SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Mihalic

FEUERBACHOVA TOČKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se posebnom točkom trokuta čija su bogata svojstva često objekt promatranja u zadatcima na matematičkim natjecanjima. To je točka u kojoj se Feuerbachova kružnica i upisana kružnica trokuta diraju, a nosi naziv Feuerbachova točka. Iako su naizgled čini lako za dokazati da se Feuerbachova i upisana kružnica diraju, vidjet ćemo da je potrebno duboko znanje geometrije čiji se dijelovi slažu kao kockice do krajnjeg rezulata. Zato je u prvom poglavlju dan kratak pregled osnovnih teorema i pojmova koji ćemo koristiti tijekom cijelog rada. U drugom poglavlju dan je dokaz teorema o Feuerbachovoj točki.

Treće poglavlje posvećeno je svojstvima Feuerbachove točke. Naravno, za potrebe ovog rada odabrano je samo nekoliko od brojih svojstava te točke. U tom ćemo poglavlju Feuerbachovu točku povezati s ostalim posebnim točkama u trokutu. Zadnje poglavlje bavi se generalizacijom teorema o Feuerbachovoj točki.

Poglavlje 1

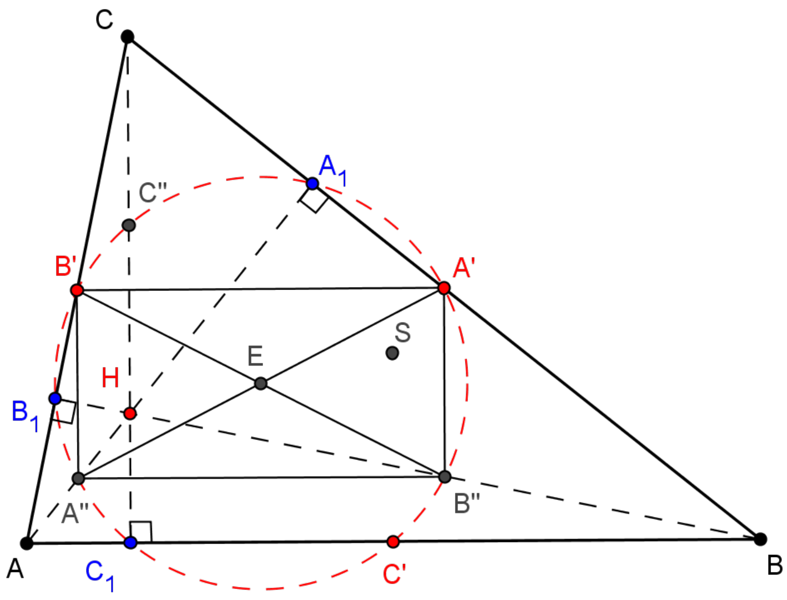
Osnovni teoremi i pojmovi iz elementarne geometrije

1.1 Feuerbachova kružnica

Jedan od ciljeva ovog rada je dokazati da se u svakom trokutu upisana kružnica i Feuerbachova kružnica diraju. Stoga je na početku potrebno navesti osnovne pojmove i teoreme elementarne geomerije na koje ćemo se pozivati tijekom dokaza. Prije svega navedimo teorem iz kojeg proizlazi pojam **Feuerbachove kružnice**.

Teorem 1.1. *Neka su u trokutu ABC točke A', B' i C' polovišta stranica, točke A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, gdje je H ortocentar danog trokuta, a točke A_1, B_1, C_1 nožišta visina. Svih devet točaka A', B', C', A'', B'', C'', A_1, B_1, C_1 leže na istoj kružnici čije je središte polovište dužine $\overline{SH}$, gdje je S središte opisane kružnice trokuta ABC.*

Dokaz. Dužina $\overline{A'B'}$ je srednjica trokuta ABC pa je $A'B' \parallel AB$ i $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$. S druge strane dužina $\overline{A''B''}$ je srednjica trokuta ABH pa je $A''B'' \parallel AB$ i $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$. Slijedi $A'B' \parallel A''B''$ i $|A'B'| = |A''B''|$. Dakle, četverokut $A'B'A''B''$ je paralelogram, pa se dužine $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ raspolavljaju. Neka je E njihovo sjecište.



Slika 1.1: Teorem 1.1

Kako je $\overline{A''B'}$ srednjica trokuta AHC, to je $A''B' \parallel CH$, pa je $A''B' \perp AB$. Stoga je i $A''B' \perp A''B''$, odnosno $\angle B'A''B'' = 90°$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu k sa središtem u E i polumjera $\frac{1}{2}|A'A''|$.

Analogno se dokazuje i da je $A'C'A''C''$ pravokutnik, odnosno da mu možemo opisati kružnicu čije je središte u točki E, a polumjer $\frac{1}{2}|A'A''|$. Dakle, točke A', B' C', A'', B'' i C'' leže na istoj kružnici k.

Kako je trokut $A'A''A_1$ pravokutan s hipotenuzom $\overline{A'A''}$, to je kružnica k upravo opisana kružnica tog trokutu. Dakle, točka A_1 također leži na kružnici k. Analogno se dokazuje i da B_1 i C_1 leže na k.

Središte kružnice nalazi se na presjeku simetrala tetiva $\overline{A'A_1}$ i $\overline{C'C_1}$, a to su upravo srednjice trapeza $HSA'A_1$ i $HSC'C_1$. Kako ti trapezi imaju zajednički krak $\overline{SH}$, to se središte Feuerbachove kružnice podudara s polovištem dužine $\overline{SH}$. □

Kružnica iz teorema 1.1 naziva se **Feuerbachova kružnica** (kružnica devet točaka, Eulerova kružnica) i označava se sa k_9.

Možemo se pitati zašto jedna kružnica nosi tri različita naziva. Razlog dakako moramo potražiti u povijesti. Njih su detaljno u svom članku opisali Kolar-Begović i Tonković (vidi [12]). Naime, 1765. godine poznati švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1783.) dokazao je da polovišta stranica trokuta i nožišta visina, leže na jednoj kružnici. Stoga se u njegovu čast kružnica naziva Eulerova kružnica. Povijesna istraživanja J. S.

MacKaya (1892. godine) otkrila su da postoji nekoliko i to nezavisnih otkrića Eulerove kružnice. Navodno je prvi puta spomenuta u članku Johna Butterwortha 1804. godine u dokazu Bevanova teorma.

Godine 1820. objavljen je članak Brianchona[1] i Ponceleta[2] u kojem se navodi da i polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta također leže na Eulerovoj kružnici tog trokuta. Štoviše, u njihovom članku prikazan je prvi potpuni dokaz konciklіčnosti navedenih devet točaka te se prvi put koristi termin kružnica devet točaka.

Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach (1800. – 1834.) je u svojoj 22. godini života dokazao da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri kružnice koje diraju stranice trokuta, odnosno njihova produženja. Uočimo da se radi o upisanoj kružnici i pripisanim kružnicama trokuta. Dokaz je objavljen 1822. godine u radu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*. U tom je radu proučavao značajne točke trokuta i dao niz novih i važnih tvrdnji vezanih za Eulerovu kružnicu. Nakon objave Feuerbachova rada, teorem koji je dokazan u radu postao je poznat pod nazivom Feuerbachov teorem. Eulerova kružnica i Feuerbachov teorem zaintrigirali su mnoge matematičare, pa je objavljen velik broj različitih dokaza. S obzirom na to da su neki autori Feuerbachu pripisivali nezavisno otkriće Eulerove kružnice, u literaturi su koristili termin Feuerbachova kružnica.

Sjetimo se sada još jednog teorema koji se veže uz matematičara Eulera.

Teorem 1.2. *Središte S opisane kružnice, težište T i ortocentar H svakog trokuta su kolinearne točke, tj. leže na jednom pravcu. Nadalje, $|TH| = 2|TS|$.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema može se pronaći u navedenoj literaturi (vidi [7], vidi [13]) □

Pravac iz teorema 1.2 naziva se **Eulerov pravac** tog trokuta.
Uočimo da prema teoremu 1.1, središte Feuerbachove kružnice leži na Eulerovom pravcu promatranog trokuta.

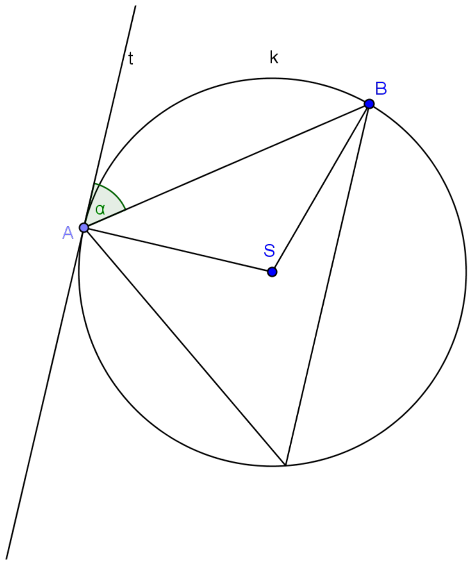
1.2 Kut između tangente i tetive

U ovom potpoglavlju dokazat ćemo manje poznat, ali koristan teorem. Sjetimo se da je središnji kut nad nekim kružnim lukom jednak dvostrukom kutu nad tim istim lukom te da su svi obodni kutovi nad istim lukom sukladni.

Teorem 1.3. *Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

[1]Charles Julien Brianchon (1783. – 1864.), francuski matematičar i kemičar
[2]Jean-Victor Poncelet (1788. – 1867.), francuski vojni inžinjer i matematičar

Dokaz. Neka je S središte kružnice k. Označimo s α kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$.



Slika 1.2: Kut tangente t i tetive $\overline{AB}$.

Znamo da je polumjer kružnice okomit na tangentu te kružnice u diralištu. Pa je $\angle SAB = 90^\circ - \alpha$. No, trokut ASB je jednakokračan, pa je:

$$\begin{aligned}\angle ASB &= 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha)\\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha.\end{aligned}$$

Dakle, $\angle ASB = 2\alpha$. No, kut ASB je središnji kut nad tetivom $\overline{AB}$, a on je jednak dvostrukom obodnom kutu nad tom tetivom. Slijedi tvrdnja. □

1.3 Izogonalno konjugirane točke

Ovo potpoglavlje donosi teorem s kojim se rijetko koji student matematike susreo. Sama riječ *izogonalno* opisuje simetrije među pravcima koji prolaze kroz vrh danog kuta, a os simetrije je simetrala promatranog kuta.

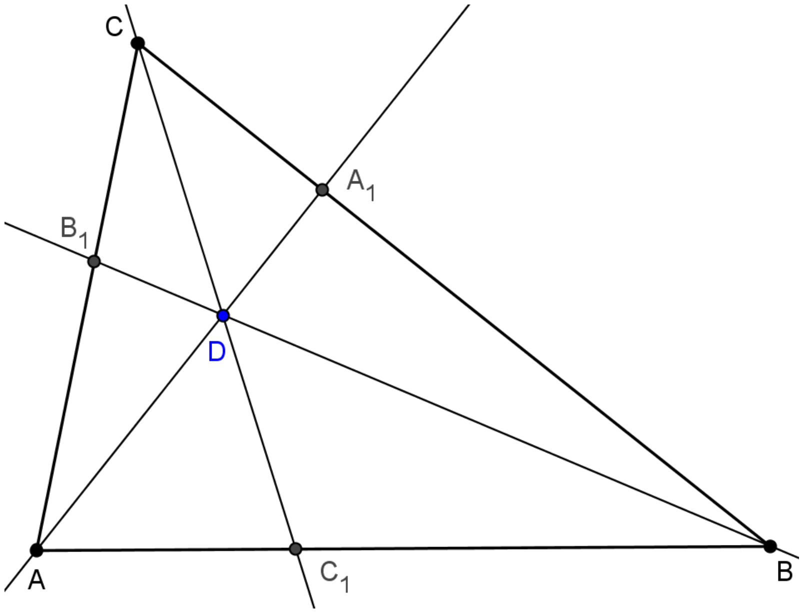
Teorem 1.4. *Neka je ABC trokut i P točka u ravnini. Pravci simetrični pravcima PA, PB i PC s obzirom na simatrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki P'.*

Prije dokaza navedenog teorema sjetimo se tvrdnje teorema poznatog pod nazivom **Cevin teorem**[3]:

[3]Dokazao ga je talijanski matematičar Giovanni Ceva (1647. – 1734.).

Teorem 1.5. *Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi:*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.3: Cevin teorem

Ovaj teorem možemo zapisati na drugi način pomoću trigonometrije.

Teorem 1.6. *Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi:*

$$\frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle C_1CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_1)}{\sin(\angle A_1AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_1)}{\sin(\angle B_1BA)} = 1.$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je umnožak omjera duljina iz Cevinog teorema jednak umnošku omjera navedenih sinusa kutova bez obzira na to sijeku li se AA_1, BB_1, CC_1 u jednoj točki ili ne.

Naime, primjenom poučka o sinusima na trokute ACC_1 i BCC_1 dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1C|} = \frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle A)} \quad \text{i} \quad \frac{|CC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle C_1CB)},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin(\angle ACC_1)}{\sin(\angle C_1CB)} \cdot \frac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle A)}.$$

Slično,

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{\sin(\angle BAA_1)}{\sin(\angle A_1AC)} \cdot \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle B)} \quad \text{i} \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin(\angle CBB_1)}{\sin(\angle B_1BA)} \cdot \frac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle C)}.$$

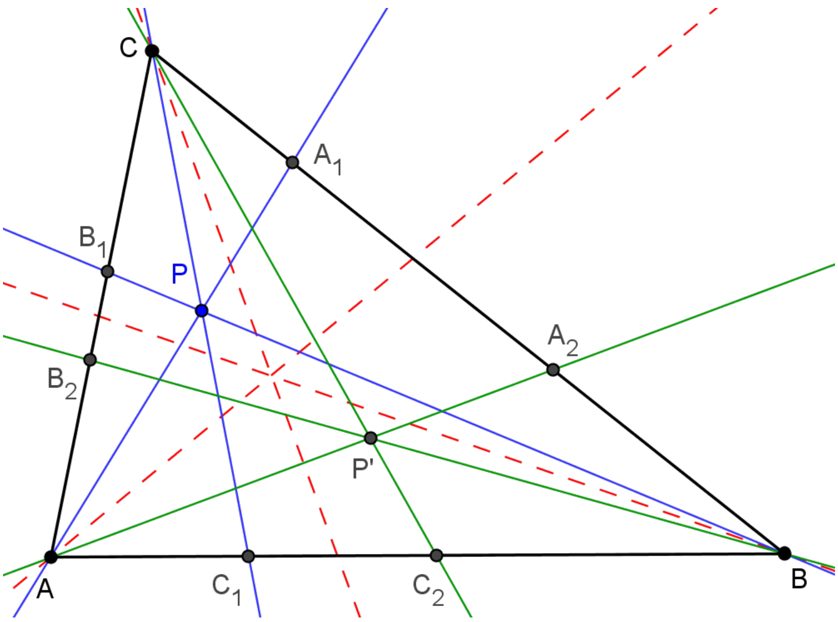
Množenjem dobivenih jednakosti imamo :

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)}.$$

Slijedi tvrdnja. □

Sada krenimo s dokazom teorema 1.4.

Dokaz. Neka je $A_1 = PA \cap BC$, $B_1 = PB \cap AC$ i $C_1 = PC \cap AB$. Neka je $A_2 \in BC$ tako da je pravac AA_2 simetričan pravcu AA_1 s obzirom na simetralu kuta pri vrhu A. Slično, BB_2 i CC_2.



Slika 1.4: Točka P' izogonalni je konjugat točke P.

Ako pokažemo da vrijedi

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = 1,$$

tada će prema obratu trigonometrijskog oblika Cevinog teorema slijediti tvrdnja. Budući da su pravci AA_2, BB_2 i CC_2 simetrični pravcima AA_1, BB_1 i CC_1 s obzirom na simetrale kutova trokuta ABC, vrijedi $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$, $\angle C_2CB = \angle ACC_1$ itd. Sada imamo

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)}. \quad (1.1)$$

Pošto se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u točki P, prema trigometrijskom obliku Cevinog teoremu vrijedi:

$$\frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle ACC_1)} \cdot \frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle BAA_1)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle CBB_1)} = 1.$$

Na temelju toga i (1.1) zaključujemo

$$\frac{\sin(\angle ACC_2)}{\sin(\angle C_2CB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAA_2)}{\sin(\angle A_2AC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBB_2)}{\sin(\angle B_2BA)} = 1,$$

odnosno prema obratu trigonometrijskog oblika Cevina teorema pravci AA_2, BB_2 i CC_2 sijeku se u jednoj točki P'. □

Točku P' iz teorema 1.4 zovemo **izogonalni konjugat** točke P s obzirom na trokut ABC.

1.4 Orijentirani kutovi

S pojmom orijentiranih kutova ne susrećemo se često u geometriji. No, to će nam olakšati dokazivanje brojnih tvrdnji u ovom radu pa navedimo definiciju.

Definicija 1.7. *Neka su p i q dva neparalelna pravca.* ***Orijentirani kut*** *od p do q je kut za koji pravac p treba rotirati u smjeru obrnutom od kazaljke na satu kako bi postao paralelan s pravcem q. Oznaka:* $\angle(p, q)$.

Iz definicije slijedi da su dva orijentirana kuta sukladna ako se njihove mjere razlikuju za višekratnik od 180°.

Definicija 1.8. *Definiramo zbrajanje orijentiranih kutova na sljedeći način:*

$$\angle(p_1, p_2) + \angle(p_2, p_3) = \angle(p_1, p_3)$$

$$\angle(p_1, p_2) + \angle(p_3, p_4) = \angle(p_1, p_5)$$

gdje je p_5 *pravac takav da vrijedi* $\angle(p_2, p_5) = \angle(p_3, p_4)$.

Iz te definicije proizlaze svojstva koja se lako dokažu.

Teorem 1.9. *Vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\angle(p_1, p_2) + \angle(p_2, p_1) = 0$.
2. *Ako je pravac p_1 paralelan pravcu q_1, a pravac p_2 paralelan pravcu q_2 tada*
$$\angle(p_1, p_2) = \angle(q_1, q_2).$$
Analogno vrijedi ako su odgovarajući pravci međusobno okomiti.
3. *Za tri različite točke A, B i C u ravnini vrijedi $\angle ABC = -\angle CBA$.*
4. *Tri različite točke A, B, C su kolinearne ako i samo ako je*
$$\angle ABC = 0,$$
ili ako za bilo koju točku D, različitu od navedene tri, vrijedi:
$$\angle ACD = \angle BCD.$$
5. *Za bilo koje četiri različite točke A, B, C, D u ravnini vrijedi:*
$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BAD + \angle DCB.$$
6. *Četiri različite točke A, B, C i D leže na kružnici ako i samo ako*
$$\angle ABC = \angle ADC.$$
7. *Za bilo koje tri točke A, B i C vrijedi:*
$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0.$$
8. *Za tri različite točke A, B i C koje leže na kružnici sa središtem u točki O vrijedi $2\angle ABC = \angle AOC$.*

Dokaz. Dokazi navedenih tvrdnji nalaze se u literaturi (vidi [8], [9] i [10]). □

Uzmimo za primjer četiri različite točke A, B, C, i D koje leže na kružnici u tom poretku. Tada ako promatramo neorijentirane kutove prema teoremu o obodnom kutu imamo $\angle ABD = \angle ACD$. S druge strane, ako se te točke nalaze u poretku A, B, D i C tada u smislu neorijentiranih kutova imamo $\angle ABD = 180^\circ - \angle DCA$. U tom istom slučaju, ako smatramo da su kutovi orijentirani imamo:

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle DCA = -\angle DCA = \angle ACD.$$

Upravo u takvim situacijama je lakše raditi s orijentiranim kutovima.

Spomenimo još jednu važnu činjenicu rada s orijentiranim kutovima. Pogledajmo zadnje svojstvo u teoremu 1.9. Naime, dijeljenje s 2 je opasno kada radimo modulo 180°. Preciznije, iz jednakosti $2\angle A = 2\angle B$, ne slijedi $\angle A = \angle B$, zbog mogućnosti da je $\angle A = \angle B + 90^\circ$. Ako to usporedimo s kongruencijama, znamo da kongruenciju $2a \equiv 2b (\bmod c)$ ne smijemo dijeliti s 2 kada je c paran. Iz istog razloga ne smijemo pisati $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, jer kasniji izraz možda neće biti dobro definiran.

Sada se možemo pitati što se događa s zbrojem polovina kutova u trokutu. Znamo da, ako označimo kutove nekog trokuta s α, β i γ tada gledajući neorijentirane kutove vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, odnosno $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$. Srećom, to će vrijediti i u smislu orijentiranih kutova, ali pri tome valja paziti da svi kutovi imaju istu orijentaciju.

Lema 1.10. *Neka je ABC trokut i O središte upisane kružnice trokuta. Tada je* $\angle ABO = \angle OBC$, $\angle BCO = \angle OCA$ *i* $\angle CAO = \angle OAB$ *te vrijedi*

$$\angle ABO + \angle BCO + \angle CAO = \angle OBC + \angle OCA + \angle OAB = 90^\circ.$$

Dokaz. Prema svojstvu 7. iz teorema 1.9 znamo da za kutove trokuta ABC vrijedi

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 0. \tag{1.2}$$

Prema pretpostavkama leme je $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$, $\angle BCA = \angle BCO + \angle OCA$ i $\angle CAB = \angle CAO + \angle OAB$. Uvrstiviši to u (1.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} \angle ABO + \angle OBC + \angle BCO + \angle OCA + \angle CAB = \angle CAO + \angle OAB = 0 \\ \angle ABO + \angle BCO + \angle CAO = -(\angle OBC + \angle OCA + \angle OAB). \end{aligned}$$

Jedini kut koji je sukladan svom sukutu je pravi kut. Slijedi tvrdnja. □

Iako valja biti oprezan, rad s orijetiranim kutovima u većini slučajeva olakšava račun, stoga od sada pa do kraja rada smatramo da su kutovi orijentirani, osim ako nije drugačije naglašeno.

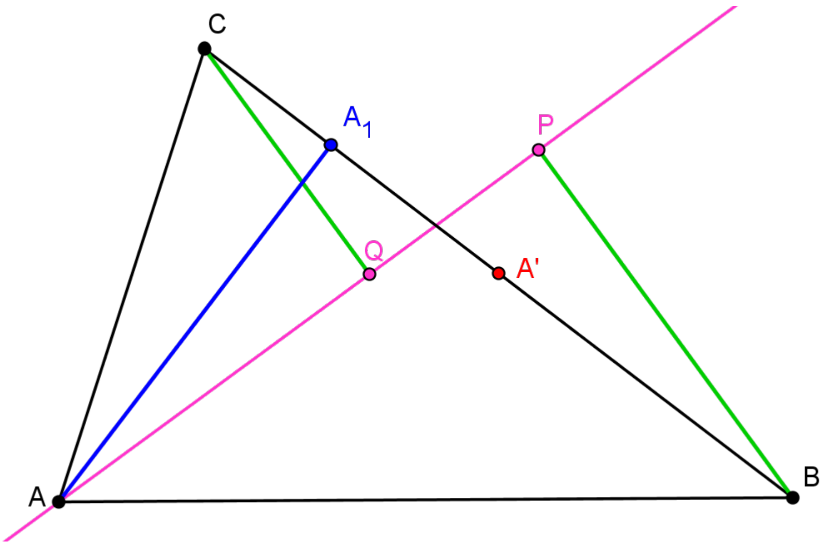
Poglavlje 2

Teorem o Feuerbachovoj točki

Kako bismo pripremili teren za dokaz glavnog teorema potrebno je dokazati nekoliko teorema.

