Monotona dinamika Frenkel-Kontorovina modela i primjene

Greguric, Tena

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Tena Gregurić

MONOTONA DINAMIKA FRENKEL-KONTOROVINA MODELA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Siniši Slijepčeviću na strpljenju, pomoći i vodstvu.
Puno hvala mojoj obitelji, prijateljima i mom Filipu što su uvijek tu uz mene. Vaša ljubav i podrška su jednostavno neopisive.
Na kraju, najviše želim zahvaliti Kristini na svemu što je prošla sa mnom ovih pet godina. Hvala ti Kike na beskrajnoj potpori i strpljenju. Uspjele smo!

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se monotonim dinamičkim sustavima, to jest dinamičkim sustavima koji čuvaju uređaj. Proučavat ćemo njihova svojstva, pri čemu ćemo se fokusirati na asimptotsko ponašanje. Definirat ćemo kooperativne i kompetitivne diferencijalne jednadžbe. Na kraju ćemo proučiti Frenkel-Kontorovin model. To je model koji opisuje dinamiku lanca čestica, pri čemu postoji međudjelovanje svake čestice s najbližim susjedom, a sve u prisutnosti vanjskog periodičnog potencijala.

Poglavlje 1 zove se "Monotoni dinamički sustavi". U njemu definiramo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u radu kao što su polutok, ravnotežna točka, omega graničan skup i drugi. Proučavamo svojstva monotonih dinamičkih sustava na metričkim prostorima s uređajem. Glavni rezultat poglavlja kaže da, uz određene pretpostavke, generička orbita monotonog polutoka konvergira k skupu ravnotežnih točaka.

Poglavlje 2 započinjemo definicijom stabilnosti, odnosno stabilne točke. Navodimo vrlo bitan Krein-Rutmanov teorem. Glavni rezultat poglavlja je definiranje dovoljnih uvjeta za konvergenciju generičke orbite monotonog polutoka prema točno jednoj točki ravnoteže.

Poglavlje 3 je neovisno o prethodnima. U njemu koristimo samo Kriterij konvergencije iz poglavlja 2. Fokusiramo se na kompetitivne i kooperativne sustave običnih diferencijalnih jednadžbi koji su nužno ireducibilni. Glavni zaključak poglavlja je da je tok na kompaktnom graničnom skupu n-dimenzionalnog kooperativnog ili kompetitivnog sustava topološki ekvivalentan sa tokom na kompaktnom invarijantnom skupu Lipshitzovog (n-1)-dimenzionalnog sustava.

U Poglavlju 4 obrađujemo glavnu temu ovog rada, Frenkel-Kontorovin model. Bavimo se gradijentnom dinamikom tog modela te na kraju opisujemo njegovu praktičnu primjenu.

1 Monotoni dinamički sustavi

1.1 Osnovni pojmovi

Monoton dinamički sustav je dinamički sustav na uređenom metričkom prostoru koji čuva uređaj, odnosno, ako početna stanja zadovoljavaju neki uređaj, onda i sva buduća stanja zadovoljavaju taj uređaj.
Neka je X uređen metrički prostor s metrikom d i relacijom parcijalnog uređaja $\leq$.

Definicija 1.1. *Relacija parcijalnog uređaja je binarna relacija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*
(i) refleksivnost: $x \leq x$ *za svaki* $x \in X$
(ii) tranzitivnost: $x \leq y$ *i* $y \leq z$ *povlači* $x \leq z$
(iii) antisimetričnost: $x \leq y$ *i* $y \leq x$ *povlači* $x = y$

Pišemo $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Ako imamo dva podskupa A i B od X, pišemo $A \leq B(A < B)$ ako za svaki izbor $x \in A$ i $y \in B$ vrijedi $x \leq y(x < y)$.
Pretpostavimo da su relacija uređaja i topologija na X kompatibilne u smislu da je $x \to y$ kad $x_n \to x$ i $y_n \to y$ kad $n \to \infty$ i $x_n \leq y_n$ za svaki n. Za $A \subset X$ pišemo A za zatvarač od A i $\operatorname{Int} A$ za interior od A.
U primjeni, X je obično podskup Banachovog prostora Y s pozitivnim konusom Y_+, gdje je Y_+ neprazan zatvoren podskup od Y sa svojstvima:

(1)$\mathbb{R}_+ \cdot Y_+ \subset Y_+$,
(2)$Y_+ + Y_+ \subset Y_+$,
(3)$Y_+ \cap (-Y_+) = 0$.

U ovom slučaju, relacija definirana s: $x \leq y$ ako i samo ako $y - x \in Y_+$ je relacija parcijalnog uređaja.
Nama najkorisniji primjeri su Banachovi prostori s realnim funkcijama na nekom skupu Ω, gdje je Y_+ podskup onih funkcija koje poprimaju samo nenegativne vrijednosti za sve (ili skoro sve) točke iz Ω. Na primjer, ako je $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, onda je prostor Y ustvari $\mathbb{R}^n$ s konusom $Y_+ = \mathbb{R}^n_+$, koji označava skup vektora s nenegativnim komponentama. Odgovarajući uređaj $x \leq y$ znači da je $x_i \leq y_i$ za svaki i. Ako je Y Banachov prostor s neprekidnim funkcijama na kompaktnom topološkom prostoru Ω i Y_+ konus nenegativnih funkcija, tada uređaj $x \leq y$ znači da je $x(t) \leq y(t)$ za svaki $t \in \Omega$.

Definicija 1.2. Polutok *na X je neprekidno preslikavanje* $\Phi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ *koje zadovoljava:*
(i) $\Phi_0 = id_X$,
(ii)$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ *za* $t,s \geq 0$.

Pri tome je $\Phi_t(x) \equiv \Phi(x, t)$ za $x \in X$ i $t \geq 0$ te je id_X funkcija identiteta na X. Orbita točke x se označava sa $O(x)$ i definirana je s $O(x) = \{\Phi_t(x) : t \geq 0\}$.

Definicija 1.3. Ravnotežna točka *je točka x za koju vrijedi* $O(x) = \{x\}$.

