoća magnetskih monopola bude manja od opažene kritične gustoće svemira. Uz pretpostavku da je prostorna raspodjela monopola u svemiru homogena, kozmička međa daje ograničenje na tok F magnetskih monopola

$$F < F_{\text{uniform}} \sim 10^{-12} (m/10^{17} \text{ GeV}) \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

- Parkerova međa slijedi iz razmatranja magnetskog polja naše galaksije, koje iznosi otprilike 0.3 nT te za razliku od Zemljinog magnetskog polja nije usmjereno, već uglavnom nasumično. To magnetsko polje posljedica je dinamo efekta, gdje rotacija galaksije inducira manje struje. Dinamo efekt odgovoran je i za obnavljanje tih struja koje se događa na vremenskoj skali perioda rotacije galaksije, otprilike 10^8 godina. Magnetski monopol koji bi prolazio domenom ovog magnetskog polja iskusio bi određeno ubrzanje te bi dobio energiju, što nam daje procjenu na brzinu disipacije magnetskog polja. Iz uvjeta da ta brzina rasapa mora biti manja od prethodno spomenutog perioda obnove u iznosu od 10^8 godina, slijedi Parkerova međa

$$F < F_{\text{Parker}} \sim 10^{-15} (m/10^{17} \text{ GeV}) \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Uzimajući u obzir neke nove faktore [15,19], Parkerova međa je naknadno poboljšana i iznosi

$$F < F_{\text{Parker, stroga}} \sim 10^{-16} (m/10^{17} \text{ GeV}) \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$$

Nadalje, ovdje ćemo izdvojiti najznačajnija sustavna direktna opažanja monopola.

- Eksperimentalna grupa na čelu s P.B.Priceom [6] je 1975. godine promatrala kozmičke zrake i među signalima jedan interpretirala kao prolaz magnetskog monopola. Međutim, Alvarez [5] je ustvrdio kako je posrijedi bio pogrešno interpretiran raspad jezgre atoma platine.
- Cabrera [10] je 1982. godine konstruirao uređaj za mjerenje struje koju bi magnetski monopol inducirao prolaskom kroz supravodljivu petlju. Primjenom ove metode opažen je jedan događaj ("Valentine's day monopole"), ali je on kontroverzan jer to opažanje nije nikad više reproducirano.
- Rezultati s CDF (*Collider Detector at Fermilab*) kolaboracije na Tevatronu iz 2005. godine (za detalje vidi [29]) daju gornju granicu na udarni presjek generiranja magnetskih monopola (spina 1/2 i mase između 200 i 700 GeV-a) ispod 0.2 pb sa sigurnošću od 95%.
- Jedna od trenutnih potraga za monopolima i dionima (česticama koje bi nosile i električni i magnetski naboj) odvija se u sklopu MoEDAL eksperimenta na LHC-u, promatranjem tragova na specijalnim plastičnim oplatama na zidovima LHCb VELO detektora.

7 Zaključak

U ovom radu smo detaljno analizirali dva fizikalna primjera u kojima Hopfov svežanj igra važnu ulogu: elektromagnetske čvorove i magnetski monopol. Hopfov svežanj je geometrijski objekt u kojem je svakoj točki 2-sfere pridružena kružnica, a sve te kružnice u potpunosti ispunjavaju 3-sferu. Iako je ovakvu konstrukciju teško zorno predočiti, upotrebom stereografskih projekcija možemo dobiti jasniji uvid u izgled Hopfovog svežnja.

Kod elektromagnetskih čvorova Hopfov svežanj direktno upotrebljavamo u konstrukciji topološki netrivialnog rješenja vakuumskih Maxwellovih jednadžbi. U Hopf-Raňadinom elektromagnetskom polju silnice električnog i magnetskog polja su kružnice povezane u parovima u Hopfov kariku. U zadnjih nekoliko godina pojavila su se nova rješenja Maxwellovih jednadžbi u kojima su silnice još složeniji čvorovi. Iako eksperimentalna konstrukcija ovakvih polja zasada nije ostvarena, očekuje se kako bi neki od prijedloga njihove realizacije mogli u bliskoj budućnosti uroditi plodom. S druge strane, kod magnetskog monopola Hopfov svežanj se pojavljuje implicitno, u strukturi njegovog baždarnog polja. Naime, osnovna primjena svežnjeva u fizici je formalan opis baždarnih polja u prostoru. Na ovom primjeru uviđamo važnost topologije u fizikalnim zaključcima, među kojima je istaknut onaj koji povezuje samo postojanje magnetskih monopola i kvantizaciju električnog naboja. Nažalost, temeljite i dugotrajne eksperimentalne potrage za magnetskim monopolima do danas su dale samo ograničenja na njihovu brojnost u svemiru.