Teorem 2.1. *Neka je ABC trokut i A' polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je A_1 nožište visine iz vrha A na pravac BC, te neka su točke P i Q redom ortogonalne projekcije točaka B i C na simetralu kuta BAC. Tada točke A', A_1, P i Q leže na kružnici.*

Dokaz. Imamo sljedeću situaciju:

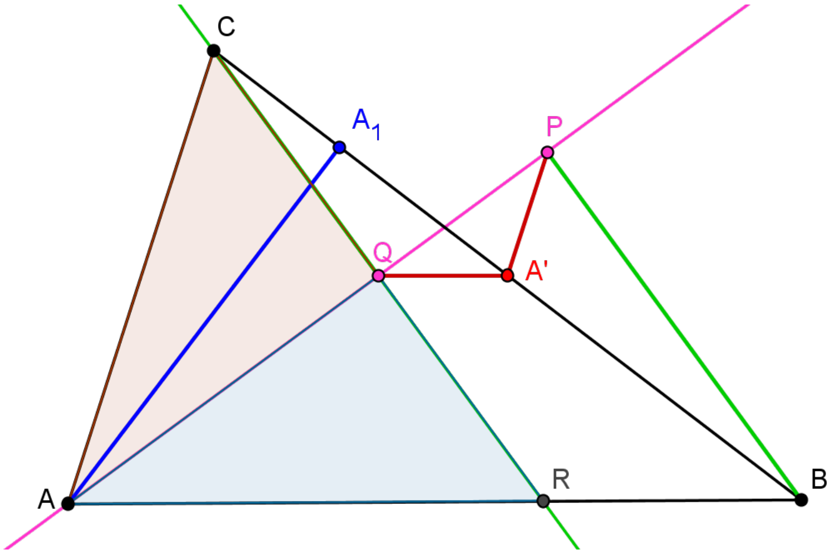


Slika 2.1: Teorem 2.1

Za dokaz ovog teorema koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 2.2. *Sukladno oznakama iz teorema 2.1 vrijedi $A'P \parallel AC$ i $A'Q \parallel AB$.*

Dokaz. Neka je točka R točka presjeka pravaca CQ i AB.



Slika 2.2: Lema 2.2

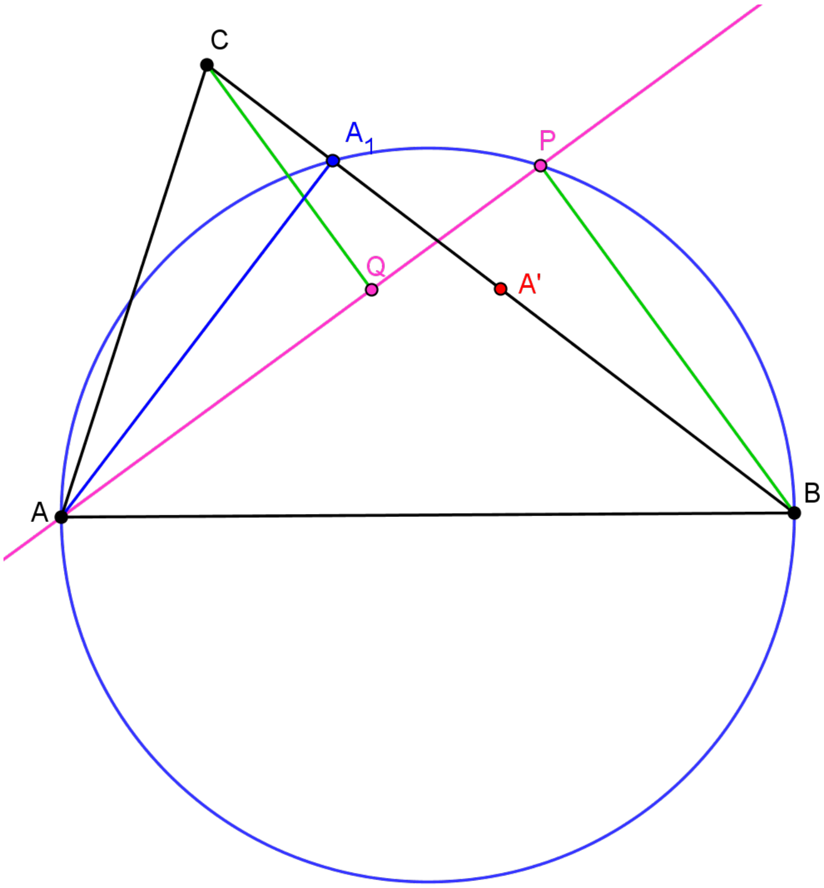
Sada uočimo trokute ACQ i RAQ. Točka Q leži na simetrali kuta pa je

$$\angle CAQ = \angle QAR.$$

Nadalje je $\angle AQC = 90°$ te $\angle AQR = 90°$, pa je $\angle AQC = \angle AQR$. Također, stranica $\overline{AQ}$ zajednička je za oba trokuta. Dakle, prema teoremu *K-S-K* o sukladnosti trokuta promatrana dva trokuta su sukladni, ali su im odgovarajući kutovi suprotnih orijentacija. Iz toga slijedi da je točka Q polovište dužine $\overline{CR}$. Znamo da je točka A' polovište stranice $\overline{BC}$ pa je dužina $\overline{QA'}$ srednjica trokuta CRB, pa je prema teoremu o srednjici trokuta ta dužina paralelna s dužinom $\overline{RB}$, odnosno $\overline{AB}$.

Analogno dokazujemo tvrdnju $A'P \parallel AC$. □

Provedimo sada dokaz iskazanog teorema.
Naime, znamo da je $\angle AA_1B = 90°$ te $\angle APB = 90°$. Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 točke A, B, A_1 i P leže na jednoj kružnici. S obzirom na to da su kutovi pravi, promjer te kružnice je $\overline{AB}$ (plava kružnica na slici 2.3).



Slika 2.3: Teorem 2.1

Opet prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo $\angle ABA_1 = \angle APA_1$ pa je i $\angle ABC = \angle QPA_1$. U skladu s definicijom orijentiranih kutova možemo pisati

$$\angle(AB, BC) = \angle(QP, PA_1).$$

Iz dokazane leme 2.2 znamo da je $QA' \parallel AB$ stoga prema svojstvu 2. iz teorema 1.9 imamo $\angle(AB, BC) = \angle(QA', BC)$ to jest $\angle ABC = \angle QA'A_1$.

Stoga je $\angle QPA_1 = \angle ABC = \angle QA'A_1$ te svojstvu 6. iz teorema 1.9 slijedi da točke A_1, A', P i Q leže na kružnici, a to je i trebalo dokazati. □

Izdvojimo rezultat koji je dokazan u dokazu, a kasnije ćemo ga koristiti:

Korolar 2.3. *Neka je ABC trokut i A_1 nožište okomice iz vrha A na pravac BC. Neka su P i Q ortogonalne projekcije vrhova B i C na simetralu kuta BAC. Tada vrijedi:*

$$\angle ABC = \angle QPA_1.$$

Analogno, $\angle ACB = \angle PQA_1$.

Na temelju dokazanih tvrdnji lako možemo dokazati sljedeće dvije leme.

Lema 2.4. *Sukladno oznakama iz teorema 2.1, trokut $PA'Q$ je jednakokračan, odnosno vrijedi* $|QA'| = |A'P|$.

Dokaz. Iz leme 2.2 znamo da su $A'Q \parallel AB$, stoga prema navedenim svojstvima orijentiranih kutova u teoremu 1.9 imamo

$$\angle(A'Q, QP) = \angle(AB, QP).$$

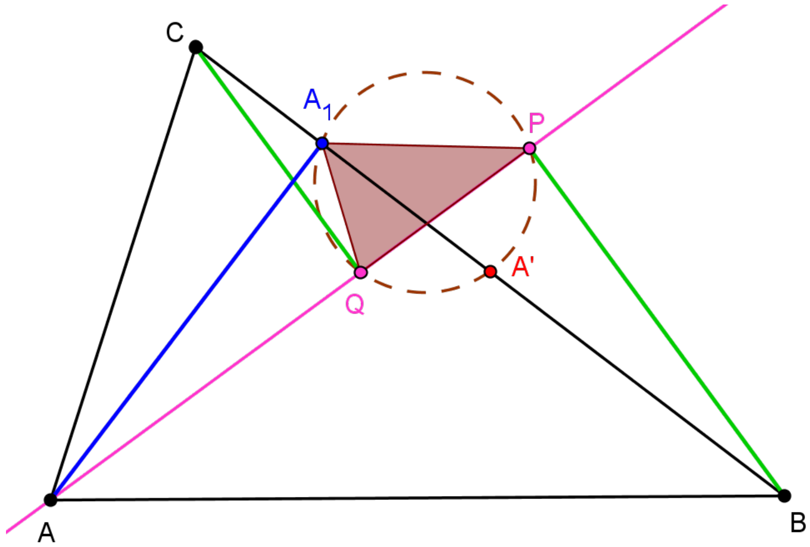
Slično iz $A'P \parallel AC$ znamo

$$\angle(QP, A'P) = \angle(QP, AC).$$

Kako točke P i Q leže na simetrali kuta BAC vrijedi da je $\angle(AB, QP) = \angle(QP, AC)$. Stoga je $\angle(A'Q, QP) = \angle(QP, A'P)$ to jest $\angle A'QP = \angle QPA'$. Dakle, zaista trokut $PA'Q$ je jednakokračan i vrijedi $|QA'| = |A'P|$. □

Lema 2.5. *Sukladno oznakama iz teorema 2.1, trokuti A_1PQ i ABC su slični, a odgovarajući kutovi su im suprotne orijentacije.*

Dokaz. Iz korolara 2.3 znamo $\angle QPA_1 = \angle ABC$ i $\angle PQA_1 = \angle ACB$, pa prema teoremu *K-K* o sličnosti trokuta slijedi tvrdnja.



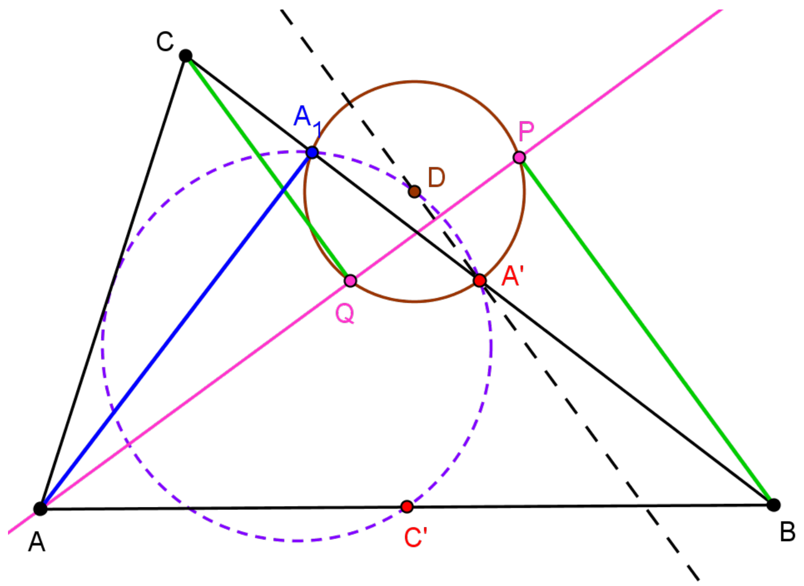
Slika 2.4: Lema 2.5

□

Sljedeći teorem povezuje dokazane tvrdnje i kružnicu devet točaka promatranog trokuta ABC.

Teorem 2.6. *Neka je ABC trokut, A' polovište stranice $\overline{BC}$, A_1 nožište okomice iz A na BC, te P i Q ortogonalne projekcije točaka B i C na simetralu kuta BAC redom. Tada središte D kružnice kroz točke P, Q, A' i A_1 leži na kružnici devet točaka trokuta ABC i pravac $A'D$ okomit je na simetralu kuta CAB.*

Dokaz. Zapravo tvrdimo da je sjecište Feuerbachove kružnice trokuta ABC i pravca okomitog na simetralu kuta CAB u točki A'(različito od točke A') upravo središte kružnice kroz točke P, Q, A' i A_1.



Slika 2.5: Teorem 2.6

S obzirom na to da je točka D središte trokutu $PA'Q$ opisane kružnice, ona leži na simetralama stranica tog trokuta. Posebno, leži na simetrali stranice $\overline{PQ}$. No, na toj simetrali leži i točka A' jer prema lemi 2.4 trokut je $PA'Q$ jednakokračan. Prema tome, pravac $A'D$ okomit je na pravac PQ odnosno na simetralu kuta CAB. Vrijedi:

$$\angle(A'D, PQ) = 90^\circ.$$

Pokažimo da točka D leži na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC. Feuerbachova kružnica prolazi kroz polovišta stranica danog trokuta i nožišta visina. Prema tome točke A', C' i A_1 leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC.
Kako je točka D središte kružnice kroz točke P, Q, A' i A_1 vrijedi da je $|DA_1| = |DA'|$, odnosno trokut A_1DA' je jednakokračan pa je $\angle A'A_1D = \angle DA'A_1$. Također je $\angle AA_1B = 90^\circ$ pa točka A_1 leži na kružnici sa središtem u C' i promjerom $\overline{AB}$. Dakle, i trokut $A_1C'B$ je jednakokračan jer je $|A_1C'| = |C'B|$. Slijedi jednakost $\angle C'A_1B = \angle A_1BC'$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\angle C'A_1D &= \angle C'A_1B + \angle BA_1D \\
&= \angle C'A_1B + \angle A'A_1D = \angle A_1BC' + \angle DA'A_1 \\
&= \angle(CB, AB) + \angle(DA', CB) = \angle(DA', CB) + \angle(CB, AB) \\
&= \angle(DA', AB) = \angle(DA', PQ) + \angle(PQ, AB) \\
&= 90^\circ + \angle(PQ, AB). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Kako je pravac PQ simetrala kuta BAC vrijedi $\angle(PQ, AB) = \angle(AC, PQ)$. Stoga iz (2.1) dobivamo:

$$\begin{aligned}\angle C'A_1D &= 90^\circ + \angle(AC, PQ)\\ &= \angle(AC, PQ) + 90^\circ\\ &= \angle(AC, PQ) + \angle(PQ, A'D)\\ &= \angle(AC, A'D).\end{aligned}$$

No, dužina $\overline{A'C'}$ je srednjica trokuta ABC pa je $A'C' \parallel AC$, pa za kutove vrijedi

$$\angle(AC, A'D) = \angle(A'C', A'D).$$

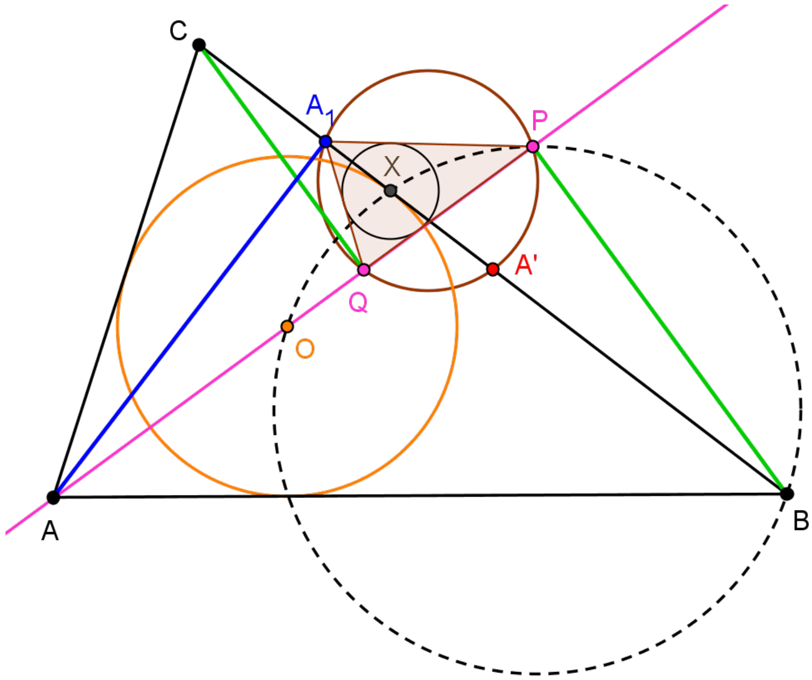
Konačno,

$$\angle C'A_1D = \angle(A'C', A'D) = \angle(C'A', A'D) = \angle C'A'D.$$

Dobili smo da su kutovi $\angle C'A_1D$ i $\angle C'A'D$ sukladni, pa prema tome točke C', A_1, A' i D leže na jednoj kružnici, odnosno točka D leži na kružnici devet točaka trokuta ABC. □

Teorem 2.7. *Neka kružnica upisana trokutu ABC dira stranicu $\overline{BC}$ u točki X te neka je A_1 nožište visine iz vrha A. Neka su P i Q redom ortogonalne projekcije točaka B i C na simetralu kuta BAC. Tada je točka X središte trokutu A_1PQ upisane kružnice.*

Dokaz. Neka je O središte trokutu ABC upisane kružnice, te neka je O' središte trokutu A_1PQ upisane kružnice. Tvrdimo $X = O'$.



Slika 2.6: Teorem 2.7

Točka O nalazi se na pravcu PQ. Pravac BC je tangenta upisane kružnice trokuta ABC pa je pravac OX okomit na pravac BC. Stoga je $\angle OXB = 90°$. Također, znamo da je $\angle OPB = 90°$, pa točke X i P leže na kružnici promjera $\overline{BO}$.

Prema teoremu o obodnom kutu vrijedi $\angle XBO = \angle XPO$, odnosno

$$\angle XPQ = \angle CBO. \tag{2.2}$$

Pošto su trokuti ABC i A_1PQ slični (lema 2.5) postoji preslikavanje sličnosti koje trokut ABC preslikava u trokut A_1PQ. Posebno, to preslikavanje preslikava točku O kao središte upisane kružnice trokuta ABC u točku O' koja je središte upisane kružnice trokuta A_1PQ. Osim toga, pri tom preslikavanju kutovi mijenjaju orijentaciju pa je

$$\angle O'PQ = -\angle OBC = \angle CBO. \tag{2.3}$$

Iz (2.2) i (2.3) dobivamo da je

$$\angle O'PQ = \angle XPQ.$$

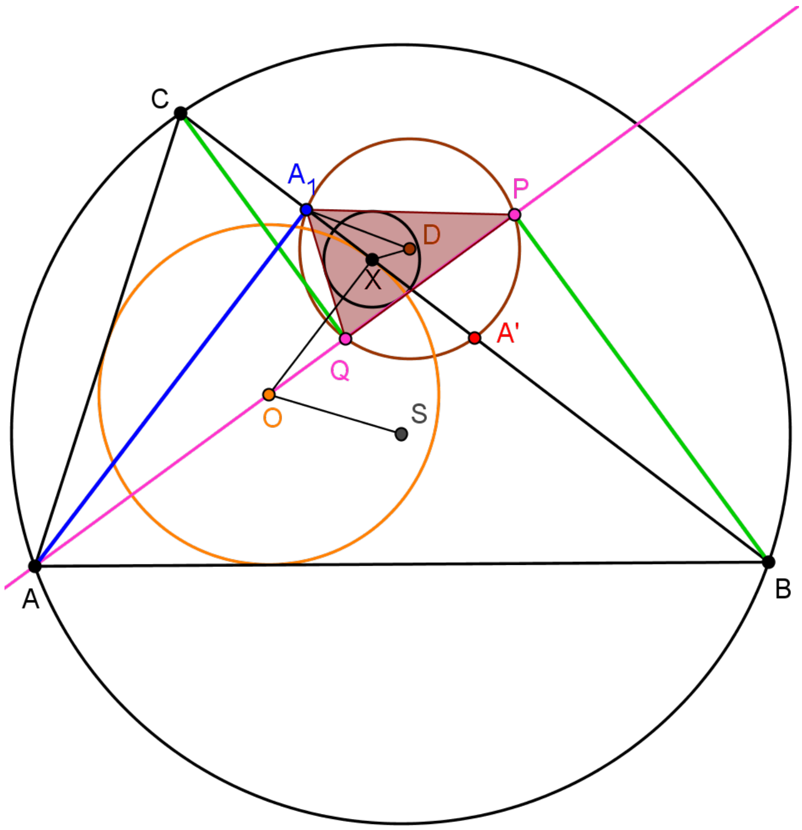
Dakle, točka X leži na pravcu $O'P$. Analogno se pokaže da točka X leži na pravcu $O'Q$. No, pravci $O'P$ i $O'Q$ imaju samo jednu zajedničku točku i to O'. Stoga je $X = O'$, a to smo i trebali dokazati. □

Teorem 2.8. *Neka kružnica upisana trokutu ABC dira stranicu $\overline{BC}$ u točki X te neka je A_1 nožište visine iz vrha A. Neka su P i Q ortogonalne projekcije točaka B i C na simetralu kuta BAC. Neka je X središte upisane kružnice, a D središte opisane kružnice trokuta QPA_1. Označimo sa S središte opisane kružnice, a s O središte upisane kružnice trokuta ABC. Vrijedi*

$$\angle(XD, AO) = \angle(BC, OS).$$

Dokaz. Već smo spomenuli da postoji preslikavanje sličnosti koje preslikava trokut ABC u trokut A_1PQ, a točku O preslikava u točku X. Nadalje, to preslikavanje preslikava točku S u točku D jer su to središta opisanih kružnica promatranih trokuta. Zbog sličnosti tih trokuta (lema 2.5) vrijedi:

$$\angle(XD, QP) = -\angle(OS, BC).$$



Slika 2.7: Teorem 2.8

No, pravac QP podudara se s pravcem AO stoga možemo pisati:

$$\angle(XD, AO) = -\angle(OS, BC),$$

odnosno,

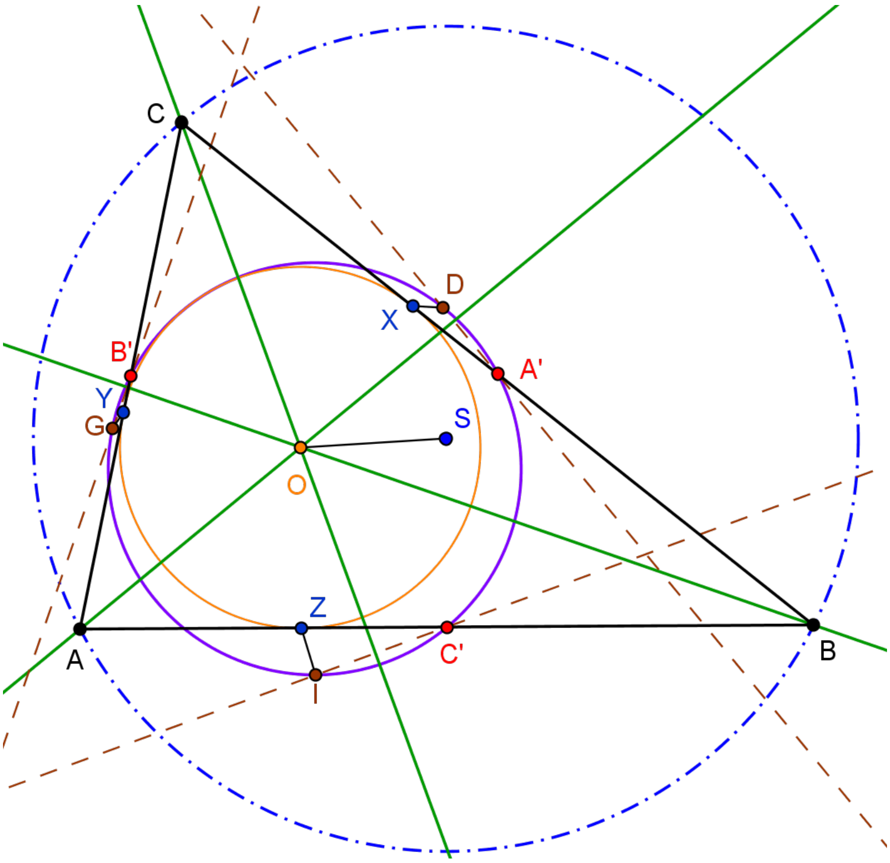
$$\angle(XD, QP) = \angle(BC, OS).$$

□

Sada smo pripremili teren za dokaz **Feuerbachova teorema** koji donosimo u nastavku.