Definicija 1.4. *Neka je E skup svih ravnotežnih točaka od Φ. Kažemo da je podskup A od X* pozitivno invarijantan *ako je $\Phi_t A \subset A$ za svaki $t \geq 0$. Nadalje, kažemo da je* invarijantan *ako je $\Phi_t A = A$ za svaki $t \geq 0$. Kažemo da je $O(x)$* T-periodična orbita *za neki $T > 0$ ako je $\Phi_T(x) = x$. U tom slučaju, $\Phi_{t+T}(x) = \Phi_t(x)$ za svaki $t \geq 0$ pa je $O(x) = \{\Phi_t(x) : 0 \leq t \leq T\}$. Tada $\Phi_t(x)$ nazivamo T-periodičnim rješenjem. T-periodično rješenje se može proširiti na $\mathbb{R}$ kao jedinstvena T-periodična funkcija u(t) koja se poklapa s $\Phi_t(x)$ za $0 \leq t \leq T$. To je rješenje u smislu da je $\Phi_t(u(s)) = u(t+s)$ za $t \geq 0$ i $s \in R$.*

Definicija 1.5. Omega graničan skup, $\omega(x)$, *od $x \in X$ definiran je s $\omega(x) = \cap_{t\geq 0} \cup_{s\geq t} \Phi_s(x)$.*

Ako je $O(x)$ kompaktan, onda je $\omega(x)$ neprazan, kompaktan, povezan, invarijantan i privlači $\Phi_t(x)$, odnosno, $\mathrm{dist}(\omega(x), \Phi_t(x)) \to 0$ kad $t \to \infty$. Podsjetimo da $\mathrm{dist}(D, x) = \inf_{y\in D} d(y, x)$ daje najmanju udaljenost točke $x \in X$ do podskupa D od X.

Definicija 1.6. *Točku $x \in X$ nazivamo* kvazikonvergentna točka *ako je $\omega(x) \subset E$. Skup svih takvih točaka označit ćemo s Q. Točku x nazivamo konvergentna točka ako $\omega(x)$ sadrži samo jednu točku iz E. Skup svih konvergentnih točaka označit ćemo s C.*

Definicija 1.7. *Kažemo da je polutok Φ monoton ako je $\Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$ za $x \leq y$ i $t \geq 0$. Kažemo da Φ* jako čuva uređaj *(engl. strongly order preserving, koristimo kraticu SOP), ako je monoton i ako za $x < y$ postoje otvoreni podskupovi U, V od X takvi da je $x \in U$ i $y \in V$ te $t_0 > 0$ tako da je $\Phi_{t_0} U \leq \Phi_{t_0} V$.*

Monotonost funkcije Φ povlači da je $\Phi_t U \leq \Phi_t V$ za sve $t \geq t_0$.
Ako je relacija parcijalnog uređaja generirana na konusu Y_+ u Banachovom prostoru Y i ako Y_+ ima neprazan interior, $\mathrm{Int}\, Y_+$, pišemo $x \ll y$ ako vrijedi $y - x \in \mathrm{Int}\, Y_+$. To je jača relacija od "$\leq$", što znači da $x \ll y$ povlači $x \leq y$. Na skupu Y postoji preslikavanje $Y \times Y \to Y$, pa slijedi da ako vrijedi $x \ll y$, onda postoje otvorene okoline U od x i V od y takve da je $V - U \subset \mathrm{Int}\, Y_+$. Odnosno, $U < V$.
Pretpostavimo da je parcijalni uređaj na X generiran na konusu Y_+ koji ima neprazan interior, $\mathrm{Int}\, Y_+$. Polutok Φ je *strogo monoton* na X ($X \subset Y$) ako je Φ monoton i ako za $x < y$ i $t > 0$ vrijedi $\Phi_t(x) \ll \Phi_t(y)$. Kažemo da je Φ *eventualno strogo monoton* ako je monoton i ako za $x < y$ postoji $t_0 > 0$ takav da vrijedi $\Phi_{t_0}(x) \ll \Phi_{t_0}(y)$. Očito, ako je Φ strogo monoton onda je i eventualno strogo monoton.

Propozicija 1.8. *Ako je Φ eventualno strogo monoton, onda on jako čuva uređaj (SOP).*

Dokaz. Ako je $x < y$, onda postoji $t_0 > 0$ takav da je $\Phi_{t_0}(x) \ll \Phi_{t_0}(y)$. Uzmimo okoline $\tilde{U}$ od $\Phi_{t_0}(x)$ i $\tilde{V}$ od $\Phi_{t_0}(y)$ takve da je $\tilde{U} < \tilde{V}$. Njih možemo naći jer je $\Phi_{t_0}(x) \ll \Phi_{t_0}(y)$. Zbog neprekidnosti Φ_{t_0} postoje okoline U od x i V od y takve da je $\Phi_{t_0}(U) \subset \tilde{U}$ i $\Phi_{t_0}(V) \subset \tilde{V}$. Iz toga slijedi tvrdnja, odnosno $\Phi_{t_0}(U) < \Phi_{t_0}(V)$. □

Lema 1.9. *Monoton niz sadržan u kompaktnom podskupu od X konvergira u X.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_n niz koji zadovoljava $x_n \leq x_{n+1}$ i $x_n \in A$ za $n \geq 1$, gdje je A kompaktni podskup od X. Slijedi da niz x_n ima konvergentne podnizove. (U slučaju padajućeg niza dokaz je analogan.) Lemu ćemo dokazati tako da pokažemo da postoji jedinstven $p \in X$ koji je limes svakoga konvergentnog podniza. Neka su x_{n_k} i x_{m_k} dva podniza od x_n. Ako vrijedi $x_{n_k} \to p$ i $x_{m_k} \to q$ kada $k \to \infty$, tada zbog konvergencije niza x_n, za svaki k postoji l(k) takav da je $x_{n_k} \leq x_{m_{l(k)}}$. Ako pustimo da $k \to \infty$, slijedi da je $p \leq q$. Slično, za padajući niz dobivamo, $q \leq p$. Zbog svojstva antisimetrije relacije uređaja slijedi, $q = p$. □

1.2 Kriterij konvergencije

U ovom dijelu pretpostavljamo da je Φ monoton i da je $\overline{O(x)}$ kompaktan podskup od X za svaki $x \in X$.

Teorem 1.10. Kriterij konvergencije *Neka je $\Phi_T(x) \geq x$ za neki $T > 0$. Tada je $\omega(x)$ T-periodična orbita. Ako $\Phi_t(x) \geq x$ za t pripada nekom nepraznom otvorenom podskupu od $(0, \infty)$, onda $\Phi_t(x) \to p \in E$ kada $t \to \infty$. Preciznije, ako Φ jako čuva uređaj (SOP) i $\Phi_T(x) > x$ za neki $T > 0$, tada $\Phi_t(x) \to p \in E$ kada $t \to \infty$.*