Osim ovdje obrađenih primjera, na Hopfov svežanj nailazimo i kod niza drugih fizikalnih fenomena [26], među kojima možemo izdvojiti običan dvodimenzionalan izotropan klasični harmonički oscilator i jednostavan kvantni sustav s dva stanja. Složeniji slučaj Hopfovog svežnja, $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^4$, povezan je s tzv. BPST instantonom. Međutim, i dalje ostaje otvoreno pitanje ima li preostali Hopfov svežnj, $\mathbb{S}^7 \hookrightarrow \mathbb{S}^{15} \rightarrow \mathbb{S}^8$, ikakvu primjenu u fizici.

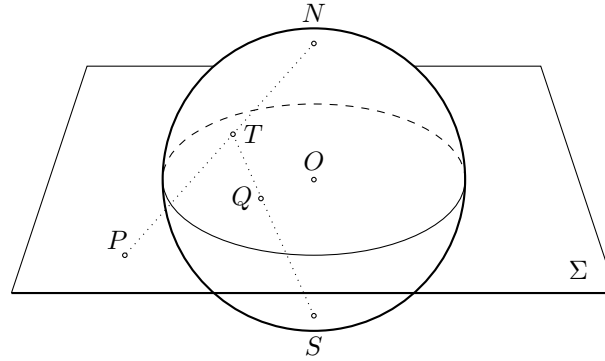
Dodaci

Dodatak A Stereografska projekcija

Stereografske projekcije su uobičajen alat zadavanja lokalnih koordinata na sferama. Neka je $n \in \mathbb{N}$, a $\mathbb{S}^n$ jedinična n -dimenzionalna sfera smještena u Euklidski prostor $\mathbb{R}^{n+1}$, sa središtem u ishodištu O . U prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ ćemo koristiti Kartezijev koordinatni sustav

$$\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

Mi ćemo razmotriti stereografske projekcije u ravninu Σ , definiranu s $x_{n+1} = 0$, s obzirom na sjeverni pol $N(0, 0, \dots, 0, 1)$ i južni pol $S(0, 0, \dots, 0, -1)$. Točke čije koordinate želimo povezati su $T \in \mathbb{S}^n$, $P = \Sigma \cap NT$ i $Q = \Sigma \cap ST$, shematski prikazane na crtežu ispod.



Slika A.1. Shematski prikaz stereografske projekcije.

Projekcije iz sjevernog pola

Neka je zadana točka $T(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, pri čemu vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \quad (\text{A.1})$$

Do projekcije P dolazimo spuštajući se duž pravca na kojem leže točke N i T , pomičemo se za iznos t sve dok taj pravac ne presiječe ravninu $\mathbb{R}^n$, jer za točku P važi $x_{n+1}(P) = 0$. Vektorski to možemo zapisati ovako

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + t \cdot \overrightarrow{NT}$$

$$\overrightarrow{NT} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} - 1)$$

Uvrštavanjem donjeg izraza u gornji dobije se

$$P(tx_1, tx_2, \dots, tx_n, t(x_{n+1} - 1) + 1) \quad (\text{A.2})$$

Iz zahtjeva da je $x_{n+1}(P) = 0$ slijedi da je

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}} \quad (\text{A.3})$$

Dakle za koordinate projicirane točke P dobijemo

$$P\left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}, 0\right) \quad (\text{A.4})$$

Pogledajmo kako izgleda proces u obratnom smjeru, kada su nam poznate koordinate projicirane točke $P(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n$, a želimo saznati koordinate točke T na sferi $\mathbb{S}^n$. U ovom slučaju imamo naredni vektorski zapis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PN} \\ \overrightarrow{PN} &= (-x_1, -x_2, \dots, -x_n, 1) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem se dobije

$$\overrightarrow{OT} = (x_1 - tx_1, x_2 - tx_2, \dots, x_n - tx_n, t) \quad (\text{A.5})$$

S obzirom da je tražena točka T na jediničnoj kružnici, suma kvadrata njenih koordinata mora biti 1

$$\begin{aligned} (x_1(1-t))^2 + (x_2(1-t))^2 + \dots + (x_n(1-t))^2 + t^2 &= 1 \\ (1-t)^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + t^2 &= 1 \end{aligned}$$

Možemo uvesti pokratu ρ za udaljenost P od ishodišta O : $\rho \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, uz tu pokratu se naš izraz svodi na kvadratnu jednadžbu

$$(1 + \rho^2)t^2 - 2\rho^2 t + \rho^2 - 1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Jedno od rješenja ove jednadžbe je $t_+ = 1$ koje odgovara situaciji kad je točka T upravo sjeverni pol N , a ono pravo rješenje, koje odgovara točki T , je

$$t_- = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \quad (\text{A.7})$$

Uvrštavanjem dobivenog t u izraz za $\overrightarrow{OT}$ dobili smo tražene koordinate točke T

$$T\left(\frac{2x_1}{\rho^2 + 1}, \frac{2x_2}{\rho^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\rho^2 + 1}, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}\right) \quad (\text{A.8})$$

Projekcije iz južnog pola

Za zadanu točku T , postupak dobivanja njene projekcije Q iz južnog pola posve je analogan dobivanju projekcije iz sjevernog pola.

$$Q\left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}, 0\right) \quad (\text{A.9})$$

U obrnutom slučaju, kada iz zadane projekcije Q tražimo T , dobije se da su njene koordinate

$$T\left(\frac{2x_1}{\rho'^2 + 1}, \frac{2x_2}{\rho'^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\rho'^2 + 1}, \frac{1 - \rho'^2}{1 + \rho'^2}\right) \quad (\text{A.10})$$

gdje $\rho' \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ opet odgovara udaljenosti projekcije Q od ishodišta O .