Teorem 2.9. *U svakom se trokutu upisana kružnica i kružnica devet točaka (Feurbachova kružnica) diraju.*

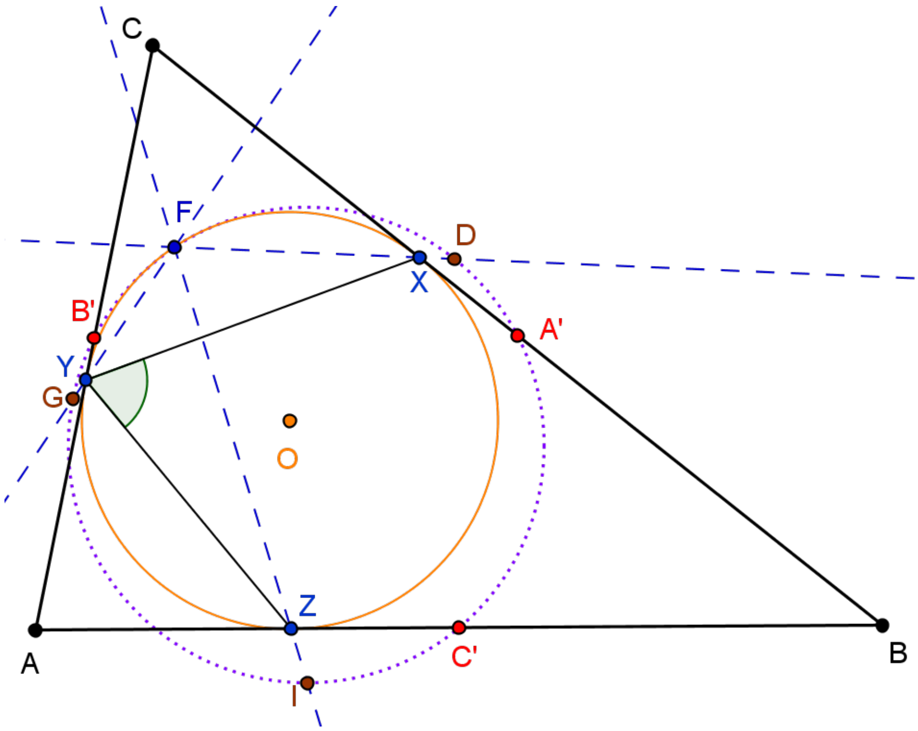
Dokaz. Neka su X, Y i Z redom točke dodira upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Te su točke međusobno simetrične s obzirom na simetrale kutova na čijim krakovima leže, pa su pravci XY, XZ i YZ okomiti na odgovarajuće simetrale kutova. Neka su točke D, G i I točke presjeka Feuerbachove kružnice trokuta ABC s okomicama u točkama A', B' i C' na simetrale kutova CAB, ABC i BCA redom.



Slika 2.8: Teorem 2.9 a)

Prema teoremu 2.8 vrijedi sljedeće:

$$
\begin{aligned}
\angle(XD, AO) &= \angle(BC, OS), \\
\angle(YG, BO) &= \angle(AC, OS), \\
\angle(ZI, CO) &= \angle(AB, OS). \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$



Slika 2.9: Teorem 2.9 b)

Na temelju (2.4) i svojstava orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo računati:

$$\begin{aligned}
\angle(XD, ZI) &= \angle(XD, AO) + \angle(AO, ZI) \\
&= \angle(XD, AO) + \angle(AO, CO) + \angle(CO, ZI) \\
&= \angle(BC, OS) + \angle(AO, CO) - \angle(ZI, CO) \\
&= \angle(BC, OS) - \angle(AB, OS) + \angle(AO, CO) \\
&= \angle(BC, OS) + \angle(OS, AB) + \angle(AO, CO) \\
&= \angle(BC, AB) + \angle(AO, CO) \\
&= \angle(BC, AO) + \angle(AO, AB) + \angle(AO, CO) \\
&= \angle(BC, AO) + \angle(AO, CO) + \angle(AO, AB) \\
&= \angle(BC, CO) + \angle(AO, AB). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Znamo je CO simetrala kuta ACB pa je $\angle(BC, CO) = \angle(CO, AC)$. Analogno je i $\angle(AO, AB) = \angle(AC, AO)$. Pa uvrštavanjem u (2.5) dobivamo:

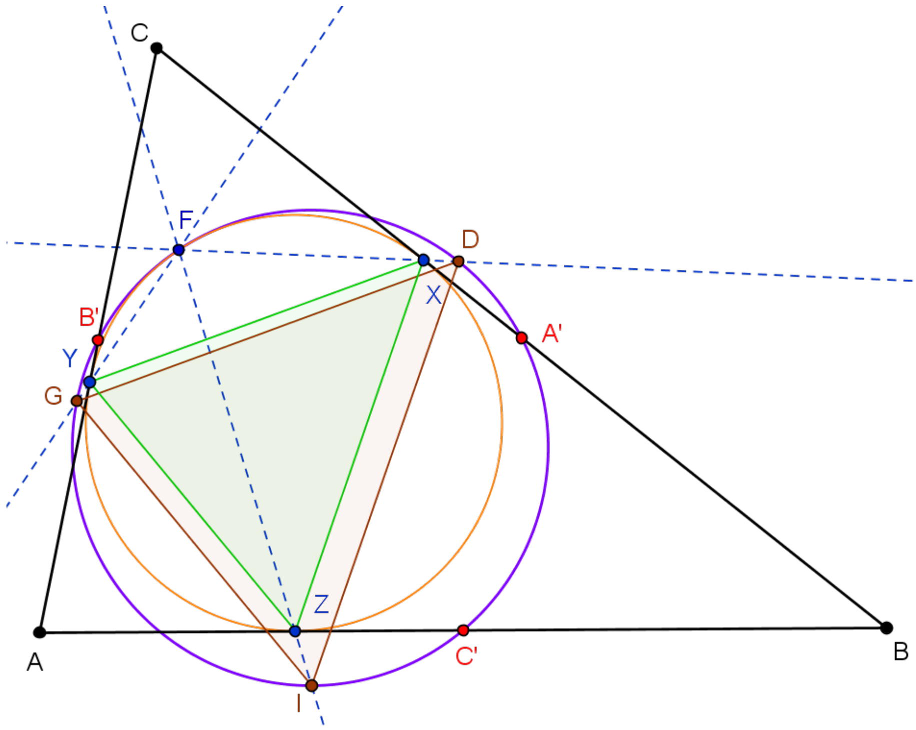
$$\begin{aligned}
\angle(XD, ZI) &= \angle(CO, AC) + \angle(AC, AO) \\
&= \angle(CO, AO) \\
&= \angle(CO, XY) + \angle(XY, YZ) - \angle(AO, YZ) \\
&= 90^\circ + \angle(XY, YZ) - 90^\circ \\
&= \angle XYZ. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Neka je sada točka F točka presjeka upisane kružnice i pravca XD različita od X. Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 je $\angle XFZ = \angle XYZ$. Prema (2.6) imamo:

$$\angle(XD, ZI) = \angle XYZ = \angle XFZ.$$

Kako je $\angle XFZ = \angle(XD, FZ)$ to je $\angle(XD, ZI) = \angle(XD, FZ)$ iz čega slijedi da su pravci FZ i ZI paralelni. No, ti pravci imaju zajedničku točku Z pa se oni zapravo podudaraju. Dakle, točka F leži na pravcu ZI. Analogno bismo dobili $F \in YG$. Dakle, točka F leži na upisanoj kružnici trokuta ABC i ona je sjecište pravaca XD, YG i ZI.

Sada pokažimo da su trokuti XYZ i DGI homotetični. Znamo da točke A', B' i C' leže na kružnici devet točaka trokuta ABC, a pokazali smo da i točke D, G i I također leže na toj kružnici. Tada prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 znamo $\angle IC'B' = \angle IGB'$, odnosno $\angle(C'I, C'B') = \angle(IG, B'G)$. Pravci $C'I$ i YX okomiti su na simetralu kuta ACB stoga su oni paralelni. Isto tako, pravac XZ paralelan je s pravcem $B'G$. Iz toga i iz $B'C' \parallel BC$ slijedi $\angle(C'I, C'B') = \angle(YX, CB)$, odnosno $\angle(IG, B'G) = \angle(IG, XZ)$. Dakle, $\angle(IG, XZ) = \angle(YX, CB)$. Nadalje, kut $\angle(YX, CB)$ je kut između tetive $\overline{YX}$ upisane kružnice i tangente na tu kružnicu u točki X. Pa je prema teoremu o kutu između tangente i tetive (teorem 1.3) navedeni kut jednak je $\angle YZX$. Dakle, $\angle(IG, ZX) = \angle(YX, CB) = \angle YZX$, odnosno $\angle(IG, XZ) = \angle(ZY, XZ)$. Iz toga slijedi da su pravci IG i YZ paralelni. Slično se pokazuje $GD \parallel YX$ i $DI \parallel XZ$.



Slika 2.10: Teorem 2.9 c)

Dakle, trokuti DGI i XYZ zaista su homotetični. Centar njihove homotetije je sjecište pravaca DX, GY i IZ, a to je upravo točka F. Stoga postoji homotetija s centrom u točki F koja preslikava trokut XYZ u trokut DGI, pa ta homotetija preslikava opisanu kružnicu trokuta XYZ u opisanu kružnicu trokuta DGI. No, opisana kružnica trokuta XYZ je upisana kružnica trokuta ABC, a opisana kružnica trokuta DGI je kružnica devet točaka trokuta ABC. Dakle, homotetija s centrom u točki F preslikava upisanu kružnicu trokuta ABC u njegovu Feuerbachovu kružnicu. Budući da je točka F centar opisane homotetije ona je fiksna. Znamo da F leži na upisanoj kružnici trokuta ABC pa iz toga zaključujemo da leži i na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta. Osim toga, tangenta kroz točku F je također fiksna pa dvije promatrane kružnice diraju u točki F. □

Točka diranja upisane i Feuerbachove kružnice trokuta zove se **Feurbachova točka**.
Uočimo da smo dokazali samo dio teorema koji se smatra Feuerbachovim teoremom. Naime, originalni teorem još tvrdi da Feuerbachova kružnica dira i pripisane kružnice trokuta.

No, to nije tema ovog rada, zato smo Feuerbachovom teoremu pridijelili naziv *Teorem o Feuerbachovoj točki*.

Poglavlje 3

Svojstva Feuerbachove točke

Nakon što smo dokazali da se upisana kružnica trokuta i Feuerbachova kružnica diraju, pitamo se postoji li veza te točke s drugim elementima trokuta ABC. To je tema brojnih zadataka na matematičkim natjecanjima. Do sada je otkriveno puno zanimljivih svojstava Feuerbachove točke, od kojih ćemo neka navesti u nastavku. Detaljnije može se pronaći u literaturi (vidi [5], [6] i [15]).

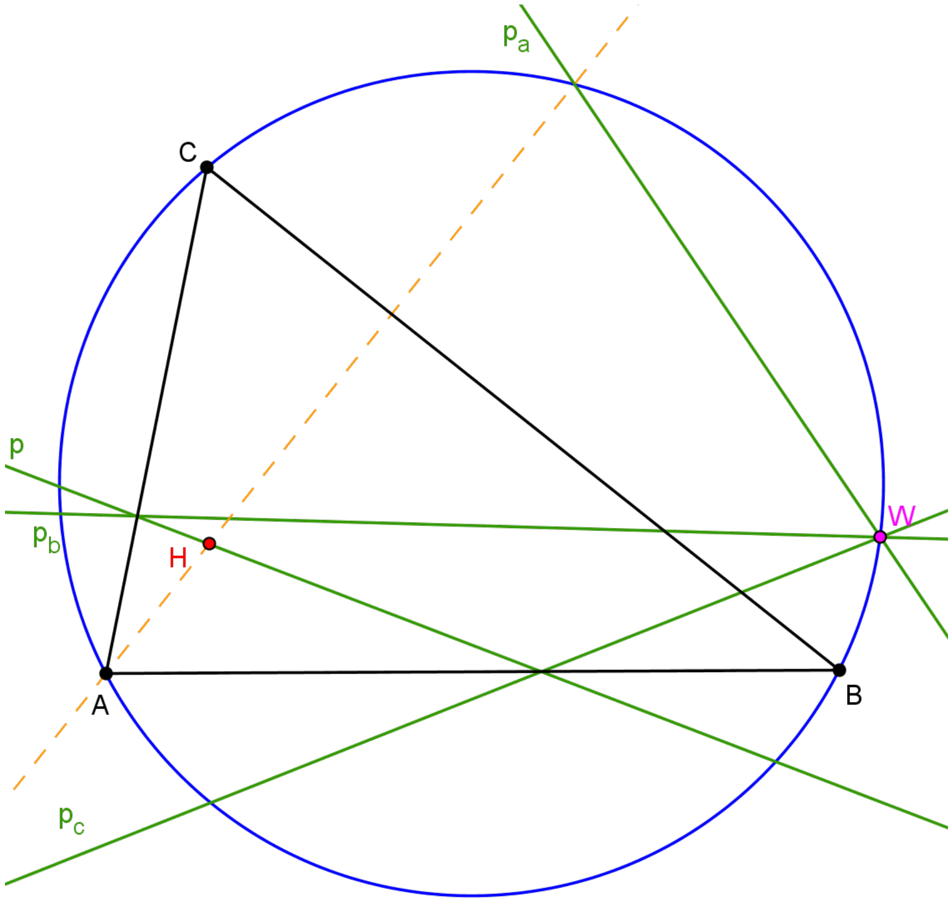
3.1 Feuerbachova točka kao anti-Steinerova točka

U ovom ćemo se poglavlju baviti posebnim trokutima unutar zadanog trokuta. No, prvo moramo dokazati teorem iz kojeg proizlazi definicija **anti-Steinerove točke**.

Teorem 3.1. *Neka je ABC trokut, H njegov ortocentar te p pravac kroz ortocentar. Osnosimetrične slike pravca p s obzirom na stranice promatranog trokuta prolaze kroz točku W koja leži na opisanoj kružnici trokuta ABC. Također, vrijedi:*

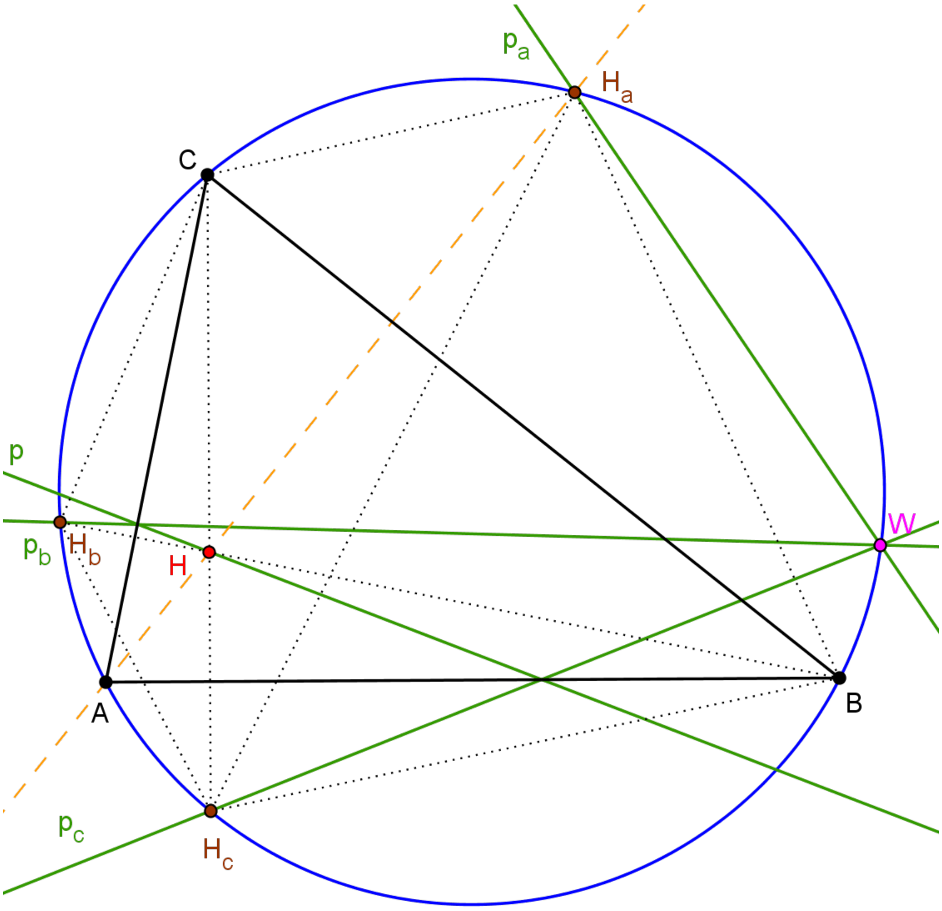
$$\angle CBW = \angle CAW = 90^\circ - \angle(AB, p).$$

Dokaz. Neka su p_a, p_b i p_c osnosimetrične slike pravca p s obzirom na pravce BC, AC i AB.



Slika 3.1: Teorem 3.1 a)

S obzirom na to da je H ortocentar trokuta ABC, pravci AH i BC su međusobno okomiti. Također, $BH \perp AC$ i $CH \perp AB$. Neka je sada H_c osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac AB.



Slika 3.2: Teorem 3.1 b)

Tada vrijedi:

$$\angle AH_cB = -\angle AHB = \angle BHA. \tag{3.1}$$

Pokažimo najprije da točka H_c leži na opisanoj kružnici trokuta ABC. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \angle BHA &= \angle(BH, AH) = \angle(BH, AC) + \angle(AC, BC) - \angle(AH, BC) \\ &= 90^\circ + \angle(AC, BC) - 90^\circ \\ &= \angle(AC, BC) = \angle ACB. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i (3.2) dobivamo:

$$\angle AH_cB = \angle ACB,$$

što znači da točka H_c leži na opisanoj kružnici trokuta ABC. Uočimo da bismo analogno mogli dokazati da osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac AC (točka H_b) kao i osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac BC (točka H_a) leže na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Kako je $CH \perp AB$ te $HH_c \perp AB$ to točke C, H i H_c leže na okomici na pravac AB. Također, pravac p prolazi kroz točku H, pa pravac p_c prolazi kroz točku H_c zbog osne simetrije. Pokazali smo da točka H_c leži na opisanoj kružnici trokuta ABC pa je ona zapravo sjecište pravca p_c i opisane kružnice. Neka je sada točka W_1 točka presjeka pravca p_c i opisane kružnice različita od točke H_c. Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo:

$$\angle CAW_1 = \angle CH_cW_1.$$

Jer je pravac p_c osnosimetričan pravcu p s obzirom na pravc AB to je:

$$\angle(AB, p_c) = \angle(p, AB) = -\angle(AB, p).$$

Možemo pisati:

$$\begin{aligned}\angle CAW_1 &= \angle CH_cW_1 = \angle(CH, p_c)\\ &= \angle(CH, AB) + \angle(AB, p_c)\\ &= 90^\circ - \angle(AB, p).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 i iz (3.3) imamo:

$$\angle CBW_1 = \angle CAW_1 = 90^\circ - \angle(AB, p).$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\angle BAW_1 &= \angle BAC + \angle CAW_1\\ &= \angle(AB, AC) + 90^\circ - \angle(AB, p)\\ &= 90^\circ - (\angle(AC, AB) + \angle(AB, p))\\ &= 90^\circ - \angle(AC, p).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Neka je sada W_2 sjecište pravca p_b i opisane kružnice. Sličnim postupkom kao (3.3), dobivamo:

$$\angle BAW_2 = 90^\circ - \angle(AC, p).$$

Ako to usporedimo s (3.4) imamo:

$$\angle BAW_1 = \angle BAW_2,$$

odnosno $W_2 \in AW_1$. No, točka W_2 leži i na opisanoj kružnici pa je ona zapravo sjecište opisane kružnice i pravca AW_1 različito od A, a to je točka W_1. Dakle, točka W_1 leži na pravcima p_b i p_c.

Analognim zaključivanjem možemo pokazati da $W_1 \in p_a$, čime smo zapravo dobili da je točka W_1 sjecište pravaca p_a, p_b i p_c, a osim toga je i na opisanoj kružnici trokuta ABC. Pokazali smo i da zadovoljava

$$\angle CBW_1 = \angle CAW_1 = 90^\circ - \angle(AB, p),$$

iz čega slijedi da je W_1 upravo točka W spomenuta u teoremu. □

Točku W iz teorema 3.1 zovemo **anti-Steinerova točka** pravca p s obzirom na trokut ABC. Možemo se pitati zašto baš naziv *anti-Steinerova točka*. Naime, može se pokazati da točke simetrične nekoj točki R koja leži na opisanoj kružnici trokuta ABC s obzirom na pravce na kojima leže stranice trokuta ABC, leže na jednom pravcu koji prolazi kroz ortocentar trokuta ABC. Taj se pravac naziva **Steinerov pravac**[1] točke R s obzirom na trokut ABC.

Uočimo da je sukladno oznakama iz teorema 3.1 pravac p Steinerov pravac točke W s obzirom na trokut ABC. Naime, budući da W leži na pravcu p_a simetričnom pravcu p s obzirom na BC, točka simetrična točki W s obzirom na pravac BC leži na pravcu simetričnom pravcu p_a s obzirom na BC, a to je upravo pravac p. Slično vrijedi za točke simetrične točki W s obzirom na pravce AC i AB.

To opravdava naziv *anti-Steinerova točka*. Naziv *Steinerova točka* je naziv za određenu točku koja je povezana s prvim Brocardovim trokutom, X_{99} o kojoj se više može naći u online-enciklopediji o trokutu (vidi [11]).