Dokaz. Monotonost implicira da je $\Phi_{(n+1)T}(x) \geq \Phi_{nT}(x)$ za n=1, 2,... i zato $\Phi_{nT}(x) \to p$ kada $n \to \infty$ za neki p, zbog kompaktnosti zatvarača orbite. Zbog neprekidnosti Φ vrijedi

$$\Phi_{t+T}(p) = \Phi_{t+T}(\lim_n \Phi_{nT}(x)) = \lim_n \Phi_{(n+1)T+t}(x) = \Phi_t(p) \tag{1}$$

za svaki $t \geq 0$. Dakle, $O(p)$ je T-periodična orbita. Ako $t_j \to \infty$ i $\Phi_{t_j}(x) \to q$ za $j \to \infty$, pišemo $t_j = n_j T + r_j$, gdje je n_j prirodan broj i $0 \leq r_j \leq T$. Po potrebi prelazimo na podnizove pa možemo pretpostaviti da $r_j \to r$ kada $j \to \infty$. Znamo da $n_j \to \infty$ kada $j \to \infty$, pa imamo

$$\Phi_{t_j}(x) = \Phi_{r_j}(\Phi_{n_j T}(x)) \to \Phi_r(p) = q \tag{2}$$

kada $j \to \infty$, gdje je $0 \leq r \leq T$. Iz toga slijedi $\omega(x) = O(p)$. Time smo dokazali prvu tvrdnju. Ako $\Phi_t(x) \geq x$ vrijedi za $t \in (T- \in, T+ \in)$ za neke $T > 0$ i $0 < \in < T$, onda je $\omega(x) = O(p) = \{\Phi_t(p) : 0 \leq t \leq T\}$, gdje je $\Phi_{nT}(x) \to p$ i $O(p)$ je T-periodična orbita, po prethodnom dokazu. Ako isti argument primjenimo na $\tau \in (\tau- \in, \tau+ \in)$ umjesto T, dobivamo da je $\omega(x)$ τ-periodična orbita. No znamo da je $\omega(x) = O(p)$ pa slijedi da je

$$\Phi_{t+T}(p) = \Phi_t(p) \tag{3}$$

za svaki $t \geq 0$. Dobivamo da je $\Phi_t(p)$ τ-periodična za svaki $\tau \in (T- \in, T+ \in)$.

Neka je G skup svih perioda funkcije $\Phi_t(p)$. G je zatvoren na zbrajanje i sadrži interval $(T-\in, T+\in)$. Ako je $0 \leq s <\in$ i $t \geq 0$, onda vrijedi

$$\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(\Phi_s(p)) = \Phi_t(\Phi_{s+T}(p)) = \Phi_t(p) \tag{4}$$

Dakle, $[0, \in) \subset G$ i zato je $G = \mathbb{R}^+$ i $p \in E$. To dokazuje drugu tvrdnju.
Ako je $\Phi_T(X) > X$ i Φ jako čuva uređaj (SOP), onda postoje okoline U od x i V od $\Phi_T(x)$ te $t_0 > 0$ takvi da je $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Slijedi da je $\Phi_{t_0}(x) \leq \Phi_{t_0+T+\in}(x)$ za sve dovoljno male $\in$. Iz toga slijedi da je $\omega(x) = p \in E$. □

Bitna posljedica kriterija konvergencije jest da monotoni dinamički sustavi ne mogu imati privlačnu periodičnu orbitu. Periodična orbita O je privlačna ako postoji otvoreni skup U koji sadrži O sa svojstvom $\omega(X) = O$ za svaki $x \in U$. Kako bismo dokazali taj rezultat, zahtijevamo da prostor X ima sljedeća svojstva:
(P) Za dani $p \in X$ i okolinu U od p u X, postoji okolina V od p, $V \subset U$, i $y \in U$ takav da vrijedi $y \leq V$ ili $V \leq y$.
Pretpostavka (P) vrijedi ako je $X \subset Y$, ako je parcijalni uređaj na X je generiran na konusu Y_+ s nepraznim interiorom u Banachovom prostoru Y i ako svaka okolina U od p sadrži točku y koja zadovoljava $y \ll p$ ili $p \ll y$. Na primjer, to će vrijediti ako je X otvoren skup u Y.

Teorem 1.11. *Ako vrijedi pretpostavka (P), onda ne postoji netrivijalna, privlačna periodična orbita.*

Dokaz. Neka je $O = \{\Phi_T(P) : 0 \leq t \leq T\}$ privlačna T-periodična orbita. Tada postoji okolina U od p takva da ako je $x \in U$ onda vrijedi $\omega(x) = O$. Zbog (P), postoji okolina V od p koja je sadržana u U i $y \in U$ takav da je $y \leq Y$ ili $V \leq y$. Pretpostavimo da vrijedi prvo, a drugi slučaj slijedi analogno. Postoji $t_j \to \infty$ takav da vrijedi $\Phi_{t_j}(y) \to p$ pa $\Phi_{t_j}(y)$ pripada V za sve velike j. Fiksirat ćemo takav j, i tada vrijedi $y \leq \Phi_{t_j}(y)$. Kako je V otvoren i Φ monoton, $\Phi_{t_j+s}(y) \in V$ za svaki mali s pa je $y \leq \Phi_{t_j+s}(y)$ za mali s. Po kriteriju konvergencije, $\omega(y) = O$ je jedini element skupa E. To je u kontradikciji sa pretpotavkom da je O netrivijalna periodična orbita. □

Sljedeći rezultati pokazuju kako je omega graničan skup uglavljen u prostor X.

Teorem 1.12. Neuređenost graničnih skupova *Omega graničan skup ne može sadržavati dvije različite točke x i y sa svojstvom da postoje okoline U od x i V od y takve da je $U \leq V$. Ako Φ jako čuva uređaj, onda omega graničan skup ne može sadržavati dvije točke x i y takve da je $x < y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\omega(z)$ sadrži dvije različite točke x i y koje imaju okoline U i V, respektivno, takve da je $U \leq V$. $\Phi_{t_1}(z) \in U$ za neki $t_1 > 0$. Izaberemo t_2 veći od t_1 takav da je $\Phi_{t_2}(z) \in V$. Slijedi da je $\Phi_t(z) \in V$ za svaki t koji je dovoljno blizu t_2 i za takve t-ove imamo

$$\Phi_t(z) = \Phi_{t-t_1}\Phi_{t_1}(z) \geq \Phi_{t_1}(z). \tag{5}$$

Prema drugoj tvrdnji kriterija konvergencije, $\Phi_t(z) \to p \in E$ kada $t \to \infty$ pa je $\omega(z) = p$, što je kontradikcija.

$\square$

Izravna posljedica *neuređenosti graničnih skupova* je da omega graničan skup ne može sadržavati maksimalan (minimalan) element.

Korolar 1.13. *Ako Φ jako čuva uređaj (SOP), $a \in \omega(x)$ i $\omega(x) \leq a$ ($a \leq \omega(x)$), onda je $\omega(x) = \{a\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \in \omega(x)$ i $\omega(x) \leq a$. Ako je $b \in \omega(x)$ i $b \neq a$, onda je $b < a$, što je u kontradikciji s prethodnim teoremom. $\square$

1.3 Dihotomija graničnih skupova

Pretpostavljamo da Φ jako čuva uređaj. Glavni cilj je dokazati dihotomiju graničnog skupa: Ako je $x < y$, onda vrijedi ili (a) $\omega(x) < \omega(y)$ ili (b) $\omega(x) = \omega(y) \subset E$.