Dodatak B Mnogostrukosti i tenzori

Definicija B.1. Topološki prostor je uređen par $(X, \mathcal{T})$ skupa X i familije podskupova $\mathcal{T}$ skupa X , takve da sadrži

- prazan skup $\emptyset \in \mathcal{T}$ i cijeli skup $X \in \mathcal{T}$,
- svaku uniju proizvoljnog broja svojih elemenata,

$$(\forall \{O_\alpha\} \subseteq \mathcal{T}) \quad \bigcup_{\alpha} O_\alpha \in \mathcal{T}$$

- svaki presjek konačno mnogo svojih elemenata,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \{O_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}) \quad \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$$

Kažemo da smo s familijom $\mathcal{T}$ zadali topologiju na skupu X .

Jednom kad smo na skupu X definirali topološki prostor, skupove O iz familije $\mathcal{T}$ zovemo **otvoreni skupovi**. Njihove komplemente, skupove oblika $X - O$, zovemo **zatvoreni skupovi**.

Definicija B.2. Okolina točke $a \in X$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ je svaki otvoren skup $O \in \mathcal{T}$ koji sadrži točku a . Kako bi naglasili da je otvoren skup O okolina točke a koristimo oznaku O_a .

Definicija B.3. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. **Baza** topologije $\mathcal{T}$ je familija skupova $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, takva da

- (a) za svaku točku $a \in X$ postoji okolina $B_a \in \mathcal{B}$
- (b) za svaka dva skupa $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$, takav da je

$$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

Definicija B.4. Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je

- **povezan** ako se ne može razdijeliti na uniju dva neprazna otvorena disjunktna skupa.
- **Hausdorffov** ako za svake dvije različite točke $a, b \in X$ postoje disjunktna okoline O_a i O_b .

Definicija B.5. Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološki prostori. Kažemo da je $f : X \rightarrow Y$ **neprekidno preslikavanje** ako je za svaki otvoren skup $V \in \mathcal{T}_Y$ praslika $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. **Homeomorfizam** je bijekcija $\varphi : X \rightarrow Y$ takva da su φ i φ^{-1} neprekidna preslikavanja. Za svojstvo topološkog prostora X kažemo da je topološko ako ga čuvaju homeomorfizmi.

Definicija B.6. Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **lokalno euklidski** ako za svaku točku $a \in X$ postoji okolina $O_a \in \mathcal{T}$ homeomorfna s otvorenim skupom u $\mathbb{R}^m$. **Topološka mnogostrukost** je povezan, Hausdorffov, lokalno euklidski topološki prostor s prebrojivom bazom. Dimenzija mnogostrukosti je $\dim(M) = m$.

Definicija B.7. Neka je M topološka mnogostrukost. **Karta** je uređen par (O, ψ) otvorenog skupa $O \subseteq M$ i homeomorfizma $\psi : O \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$. **Glatki atlas** $\mathcal{A}$ na mnogostrukosti M je familija karata $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$ koja zadovoljava naredna dva svojstva:

- (a) $\{O_\alpha\}$ je pokrivač mnogostrukosti M , $\bigcup_\alpha O_\alpha = M$;
- (b) ako je $O_\alpha \cap O_\beta$ neprazan skup, tada je

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta)$$

glatko preslikavanje.

Definicija B.8. **Glatka mnogostrukost** je uređen par $(M, \mathcal{A})$ topološke mnogostrukosti M i glatkog atlasa $\mathcal{A}$.

Definicija B.9. Neka je M glatka mnogostrukost. U svakoj točki $p \in M$ definiramo skup $\mathfrak{F}_p(M)$ uređenih parova (O_p, f) okolina O_p i glatkih funkcija $f : O_p \rightarrow \mathbb{R}$. Na skupu $\mathfrak{F}_p(M)$ definiramo relaciju ekvivalencije $(O_p, f) \sim (U_p, g)$ akko postoji okolina $V_p \subseteq (O_p \cap U_p)$ na kojoj je $f = g$. **Germ** je klasa ekvivalencije danog uređenog para (O_p, f) . S $C_p^\infty(M)$ označavamo skup svih germova u točki $p \in M$.