Uočimo jedan zanimljiv korolar navedenog teorema.

Korolar 3.2. *Neka je ABC trokut. Pravci simetrični Eulerovom pravcu trokuta ABC s obzirom na stranice tog trokuta sijeku se u jednoj točki koja leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.*

Dokaz. S obzirom da Eulerov pravac trokuta ABC prolazi kroz ortocentar, tvrdnja slijedi direktno iz teorema 3.1. □

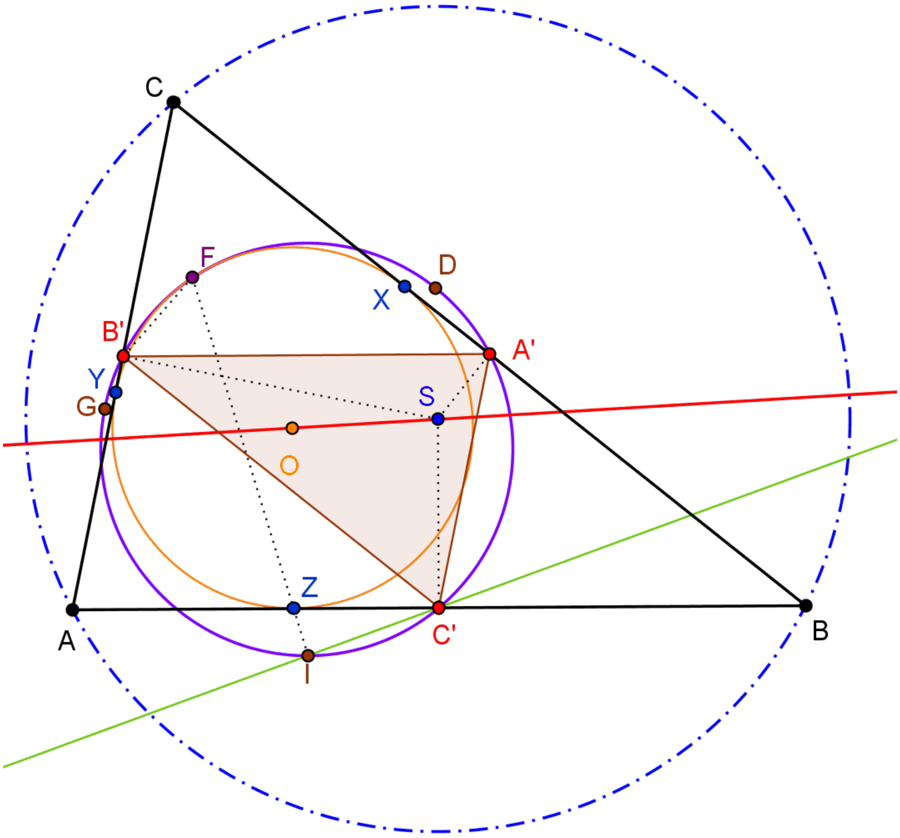
Sjecište opisano u korolaru 3.2 naziva se **Eulerova točka simetrije** trokuta ABC.

U nastavku promatramo anti-Steinerovu točku trokuta čiji su vrhovi polovišta stranica zadanog trokuta.

Teorem 3.3. *Neka je ABC trokut i neka je S središte opisane kružnice, a O središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su A', B' i C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Feuerbachova točka F trokuta ABC je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut $A'B'C'$.*

Dokaz. Prije svega moramo pokazati da je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut $A'B'C'$ definirana, odnosno moramo pokazati da pravac OS prolazi kroz ortocentar trokuta $A'B'C'$.

[1] Jacob Steiner (1796. – 1863.), švicarski matematičar



Slika 3.3: Teorem 3.3

Naime, kako je točka S središte opisane kružnice trokuta ABC, to ona leži na simetralama stranica trokuta ABC. Stranice trokuta $A'B'C'$ su zapravo srednjice trokuta ABC pa su one paralelne sa stranicama trokuta ABC. Štoviše, vrhovi trokuta $A'B'C'$ su polovišta stranica trokuta ABC pa su simetrale stranice trokuta ABC pravci na kojima leže visine trokuta $A'B'C'$, pa je upravo točka S ortocentar trokuta $A'B'C'$. Stoga je OS Eulerov pravac trokuta $A'B'C'$ pa zaista postoji anti-Steinerova točka W pravca OS s obzirom na trokut $A'B'C'$ prema teoremu 3.1 vrijedi:

$$\angle C'B'W = 90^\circ - (A'B', OS). \tag{3.5}$$

Neka su X, Y i Z redom točke dodira upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Neka je I sjecište Feuerbachove kružnice i okomice povučene u točki C' na simetralu kuta BCA. Tada iz teorema 2.8 imamo:

$$\angle(ZI, CO) = \angle(AB, OS).$$

No, kako su AB i $A'B'$ paralelni pravci to je:

$$\angle(ZI, CO) = \angle(AB, OS) = \angle(A'B', OS).$$

Nadalje, prema teoremu 2.6 je $\angle(C'I, CO) = 90°$, pa točke B', C', I i F leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC. Sada imamo:

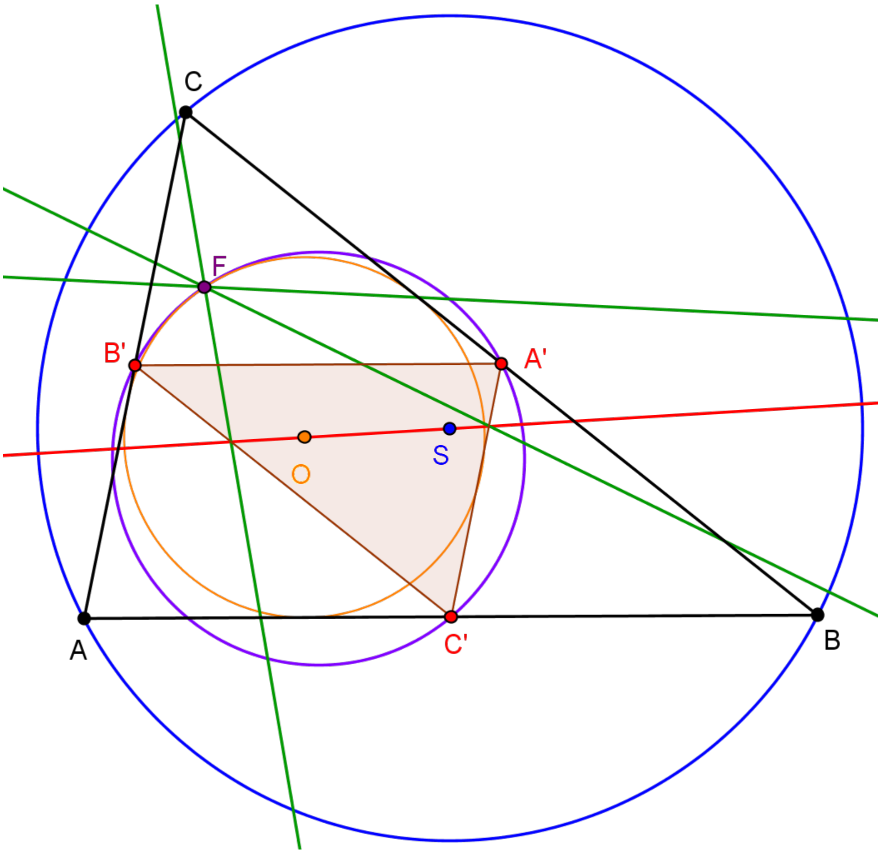
$$\begin{aligned} \angle C'B'F = \angle C'IF &= \angle(C'I, ZI) \\ &= \angle(C'I, CO) + \angle(CO, ZI) \\ &= 90° - \angle(ZI, CO) \\ &= 90° - \angle(A'B', OS). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Usporedbom (3.5) i (3.6) dobivamo:

$$\angle C'B'F = \angle C'B'W,$$

čime smo pokazali da točka F leži na pravcu $B'W$.

Analogno bismo pokazali $F \in A'W$ te $F \in C'W$. No, kako su pravci $A'W$, $B'W$ i $C'W$ različiti i sijeku se u W, znači da se točke W i F podudaraju. Prema tome, Feuerbachova točka F trokuta ABC je zaista anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut $A'B'C'$.



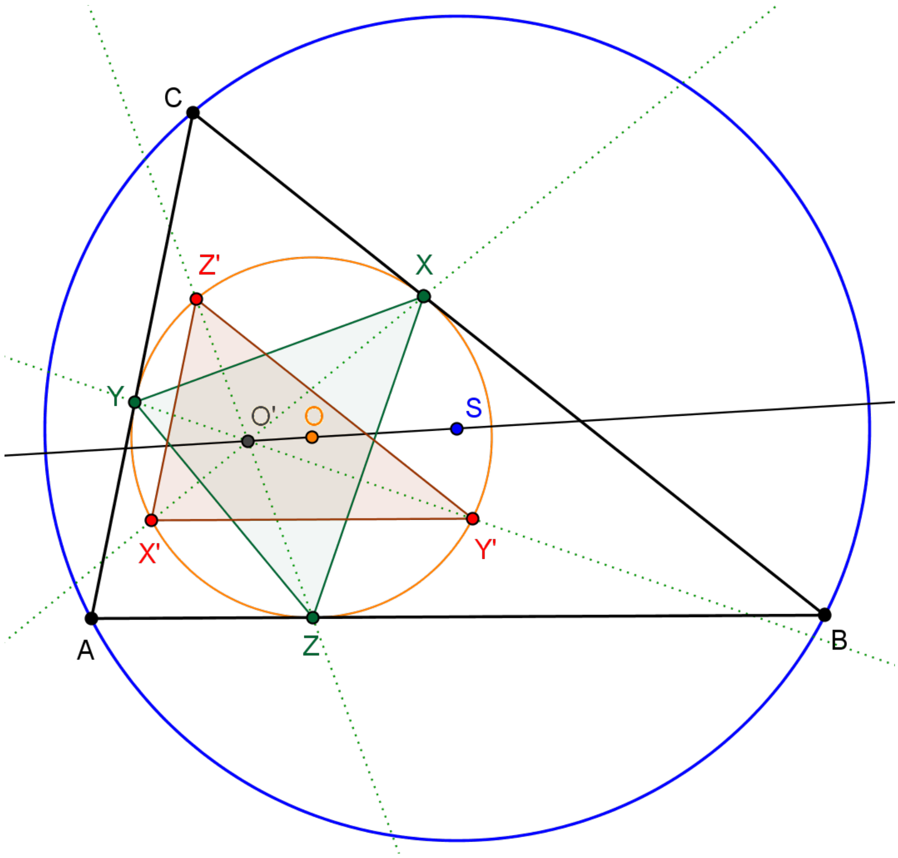
Slika 3.4: Teorem 3.3: Feuerbachova točka trokuta ABC je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut $A'B'C'$.

□

Uz trokut $A'B'C'$ čiji su vrhovi polovišta stranica trokuta, uočimo da postoji još jedan zanimljiv trokut i to trokut XYZ čiji su vrhovi dirališta upisane kružnice i stranica promatranog trokuta ABC. U nastavku promatramo odnos trokuta XYZ i Feuerbachove točke trokuta ABC.

Teorem 3.4. *Neka je ABC trokut, S središte opisane kružnice, a O središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su X, Y, Z dirališta upisane kružnice i stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom. Feuerbachova točka F trokuta ABC je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut XYZ.*

Dokaz. Opet prvo moramo dokazati da je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut XYZ definirana. Odnosno, moramo pokazati da ortocentar trokuta XYZ leži na pravcu OS. Neka su točke X', Y' i Z' točke presjeka upisane kružnice trokuta ABC i pravaca na kojima leže visine trokuta XYZ povučene iz X, Y i Z redom.



Slika 3.5: Teorem 3.4 a)

Kako je ZZ' pravac na kojem leži visina trokuta XYZ povučena iz vrha Z to je $ZZ' \perp XY$, odnosno $\angle(XY, ZZ') = 90^\circ$. Prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 imamo:

$$\begin{aligned} \angle YY'Z' = \angle YZZ' &= \angle(YZ, ZZ') \\ &= \angle(YZ, XY) + \angle(XY, ZZ') \\ &= \angle ZYX + 90^\circ. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sada možemo primijeniti teorem o kutu između tangente i tetive (1.3):

$$\angle ZYX = \angle(ZX, BC). \tag{3.8}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned} \angle YY'Z' &= \angle(YY', Y'Z') = \angle ZYX + 90^\circ \\ &= \angle(ZX, BC) + \angle(BO, ZX) \\ &= \angle(BO, ZX) + \angle(ZX, BC) \\ &= \angle(BO, BC) \\ &= \angle OBC. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nadalje, znamo $YY' \perp XZ$ i $XZ \perp BO$, pa je $YY' \parallel BO$. Prema svojstvu 2. iz teorema 1.9 vrijedi:

$$\angle(YY', Y'Z') = \angle(BO, Y'Z').$$

Ako to usporedimo s (3.9) imamo:

$$\angle(BO, Y'Z') = \angle(BO, BC) \Rightarrow Y'Z' \parallel BC.$$

Analogno, bismo dobili $X'Y' \parallel AB$ i $X'Z' \parallel AC$. Zaključujemo da su trokuti ABC i $X'Y'Z'$ homotetični. Neka je M centar homotetije koja preslikava trokut ABC u trokut $X'Y'Z'$. Ta homotetija preslikava središte opisane kružnice trokuta ABC (točku S) u središte opisane kružnice trokuta $X'Y'Z'$, a to je točka O. Dakle, točke S, O i M su kolinearne.

Neka je O' slika točke O pri opisanoj homotetiji. Tada su točke M, O i O' kolinerane, a kako su i S, O i M kolinearne, slijedi da točka O' leži na pravcu OS. Pri opisanoj homotetiji točka A preslikava se u točku X', točka B u Y' te C u Z'. Stoga vrijedi:

$$\angle O'Y'Z' = \angle OBC. \tag{3.10}$$

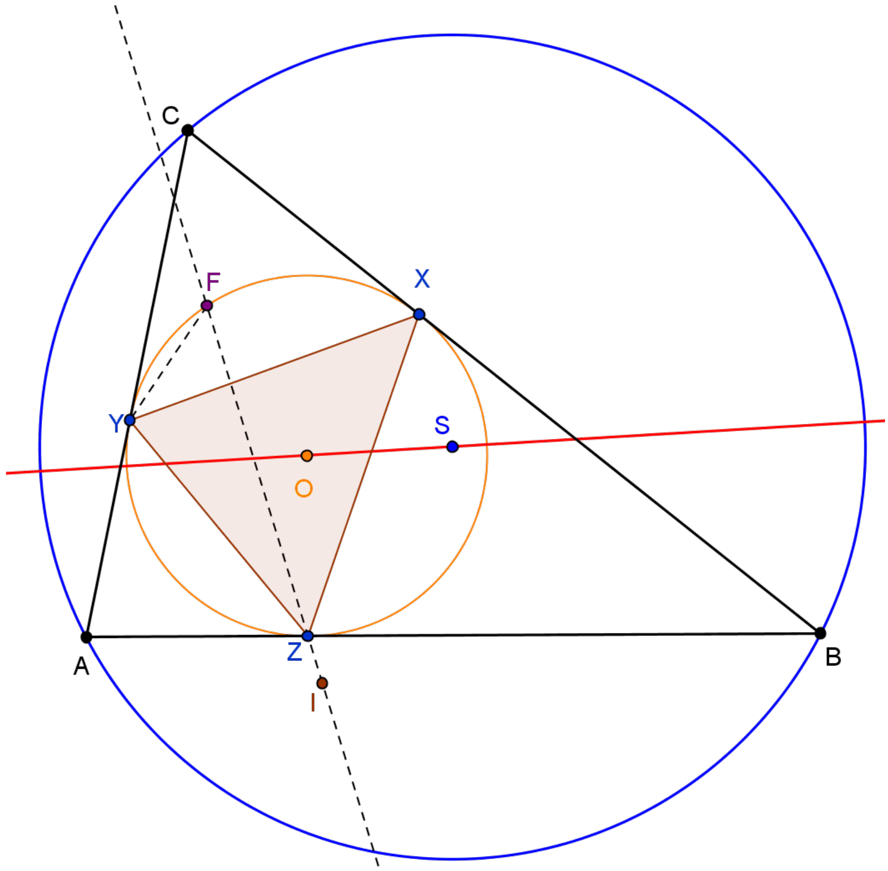
Iz (3.9) i (3.10) slijedi:

$$\angle O'Y'Z' = \angle YY'Z'. \tag{3.11}$$

Dakle, $O' \in YY'$, što znači da točka O' leži na pravcu koji sadrži visinu trokuta XYZ spuštenu iz vrha Y. Slično se pokazuje: $O' \in XX'$ i $O' \in ZZ'$. Dakle, točka O' je ortocentar trokuta XYZ.

Pokazali smo da ortocentar trokuta XYZ leži na pravcu OS, pa prema teoremu 3.1 postoji anti-Steinerova točka W tog pravca s obzirom na trokut XYZ i vrijedi:

$$\angle ZYW = 90^\circ - \angle(XY, OS). \tag{3.12}$$



Slika 3.6: Teorem 3.4 b)

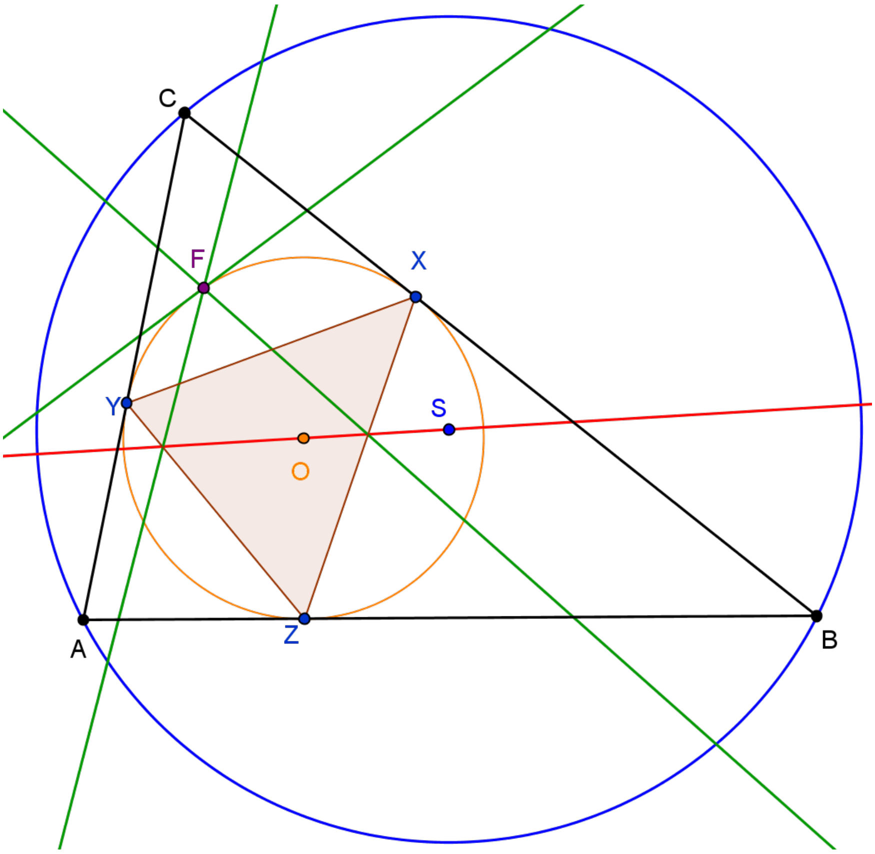
Neka je I sjecište Feuerbachove kružnice i okomice na simetralu kuta BCA povučene u polovištu stranice $\overline{AB}$. Koristeći teorem o kutu između tangente i tetive, svojstva orijentiranih kutova (1.9) i teorem 2.8 računamo:

$$\begin{aligned}
\angle ZYF &= \angle(AB, ZF) \\
&= \angle(AB, ZI) \\
&= \angle(AB, CO) + \angle(CO, ZI) \\
&= \angle(AB, CO) - \angle(ZI, CO) \\
&= \angle(AB, CO) - \angle(AB, OS) \\
&= \angle(OS, AB) + \angle(AB, CO) \\
&= \angle(OS, CO) \\
&= \angle(OS, XY) + \angle(XY, CO) \\
&= 90^\circ - \angle(XY, OS) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Usporedbom (3.12) i (3.13) dobivamo:

$$\angle ZYF = \angle ZYW \Rightarrow F \in YW.$$

Slično, $F \in XW$ i $F \in ZW$. Dakle, točka F je presjek pravaca XW, YW i ZW, a oni su različiti, a imaju i zajedničku točku W, pa slijedi $F = W$. Time je dokazano da je točka Feuerbachova točka F trokuta ABC anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut XYZ.



Slika 3.7: Teorem 3.4: Feuerbachova točka trokuta ABC je anti-Steinerova točka pravca OS s obzirom na trokut XYZ.

□

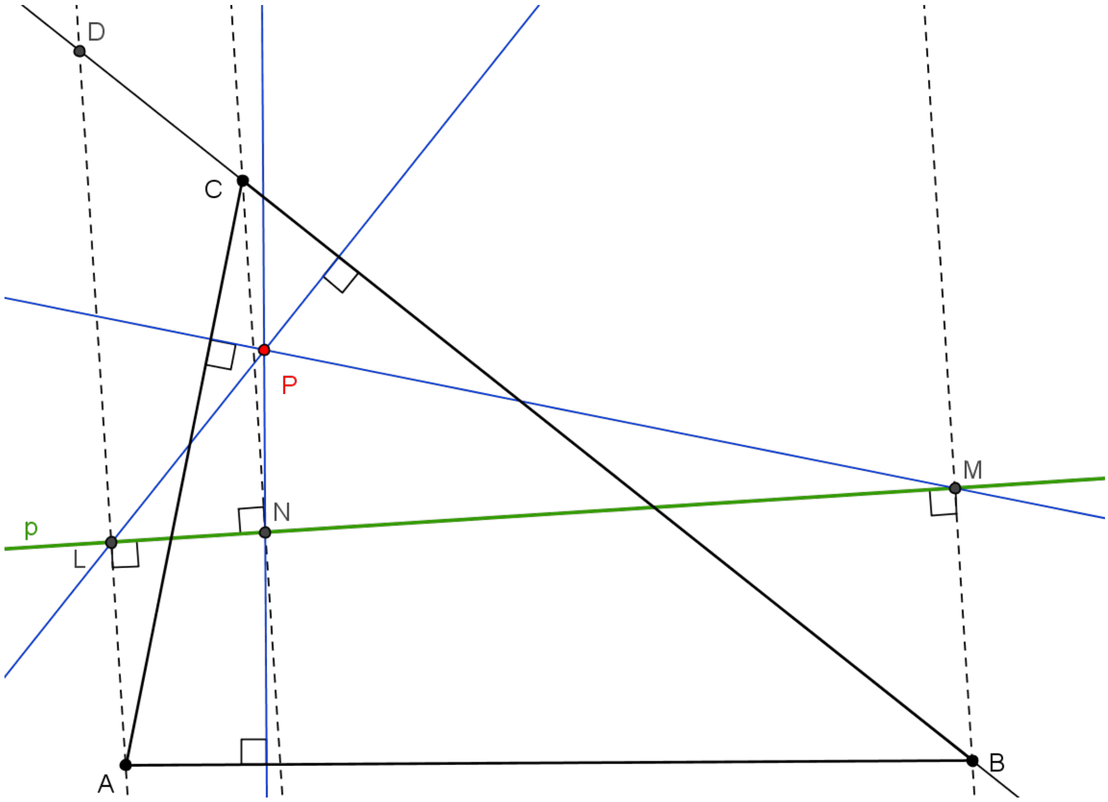
Uočimo da je točka O središte opisane kružnice trokuta XYZ. Pokazali smo da i ortocentar tog trokuta leži na pravcu OS, pa je OS Eulerov pravac tog trokuta.