Propozicija 1.14. Ko-limiting princip *Ako je $x < y$, $t_k \to \infty$, $\Phi_{t_k}(x) \to p$ i $\Phi_{t_k}(y) \to p$ kad $k \to \infty$, onda je $p \in E$.*

Dokaz. Izaberimo okoline U od x i V od y i $t_0 > 0$ takve da $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Uzmimo dovoljno mali $\delta > 0$ tako da vrijedi $\{\Phi_s(x) : 0 \leq s \leq \delta\} \subset U$ i $\{\Phi_s(y) : 0 \leq s \leq \delta\} \subset V$. Tada vrijedi $\Phi_s(x) \leq \Phi_r(y)$ za sve $t_o \leq r$, $s \leq t_0 + \delta$. Dakle,

$$\Phi_{t_k - t_0}(\Phi_s(x)) \leq \Phi_{t_k - t_0}(\Phi_{t_0}(y)) = \Phi_{t_k}(y) \tag{6}$$

za svaki $s \in [t_0, t_0 + \delta]$ i sve velike k. Kako je

$$\Phi_{t_k - t_0}(\Phi_s(x)) = \Phi_{s - t_0}(\Phi_{t_k}(x)) = \Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \tag{7}$$

gdje je $r = s - t_0 \in [0, \delta]$ ako je s $\in [t_0, t_0 + \delta]$, dobivamo da je

$$\Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \leq \Phi_{t_k}(y) \tag{8}$$

za sve velike k i r $\in [0, \delta]$. Kad pustimo da $k \to \infty$, vidimo da je $\Phi_r(p) \leq p$ za $0 \leq r \leq \delta$. Ako u jednadžbi (6) zamijenimo $\Phi_s(x)$ s $\Phi_{t_0}(x)$ i $\Phi_{t_0}(y)$ sa $\Phi_s(y)$ i primijenimo iste zaključke kao gore, dobivamo da je $p \leq \Phi_r(p)$ za $0 \leq r \leq \delta$. Očito, $\Phi_r(p) = p$, $0 \leq r \leq \delta$ i zbog toga za svaki $r \geq 0$, pa je p $\in$ E. $\square$

Propozicija 1.15. Princip presjeka *Ako je $x < y$, onda je $\omega(x) \cap \omega(y) \subset E$.*

Dokaz. Ako je p $\in \omega(x) \cap \omega(y)$, onda postoji niz $t_k \to \infty$ takav da vrijedi $\Phi_{t_k}(x)$ $\to$ p. Po potrebi prelazimo na podniz pa možemo pretpostaviti da $\Phi_{t_k}(y) \to$ q. Monotonost implicira da je p $\leq$ q. Ako je p $<$ q, onda dolazimo do kontradikcije sa neuređenosti graničnih skupova, pošto su p,q $\in \omega(y)$. Dakle, p=q. Ko-limiting princip implicira da je p $\in$ E. $\square$

Ovaj dokaz pokazuje da ako je x < y i p $\in \omega(x) \cap \omega(y)$, tada vrijedi $\Phi_{t_k}(x) \to p$ ako i samo ako $\Phi_{t_k}(y) \to p$ kad niz $t_k \to \infty$.

Lema 1.16. *Neka su K_1 i K_2 dva kompaktna podskupa od X koja zadovoljavaju $K_1 < K_2$. Onda postoje otvoreni skupovi U i V, $K_1 \subset$ U, $K_2 \subset$ V te $t_0 \geq$ 0, $\epsilon >$ 0 takvi da*

$$\Phi_{t+s}(U) \leq \Phi_t(V);\ t \geq t_1, 0 \leq s \leq \epsilon. \tag{9}$$

Dokaz. Neka je x $\in K_1$. Za svaki y $\in K_2$ postoje $t_y \geq 0$ te okolina U_y od x i okolina V_y od y takve da je $\Phi_t(U_y) \leq \Phi_t(V_y)$ za t $\geq t_y$, jer Φ jako čuva uređaj. Onda je $\{V_y\}_{y \in K_2}$ otvoren pokrivač skupa K_2, pa možemo izabrati konačni podpokrivač: $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \equiv V$, gdje je $y_i \in K_2$, 1 $\leq$ i $\leq$ n. Neka je $\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^n U_y$, tako da je $\tilde{U}$ okolina od x i neka je $\tilde{t} = \max_{1 \leq i \leq n} t_{y_i}$. Tada za svaki i vrijedi $\Phi_{\tilde{t}}(U) \subset \Phi_{\tilde{t}}(U_{y_i}) \leq \Phi_{\tilde{t}}(V_{y_i})$, pa je $\Phi_t(\tilde{U}) \leq \Phi_t(V_{y_i})$ za svaki i,1 $\leq$ i $\leq$ n, i t $\geq \tilde{t}$. Slijedi da je $\Phi_t(\tilde{U} \leq \Phi_t(\tilde{V}$ za t $\geq \tilde{t}$. Kao podsjetnik u dokazu, zapisat ćemo $\tilde{U}_x = \tilde{U}$ i $\tilde{V}_x = \tilde{V}$ kako bismo naglasili neovisnost ovih otvorenih skupova o točki x $\in K_1$. Slično, $\tilde{t} = \tilde{t}_x$. Kako je x $\in K_2$ bio proizvoljno odabran, za svaki x $\in K_1$ možemo pronaći otvorenu okolinu $\tilde{U}_x$ od x, otvorenu okolinu $\tilde{V}_x$ od K_2 I $\tilde{t}_x \geq 0$ takvu da je $\Phi_t(\tilde{U}_x) \leq \Phi_t(\tilde{V}_x)0$ za t $\geq t_x$. Ponovno, $\{\tilde{U}_x\}_{x \in K_1}$ je otvoreni pokrivač za K_1, pa možemo izdvojiti konačan podpokrivač $\tilde{U}_{x_i}$, 1 $\leq$ i $\leq$ m, te skup U $= \bigcup_{i=1}^m \tilde{U}_{x_i} \supset K_1$, V $= \bigcap_{i=1}^m \tilde{V}_{x_i} \supset K_2$ i $t_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \tilde{t}_{x_i}$. Kako je V $\subset \tilde{V}_{x_i}$, $\Phi_t(\tilde{U}_{x_i}) \leq \Phi_t(\tilde{V})$ za t $\geq t_1$, za svaki i, slijedi $\Phi_t(U) \leq \Phi_t(V)$, za t $\geq t_1$.
Primijetimo da za svaki x $\in K_1$ postoji $\epsilon_x > 0$ i okolina W_x takva da vrijedi $\Phi([0, \epsilon_x) \times W_X) \subset$ U. Budući da je $\{W_x\}_{x \in K_1}$ otvoreni pokrivač od K_1, postoje x_1, x_2,..., $x_m \in K_1$ takvi da je $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}$. Neka je U' $= \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}$ i $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \epsilon_{x_i}$. Ako je x $\in$ U' i $0 \leq s \leq \epsilon$, onda je x ϵ W_{x_i} za neke i tako da je $\Phi_s(x) \in$ U. Zato je $\Phi([0, \epsilon) \times U') \subset$ U, pa je $\phi_s(U') \subset$ U, 0 $\leq$ s $< \epsilon$. Slijedi da je $\Phi_{t+s}(U') \subset \Phi_t(U) \leq \Phi_t(V)$ za t $\geq t_1$, 0 $\leq$ s $< \epsilon$. $\square$