Definicija B.10. **Tangentni vektor** v u točki $p \in M$ je preslikavanje $v : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ koje je

- (a) linearno, $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$ i
- (b) zadovoljava Leibnizovo svojstvo, $v(fg) = f v(g) + g v(f)$

Definicija B.11. Neka je V vektorski prostor, a V^* njegov dual. **Tenzor** T ranga (k, l) je multilinearo preslikavanje

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}$$

Drugim riječima, T je lineran u svakoj varijabli: za sve vektore $u, v \in V$, dualne vektore $u^*, v^* \in V^*$ i konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$T(\dots, \alpha u + \beta v, \dots) = \alpha T(\dots, u, \dots) + \beta T(\dots, v, \dots) \quad (\text{B.1})$$

$$T(\dots, \alpha u^* + \beta v^*, \dots) = \alpha T(\dots, u^*, \dots) + \beta T(\dots, v^*, \dots) \quad (\text{B.2})$$

Definicija B.12. Tenzorski produkt tenzora S ranga (k_s, l_s) i tenzora T ranga (k_t, l_t) definiran je s

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(u_1^*, \dots, u_{k_s+k_t}^*, v_1, \dots, v_{l_s+l_t}) &\equiv \\ &\equiv S(u_1^*, \dots, u_{k_s}^*, v_1, \dots, v_{l_s}) \cdot T(u_{k_s+1}^*, \dots, u_{k_s+k_t}^*, v_{l_s+1}, \dots, v_{l_s+l_t}) \end{aligned}$$

Na mnogostrukosti M definiramo tenzore na tangentnih vektorskim prostorima $T_p M$. Specijalno, tenzori ranga $(0, 0)$ su funkcije $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, a tenzori ranga $(1, 0)$ tangentni vektori. Tenzore ranga $(0, 1)$, dualne vektore, zovemo još i **1-forme**. Tangentni vektori u svakoj točki $p \in M$, zajedno s operacijama zbrajanja i množenja konstantama,

$$v(f + g) \equiv v(f) + v(g), \quad (\alpha v)(f) \equiv \alpha \cdot (v(f))$$

čine vektorski prostor kojeg označavamo s $T_p M$. Na sličan način, 1-forme u svakoj točki $p \in M$ tvore dualni, kotangentni prostor kojeg označavamo s $T_p^* M$.

Pomoću svake karte, odnosno koordinata $\{x^1, \dots, x^m\}$, postoji prirodan odabir baze tangentnog prostora $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ te baza kotangentnog prostora $\{dx^1, \dots, dx^m\}$. Pomoću ovih baza možemo definirati komponente tenzora

$$T_{\mu_1 \dots}{}^{\nu_1 \dots} \equiv T(\partial_{\mu_1}, \dots, dx^{\nu_1}, \dots)$$

Takozvani *apstraktni indeksi*, za koje koristimo mala slova latinskog alfabeta, označavaju tip tenzora, bez konkretne reference na neki koordinatni sustav. Svaka tenzorska jednakost zapisana pomoću apstraktnih indeksa automatski vrijedi u svakom koordinatnom sustavu.

Na tenzorima definiramo dva tipa operacija,

- Simetrizacija:

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &\equiv \frac{1}{2!} (T_{ab} + T_{ba}) \\ T_{[abc]} &\equiv \frac{1}{3!} (T_{abc} + T_{cab} + T_{bca} + T_{bac} + T_{acb} + T_{cba}) \end{aligned}$$

- Antisimetrizacija:

$$T_{[ab]} \equiv \frac{1}{2!} (T_{ab} - T_{ba})$$

$$T_{[abc]} \equiv \frac{1}{3!} (T_{abc} + T_{cab} + T_{bca} - T_{bac} - T_{acb} - T_{cba})$$

Za tenzor $T_{ab\dots z}$ kažemo da je **totalno antisimetričan** ako vrijedi $T_{ab\dots z} = T_{[ab\dots z]}$. Na svakoj mnogostrukosti dimenzije m možemo definirati **Levi-Civita tenzor** ϵ , totalno antisimetričan tenzor ranga $(0, m)$, normiran prema

$$\epsilon_{a_1\dots a_m} \epsilon^{a_1\dots a_m} = (-1)^s \quad (\text{B.3})$$

gdje je s ukupan broj negativnih vrijednosti u signaturi metrike. Konkretno, označimo li s g determinantu metrike, tada je

$$\epsilon_{12\dots n} = \sqrt{|g|} \quad (\text{B.4})$$

Dodatak C Diferencijalne forme

Definicija C.1. Diferencijalne forme, odnosno **p-forme**, su totalno antisimetrični tenzori ranga $(0, p)$.

Na primjer, 0-forme su funkcije $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, a 1-forme vektori iz kotangentnog prostora T^*M . Prostor p -formi na mnogostrukosti M označavamo s $\Omega^p(M)$.

Definicija C.2. Vanjski produkt (engl. *wedge product*) je operacija koju možemo definirati na elementarnim diferencijalnim formama prema

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \equiv \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) dx^{\mu_{\pi(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{\pi(p)}} \quad (\text{C.1})$$

gdje je S_p grupa permutacija p elemenata.