3.2 Feuerbachova točka kao ortopol

Kao što smo vidjeli Feuerbachova točka i pravac koji prolazi kroz središte upisane i središte opisane kružnice trokuta su povezani. I ovom ćemo potpoglavlju promatrati odnos među njima. Prije toga navedimo teorem iz kojeg prozlazi definicija središnjeg pojma ovog potpoglavlja.

Teorem 3.5. *Neka je p pravac i ABC trokut. Neka su točke L, M i N nožišta okomica spuštenih iz vrhova A, B i C na pravac p, redom. Okomice spuštene iz točaka L, M, N na stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom sijeku se u jednoj točki P.*

Dokaz. Neka je P presjek okomice iz točke L na BC i okomice iz M na AC. Nadalje, neka je $D = AL \cap BC$.



Slika 3.8: Točka P je ortopol pravca p s obzirom na trokut ABC.

Uočimo da su stranice trokuta ACD i MPL u parovima okomite: $AC \perp PM$, $AD \perp LM$ i $CD \perp PL$. Dakle, odgovarajući kutovi u tim trokutima su kutovi s okomitim kracima. Znamo da ako su dva kuta s okomitim kracima oba šiljasta ili oba tupa, tada su međusobno sukladni. Stoga su trokuti ACD i MPL slični po K-K-K teoremu o sličnosti trokuta. Stoga vrijedi:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|LM|}{|PL|}. \tag{3.14}$$

Neka je Q sjecište okomice iz L na BC i okomice iz N na AB. Tada trokuti ABD i NQL imaju stranice u parovima okomite, pa su slični. Odnosno, imamo:

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|QL|}{|LN|}. \tag{3.15}$$

Nadalje, jer je $AL \parallel BM \parallel CN$, prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je:

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|LN|}{|LM|}. \tag{3.16}$$

Množenjem (3.14), (3.15) i (3.16), dobivamo sljedeće:

$$1 = \frac{|AD|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AD|} \cdot \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|LM|}{|PL|} \cdot \frac{|QL|}{|LN|} \cdot \frac{|LN|}{|LM|} = \frac{|QL|}{|PL|}.$$

Dakle, dobili smo $|PL| = |QL|$. Pošto točke P i Q leže na istoj okomici iz L na BC mora biti $P \equiv Q$. □

Točku P iz teorema 3.5 nazivamo **ortopol** pravca p s obzirom na trokut ABC.

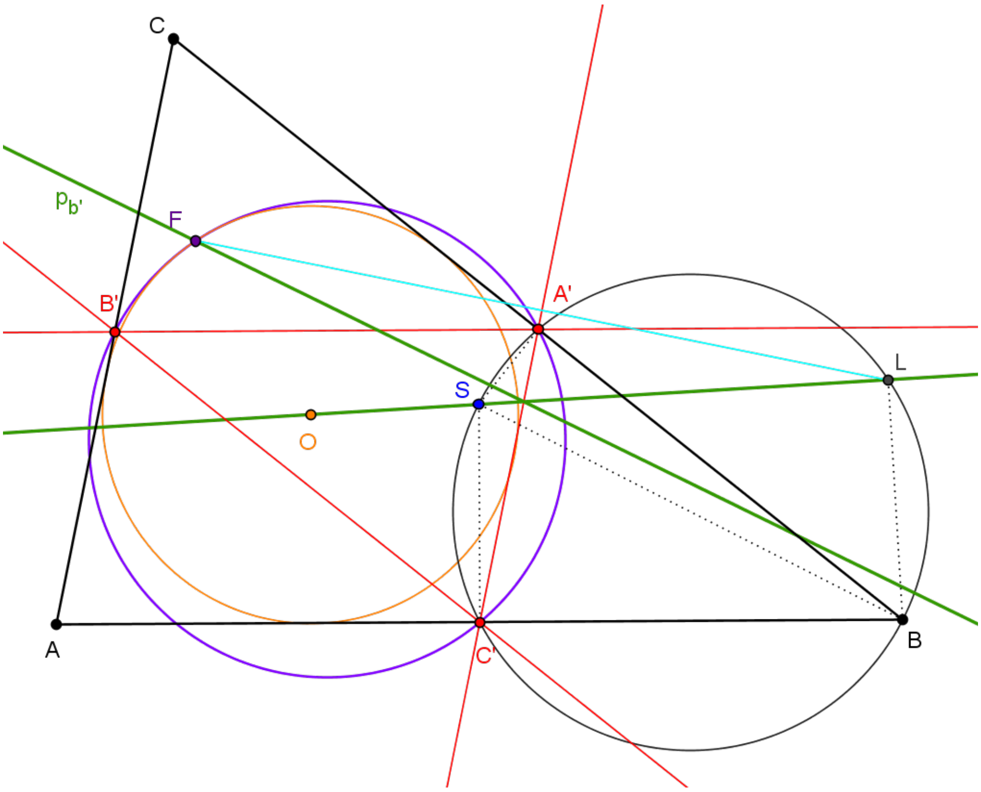
U ovom ćemo se potpoglavlju baviti sljedećim teoremom:

Teorem 3.6. *Neka je ABC trokut, S središte opisane kružnice, a O središte upisane kružnice tog trokuta. Feuerbachova točka F trokuta ABC je ortopol pravca OS s obzirom na trokut ABC.*

Prije dokaza tog teorema navest ćemo iskaz i dokaz teorema potrebnog za dokaz iskazanog teorema.

Teorem 3.7. *Neka je ABC trokut, S središte opisane kružnice, a O središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su A', B' i C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, redom. Točke J, K, L simetrične Feuerbachovoj točki trokuta ABC s obzirom na pravce $B'C'$, $A'B'$, $A'C'$ nožišta su okomica iz vrhova A, B, C na pravac OS.*

Dokaz. Neka je $p_{b'}$ pravac simetričan pravcu OS s obzirom na pravac $A'C'$. Prema teoremu 3.3 pravac $p_{b'}$ prolazi kroz točku F pa njena osnosimetrična slika s obzirom na pravac $A'C'$ mora ležati na pravcu OS. Označimo tu točku slovom L.



Slika 3.9: Teorem 3.7

Kako su SA' i SC' simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ vrijedi:

$$\angle BC'S = \angle SA'B = 90^\circ.$$

Stoga točke A' i C' leže na kružnici promjera $\overline{BS}$.

Sada uočimo trokute $A'B'C'$ i $A'BC'$. Oni imaju jednu zajedničku stranicu $\overline{A'C'}$, a za ostale stranice, vrijedi sljedeće:

$$|A'B'| = \frac{1}{2}|AB| = |BC'|$$
$$|B'C'| = \frac{1}{2}|BC| = |A'B|.$$

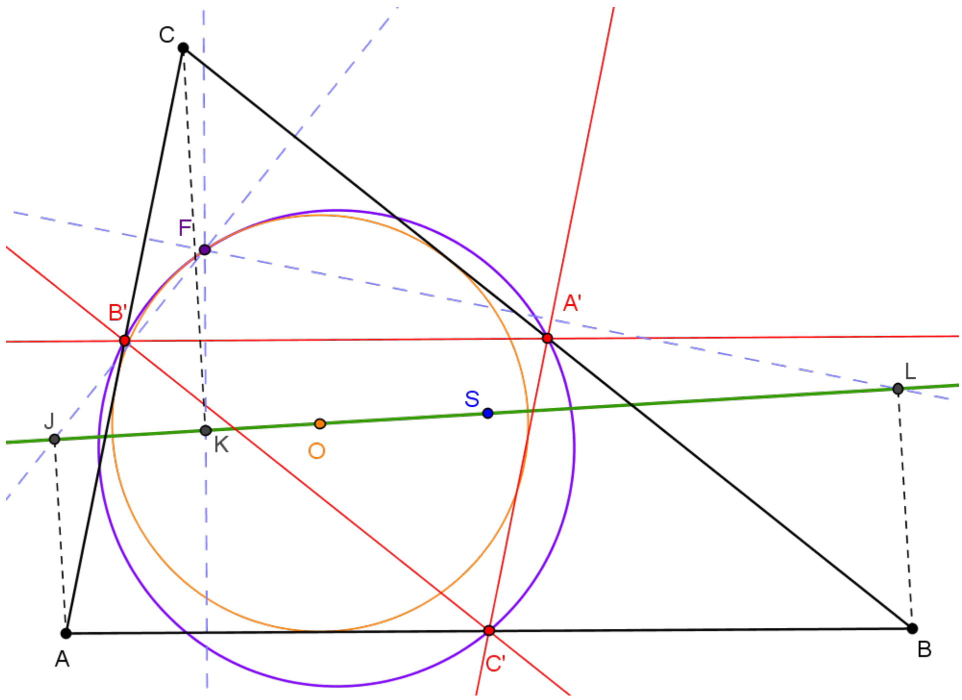
Dakle, prema teoremu *S-S-S* o sukladnosti trokuta trokuti $A'B'C'$ i $A'BC'$ su sukladni. Prema tome i njihove opisane kružnice su sukladne. Štoviše, uočimo da su te kružnice međusobno simetrične s obzirom pravac $A'C'$. Budući da točka F leži na kružnici opisanoj trokutu $A'B'C'$ jer je to Feuerbachova kružnica trokuta ABC, njoj simetrična točka (točka

L) mora ležati na kružnici opisanoj trokutu $A'BC'$. Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice vrijedi $\angle BLS = 90°$, odnosno točka L je nožište okomice spuštene iz vrha B na pravac OS.

Analogno se pokazuju i preostale dvije tvrdnje. □

Sada možemo krenuti s dokazom teorema 3.6.

Dokaz. Prema teoremu 3.7 točke J, K i L su nožišta okomica iz vrhova A, B i C na pravac OS.



Slika 3.10: Teorem 3.6

Nadalje, točka L je simetrična F s obzirom na pravac $A'C'$, pa je $FL \perp A'C'$. Kako je $A'C' \parallel AC$, to je $FL \perp AC$. Stoga točka F leži na okomici spuštenoj iz točke L na pravac AC. Analogno možemo pokazati da točka F leži na okomicama spuštenih uz točkaka J i K na pravce BC i AB redom. Dakle, promatrane okomice sijeku se u točki F pa prema definiciji ortopola slijedi tvrdnja teorema. □

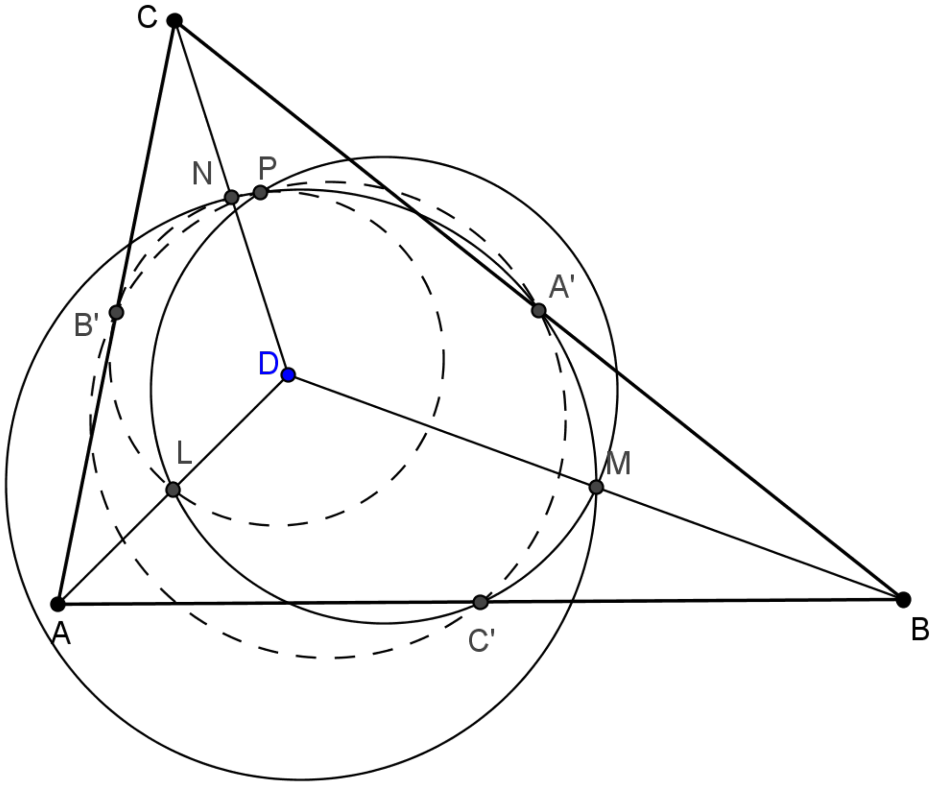
3.3 Feuerbachova točka kao Ponceletova točka

Definirajmo pojam *nožišnog trokuta* koji je jedan od središnjih pojmova ovog potpoglavlja.

Definicija 3.8. *Neka je dan trokut ABC i točka P. Neka su P_1, P_2 i P_3 nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB redom. Trokut $P_1P_2P_3$ nazivamo* ***nožišni trokut*** *točke P s obzirom na trokut ABC.*

Teorem 3.9. *Neka su A, B, C i D točke ravnine. Feuerbachove kružnice trokuta ABC, ABD, BCD i ACB sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka su točke A', B' i C' polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Neka su točke L, M i N polovišta $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$. Neka je točka P sjecište Feuerbachovih kružnica trokuta BDC i ABD različito od M.



Slika 3.11: Teorem 3.9

Tada na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABD leže točke L, M, C' i P, pa je $\angle LPM = \angle LC'M$. Slično, $\angle NPM = \angle NA'M$. Znamo da su $\overline{LC'}$, $\overline{LM}$ i $\overline{MC'}$ srednjice trokuta ABD pa je četverokut $LC'MD$ paralelogram. Zbog toga je $\angle LC'M = \angle MDL = \angle BDA$. Analogno, $\angle MA'N = \angle NDM = \angle CDB$ i $\angle NB'L = \angle LDN = \angle ADC$. Dakle, $\angle LPM = \angle BDA$ i $\angle NPM = \angle BDC$.

Sada koristeći svojstva orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo računati:

$$\begin{aligned}\angle LPN &= \angle LPM + \angle MPN \\ &= \angle BDA - \angle NPM \\ &= \angle BDA - \angle BDC \\ &= \angle BDA + \angle CDB \\ &= \angle CDB + \angle BDA \\ &= \angle CDA \\ &= \angle NDL = \angle LB'N. \end{aligned} \tag{3.17}$$

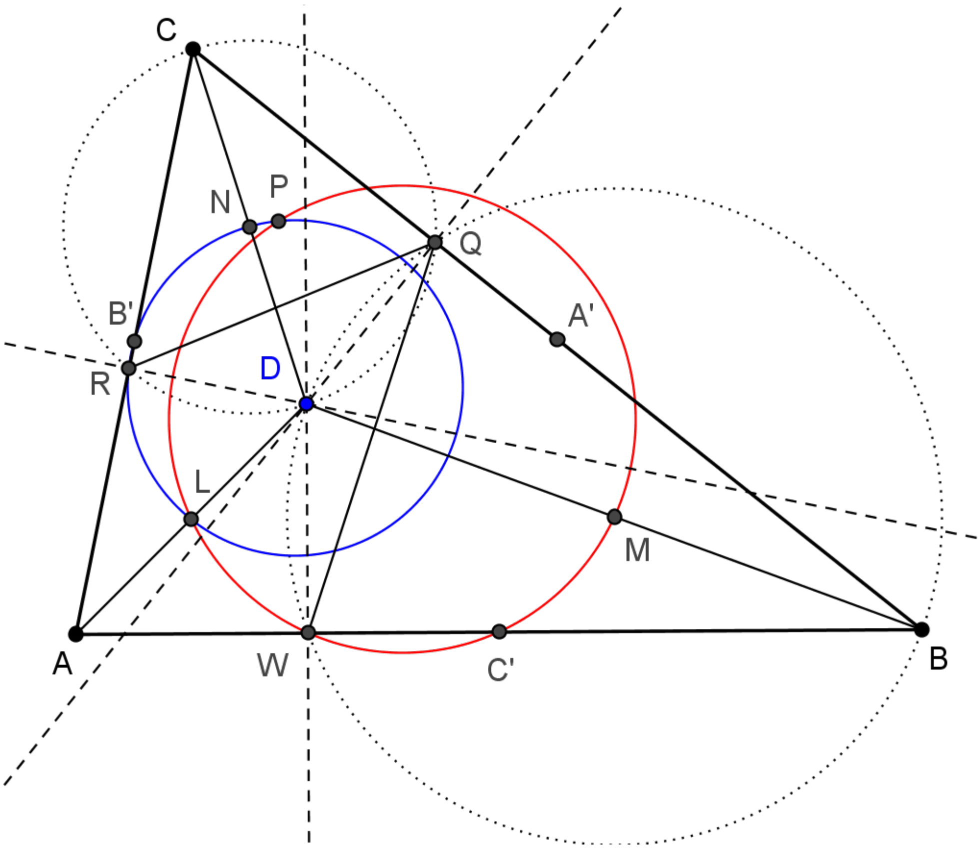
Iz (3.17) i svojstva 6. iz teorema 1.9 zaključujemo da točka P leži na kružnici kroz točke L, N i B', a to je upravo Feuerbachova kružnica trokuta ACD.
Slično se pokaže i za ostale kružnice. □

Točku presjeka P iz teorema 3.9 nazivamo **Ponceletova točka** četvorke točaka A, B, C i D.

Jednu karakterizaciju Ponceletove točke iznosi sljedeći teorem.

Teorem 3.10. *Neka su A, B, C i D četiri točke ravnine. Četiri kružnice opisane nožišnim trokutima točaka A, B, C i D s obzirom na trokute BCD, ACD, ABD i ABC redom, sijeku se u Ponceletovoj točki promatrane četvorke točaka.*

Dokaz. Neka su točke A', B', C', L, M i N redom polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$. Neka su W, Q i R redom ortogonalne projekcije točke D na pravce AB, BC i CA.



Slika 3.12: Teorem 3.10

Feuerbachova kružnica trokuta ABD prolazi kroz točke M, L i W, dok Feuerbachova kružnica trokuta ACD prolazi kroz točke R, B' i L. Prema teoremu 3.9 te se kružnice sijeku u točki L i Ponceletovoj točki P četvorke točaka A, B, C i D. Točke R i Q leže na kružnici promjera $\overline{CD}$, a točke Q i W leže na kružnici promjera $\overline{BD}$. Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} \angle RQW &= \angle RQD + \angle DQW \\ &= \angle RCD + \angle DBW \\ &= \angle ACD + \angle DBA. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Također je:

$$\angle RPW = \angle RPL + \angle LPW. \tag{3.19}$$

Kako R, P, L i B' leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ACD imamo $\angle RPL = \angle RB'L$, a kako je $\overline{B'L}$ srednjica trokuta ACD vrijedi $\angle RB'L = \angle ACD$.

Slično, jer L, P, W i M leže na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABD vrijedi $\angle LPW = \angle LMW$. Kako je trokut BWD pravokutan, a M polovište njegove hipotenuze, stoga i središte njegove opisane kruužnice, to je $|MB| = |MW|$, odnosno trokut WMB je jednakokračan. Tada je $\angle MBW = \angle BWM$. Neka je G polovište dužine $\overline{DW}$. Kako je LM srednjica, a DW pravac na kojem leži visina trokuta ABD, to je $LM \perp DW$, odnosno trokut WMG je pravokutan pa imamo:

$$\begin{aligned} \angle LMW &= \angle(LM, MW) \\ &= \angle(AB, MW) \\ &= \angle BWM = \angle MBW = \angle DBA. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Uvrstivši dobiveno u (3.19) imamo:

$$\angle RPW = \angle RPL + \angle LPW = \angle ACD + \angle DBA. \tag{3.21}$$

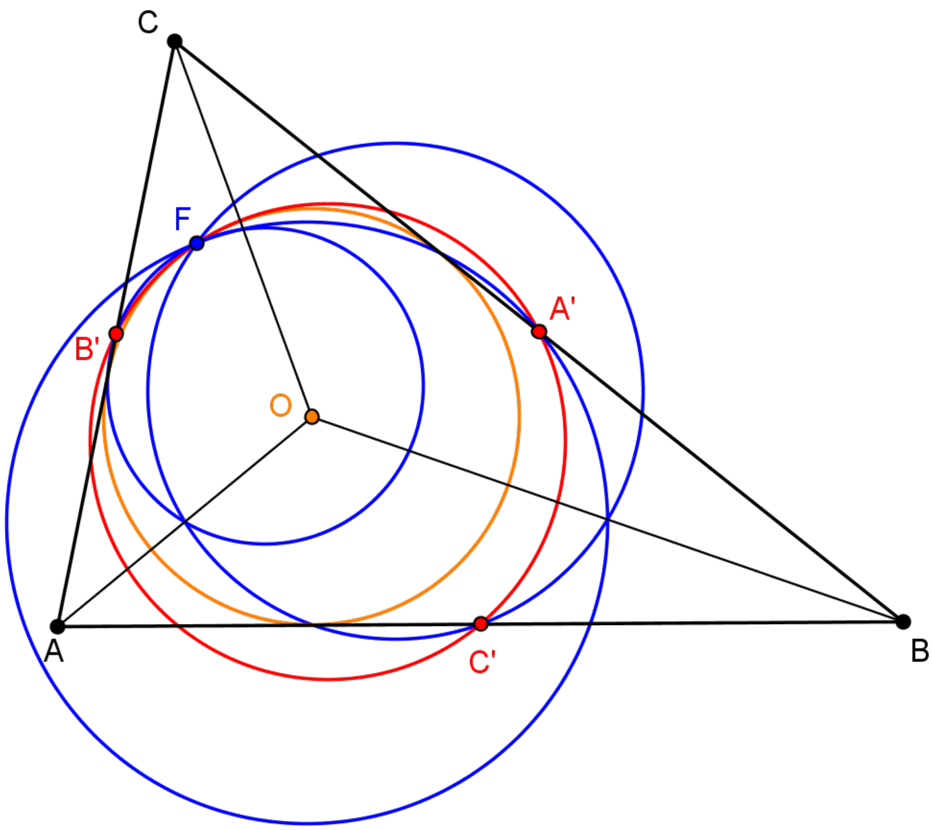
Sada iz (3.18) i (3.21) slijedi $\angle RPW = \angle RQW$, pa iz svojstva 6. teorema 1.9 znamo da su točke P, Q, R i W konciklične. Dakle, dokazali smo da točka P leži na opisanoj kružnici trokuta WQR, tj. nožišnog trokuta točke D s obzirom na trokut ABC.