Propozicija 1.17. *Neka x,y zadovoljavaju $x < y$. Ako vrijedi $t_k \to \infty$, $\Phi_{t_k}(x) \to a$, $\Phi_{t_k}(y) \to b$ kada $k \to \infty$ i ako je $a < b$, onda je $O(a) < b$.*

Dokaz. Za u $\in \overline{O(x)}$, v $\in \overline{O(y)}$, u $\leq$ v definiramo

$$J(u,v) = sup\{r \geq 0 : \Phi_t(u) \leq v, 0 \leq t \leq r\} \tag{10}$$

Cilj je pokazati da je J(u,v)=$+\infty$. Provjerit ćemo dva svojstva od J.
(S1) $J(\Phi_t(u), \Phi_t(v))$ je monotona nepadajuća po t.
Dovoljno je pokazati da je $J(\Phi_t(u), \Phi_t(v)) \geq J(u,v)$. Za $s \leq J(u,v)$, $\Phi_s(u) \leq v$ je $\Phi_s\Phi_t(u) \leq \Phi_t\Phi_s(u) \leq \Phi_t(v)$. Dakle,

$$J(\Phi_t(u), \Phi_t(v)) \geq s;\ \text{za sve } s \leq J(u,v) \tag{11}$$

(S2) Ako je $u_k \leq v_k$, $u_k \in \overline{O(x)}$, $v_k \in \overline{O(y)}$ i $u_k \to u$, $v_k \to v$, onda vrijedi

$$\limsup_{k \to \infty} J(u_k, v_k) \leq J(u,v). \tag{12}$$

Možemo uzeti da je $J(u,v) < \infty$ i da je $\limsup_{k\to\infty} J(u_k, v_k) - \epsilon > J(u,v)$ za neki $\epsilon > 0$. Neka $k_i \to \infty$ tako da je $\lim_{i\to\infty} J(u_k, v_k) = \limsup_{k\to\infty} J(u_k, v_k)$. Tada je $J(u,v) + \epsilon < J(u_{k_i}, v_{k_i})$ za sve velike i. Iz definicije J slijedi da je $\Phi_s(u_{k_i}) \leq v_{k_i}$ za $0 \leq s \leq J(u,v) + \epsilon$ i sve velike i. Ako pustimo da $i \to \infty$, dobivamo $\Phi_s(u) \leq v$ za $0 \leq s \leq J(u,v) + \epsilon$, što je kontradikcija s definicijom od J(u,v). Prema tome, vrijedi (S2).
Iz (S1) slijedi da $\alpha = lim_{t\to\infty} J(\Phi_t(x), \Phi_t(y))$ postoji na zatvorenom intervalu [0,∞]. Preko (S2) dobivamo $J \equiv j(a,b) \geq \alpha$. Uzmimo da je $J < \infty$. Za $0 \leq r \leq J$,$\Phi_r(a) \leq b$. Zapravo, $\Phi_r(a) < b$, $0 \leq J$ jer bismo u suprotnom $a, b \in \omega(x)$ zbog invarijantnosti od $\omega(x)$ i $a < b$ došli do kontradikcije sa neuređenosti graničnog skupa. Neka je $K = \{\Phi_r(a) : 0 \leq r \leq J\}$. K je kompaktan i $K < b$. Prema lemi 1.16, postoje t_1, $\epsilon > 0$ i otvoreni skupovi U i V, $K \subset U$ i $b \in V$, takvi da je $\Phi_{t_1+\delta}(U) \leq \Phi_{t_1}(V)$, $0 \leq \delta \leq \epsilon$. Slijedi da je $\Phi_{t_k}(y) \in V$ za $k \geq k_0$ za neki cijeli broj k_0. Kako $\Phi_{t_k}(x) \to a$ kad $k \to \infty$, $\Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \to \Phi_r(a)$ uniformno po $r \in [0, J]$ kad $k \to \infty$. Prema tome, postoji k_1 takav da je $\Phi_r(\Phi_{t_k}(x)) \in U$ za svaki $k \geq k_1$, $0 \leq r \leq J$. Tada je

$$\Phi_{t_1+\delta}\Phi_r\Phi_{t_k}(x) \leq \Phi_{t_1}\Phi_{t_k}(y) \tag{13}$$

za $k \geq k_0 = \max\{k_0, k_1\}$, $0 \leq r \leq J$, $0 \leq \delta \leq \epsilon$. Nakon preslagivanja i zbog monotonosti dobivamo

$$\Phi_{r+\delta}\Phi_{t+t_k}(x) \leq \Phi_{t+t_k}(y) \tag{14}$$

za $t \geq t_1$, $k \geq k_2$ $0 \leq r \leq J$,$0 \leq \delta \leq \in$. Slijedi da je $J(\Phi_{t+t_k}(x), \Phi_{t+t_k}(y)) \geq J+ \in$, za $k \geq k_2$. Ako pustimo $k \to \infty$, dobivamo $\alpha \geq J + \epsilon$. No $J \geq \alpha$ i dolazimo do kontradikcije. Dakle, $J = \infty$, pa vrijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 1.18. Princip apsorpcije *Neka su $u, v \in X$. Ako postoji $x \in \omega(u)$ takav da je $x < \omega(v)$, onda je $\omega(u) < \omega(v)$. Slično, ako postoji $x \in \omega(u)$ takav da je $\omega(v) < x$, onda je $\omega(v) < \omega(u)$.*

Dokaz. Treba primijeniti lemu 1.16 kako bismo dobili okoline U od x i V od $\omega(v)$ i $t_0 > 0$ tako da je $\Phi_{t_0}(U) \leq \Phi_{t_0}(V)$. Iz toga slijedi $\Phi_{t_0}(U) \leq \omega(v)$ jer je $\omega(v)$ invarijantan. Kako je $x \in \omega(u)$, postoji $t_1 > 0$ takav da je $\Phi_{t_1}(u) \in U$. Dakle, $\Phi_{t_0+t_1}(u) \leq \omega(v)$ i monotonost povlači da je $\Phi_{t_0+t_q+s}(u) \leq \omega(v)$ za svaki $s \geq 0$. To implicira da je $\omega(u) \leq \omega(v)$. Ako je $z \in \omega(u) \cap \omega(v)$, onda zbog $z \leq \omega(v)$ i $\omega(u) \leq z$, korolar 1.13 povlači da je $\omega(u) = \omega(v) = z$. No to nije moguće, jer je $x < \omega(x)$ i $x \in \omega(u)$ pa zaključujemo da je $\omega(u) < \omega(v)$. □