Na primjer,

$$dx \wedge dy = dx \otimes dy - dy \otimes dx$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= dx \otimes dy \otimes dz + dz \otimes dx \otimes dy + dy \otimes dz \otimes dx - \\ &\quad - dx \otimes dz \otimes dy - dz \otimes dy \otimes dx - dy \otimes dx \otimes dz \end{aligned}$$

Upotrebom vanjskog produkta općenitu p -formu $\omega_p \in \Omega^p(M)$ možemo zapisati u obliku

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{C.2})$$

gdje su komponente $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ totalno antisimetrične. Na primjer, 2-formu F_{ab} možemo zapisati kao

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Teorem C.3. Za svaku p -formu $\alpha_p \in \Omega^p(M)$ i q -formu $\beta_q \in \Omega^q(M)$ vrijedi

$$\alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p \quad (\text{C.3})$$

Kao izravan korolar ovog teorema znamo da za neparan broj p vrijedi $\alpha_p \wedge \alpha_p = 0$.

Definicija C.4. Kontrahiranje diferencijalne forme $\alpha \in \Omega^p(M)$ s vektorskim poljem X^a je preslikavanje $i_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ definirano s

$$(i_X \alpha)(v_1, \dots, v_{p-1}) \equiv \alpha(X, v_1, \dots, v_{p-1}) \quad (\text{C.4})$$

odnosno, u zapisu preko komponenti,

$$(i_X \alpha)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = X^\nu \alpha_{\nu \mu_1 \dots \mu_{p-1}} \quad (\text{C.5})$$

Teorem C.5. Za svaku p -formu $\omega \in \Omega^p(M)$ vrijedi

$$i_X(i_X\omega) = 0 \quad \text{tj.} \quad i_X^2 = 0 \quad (\text{C.6})$$

Teorem C.6. Za svaku p -formu $\alpha_p \in \Omega^p(M)$ i q -formu $\beta_q \in \Omega^q(M)$ vrijedi

$$i_X(\alpha_p \wedge \beta_q) = (i_X\alpha_p) \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge i_X\beta_q \quad (\text{C.7})$$

Definicija C.7. Vanjska derivacija (engl. *exterior derivative*) $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ definirana je na p -formi $\omega \in \Omega^p(M)$ s

$$d\omega \equiv \frac{1}{p!} \partial_\alpha \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{C.8})$$

Ako je $p \geq \dim(M)$, tada vrijedi $d\omega = 0$.

Teorem C.8. Za svaku p -formu $\omega \in \Omega^p(M)$ vrijedi

$$d(d\omega) = 0 \quad \text{tj.} \quad d^2 = 0 \quad (\text{C.9})$$

Teorem C.9. Za svaku p -formu $\alpha_p \in \Omega^p(M)$ i q -formu $\beta_q \in \Omega^q(M)$ vrijedi

$$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q \quad (\text{C.10})$$

Definicija C.10. Hodgeov dual $*$: $\Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M)$ je preslikavanje koje prebacuje p -forme u $(n - p)$ -forme. Za svaki $\omega \in \Omega^p(M)$ definiramo Hodgeov dual s

$$(*\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \equiv \frac{1}{p!} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \quad (\text{C.11})$$

Pomoću identiteta umnoška dva Levi-Civita tenzora s prvih k kontrahiranih indeksa,

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_m} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \nu_{k+1} \dots \nu_m} = (-1)^s k! \delta^{\mu_{k+1} \dots \mu_m}_{\nu_{k+1} \dots \nu_m} \quad (\text{C.12})$$

možemo povezati kontrahirane komponente diferencijalnih formi s izrazom zapisanim pomoću Hodgeovog duala

$$g^{a_1 b_1} \dots g^{a_p b_p} \alpha_{a_1 \dots a_p} \beta_{b_1 \dots b_p} = (-1)^s p! * (\alpha \wedge * \beta) \quad (\text{C.13})$$

Hodgeov dual ovog identiteta daje

$$(g^{a_1 b_1} \dots g^{a_p b_p} \alpha_{a_1 \dots a_p} \beta_{b_1 \dots b_p}) \epsilon = p! \alpha \wedge * \beta \quad (\text{C.14})$$

Povlačenje diferencijalnih formi. Neka su M i N glatke mnogostrukosti. Zanima nas kako pomoću zadanog preslikavanja $f : M \rightarrow N$ “premješati” tenzore s M u N i obratno. Svako preslikavanje $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ možemo “povući” na M pomoću kompozicije,

$$(f^*g) \equiv g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{C.15})$$

Nadalje, tangentne vektore možemo “gurati” s T_pM u $T_{f(p)}N$ pomoću preslikavanja

$$f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

koje je za svaki vektor $v \in T_pM$ definirano s

$$(f_*v)(g) \equiv v(f^*g) = v(g \circ f) \quad (\text{C.16})$$

Ako je funkcija f u nekom koordinatnom sustavu zadana s

$$f(x^1, \dots, x^m) = (y^1, \dots, y^n)$$

onda je moguće dokazati da su komponente “gurnutog” vektora dane s

$$(f_*v)^\mu = v^\beta \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta} \quad (\text{C.17})$$