Analogno se pokaže i za ostale kružnice. □

Sad promotrimo vezu Feuerbachove i Ponceletove točke u nekom trokutu.

Teorem 3.11. *Neka je ABC trokut i O središte upisane kružnice tog trokuta. Feuerbachove kružnice trokuta AOB, AOC i BOC sijeku se u Feuerbachovoj točki trokuta ABC.*

Dokaz. Prema teoremu 3.9 Feuerbachove kružnice trokuta AOB, AOC, BOC i ABC sijeku se u Ponceletovoj točki četvorke A, B, C, O. Prema teoremu 3.10 ta Ponceletova točka leži na opisanoj kružnici nožišnog trokuta točke O s obzirom na trokut ABC, a to je upisana kružnica trokuta ABC. Dakle, tražena točka je sjecište Feuerbachove kružnice trokuta ABC i njegove upisane kružnice. Prema teoremu 2.9 to je Feuerbachova točka trokuta ABC.



Slika 3.13: Teorem 3.11

□

3.4 Feuerbachova točka i Eulerova točka simetrije

Do sada je jednu od središnjih uloga naših razmatranja imao pravac koji sadrži središte opisane i upisane kružnice danog trokuta. U nastavku tu ulogu preuzimaju Eulerovi pravci određenih trokuta. Podsjetimo, Eulerov pravac je pravac koji sadrži ortocentar, središte opisane kružnice i težište trokuta. Prema korolaru 3.2 pravci simetrični Eulerovom pravcu s obzirom na stranice promatranog trokuta sijeku se u jednoj točki koja se naziva Eulerova točka simetrije.

Teorem 3.12. *Neka je ABC trokut i O središte upisane kružnice tog trokuta. Neka su C_a i C_b redom ortogonalne projekcije točke C na simetrale kuta AO i BO. Analogno defini-*

ramo i točke A_b, A_c, B_a i B_c. Eulerovi pravci trokuta AA_bA_c, BB_aB_c i CC_aC_b sijeku se u Feuerbachovoj točki trokuta ABC.

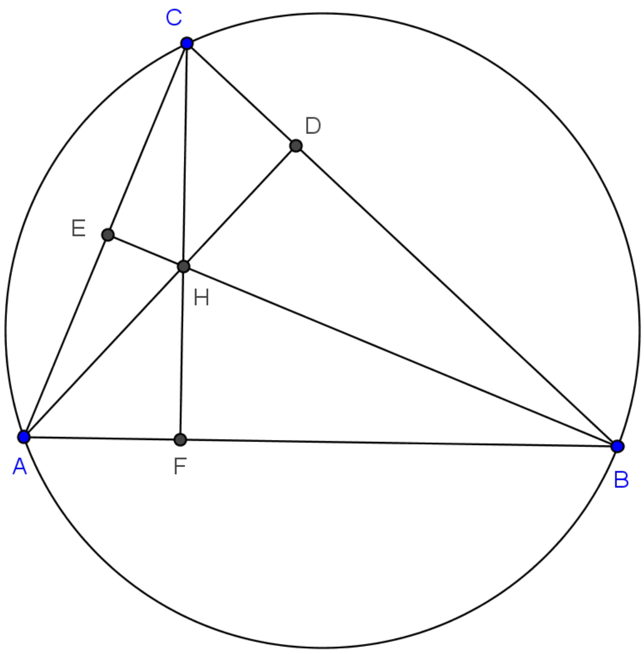
Prije dokaza dokažimo jednu kratku lemu o ortocentru koju ćemo koristiti u nastavku.

Lema 3.13. *Neka je ABC trokut i H ortocentar trokuta. Neka je R polumjer opisane kružnice trokuta ABC. Tada vrijede sljedeće jednakosti:*

$$|AH| = 2R \cdot \cos(\angle CAB),$$
$$|BH| = 2R \cdot \cos(\angle ABC),$$
$$|CH| = 2R \cdot \cos(\angle BCA).$$

U ovoj lemi i njenom dokazu ne koristimo orijentirane kutove.

Dokaz. Neka su D, E, F nožišta okomica iz vrhova A, B i C na nasuprotne stranice trokuta.



Slika 3.14: Udaljenost ortocentra od vrhova trokuta.

Iz pravokutnog trokuta AEH znamo:

$$|AH| = \frac{|AE|}{\sin(\angle AHE)}. \tag{3.22}$$

No, iz pravokutnog trokuta ABE imamo:

$$|AE| = |AB| \cdot \cos(\angle EAB) = |AB| \cdot \cos(\angle CAB). \tag{3.23}$$

Trokut AHE sličan je trokutu ACD, pa je $\angle AHE = \angle ACD = \angle ACB$. Iz toga i iz (3.22) i (3.23) dobivamo:

$$|AH| = \frac{|AB| \cdot \cos(\angle CAB)}{\sin(\angle BCA)}.$$

Iz poučka o sinusima znamo:

$$\frac{|AB|}{\sin(\angle BCA)} = 2R,$$

pa je zaista $|AH| = 2R \cdot \cos(\angle CAB)$. □

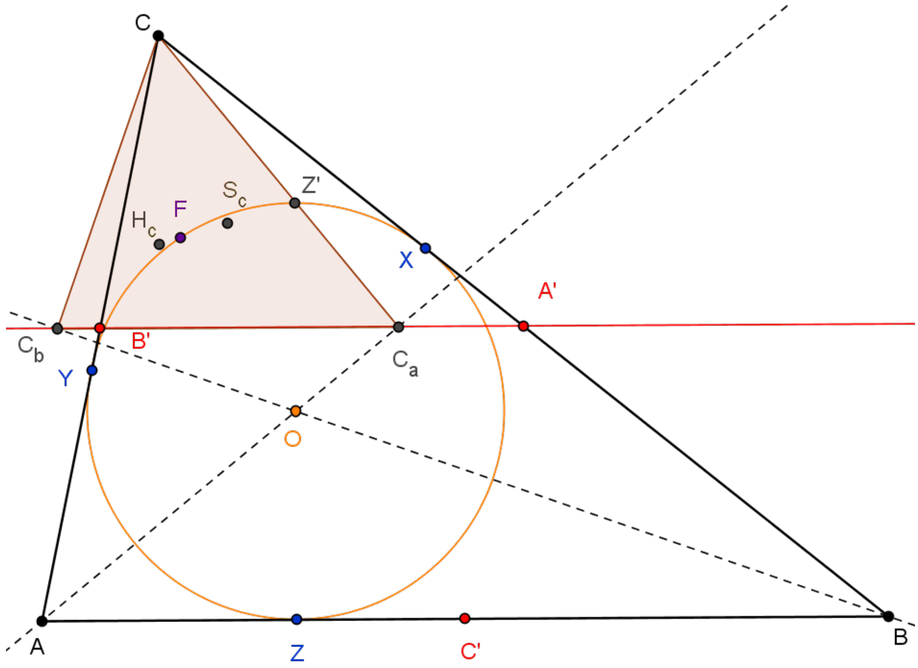
Sada možemo krenuti s dokazom teorema 3.12.

Dokaz. Pokazat ćemo da Eulerov pravac trokuta CC_aC_b prolazi kroz Feuerbachovu točku F trokuta ABC. Za ostale trokute, dokaz je analogan.

Neka je H_c ortocentar trokuta CC_aC_b, te S_c središte opisane kružnice tog trokuta. Tada je $CC_b \perp BO$ i $CC_a \perp AO$ pa točke C_a i C_b leže na kružnici čiji je promjer dužina $\overline{CO}$. No, tada ta kružnica prolazi kroz vrhove trokuta CC_aC_b pa mu je to opisana kružnica. Stoga je točka S_c polovište dužine $\overline{CO}$ te vrijedi:

$$\angle(CO, OC_b) = \angle(CC_a, C_aC_b). \tag{3.24}$$

Pokažimo sada da je $C_bC_a \parallel AB$.



Slika 3.15: Teorem 3.12 a)

Prema svojstvu orijentiranih kutova (teorem 1.9) i iz $C_b \in OB$ imamo:

$$\begin{aligned} \angle(CO, OC_b) &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OC_b) \\ &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OB). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Kako je $\angle(CO, BC)$ polovina kuta pri vrhu C, a $\angle(BC, OB)$ polovina kuta pri vrhu B u trokutu ABC, iz leme 1.10, znamo da vrijedi:

$$\angle(CO, BC) + \angle(BC, OB) = 90^\circ - \angle(AO, AC). \tag{3.26}$$

Sada zbog $CC_a \perp AO$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \angle(CO, OC_b) &= \angle(CO, BC) + \angle(BC, OB) \\ &= 90^\circ - \angle(AO, AC) \\ &= \angle(AC, CC_a). \end{aligned} \tag{3.27}$$

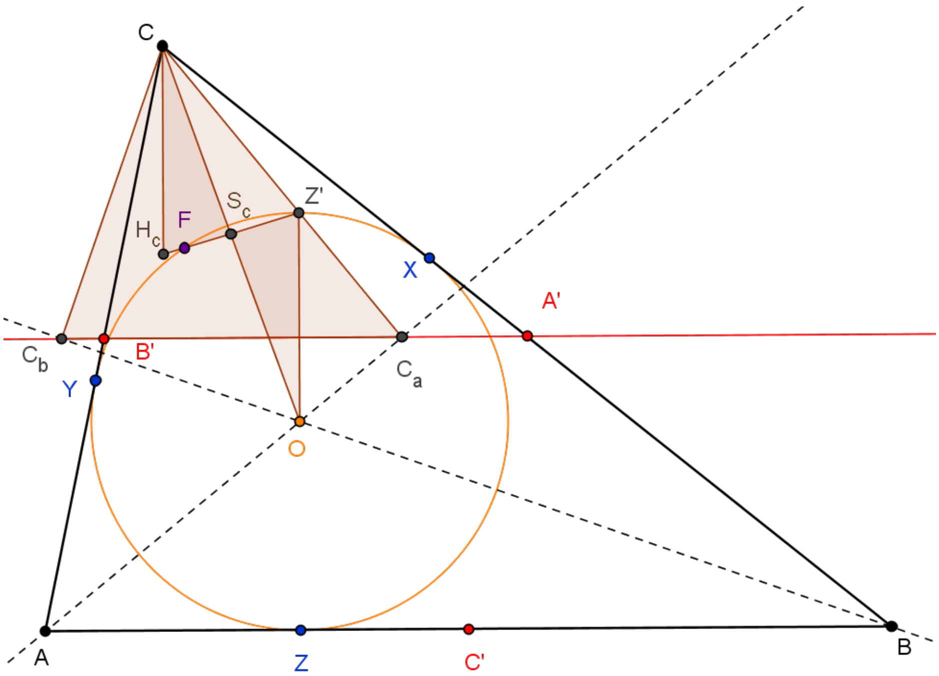
Iz (3.24) i (3.27) dobivamo:

$$\angle(AC, CC_a) = \angle(CC_a, C_aC_b). \tag{3.28}$$

Neka je V sjecište AC i C_aC_b te U polovište $\overline{CC_a}$. Zbog (3.28) trokut CVC_a je jednakokračan, pa je $|VC| = |VC_a|$. Tada je VU okomito na CC_a. Dakle, $VU \parallel AC_a$. Dužina $\overline{VU}$ je srednjica trokuta CAC_a, pa je konačno V polovište od $\overline{AC}$. Stoga C_bC_a prolazi kroz polovište stranice $\overline{CA}$.

Slično se pokaže da C_bC_a prolazi kroz poloviše stranice $\overline{BC}$. Prema teoremu o srednjici trokuta slijedi $C_bC_a \parallel AB$.

Neka je Z' točka simetrična točki Z s obzirom na točku O. Uočimo da tada i Z' leži na upisanoj kružnici trokuta ABC. Primijetimo da je $CH_c \parallel OZ'$. Naime, zbog pokazane paralelnosti je $OZ' \perp C_bC_a$, a pošto je H_c ortocentar trokuta CC_aC_b vrijedi $CH_c \perp C_bC_a$.



Slika 3.16: Teorem 3.12 b)

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\angle BOA = \angle(BO, OA) = \angle(OC_b, OC_a) = \angle C_bOC_a.$$

Iz teorema 1.9 vrijedi $\angle ABO + \angle BOA + \angle OAB = 0$, odnosno $\angle BOA = \angle BAO + \angle OBA$. Primjenom leme 1.10 dobivamo $\angle BOA = 90^\circ - \angle ACO$. Stoga imamo:

$$\angle C_bOC_a = \angle BOA = 90^\circ - \angle ACO. \tag{3.29}$$

No, kako točke C, C_b, O i C_a leže na kružnici vrijedi:

$$\angle C_bCC_a = \angle C_bOC_a. \tag{3.30}$$

Iz (3.29) i (3.30) je:

$$\begin{aligned}\angle C_bCC_a &= \angle C_bOC_a\\ &= 90^\circ - \angle ACO.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Dokažimo sada kratku lemu koju ćemo koristiti dalje u dokazu.

Lema 3.14. *Uz oznake iz teorema 3.12, vrijedi $|CH_c| = r$, gdje je r radijus upisane kružnice trokuta ABC.*

U ovoj lemi i njenom dokazu ne koristimo orijentirane kutove.

Dokaz. S obzirom da je $\overline{CO}$ promjer opisane kružnice trokuta CC_aC_b, iz leme 3.13 i do sada dokazanog u dokazu teorema 3.12, znamo:

$$\begin{aligned}|CH_c| &= |CO| \cdot \cos(\angle C_aCC_b)\\ &= |CO| \cdot \cos(90^\circ - \angle ACO)\\ &= |CO| \cdot \sin(\angle ACO).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Iz pravokutnog trokuta CYO znamo:

$$\sin\angle YCO = \frac{r}{|CO|} \Leftrightarrow |CO| = \frac{r}{\sin(\angle YCO)} = \frac{r}{\sin(\angle ACO)}. \tag{3.33}$$

Iz (3.32) i (3.33) slijedi: $|CH_c| = r$. □

Zbog paralelnosti pravaca CH_c i $Z'O$ vrijedi $\angle H_cCO = \angle Z'OC$, odnosno $\angle H_cCS_c = \angle Z'OS_c$. Kako je S_c polovište dužine $\overline{CO}$ vrijedi $|CS_c| = |S_cO|$, a iz leme 3.14 je $|CH_c| = |OZ'|$, prema S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti CH_cS_c i $OZ'S_c$ sukladni. Dakle, $\angle CS_cH_c = \angle OS_cZ'$, odnosno $\angle(S_cC, S_cH_c) = \angle(S_cO, S_cZ')$, stoga su točke S_c, H_c i Z' kolinearne.

Kako Feuerbachova točka F trokuta ABC leži na njegovoj upisanoj kružnici vrijedi $\angle Z'FZ = 90^\circ$. Pokažimo da je i $\angle S_cFZ$ također pravi.
Naime, točka S_c je polovište dužine $\overline{CO}$. Pokazali smo da je Feuerbachova točka Ponceletova točka točaka A, B, C i O (teorem 3.11), pa ona leži na kružnicama devet točaka trokuta ABC, AOB, BOC i AOC. Neka je W polovište dužine $\overline{BO}$. Na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC leže točke F, A' i C'.

Prema svojstvu orijentiranih kutova (teorem 1.9) možemo pisati:

$$\angle ZFS_c = \angle ZFW + \angle WFS_c. \tag{3.34}$$

Kako točke S_c, F, W i A' leže na kružnici devet točaka trokuta BOC to je $\angle WFS_c = \angle WA'S_c$. Kako su $\overline{S_cW}$ i $\overline{A'W}$ srednjice tog trokuta, to je četverokut $A'WOS_c$ paralelogram pa je $\angle WA'S_c = \angle S_cOW$. Na temelju zbroja kutova u trokutu BOC i prema lemi 1.10 znamo:

$$\begin{aligned} \angle S_cOW &= \angle COB \\ &= \angle CBO + \angle OCB \\ &= 90^\circ - \angle BAO. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Nadalje, W, F i Z i C' leže na kružnici devet točaka trokuta AOB pa je

$$\angle ZFW = \angle ZC'W = \angle(ZC', C'W).$$

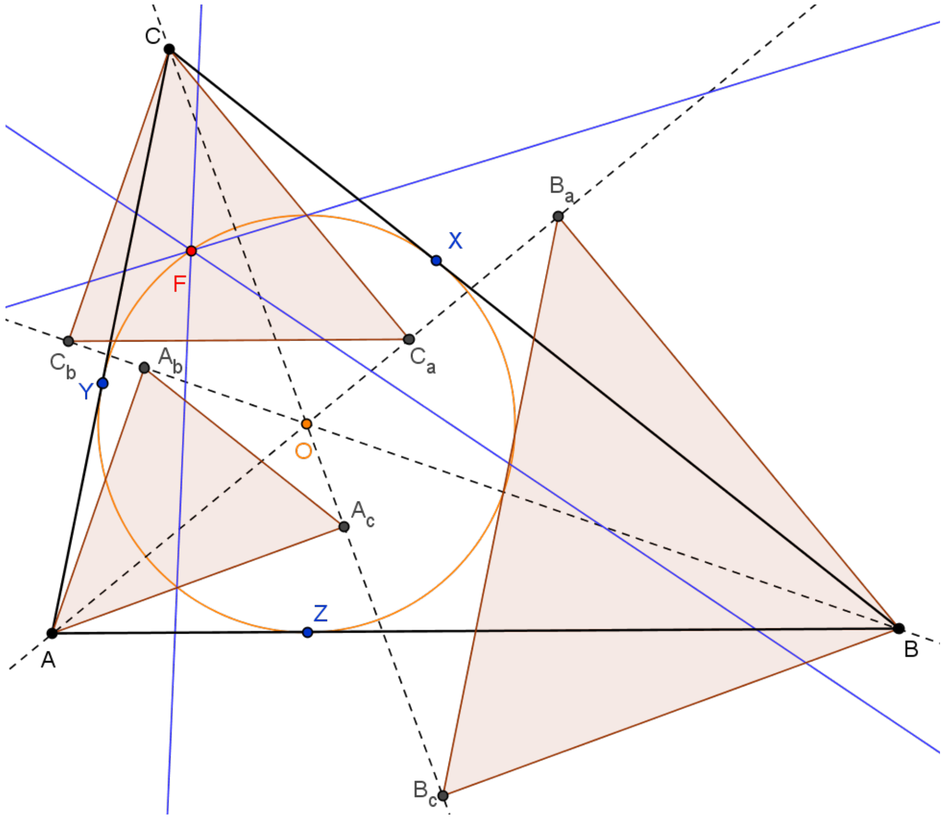
Kako je WC' srednjica trokuta ABO to je

$$\begin{aligned} (ZC', C'W) &= \angle(ZC', AO) = \angle(AB, AO) \\ &= \angle BAO. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Uvrštavanjem (3.35) i (3.36) u (3.34) dobivamo,

$$\begin{aligned} \angle ZFS_c &= \angle ZFW + \angle WFS_c \\ &= \angle BAO + 90^\circ - \angle BAO \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Dakle, $\angle Z'FZ = 90^\circ$ i $\angle ZFS_c = 90^\circ$, a to znači da F leži na pravcu $Z'S_c$, odnosno na Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b.
Analogno se pokaže da F leži na Eulerovim pravcima ostalih trokuta. Slijedi tvrdnja. □

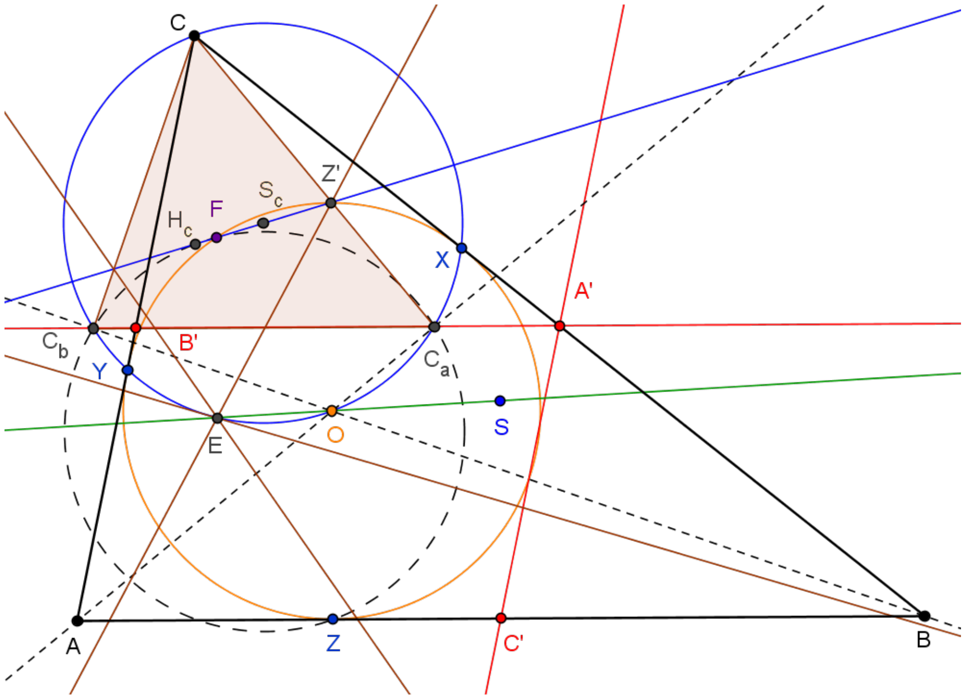


Slika 3.17: Teorem 3.12 c)

Idući teorem povezuje Feuerbachovu i Eulerovu točku simetrije promatranog trokuta.

Teorem 3.15. *Neka je ABC trokut, O središte upisane, a S središte opisane kružnice tog trokuta. Neka su C_a i C_b ortogonalne projekcije točke C na simetrale kuta AO i BO. Analogno definiramo i točke A_b, A_c, B_a i B_c. Pravci simetrični Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b s obzirom na stranice tog trokuta i pravac OS sijeku se u točki E_c koja je simetrična Feuerbachovoj točki trokuta ABC s obzirom na pravac C_aC_b. Slično vrijedi za trokute AA_bA_c i BB_aB_c.*

Dokaz. Neka su H_c ortocentar i S_c središte opisane kružnice trokuta CC_aC_b. Tada je pravac H_cS_c Eulerov pravac trokuta CC_aC_b. Prema korolaru 3.2 pravci simetrični pravcu H_cS_c s obzirom na stranice trokuta CC_aC_b sijeku se u Eulerovoj točki simetrije koja leži na opisanoj kružnici promatranog trokuta. Pokažimo da je ta Eulerova točka simetrije točka simetrična Feuerbachovoj točki F trokuta ABC u odnosu na pravac C_aC_b.