Propozicija 1.19. Princip separacije graničnih skupova *Neka za x,y vrijedi $x < y$. Ako $t_k \to \infty$, $\Phi_{t_k}(x) \to a$, $\Phi_{t_k}(y) \to b$ kad $k \to \infty$ i ako je $a < b$, onda vrijedi $\omega(x) < \omega(y)$.*

Dokaz. Po propoziciji 1.17 $O(a) \leq b$ i prema tome $\omega(a) \leq b$. Ako je $b \in \omega(a)$, onda korolar 1.13 implicira da je $\omega(a) = b \in E$. Ako primijenimo princip apsorpcije na $u = x$, $v = a$, $x = a$, dobivamo $a \in \omega(x)$, $a\omega(a) = b$ što implicira da je $\omega(x) < \omega(a)$. To je nemoguće jer je $\omega(a) \subset \omega(x)$. Prema tome, $\omega(a) < b$. Prema principu apsorpcije (za u=a,v=y) dobivamo $\omega(a) < \omega(y)$. Budući da svaki $z \in \omega(a)$ također pripada $\omega(x)$, po principu apsorpcije je $\omega(x) < \omega(y)$. □

Sada možemo dokazati najbitniji rezultat u teoriji.

Teorem 1.20. Dihotomija graničnog skupa *Ako je $x < y$, onda vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*
(a)$\omega(x) < \omega(y)$ ili
(b)$\omega(x) = \omega(y) \subset E$.
Ako vrijedi (b) i $t_k \to \infty$ onda vrijedi $\Phi_{t_k}(x) \to p$ ako i samo ako $\Phi_{t_k}(y) \to p$.

Dokaz. Ako je $\omega(x) = \omega(y)$, onda je $\omega(x) \in E$ po principu presjeka.
Ako je $\omega(x) \neq \omega(y)$, onda možemo pretpostaviti da postoji $q \in \omega(y) \backslash \omega(y)$, drugi slučaj slijedi analogno. Postoji $t_k \to \infty$ takav da da je $\Phi_{t_k}(y) \to q$. Po potrebi prelazimo na podniz pa možemo pretpostaviti da je $\Phi_{t_k}(x) \to p \in \omega(x)$. Monotonost implicira da je $p \leq q$, i ustvari je $p < q$ jer je $q \notin \omega(x)$. Po principu separacije graničnog skupa, $\omega(x) < \omega(y)$. □

1.4 Kvazikonvergencija je generička

Glavni rezultat ovog poglavlja kaže da tipična orbita polutoka koji jako čuva uređaj konvergira skupu E. Kako bismo to dokazali, potrebne su nam dodatne pretpostavke kompaktnosti.

Definicija 1.21. *Za $x \in X$ kažemo da x* može biti aproksimiran odozdo (odozgo) *u skupu X, ako postoji niz $\{x_n\}$ u X koji zadovoljava $x_n < x_{n+1} < x$ $(x < x_{n+1} < x_n)$ za $n \geq 1$ i $x_n \to x$ kad $n \to \infty$.*

(C) Za svaki $x_0 \in X$, $O(x_0)$ ima kompaktni zatvarač u X. Nadalje, ako $\{x_n\}_{n\geq 1}$ aproksimira x_0 odozdo ili odozgo, onda $\bigcup_{n\geq 0} \omega(x_n)$ ima kompaktni zatvarač sadržan u X.

(C) je relativno slab zahtjev za kompaktnost. Zadovoljen je ako vrijedi: (1) svaki ograničen (ili samo svaki kompaktan) skup $B \subset X$ ima ograničenu orbitu $O(B) = \bigcup_{x\in B} O(x)$ i (2) Φ_t je uvjetno potpuno neprekidan za neki $t_0 \leq 0$. Po definiciji, Φ_t je uvjetno potpuno neprekidan ako $\Phi_t(B)$ ima kompaktan zatvarač u X uvijek kad je B ograničen podskup od X (i $\Phi_t(B)$ je ograničen skup).
Ako su oba uvjeta zadovoljena i ako $\{x_n\}_{n\geq 1}$ aproksimira x_0 odozdo, onda je $\{x_n\}_{n\geq 0}$ kompaktan i prema tome je $\bigcup_{n\geq o} O(x_n)$ ograničen. Uvjetna kompaktnost od Φ_{t_0} implicira da je $\overline{\Phi_{t_0}(\cup_{n\geq 0} O(x_n))}$ kompaktan u X. Očito sadržava $\cup_{n\geq 0}\omega(x_n)$ i zato potonji izraz ima kompaktan zatvarač u X.
U ovom poglavlju pretpostavljamo da vrijedi (C).

Teorem 1.22. Trihotomija sekvencijalnog graničnog skupa *Neka* $x_0 \in X$ *ima svojstvo da može biti aproksimiran odozdo u* X *pomoću niza* $\tilde{x}_n$. *Tada postoji podniz* x_n *od* $\tilde{x}_n$ *takav da je* $x_n < x_{n+1} < x_0$ *za* $n \geq 1$ *te* $x_n \to x_0$ *i zadovoljena je jedna od sljedećih tvrdnji:*
(a)Postoji $u_0 \in E$ *takav da je*

$$\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < u_0 = \omega(x_0), n \geq 1 \tag{15}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), u_0) = 0 \tag{16}$$

(b)Postoji $u_0 \in E$ *takav da je*

$$\omega(x_n) = u_0 < \omega(x_0), n \geq 1 \tag{17}$$

Ako je $u \in E$ *i* $u < \omega(x_0)$, *onda je* $u \leq u_0$.

(c) $\omega(x_n) = \omega(x_0) \subset E$ *za* $n \geq 1$.