Na sličan način uvodimo i povlačenje 1-formi,

$$f^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$$

koje je za svaku $\alpha \in T_p^*M$ definirano s

$$(f^*\alpha)(v) \equiv \alpha(f_*v) \quad (\text{C.18})$$

Odavde možemo dobiti koordinatni izraz za komponente

$$(f^*\alpha)_\mu = \alpha_\beta \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu} \quad (\text{C.19})$$

Analogno definiramo i povlačenje općenite p -forme $\omega \in \Omega^p(N)$,

$$f^*\omega(v_1, \dots, v_p) \equiv \omega(f_*v_1, \dots, f_*v_p) \quad (\text{C.20})$$

Teorem C.11. *Povlačenje “komutira” s vanjskom derivacijom*

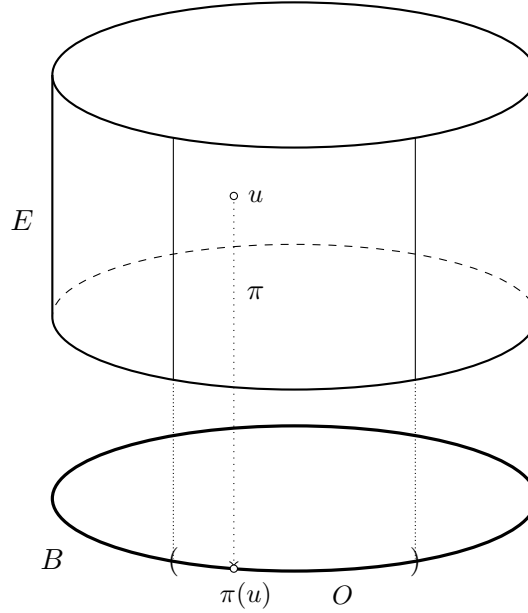
$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) \quad (\text{C.21})$$

i djeluje “distributivno” na vanjski produkt

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \quad (\text{C.22})$$

Dodatak D Svežnjevi

Ugrubo, svežanj je poopćenje ideje Kartezijevog produkta skupova. Osnovna konstrukcija polazi od dva skupa, baznog prostora i vlakna, koje želimo “kombinirati” u tzv. totalni prostor: on će *lokalno* biti Kartezijev produkt otvorenog skupa u baznom prostoru i vlakna, ali *globalno* može biti znatno kompliciraniji objekt.



Slika D.1. Shematski prikaz svežnja.

Definicija D.1. Svežanj je uređena petorka (E, π, B, F, G) koju čine:

- 3 mnogostrukosti: totalni prostor E , bazni prostor B i vlakno F
- neprekidna surjekcija (tzv. projekcija) $\pi : E \rightarrow B$
- strukturna grupa G (Liejeva grupa) čije je djelovanje na F zadano homeomorfizmom $\chi : G \rightarrow \text{Bij}(F)$

takva da postoji otvoren pokrivač $\{O_\alpha\}$ baznog prostora B i

- za svaki α postoji homeomorfizam (lokalna trivijalizacija)

$$\tau_\alpha : O_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(O_\alpha)$$

za koju vrijedi $\pi \circ \tau_\alpha(p, f) = p$ za svaki $p \in O_\alpha, f \in F$, te

- za svaki par O_α, O_β s nepraznim presjekom postoje tzv. prijelazne funkcije

$$h_{\alpha\beta} : O_\alpha \cap O_\beta \rightarrow \chi(G)$$

definirane za svaki $p \in O_\alpha \cap O_\beta$ s

$$h_{\alpha\beta}(p) = \tau_\alpha^{-1} \Big|_p \circ \tau_\beta \Big|_p : F \rightarrow F$$

$$\text{tj. } \tau_\beta(p, f) = \tau_\alpha(p, h_{\alpha\beta}(p)f)$$

Definicija D.2. Ako je vlakno vektorski prostor, tada govorimo o **vektorskom svežnju**. Specijalno, svežanj tangentnih vektorskih prostora na glatkoj mnogostrukosti zovemo **tangentni svežanj**.

Definicija D.3. **Glavni svežanj** je svežanj u kojem je vlakno F homeomorfno sa strukturnom grupom G . Svakom svežnju možemo jednoznačno pridružiti jedan glavni svežanj kojeg označavamo s $P(B, G)$.

Definicija D.4. **Prerez svežnja** je glatko preslikavanje $s : B \rightarrow E$ takvo da je $\pi(s(x)) = x$ za svaki $x \in B$. Razlikujemo lokalni i globalni prerez, ovisno o tome je li definiran na nekom otvorenom skupu ili na cijelom baznom prostoru B .