Slika 3.18: Teorem 3.15

Neka su X, Y i Z točke u kojima upisana kružnica trokuta ABC dira stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Pokažimo sada da kružnica s promjerom $\overline{ZH_c}$ prolazi kroz točke C_a i C_b. Da bismo to pokazali, moramo pokazati da su točke X, Z i C_a te Y, Z i C_b kolinearne. Uočimo da su trokuti BOX i BOZ sukladni ($\overline{BO}$ je zajednička stranica, kutovi u vrhu B su sukladni jer je BO simetrala kuta CBA, a kutovi u vrhovima X i Z su pravi). Iz toga slijedi $|XB| = |ZB|$. Analogno, $|AY| = |AZ|$ i $|CX| = |CY|$. Neka su x, y i z redom duljine odsječaka tangenti iz vrhova A, B, C na upisanu kružnicu. Imamo:

$$\begin{aligned} x &= |AY| = |AZ| \\ y &= |BX| = |BZ| \\ z &= |CX| = |CY|. \end{aligned}$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} |AB| &= x + y \\ |BC| &= y + z \\ |AC| &= x + z. \end{aligned}$$

Zbrajanjem prvih dviju jednakosti i uvrštavanjem treće jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= |AB| + |BC| \\ 2y + |AC| &= |AB| + |BC| \\ y &= \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}. \end{aligned}$$

Sada dobivamo

$$y = |BX| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = |A'B'| + |BA'| - |B'C|.$$

Na temelju toga možemo računati:

$$\begin{aligned} |A'X| &= ||BX| - |BA'|| \\ &= ||A'B'| + |BA'| - |B'C| - |BA'|| \\ &= ||A'B'| - |B'C||. \end{aligned}$$

U dokazu teorema 3.12 pokazali smo da je trokut $CB'C_a$ jednakokračan pa je $|B'C| = |B'C_a|$ Također znamo da C_a leži na pravcu $A'B'$ pa imamo:

$$|A'X| = ||A'B'| - |B'C_a|| = |C_aA'|.$$

Prema tome trokut $A'C_aX$ je jednakokračan. Kako je i trokut BZX jednakokračan, a kutovi u vrhovima A' i B sukladni (jer $C_aA' \parallel ZB$), to su trokuti BZX i $A'C_aX$ slični. Dakle, $\angle C_aXA' = \angle ZXB$, pa su točke X, Z i C_a kolinearne. Analogno bismo dokazali kolinearnost točaka Y, Z i C_b.

Kako je $XZ \perp BO$ i $CC_b \perp BO$, to je $XZ \parallel CC_b$. No, kako je $C_aH_c \perp CC_b$ to je $C_aH_c \perp XZ$. Budući da su točke X, Z i C_a kolinearne, slijedi $ZC_aH_c = 90°$. Slično, $H_cC_bZ = 90°$. Dakle, točke C_a i C_b leže na kružnici promjera $\overline{ZH_c}$.

Neka je Z' točka simetrična točki Z s obzirom na središte upisane kružnice trokuta ABC. Iz dokaza teorema 3.12 znamo da se pravci H_cF i $Z'F$ podudaraju te $Z'F \perp ZF$. Stoga kružnica s promjerom $\overline{ZH_c}$ prolazi i kroz F, odnosno točke F, C_a, Z i C_b su konciklične.

U dokazu teorema 3.12 pokazali smo da je pravac C_aC_b zapravo pravac na kojem leži srednjica trokuta ABC pa iz $BH_c \perp C_aC_b$ slijedi $BH_c \perp AB$. Kako je i $OZ \perp AB$, to je $CH_c \parallel OZ$. No, u lemi 3.14 pokazali smo da je duljina $|CH_c|$ jednaka radijusu upisane kružnice trokuta ABC, pa je $|CH_c| = |OZ|$. Dakle, četverokut $COZH_c$ ima paralelne i sukladne nasuprotne stranice $\overline{CH_c}$ i $\overline{OZ}$, pa je on paralelogram. Tada je i $|CO| = |H_cZ|$. Kako je $\overline{CO}$ promjer opisane kružnice trokuta CC_aC_b, a $\overline{H_cZ}$ promjer kružnice kroz točke F, C_a, Z i C_b, to su te dvije kružnice sukladne. S obzirom na to da se te kružnice sijeku u točkama C_a i C_b, one su simetrične s obzirom pravac C_aC_b. Stoga točka simetrična točki F s obzirom na pravac C_aC_b leži na opisanoj kružnici trokuta CC_aC_b.

Prema teoremu 3.12 točka F leži na Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b. Pravac simetričan Eulerovom pravcu trokuta CC_aC_b s obzirom na pravac C_aC_b siječe opisanu kružnicu tog trokuta u dvije točke. Prema dokazu teorema 3.1 jedno sjecište je anti-Steinerova točka (označimo je s E_c) trokuta CC_aC_b, a drugo sjecište je točka simetrična ortocentru H_c s obzirom na pravac C_aC_b. Kako su F i H_c različite točke, znači da je E_c osnosimetrična slika točke F. No, prema korolaru 3.2 točka E_c je Eulerova točka simetrije trokuta CC_aC_b.

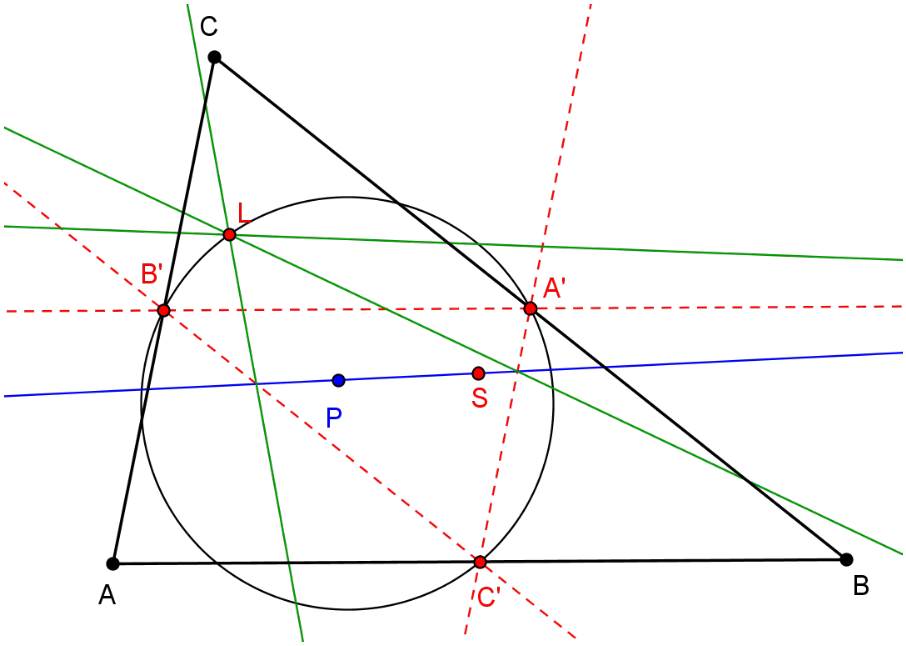
Prema teoremu 3.3, točka E_c leži na pravcu OS. □

Poglavlje 4

Generalizacija Feuerbachove točke

Neka je ABC trokut. Neka su kao i prije, točke A', B' i C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Zatim, neka je S središte opisane kružnice trokuta ABC, te neka je P bilo koja točka ravnine različita od S. U dokazu teorema 3.3 pokazali smo da je točka S ortocentar trokuta $A'B'C'$. Također, kružnica devet točaka trokuta ABC je kružnica opisana trokutu $A'B'C'$. Sada prema teoremu 3.1 iz kojeg proizlazi definicija anti-Steinerove točke i u skladu s navedenim oznakama možemo zaključiti sljedeće:

Teorem 4.1. *Osnosimetrične slike pravca PS s obzirom na pravce $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ sijeku se u jednoj točki L koja leži na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC. Točka L je anti-Steinerova točka pravca PS s obzirom na trokut $A'B'C'$.*



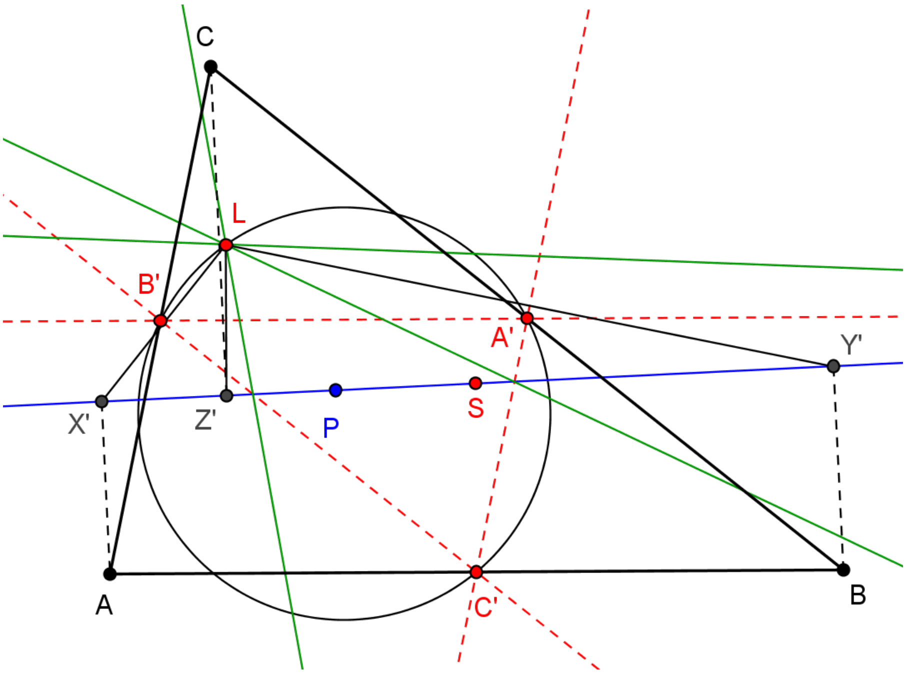
Slika 4.1: Teorem 4.1

Teorem 4.2. *Točka L iz teorema 4.1 je ortopol pravca PS s obzirom na trokut ABC, gdje je S središte opisane kružnice trokuta ABC.*

Prije dokaza tog teorema dokazat ćemo teorem potreban za dokaz iskazanog teorema.

Teorem 4.3. *Točke X', Y', Z' simetrične točki L iz teorema 4.1 s obzirom na pravce $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ su redom nožišta okomica iz točaka A, B, C na pravac PS.*

Dokaz. Neka je $p_{b'}$ pravac simetričan pravcu PS s obzirom na pravac $A'C'$. Prema teoremu 4.1 pravac $p_{b'}$ prolazi kroz točku L pa osnosimetrična slika točke L s obzirom na pravac $A'C'$ leži na pravcu PS. Označimo tu točku Y'.

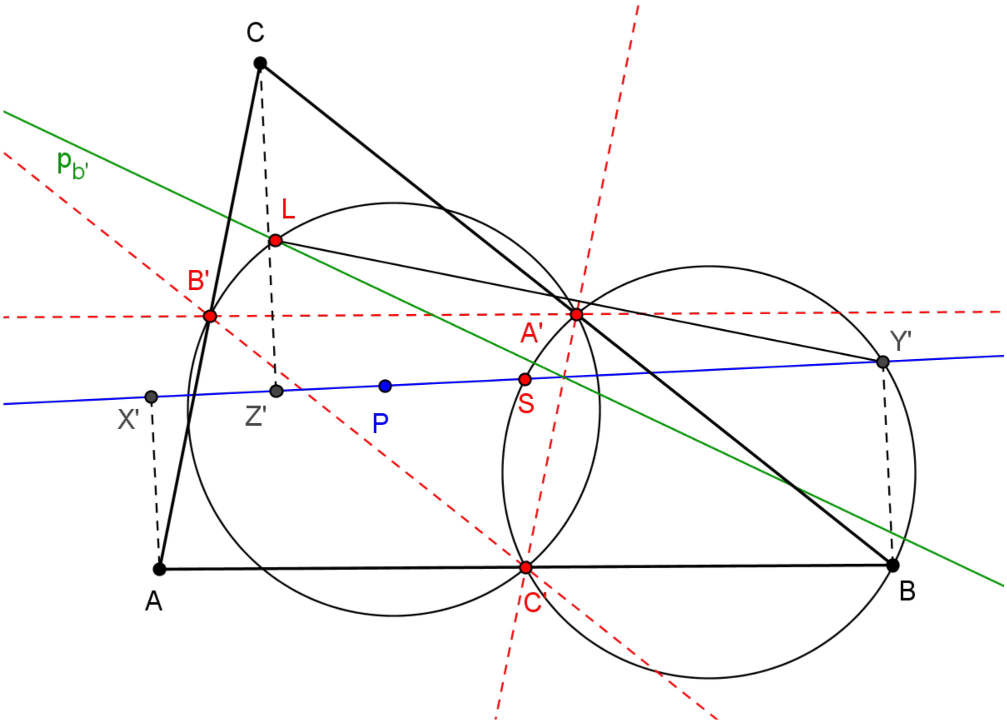


Slika 4.2: Teorem 4.3 a)

Kako točke S, A' i C' leže na simetralama stranica trokuta ABC vrijedi:

$$\angle BC'S = \angle SA'B = 90^\circ.$$

Stoga točke A' i C' leže na kružnici promjera $\overline{BS}$.



Slika 4.3: Teorem 4.3 b)

Sada uočimo trokute $A'B'C'$ i $A'BC'$. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{A'C'}$, a za ostale stranice vrijedi sljedeće:

$$|A'B'| = \frac{1}{2}|AB| = |BC'|$$
$$|B'C'| = \frac{1}{2}|BC| = |A'B|.$$

Dakle, prema teoremu S-S-S o sukladnosti trokuta trokuti $A'B'C'$ i $A'BC'$ su sukladni. Prema tome i njihove opisane kružnice su sukladne. Štoviše, uočimo da su te kružnice međusobno simetrične s obzirom pravac $A'C'$. Budući da točka L leži na kružnici opisanoj trokutu $A'B'C'$ jer je to Feuerbachova kružnica trokuta ABC, točka Y', simetrična točki L u odnosu na pravac $A'C'$, leži na kružnici opisanoj trokutu $A'BC'$. Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice $\angle BY'S = 90°$, pa je točka Y' nožište okomice spušene iz vrha B na pravac PS.

Analogno se pokazuju i preostale dvije tvrdnje. □

Sada dokažimo teorem 4.2.

Dokaz. Prema teoremu 4.3 točke X', Y' i Z' su nožišta okomica iz vrhova A, B i C na pravac PS. Nadalje, točka Y' je simetrična L s obzirom na pravac $A'C'$, pa je $LY' \perp A'C'$. Kako je $A'C' \parallel AC$, to je $LY' \perp AC$. Stoga točka L leži na okomici spuštenoj iz točke Y' na pravac AC. Analogno bismo pokazali da točka L leži na okomicama spuštenim iz točaka X' i Z' na pravce BC i AB redom. Stoga se promatrane okomice sijeku u točki L pa prema definiciji ortopola slijedi tvrdnja teorema. □

Uočimo da se sada kao korolar navedenog teorema nameće sljedeća tvrdnja:

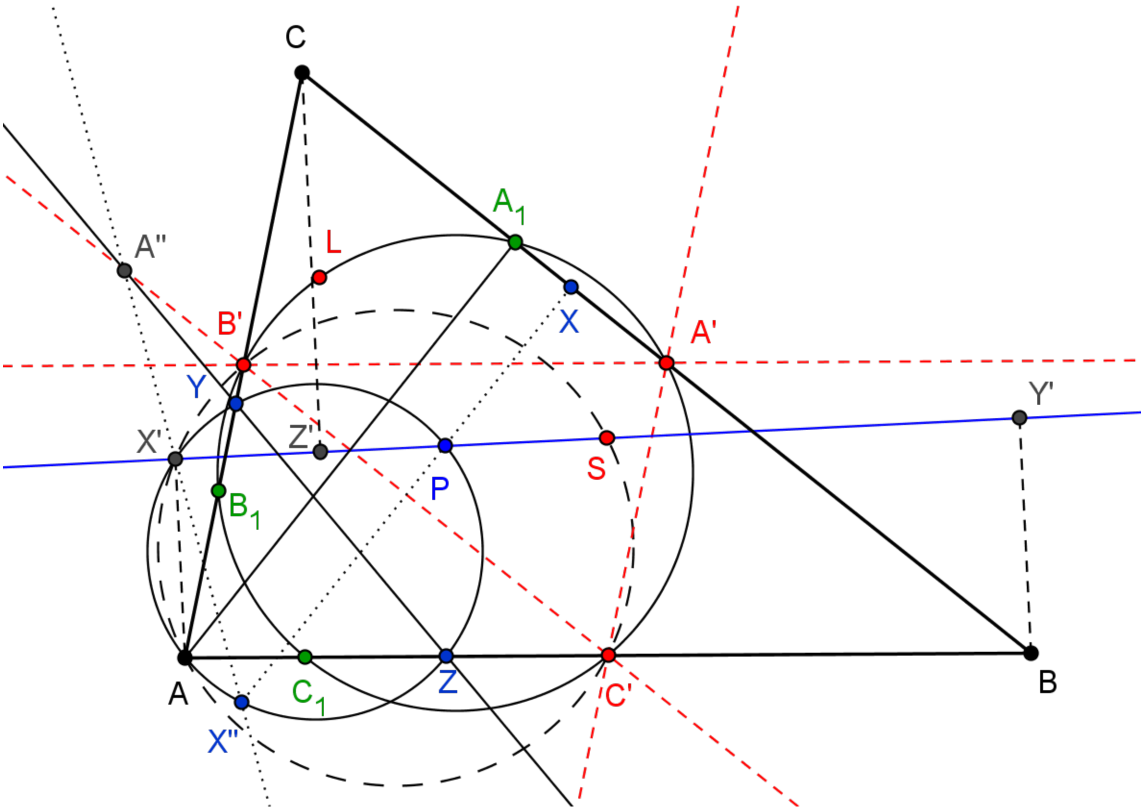
Korolar 4.4. *Ortopol pravca koji prolazi kroz središte opisane kružnice nekog trokuta leži na Feuerbachovoj kružnici tog trokuta.*

Idući teorem ima krucijalno značenje za ovo poglavlje:

Teorem 4.5. *Neka su X, Y i Z redom nožišta okomica iz točke P na pravce BC, AC i AB. Neka su X', Y' i Z' redom ortogonalne projekcije točaka A, B, C na pravac PS. Zatim, neka su $A'' = B'C' \cap YZ$, $B'' = A'C' \cap XZ$ i $C'' = A'B' \cap XY$. Tada točka L iz teorema 4.2 leži na pravcima XA'', YB'' i ZC''.*

Dokaz. Uočimo da je trokut XYZ nožišni trokut točke P s obzirom na trokut ABC. Neka su sada X'', Y'' i Z'' točke simetrične točkama X, Y i Z s obzirom na prvace $B'C'$, $A'C'$ i $A'B'$ redom.

Očito je $XX'' \perp B'C'$ odnosno $XX'' \perp BC$ jer $B'C' \parallel BC$. Dakle, točke P, X X'' leže na pravacu okomitom na pravac BC. Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina iz vrhova A, B i C na nasuprotne stranice trokuta ABC. Tada su točke A i A_1 međusobno simetrične s obzirom na pravac $B'C'$. Stoga su pravci AX'' i A_1X međusobno simetrični s obzirom na pravac $B'C'$. Kako je A_1X paralelan pravcu $B'C'$, pravac AX'' je također paralelan pravcu $B'C'$ (jer je pravac AX'' simetričan pravcu A_1X), odnosno pravac $AX'' \parallel BC$.



Slika 4.4: Teorem 4.5 a)

Budući da je $AX'' \parallel BC$ i $PX'' \perp BC$, imamo $\angle AX''P = 90°$. Stoga točka X'' leži na kružnici promjera $\overline{AP}$. Nadalje, znamo $\angle AZP = 90°$, $\angle AYP = 90°$ te $\angle AX'P = 90°$, pa i točke Y, Z i X' leže na kružnici promjera $\overline{AP}$. Iz teorema 4.3 znamo da točke B', C' i X' leže na kružnici promjera $\overline{AS}$. Primjenom svojstava orijentiranih kutova (teorem 1.9) imamo $\angle AC'B' = \angle AX'B'$ i $\angle YZA = \angle YX'A$. Sada možemo računati:

$$\begin{aligned} \angle YX'B' &= \angle YX'A + \angle AXB' \\ &= \angle YZA + \angle AC'B'. \end{aligned}$$

Nadalje, $A'' \in YZ$ i $C' \in AZ$ pa je $\angle YZA = \angle A''ZC'$. Kako je i $A'' \in B'C'$, to je $\angle AC'B' = \angle ZC'A''$. Stoga dalje imamo:

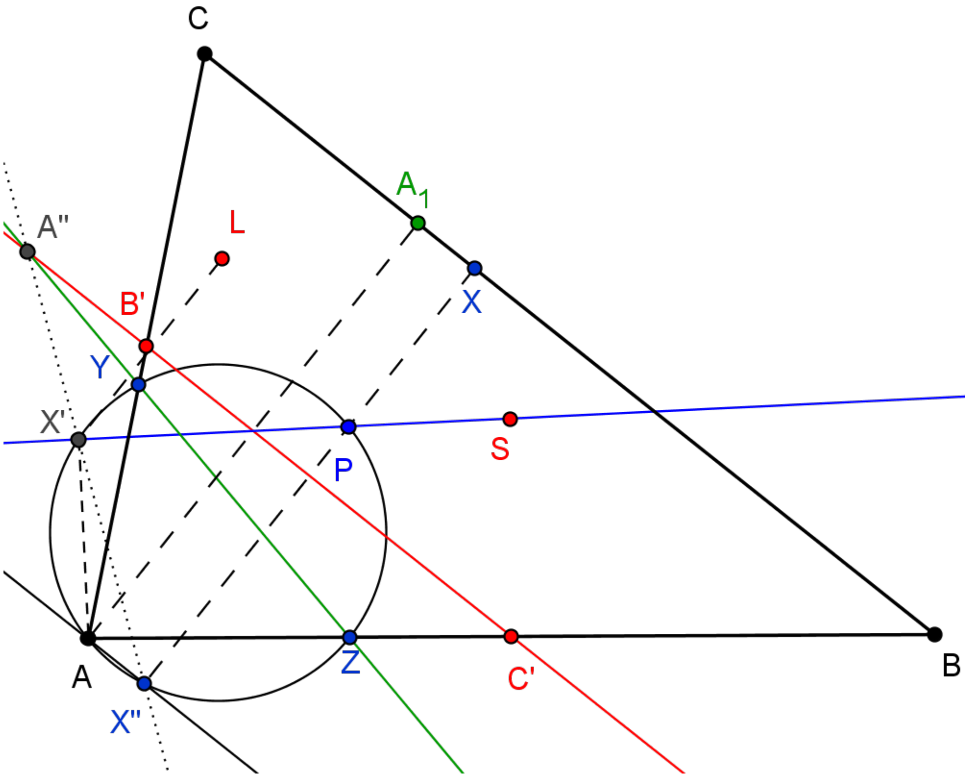
$$\begin{aligned} \angle YX'B' &= \angle A''ZC' + \angle ZC'A'' \\ &= \angle A''ZC' + \angle ZC'A''. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Iz svojstva 7. iz teorema 1.9 znamo

$$\angle A''ZC' + \angle ZC'A'' = -\angle C'A''Z = \angle ZA''C'. \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) zaključujemo $\angle YX'B' = \angle ZA''C' = \angle YA''B'$. Dobili smo $\angle YX'B' = \angle YA''B'$. Dakle, točka X' leži na kružnici koja prolazi točkama A'', Y i B'. Stoga je $\angle A''B'Y = \angle A''X'Y$. Budući da točke Y, Z, X' i X'' leže na kružnici promjera $\overline{AP}$, imamo $\angle YPX'' = \angle YX'X''$. Na temelju navednog možemo računati:

$$\begin{aligned}
\angle A''X'X'' &= \angle A''X'Y + \angle YX'X'' \\
&= \angle A''B'Y + \angle YPX'' \\
&= \angle(C'B', AC) + \angle(PY, PX) \\
&= \angle(C'B', AC) + \angle(PY, AC) + \angle(AC, CB) + \angle(BC, PX) \\
&= \angle(C'B', AC) + 90^\circ + \angle(AC, CB) + 90^\circ \\
&= \angle(C'B', AC) + \angle(AC, CB) \\
&= \angle(CB, AC) + \angle(AC, CB) \\
&= 0^\circ.
\end{aligned}$$