Dokaz. Neka je $\tilde{x}_n$ neki niz koji zadovoljava $\tilde{x}_n < \tilde{x}_{n+1} < x_0$, $n \geq 1$ i $\tilde{x}_n \to x_0$. Po dihotomiji graničnog skupa postoji ili pozitivni cijeli broj N takav da je $\omega(\tilde{x}_n) = \omega(\tilde{x}_m)$ za svaki n, m veći od N ili podniz $\tilde{x}_{n_i}$ takav da vrijedi $\omega(\tilde{x}_{n_i}) < \omega(\tilde{x}_{n_i+1})$ za svaki i. Prelaskom na podniz ili prenumeriranjem niza, možemo pretpostaviti da vrijedi $\omega(x_n) = \omega(x_m)$ za sve n, m ili da vrijedi $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1})$ za $n \geq 0$, gdje je x_n prikladan podniz od $\tilde{x}_n$. Uzmimo da vrijedi potonji slučaj. Tada je $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1})$ za sve n. Ako je $\omega(x_n) = \omega(x_0)$ za neki $n = n_0$, onda je $\omega(x_n) = \omega(x_0)$ za $n \geq n_0$, što je kontradikcija s $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1})$. Neka je $\Omega = \{Y : Y = \lim y_n, y_n \in \omega(x_n)\} \subset \overline{\cup_{n\geq 1}\omega(x_n)}$. Po (C) znamo da $\cup_{n\geq 1}\omega(x_n)$ ima kompaktni zatvarač u X i pošto je $\{y_n\}$ monoton i sadržan u kompaktnom skupu, on konvergira. Dakle, Ω je neprazan i kompaktan. Pretpostavimo da y i u pripadaju Ω tako da $y_n \to y$, $u_n \to u$, gdje su y_n, $u_n \in \omega(x_n)$. Kako $y_n < u_{n+1}$ i $u_n < y_{n+1}$ vrijedi za svaki n, dobivamo $y \leq u$ i $u \leq y$, pa je $u = y$. Prema tome, Ω je jednočlan, $\Omega = \{u_0\}$. Nadalje, Ω je pozitivno invarijantan jer je svaki $\omega(x_n)$ invarijantan. Prema tome, $u_0 \in E$. Po definiciji od Ω i zbog činjenice da $\cup_{n\geq 1}\omega(x_n)$ ima kompaktni zatvarač u X, odmah slijedi da $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), u_0) = 0$. Konačno, $\omega(x_n) < \omega(x_0)$ za svaki n povlači da je $u_0 \leq \omega(x_0)$. Ako je $u_0 \in \omega(x_0)$, onda je $\omega(x_0) = u_0$ po korolaru 1.13. To daje tvrdnju (a). Ako je $u_0 < \omega(x_0)$ onda trebamo odabrati okolinu W od $\omega(x_0)$ i $t_0 \geq 0$ takav da je $u_0 \leq \Phi_t(x_n)$ za $t \geq t_0 + t_1$. No $u_0 \in E$, pa mora vrijediti $\omega(x_n) \geq u_0$. S druge strane, $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) \leq u_0$ vrijedi za svaki n pa i $\omega(x_n) < u_0$ vrijedi za svaki n. Ova kontradikcija pokazuje da je $\omega(x_0) = u_0$. Dakle, (a) vrijedi ako $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1})$ za $n \geq 1$.
Pretpostavimo sada da je $\omega(x_n) = \omega(x_1)$, za $n > 1$. Budući da je $x_n < x_0$, dihotomija graničnog skupa implicira da vrijedi ili $\omega(x_n) = \omega(x_1) < \omega(x_0)$ ili $\omega(x_n) = \omega(x_0)$ za svaki $n \geq 1$. Potonji slučaj je ustvari (c). Pretpostavimo da je $\omega(x_1) < \omega(x_0)$. Neka je $u_0 \in \omega(x_1) = \omega(x_n) \subset E$ takav da $u_0 < \omega(x_0)$.

Prema lemi 1.16 postoje otvoren skup W koji sadržava $\omega(x_0)$ i $t_0 \geq 0$ takav da je $u_0 \leq \Phi_t(W)$ za $t \geq t_0$. Sada, po istim argumentima kao u prethodnom odlomku, dobivamo da je $u_0 \leq \Phi_t(x_n)$ za neke n i sve velike t. Prema tome je $\omega(x_n) \geq u_o$ i kako je $u_0 \in \omega(x_n)$, slijedi da je $\omega(x_n) = u_0$ kao što se tvrdi u (b). Konačno, ako je $u \in E$ i $u < \omega(x_0)$, možemo zaključiti isto kao i gore s u_0, da je $u_0 = \omega(x_n) \geq u$ za sve velike n i utvrditi da je $u_0 \geq u$.

□

Naravno, sličan zaključak možemo dobiti ako x_0 može biti aproksimiran odozgo u X. To nećemo dokazivati, ali ćemo koristiti u daljnjem tekstu. Tri slučaja za točku x_0 opisana u teoremu 1.22 daju sljedeće:
(a) implicira da je x_0 konvergentna točka
(b) implicira da x_0 pripada zatvaraču skupa konvergentnih točaka
(c) implicira da je x_0 kvazikonvergentna točka.
Nadalje, koristimo samo one tvrdnje vezane za slučaj (b).

Korolar 1.23. *Pretpostavimo da vrijede hipoteze iz teorema 1.22. U slučajevima (a), (b) i (c), dodatno vrijedi i sljedeće:*
(a) Za svaki n postoje okolina U_n od x_0 i $t_n \geq 0$ takvi da vrijedi

$$\Phi_t(x_n) \leq \Phi_t(U_n), \text{ za } t \geq t_0 \tag{18}$$

(b)
(i) Postoje okolina U od u_0, $t_0, t_1 \geq 0$ i n takvi da vrijedi

$$\Phi_T(O) \leq \Phi_{t+t_1}(x_n), \text{ za } t \geq t_0 \tag{19}$$

(ii) Postoji okolina U od x_0 sa sljedećim svojstvom: za svaki $x \in U$, $x < x_0$, postoje okolina $V = V_x$ od x u U, cijeli broj $N = N_x$ i $T = T_x > 0$ takvi da vrijedi

$$u_0 \leq \Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_N), \text{ za } t \geq T \tag{20}$$

(c) Postoji okolina U od x_0 sa sljedećim svojstvom: za svaki $x \in U$, $x < x_0$, postoje okolina $V = V_x$ od x u U i $T = T_x \geq 0$ takvi da vrijedi

$$\Phi_t(x_1) \leq \Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_0), \text{ za } t \geq T. \tag{21}$$

Dodatno vrijedi

$$d(\Phi_t(x_0), \Phi_t(x_1)) \to 0 \text{ kad } t \to \infty. \tag{22}$$

Dokaz. Za (a), fiksiramo n. Pošto je $\omega(x_n) < \omega(x_0)$, lema 1.16 implicira da postoje okoline $W_1 \supset \omega(x_n)$ i $W_2 \supset \omega(x_0)$ i $t_0 \geq 0$ takvi da je $\Phi_t(W_1) \leq \Phi_t(W_2)$ za $t \geq t_0$. Postoji $t_1 > 0$ takav da je $\Phi_{t_1}(x_n) \in W_1$ i $\Phi_{t_1}(x_0) \in W_2$. Zbog neprekidnosti Φ_{t_1}, postoji okolina U_n od x_0 takva da je $\Phi_{t_1} \subset U$. Dakle, $\Phi_{t+t_1}(x_n) \leq \Phi_{t+t_1}(U_n)$ za $t \geq t_0$ pa (a) vrijedi uz $t_n = t_0 + t_1$.
Sada prelazimo na (b). Kako je $u_0 < \omega(x_0)$, po lemi 1.16 postoje okolina W od