Teorem D.5. *Glavni svežanj $P(B, G)$ je trivijalan ako i samo ako dopušta definiranje globalnog prereza.*

Dodatak E Heliciteti elektromagnetskog polja

S obzirom da u odsustvu električnih i magnetskih izvora vrijedi $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, lokalno uvijek možemo uvesti vektorske potencijale

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} \quad (\text{E.1})$$

Analogno možemo uvesti i Riemann-Silbersteinov vektorski potencijal $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{C} + i\mathbf{A} \quad (\text{E.2})$$

Sada definiramo električni helicitet

$$h_{ee} \equiv \int d^3x \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{E.3})$$

magnetski helicitet

$$h_{mm} \equiv \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{E.4})$$

te "miješane" helicitete

$$h_{em} \equiv \int d^3x \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{E.5})$$

$$h_{me} \equiv \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{E.6})$$

Ponekad se koristi i elektromagnetski (totalni) helicitet

$$h \equiv \frac{1}{2} (h_{ee} + h_{mm}) \quad (\text{E.7})$$

Baždarna transformacija vektorskog potencijala $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} + \nabla\lambda$ ne utječe na divergenciju $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Prilikom ove baždarne transformacije električni helicitet dobije dodatni član,

$$h_{ee} \rightarrow h_{ee} + \int d^3x \nabla\lambda \cdot \mathbf{E} = \int d^3x (\nabla(\lambda\mathbf{E}) - \lambda\nabla \cdot \mathbf{E}) = \int_{\infty} \lambda\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{E.8})$$

Kako vektorski potencijal $\mathbf{C}$ trne u beskonačnosti, isto vrijedi i za baždarnu funkciju λ . Stoga, električni helicitet će biti baždarno invarijantan ako električno polje trne barem kao r^{-2} . Isti zaključak vrijedi i za ostale helicitete. Helicitet elektromagnetskog polja može se dovesti u vezu [24] s razlikom lijevo i desno polariziranih modova (fotona) u elektromagnetskom valu,

$$h = \hbar c (N_R - N_L) \quad (\text{E.9})$$

Vremenska evolucija heliciteta.

$$\partial_t h_{ee} = \int d^3x (\partial_t \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{C} \cdot \partial_t \mathbf{E}) \quad (\text{E.10})$$

$$\partial_t h_{mm} = \int d^3x (\partial_t \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{B}) \quad (\text{E.11})$$

Korištenjem izraza (2.39) i vakuumskih Maxwellovih jednadžbi imamo

$$\begin{aligned}
\partial_t h_{ee} &= \int d^3x \left((\mathbf{B} + \nabla U) \cdot \mathbf{E} + \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right) = \\
&= \int d^3x \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla(U\mathbf{E}) - U\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) - \nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \right) = \\
&= 2 \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \int_{\infty} U\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} - \int_{\infty} (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}
\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t h_{mm} &= - \int d^3x \left((\mathbf{E} + \nabla V) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right) = \\
&= - \int d^3x \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \nabla(V\mathbf{B}) - V\nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \right) = \\
&= - 2 \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \int_{\infty} V\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\infty} (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Pod pretpostavkom da polja dovoljno brzo trnu u beskonačnosti, dobivamo

$$\partial_t h_{ee} = -\partial_t h_{mm} = 2 \int d^3x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \tag{E.14}$$

Dakle, elektromagnetski helicitet (rješenja vakuumskih Maxwellovih jednadžbi koja trnu dovoljno brzo u beskonačnosti) sačuvan je u vremenu,

$$\partial_t h = 0 \tag{E.15}$$

Specijalno, ako je dotično elektromagnetsko polje svjetlosno (u kom slučaju produkt $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ iščezava), isto vrijedi za pojedinačni električni i magnetski helicitet,

$$\partial_t h_{ee} = 0 = \partial_t h_{mm} \tag{E.16}$$

Riemann-Silbersteinov vektorski potencijal $\mathbf{W}$ za Batemanovo rješenje dan je izrazom

$$\mathbf{W} = \alpha \nabla \beta \tag{E.17}$$

Naime,

$$\nabla \times \mathbf{W} = \nabla \times (\alpha \nabla \beta) = \nabla \alpha \times \nabla \beta + \alpha \nabla \times \nabla \beta = \mathbf{F} \tag{E.18}$$

Pomoću Riemann-Silbersteinovog vektorskog potencijala možemo pronaći vezu među elektromagnetskim helicitetima Batemanovog rješenja. Promotrimo

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{F} = \alpha \nabla \beta \cdot (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = 0 \tag{E.19}$$

S druge strane

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{C} + i\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \tag{E.20}$$

Kako znamo da su i realni i imaginarni dio nula, slijede jednakosti

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \tag{E.21}$$

Dakle, za Batemanovo rješenje smo dobili

$$h_{ee} = h_{mm} \quad (\text{E.22})$$

$$h_{em} = -h_{me} \quad (\text{E.23})$$

Konačno, kako je poopćen Batemanov ansatz moguće zapisati u obliku $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$, uz $h = (\partial_\alpha f)(\partial_\beta g) - (\partial_\beta f)(\partial_\alpha g)$, slijedi kako je prirodan odabir Riemann-Silbersteinovog vektorskog potencijala u ovom slučaju $\mathbf{W} = f \nabla g$.