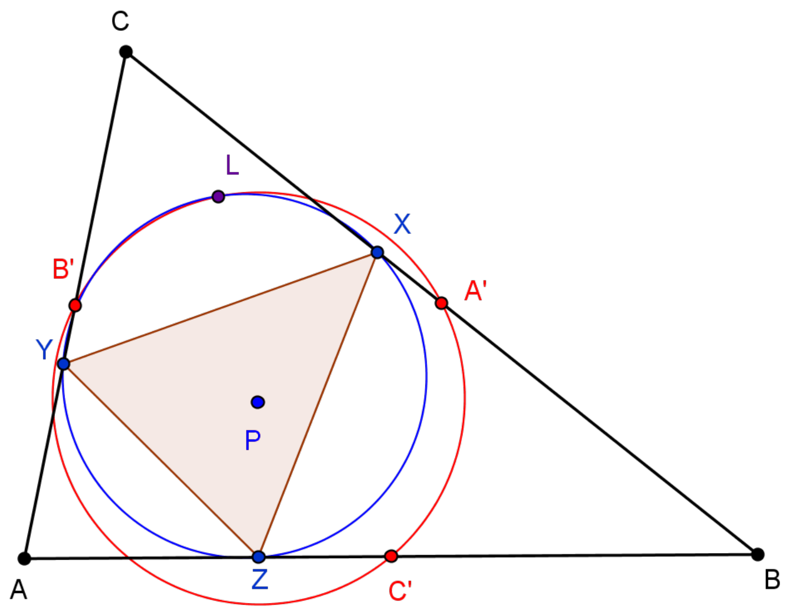


Slika 4.5: Teorem 4.5 b)

Dakle, točke A'', X' i X'' su kolinearne. No, prema teoremu 4.3 točka X' simetrična je točki L s obzirom na pravac $B'C'$, dok smo točku X'' definirali kao točku simetričnu točki X s obzirom na pravac $B'C'$. Točka A'' leži na pravcu $B'C'$ pa je i sama sebi simetrična na taj pravac. Budući da su točke A'', X' i X'' kolinearne, to su i njihove simetrične slike A'', L i X kolinearne. Dakle, $L \in XA''$. Analogno se pokaže $L \in YB''$ i $L \in ZC''$. Slijedi tvrdnja teorema. □

U dokazu prethodnog teorema pokazali smo da točke Y, Z, X' i X'' leže na kružnici promjera $\overline{AP}$. Ako promotrimo potenciju točke A'' na tu kružnicu vrijedi: $|A''X'| \cdot |A''X''| = |A''Z| \cdot |A''Y|$. Budući da su A'', X' i X'' simetrične točkama A'', L i X s obzirom na pravac $B'C'$, imamo $|A''X'| = |A''L|$ te $|A''X''| = |A''X|$, odnosno $|A''L| \cdot |A''X| = |A''X'| \cdot |A''X''|$. Odnosno, $|A''L| \cdot |A''X| = |A''Z| \cdot |A''Y|$ pa točke L, X, Y, Z leže na jednoj kružnici. To znači da točka L leži na kružnici kroz točke X, Y i Z, odnosno na opisanoj kružnici nožišnog trokuta XYZ točke P s obzirom na trokut ABC. Time smo dokazali:

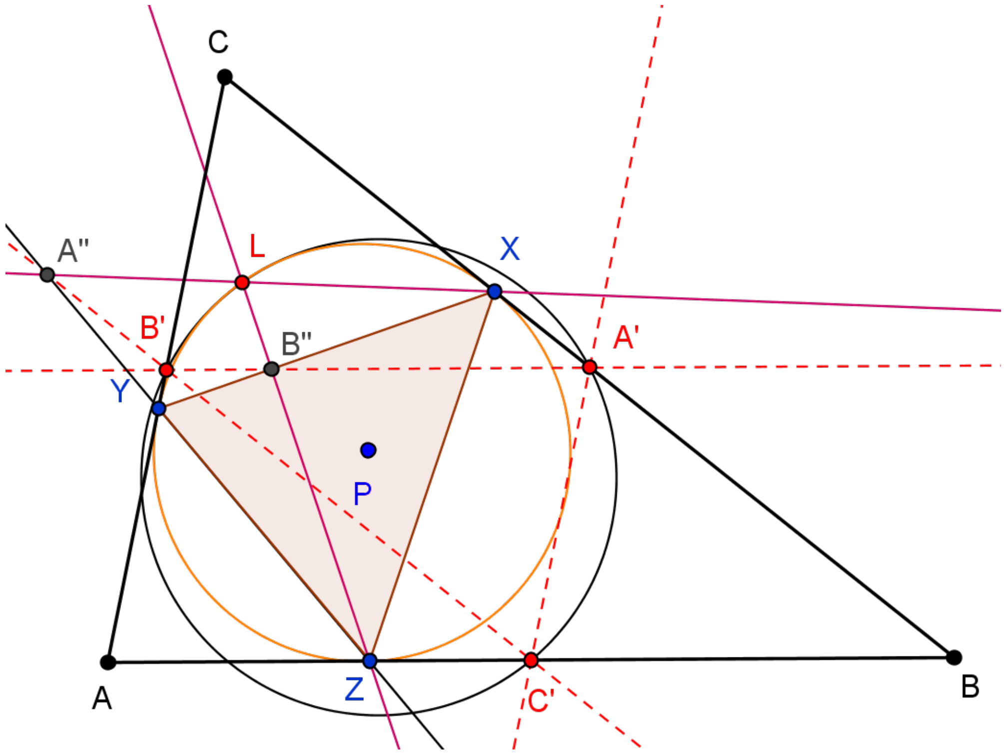
Teorem 4.6. *Uz oznake kao ranije točka L leži na opisanoj kružnici nožišnog trokuta XYZ točke P s obzirom na trokut ABC.*



Slika 4.6: Teorem 4.6

Na temelju dokazanih tvrdnji u ovom poglavlju slijedi teorem koji nosi naziv **Prvi Fontenèov teorem**[1]:

Teorem 4.7. *Neka je ABC trokut i P bilo koja točka ravnine. Neka su točke A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ danog trokuta. Neka je XYZ nožišni trokut točke P s obzirom na trokut ABC. Neka su točke A'', B'' i C'' presjeci odgovarajućih stranica trokuta $A'B'C'$ i XYZ. Tada se pravci XA'', YB'' i ZC'' sijeku u točki L koja je zajednička točka Feuerbachove kružnice trokuta ABC i opisane kružnice nožišnog trokuta XYZ.*



Slika 4.7: Prvi Fontenèov teorem

Točka L iz teorema 4.7 naziva se **Fontenèova točka** točke P s obzirom na trokut ABC.

Drugi Fontenèov teorem izriče još jaču tvrdnju.

Teorem 4.8. *Neka je ABC trokut i P proizvoljna točka ravnine. Ako se točka P giba po fiksnom pravcu koji prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC tada opisana kružnica*

[1]Georges Fontenè (1848. – 1923.), profesor na francuskom sveučilištu u Parizu. Svoje je radove objavljivao u časopisu *Nouvelles Annales*.

nožišnog trokuta točke P s obzirom na trokut ABC prolazi kroz fiksnu točku Feuerbachove kružnice trokuta ABC.

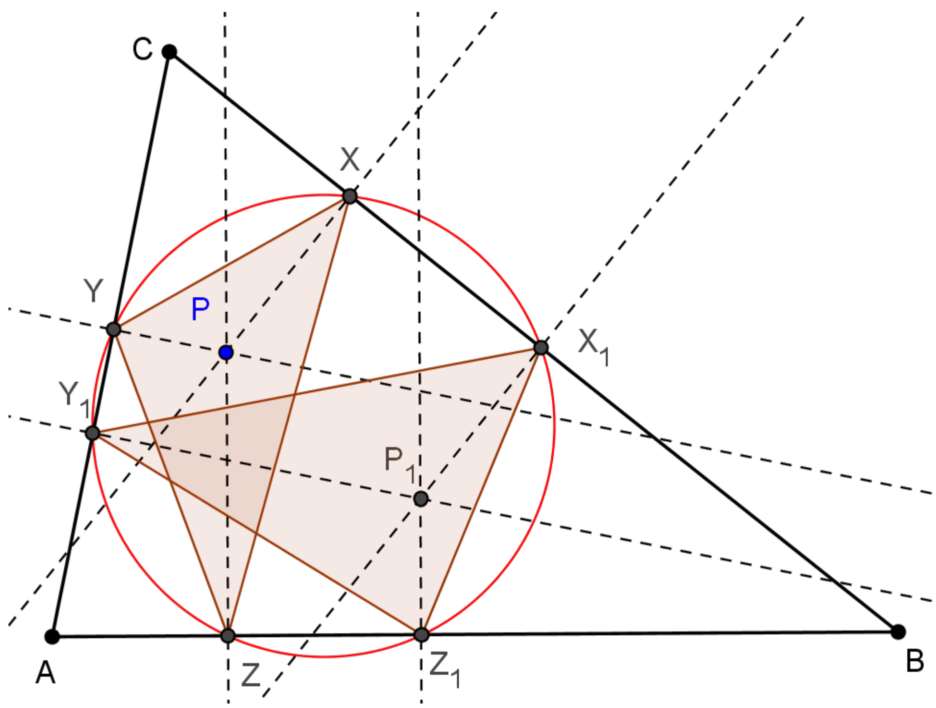
Dokaz. Dokaz slijedi iz teorema 4.7 i 4.1. Naime, točka je fiksna upravo zato što je anti-Steinerova točka. □

Na kraju dokažimo teorem koji se smatra generalizacijom teorema o Feuerbachovoj točki, a on nosi naziv **Treći Fontenèov teorem**.

Teorem 4.9. *Neka je ABC trokut i P proizvoljna točka ravnine. Neka je točka P_1 izogonalni konjugat točke P s obzirom na trokut ABC te S središte opisane kružnice trokuta ABC. Feuerbachova kružnica i opisana kružnica nožišnog trokuta točke P s obzirom na trokut ABC se diraju ako i samo ako su točke P, P_1 i S kolinearne.*

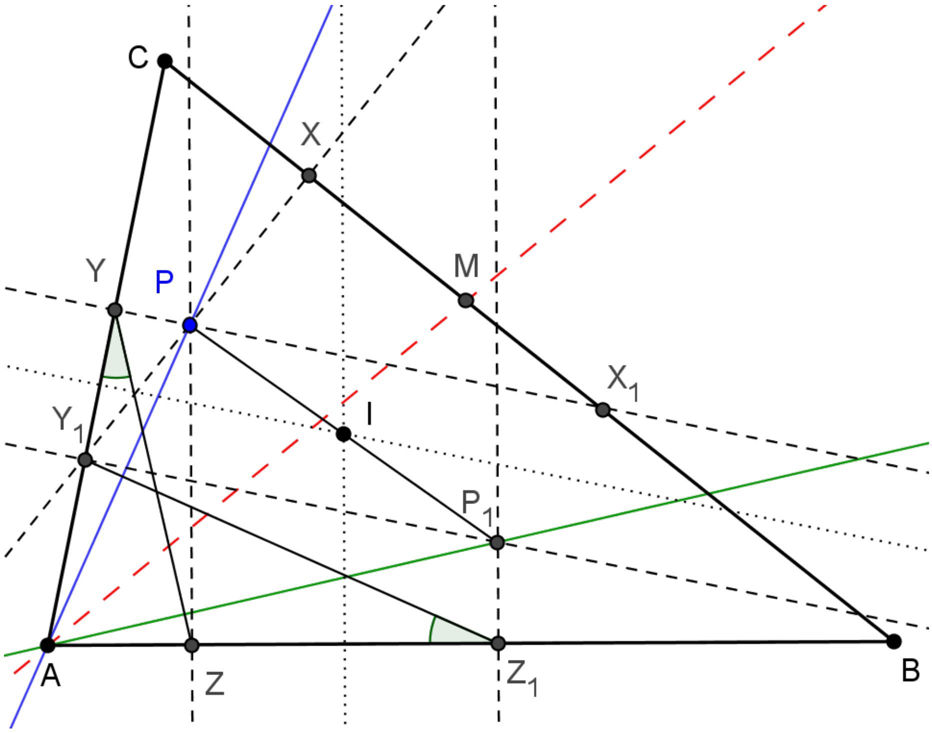
Pri dokazu koristit ćemo sljedeću zanimljivu lemu:

Lema 4.10. *Neka je ABC trokut i točka P unutar tog trokuta. Neka je točka P_1 izogonalni konjugat točke P s obzirom na trokut ABC. Neka su XYZ i $X_1Y_1Z_1$ nožišni trokuti točaka P i P_1 s obzirom na trokut ABC. Točke X, Y, Z, X_1, Y_1 i Z_1 leže na kružnici čije je središte polovište dužine $\overline{PP_1}$.*



Slika 4.8: Opisana kružnica nožišnih trokuta točaka P i P_1.

Dokaz. Neka su Y i Y_1 na pravcu AC te neka su Z i Z_1 na pravcu AB. Pokažimo da te četiri točke leže na jednoj kružnici.



Slika 4.9: Lema 4.10

Zbog definicije nožišnog trokuta je $\angle PYA = \angle PZA = 90°$ pa točke Y i Z leže na kružnici promjera $\overline{PA}$. Zato je $\angle PYZ = \angle PAZ$. Analogno je $\angle Y_1Z_1P_1 = \angle Y_1AP_1$.

Neka je M točka u kojoj simetrala kuta CAB siječe stranicu $\overline{BC}$. Tada je $\angle MAB = \angle CAM$. Nadalje, iz definicije izogonalog konjugata je $\angle PAM = \angle MAP_1$. Na temelju svojstva orijentiranih kutova možemo pisati:

$$\begin{aligned}\angle PAZ &= \angle PAM + \angle MAZ\\ &= \angle MAP_1 + \angle MAB\\ &= \angle CAM + \angle MAP_1\\ &= \angle CAP_1 = \angle Y_1AP_1.\end{aligned}$$

Dobili smo:

$$\angle PYZ = \angle PAZ = \angle Y_1AP_1 = \angle Y_1Z_1P_1.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}\angle ZYY_1 &= \angle ZYA\\ &= 90^\circ - \angle PYZ\\ &= 90^\circ - \angle Y_1Z_1P_1\\ &= \angle AZ_1Y_1 = \angle ZZ_1Y_1.\end{aligned}$$

Dakle, $\angle ZYY_1 = \angle ZZ_1Y_1$ pa su prema svojstvu 6. iz teorema 1.9 točke Y, Y_1, Z i Z_1 konciklične.

Označimo s I središte kružnice kroz točke Y, Y_1, Z i Z_1. Tada I leži na presjeku simetrala dužina $\overline{YY_1}$ i $\overline{ZZ_1}$ jer su to tetive promatrane kružnice. Ako sada promotrimo pravokutne trapeze YY_1P_1P i ZZ_1P_1P, uočavamo da su simetrale dužina $\overline{YY_1}$ i $\overline{ZZ_1}$ upravo srednjice tih trapeza, pa te simetrale prolaze kroz polovište dužine $\overline{PP_1}$. Dakle, točka I je polovište dužine $\overline{PP_1}$.

Kao što smo pokazali konciklićnost točaka Y, Y_1, Z i Z_1, slično bismo pokazali da su i točke X, X_1, Y i Y_1 konciklične. Središte kružnice kroz točke X, X_1, Y i Y_1 leži na simetralama dužina $\overline{XX_1}$ i $\overline{YY_1}$ jer su to tetive promatrane kružnice. Iz pravokutnih trapeza XX_1P_1P i YY_1P_1P, vidimo da su simetrale dužina $\overline{YY_1}$ i $\overline{ZZ_1}$ upravo srednjice tih trapeza, pa te simetrale prolaze kroz polovište dužine $\overline{PP_1}$, a to je upravo točka I. Dakle, točke X, Y, Z, X_1, Y_1 i Z_1 leže na kružnici sa središtem u točki I, a ta je kružnica upravo kružnica opisana nožišnom trokutu XYZ. Slijedi tvrdnja. □

Lako se pokaže da su ortocentar i središte opisane kružnice nekog trokuta izogonalno konjugirane točke. Tada je opisana kružnica njihovih nožišnih trokuta upravo Feuerbachova kružnica početnog trokuta.

Sada možemo dokazati teorem 4.9.

Dokaz. Neka je XYZ nožišni trokut točke P i $X_1Y_1Z_1$ nožišni trokut točke P_1. Neka je L Fontenèova točka točke P s obzirom na trokut ABC te L_1 Fontenèova točka točke P_1 s obzirom na trokut ABC. Prema lemi 4.10 trokuti XYZ i $X_1Y_1Z_1$ imaju istu opisanu kružnicu. Tada se L_1 nalazi na Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC i na kružnici opisanoj trokutu XYZ, kao i točka L prema teoremu 4.7. Dakle, točke L i L_1 su točke presjeka tih dviju kružnica.

Točka L je prema teoremu 4.1 anti-Steinerova točka pravca PS s obzirom na trokut $A'B'C'$. Isto tako L_1 je anti-Steinerova točka pravca P_1S s obzirom na trokut $A'B'C'$. Feuerbachova kružnica trokuta ABC i opisana kružnica trokuta XYZ se diraju ako i samo ako se točke L i L_1 podudaraju.

Iz teorema iz kojeg prozilazi definicija anti-Steinerove točke (teorem 3.1) vidimo da zapravo postoji bijekcija između pravaca kroz ortocentar i točaka opisane kružnice trokuta. Stoga ako se točke L i L_1 podudaraju tada se i pravci PS i P_1S podudaraju. S druge strane, ako se pravci PS i P_1S podudaraju, to jest točke P, P_1 i S su kolinearne tada je prema teoremu 4.8 sjecište Feuerbachove kružnice trokuta ABC i opisane kružnice trokuta XYZ fiksna točka pa se točke L i L_1 podudaraju. Slijedi tvrdnja. □

Uočimo da je Feuerbachov teorem, dokazan u drugom poglavlju ovog rada, poseban slučaj teorema 4.9 i to kada je točka P upravo središte upisane kružnice trokuta ABC, jer je središte upisane kružnice samo sebi izogonalni konjugat. Tada je Feuerbachova točka zapravo Fontenèova točka danog trokuta.

Kao što je i uobičajeno u matematici, postoji još teorema koji se smatraju generalizacijom Feuerbachova teorema.

Bibliografija

[1] J. L. Ayme, *Les trois thèorèmes de Georges Fontenè*, Geometry Gèomètrie Geometria **8** (2011.), 1–28, http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Fontene.pdf, (lipanj 2015.).

[2] M. Bocanu, *Geometry Unbound*, https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/article_1_bocanu.pdf, (lipanj 2015.).

[3] A. Bogomolny, *Orthopole: What is it? A Mathematical Droodle*, http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Orthopole.shtml#explanation, (svibanj 2015.).

[4] D. Grinberg, *Anti-Steiner points with respect to a triangle*, http://web.mit.edu/~darij/www/AntiSteinerPDF.zip, (travanj 2015.).

[5] ______, *From Baltic Way to Feuerbach - A Geometrical Excursion*, http://web.mit.edu/~darij/www/BalticFeuer.zip, (travanj 2015.).

[6] ______, *Generalization of the Feuerbach point*, web.mit.edu/~darij/www/GenFeuerPDF.zip, (travanj 2015.).

[7] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija, skripta, verzija 1.0*, http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf, (travanj 2015.).

[8] R. A. Johnson, *Directed Angles in Elementary Geometry*, American Mathematical Monthly **25** (1917.), br. 3, 101–105.

[9] ______, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover reprint, 1925.

[10] K. Kedlaya, *Geometry Unbound*, (2006.), http://kskedlaya.org/geometryunbound/gu-060118.pdf.

[11] C. Kimberling, *Encyclopedia of triangle centers – ETC*, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, (svibanj 2015.).

[12] Z. Kolar-Begović i A. Tonković, *Feuerbachov teorem*, Osječki matematički list (2009.), br. 9, 21–30.

[13] V. Praslov, *Problems in Plane and Solid geometry, v. 1 Plane Geometry*, http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf, (travanj 2015.).

[14] L. N. Van, *Fontenè theorems and some corollaries*, https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2010/11/fontene-theorem-and-some-corollaries.pdf, (lipanj 2015.).

[15] J. Vonk, *The Feuerbach Point and Reflections of the Euler line*, Forum Geometricorum **9** (2009.), br. 9, 47–55.

[16] I. Zelich, *Poncelet point and its applications*, http://www.academia.edu/6251353/Poncelet_point_and_its_applications_3_, (svibanj 2015.).

Sažetak

U ovom smo radu dokazali dio poznatog Feuerbachova teorema, odnosno da se Feuerbachova kružnica i upisana kružnica nekog trokuta diraju u Feuerbachovoj točki. Zatim smo Feuerbachovu točku povezali s drugim posebnim točkama trokuta. Naime, promatrali smo je u ulozi anti-Steinerove točke, ortopola, Ponceleove točke te smo uspostavili vezu između Feuerbachove točke i Eulerove točke simetrije. Na kraju, dana je generalizacija Feuerbachova teorema koja je poznata pod nazivom Treći Fontenèov teorem. Tijekom cijelog rada koristilo se znanje o orijeniranim kutovima koje je uvelike olašalo većinu danih dokaza.

Summary

In this paper we proved the part of the famous Feuerbach theorem, that is, Feuerbach circle of any triangle is tangent to its incircle at Feuerbach point. Then, we connected Feuerbach point with other special points of the triangle. In fact, we have observed it in the role of anti-Steiner point, orthopole, Poncelet point and we have established a relation between Feuerbach point and Euler reflection point. Finally, a generalization of Feuerbach theorem which is known as the Third Fontenè theorem is given. Through the entire paper the knowledge of directed angles was used which made many of proofs easier.

Životopis

Rođena sam 24. ožujka 1992. godine u Zagrebu. Godine 1998. krenula sam u prvi razred Osnovne škole Dragutina Domjanića u Svetom Ivanu Zelini. Osmi razred osnovne škole završila sam 2006. godine i te iste godine upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Dragutina Stražimira, također u Svetom Ivanu Zelini.

Nakon završetka opće gimnazije 2010. godine, upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom Fakultetu u Zagrebu. Završetkom tog studija 2013. godine, stekla sam akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer: nastavnički, također na PMF-u u Zagrebu, koji ove godine završavam.