Literatura

- [1] Kelvin, W.T. : *On Vortex Atoms*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **6** (1867) 94-105
- [2] Dirac, P.A.M. : *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London A **133** (1931) 60-72
- [3] Hopf, H. : *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Mathematische Annalen **104** (1931) 637-665
- [4] Bateman, H. : *The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion*, Dover, New York (1955)
- [5] Alvarez, L.W. : *Analysis of a reported magnetic monopole*, in Symposium on lepton and photon interactions at high energies, Stanford (1975) 967-979
- [6] Price, P.B., Shirk, E.K., Osborne, W.Z. and Pinsky, L.S. : *Evidence for detection of a moving magnetic monopole*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 487-490
- [7] Trautman, A. : *Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings*, Int. J. Theoret. Phys. **16** (1977) 561-565
- [8] Minami, M. : *Dirac's Monopole and the Hopf Map*, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 1128-1142
- [9] Ryder, L.H. : *Dirac monopoles and the Hopf map $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$* , J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 437-447
- [10] Cabrera, B. : *First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1378-1381
- [11] Hogan, P.A. : *Bateman electromagnetic waves*, Proc. R. Soc. Lond. A **396** (1984) 199-204
- [12] Rañada, A.F. : *A Topological Theory of the Electromagnetic Field*, Lett. Math. Phys. **18** (1989) 97-106
- [13] Rañada, A.F. : *Knotted solutions of the Maxwell equations in vacuum*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990) 815-820
- [14] Rañada, A.F. : *Topological electromagnetism*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) 1621-1641
- [15] Adams, F.C., Fatuzzo, M., Freese, K., Tarlé, G., Watkins, R. and Turner, M.S. : *Extension of the Parker bound on the flux of magnetic monopoles*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2511
- [16] Rañada, A.F. and Trueba, J.L. : *Electromagnetic knots*, Phys. Lett. A **202** (1995) 337-342
- [17] Rañada, A.F. and Trueba, J.L. : *Ball lightning an electromagnetic knot?*, Nature **383** (1996) 32

- [18] Rañada, A.F. and Trueba, J.L. : *Two properties of electromagnetic knots*, Phys. Lett. A **232** (1997) 25–33
- [19] Freese, K. and Krasteva, E. : *Bound on the flux of magnetic monopoles from catalysis of nucleon decay in white dwarfs*, Phys. Rev. D **59** (1999) 063007
- [20] Griffiths, D.J. : *Introduction to Electrodynamics (3rd ed.)*, Prentice Hall, New Jersey (1999)
- [21] Abrahamson, J. and Dinniss, J. : *Ball lightning caused by oxidation of nanoparticle networks from normal lightning strikes on soil*, Nature **403** (2000) 519–521
- [22] Rañada, A.F., Soler, M. and Trueba, J.L. : *Ball lightning as a force-free magnetic knot*, Phys. Rev. E **62** (2000) 7181–7190
- [23] Rañada, A.F. : *Hidden nonlinearity in a topological model of electromagnetism*, Ann. Fond. Louis Broglie **26** (2001) 367–380
- [24] Rañada, A.F. and Trueba, J.L. : *Topological Electromagnetism with Hidden Nonlinearity*, in Modern Nonlinear Optics, Part III, Second Edition (2001) 197–253
- [25] Baez, J.C. : *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2001) 145–205
- [26] Urbantke, H.K. : *The Hopf fibration — seven times in physics*, J. Geom. Phys. **46** (2002) 125–150
- [27] Nakahara, M. : *Geometry, Topology and Physics (2nd ed.)*, IOP, London (2003)
- [28] Donoso, J.M., Trueba, J.L. and Rañada, A.F. : *The Riddle of Ball Lightning: A Review*, Sci World J **6** (2006) 254–278
- [29] Milton, K.A. : *Theoretical and experimental status of magnetic monopoles*, Rep. Prog. Phys. **69** (2006) 1637–1711
- [30] Irvine, W.T.M. and Bouwmeester, D. : *Linked and knotted beams of light*, Nat. Phys. **4** (2008) 716–720
- [31] Irvine, W.T.M. : *Linked and knotted beams of light, conservation of helicity and the flow of null electromagnetic fields*, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010)
- [32] Kedia, H., Bialynicki-Birula, I., Peralta-Salas, D. and Irvine, W.T.M. : *Tying Knots in Light Fields*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 150404
- [33] Cen, J., Yuan, P. and Xue, S. : *Observation of the Optical and Spectral Characteristics of Ball Lightning*, Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 035001