$\omega(x_0)$, okolina O od u_0 i $t_0 \geq 0$ takvi da je $\Phi_t(O) \leq \Phi_t(W)$ za $T \geq T_0$. Postoji $t_1 > 0$ takav da je $\Phi_t(x_0) \in W$ za $t \geq t_1$. Zbog neprekidnosti Φ_{t_1}, postoji n takav da je $\Phi_{t_1}(x_n) \in W$. Slijedi da je

$$\Phi_t(O) \leq \Phi_{t+t_1}(x_n), t \geq t_0. \tag{23}$$

Izabrat ćemo okolinu U od x_0 takvu da je $\Phi_{t_1}(U) \subset W$ i neka $x \in U$ zadovoljava $x < x_0$. Tada postoje okolina V od x, $V \subset U$, okolina L od x_0 i $t_2 \geq 0$ takvi da je $\Phi_t(V) \leq \Phi_t(L)$ za $t \geq t_2$. Odaberemo N takav da je $x_N \in L$ pa dobivamo $\Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_N)$ za $t \geq t_2$. Iz gornjeg odjeljka imamo

$$u_0 = \Phi_t(u_0) \in \Phi_t(O) \leq \Phi_t(W), t \geq t_0. \tag{24}$$

Kako je $\Phi_{t_1}(V) \subset \Phi_{t_1}(V) \subset U$, slijedi da je

$$u_0 \in \Phi_t(O) \leq \Phi_t(\Phi_{t_1}(V)) = \Phi_{t+t_1}(V), t \geq t_0. \tag{25}$$

.
Dakle,

$$u_0 \leq \Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_N), t \geq t_0 + t_1 + t_2. \tag{26}$$

Time smo dokazali (b) za $T = t_0 + t_1 + t_2$.

Preostaje dokazati (c). Kako je $x_1 < x_0$, postoje okolina U od x_0 i $t_3 \geq 0$ takvi da je $\Phi_t(x_1) \leq \Phi_t(U)$ za $t \geq t_3$. Dakle, ako je $x \in U$ i $x < x_0$ onda postoje okolina V od x, $V \subset U$ i $t_4 \geq 0$ takvi da je $\Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_0)$ za $t \geq t_4$. Kako je $V \subset U$, slijedi

$$\Phi_t(x_1) \leq \Phi_t(V) \leq \Phi_t(x_0), \text{ za } t \leq t_3 + t_4 \tag{27}$$

Ako ne vrijedi $d(\Phi_t(x_0), \Phi_t(x_1)) \to \infty$ kad $t \to \infty$, onda postoji $\in > 0$, $t_n \to \infty$ tako da $d(\Phi_{t_n}(x_0), \Phi_{t_n}(x_1)) \geq \in$ za $n \geq 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $\Phi_{t_n}(x_0) \to u$, $\Phi_{t_n}(x_1) \to v$ za u,v $\in \omega(x_0)$. No $u \geq v$ i teorem 1.12 impliciraju da je $u = v$ te dolazimo do kontradikcije. $\square$

Napomena 1.24. *Uočimo dodatne činjenice iz prethodnog korolara:*
(b) (i) Primijetimo da ako je $x \in O$ i $x > u_0$, onda je $u_0 < \Phi_t(x) \leq \Phi_{t+t_1}(x_n)$ za $t \geq t_0$. Kako $\Phi_t(x_n) \to u_0$ kad $t \to \infty$, $\omega(x) = u_0$. Prema tome, $\omega(x) = u_0$ za sve $x \in O$ za koji je $x \geq u_0$.
(b) (ii) Slično $\Phi_t(x_N) \to u_0$ kad $t \to \infty$, pa je $\omega(v) = u_0$ za sve $v \in V$. Posebno, $\omega(x) = u_0$ i $x \in \operatorname{Int} C$ za svaki $x \in U$ za koji je $x < x_0$. Iz toga slijedi $x_0 \in \overline{\operatorname{Int} C}$.
(c) Slični argumenti impliciraju da je $\omega(x) = \omega(x_0)$ za svaki $x \in U$ za koji je $x < x_0$.

Teorem 1.25. *Pretpostavimo da se svaka točka iz skupa X može aproksimirati ili odozgo ili odozdo u X. Tada je $X = \operatorname{Int} Q \cup \overline{\operatorname{Int} C}$. Posebno, $\operatorname{Int} Q$ je gust u X.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X \setminus \operatorname{Int} Q$. Tada postoji niz $y_n \in X \setminus Q$ takav da $y_n \to x_0$. Po potrebi prelazimo na podniz pa možemo pretpostaviti da se y_n može aproksimirati ili odozdo ili odozgo u X za svaki n. Dokazat ćemo samo prvi slučaj, a drugi slijedi analogno(preko teorema 1.22 i korolara 1.23, gdje je x_0 aproksimiran odozgo). Svaki y_n je granica niza $x_m^n \to y_n$, $x_m^n < x_{m+1}^n < y_n$. Za svaki y_n mora vrijediti slučaj (b) iz teorema 1.22 jer $y_n \notin Q$. Po slučaju (b) (ii) iz korolara 1.23 i napomeni 1.24, slijedi da je $y_n \in \overline{\operatorname{Int} C}$ za svaki n jer je $x_m^n \in \operatorname{Int} C$ za sve velike m. Dakle, $x_0 \in \overline{\operatorname{Int} C}$. $\square$

Napomena 1.26. *Postoje dva bitna uvjeta pri kojima je Q=C. Ako E nema gomilišta u X, onda je Q=C. To zaključujemo jer je $\omega(x)$ povezan, pa ako sadrži više od jedne točke, onda je svaka njegova točka gomilište od $\omega(x)$. Uvjet da E nema točke gomilišta u X je uglavnom zadovoljen u slučaju običnih diferencijalnih jednadžbi, ali ga je jako teško zadovoljiti u beskonačno dimenzionalnim sustavima. Ako je E totalno uređen skup, odnosno ako za svake dvije točke iz E vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$, onda je Q=C. To proizlazi iz teorema 1.12. Taj je uvjet zadovoljen za skalarne diferencijalne jednadžbe s kašnjenjem.*

Propozicija 1.27. *Neka je X uređen metrički prostor i Φ_t polutok koji jako čuva uređaj na X. Neka je $x_0 \in X$ takva da može biti aproksimirana odozgo u X i odozdo u X. Tada postoje nizovi x_n i z_n u X koji zadovoljavaju $x_n \to x_0$, $z_n \to x_0$, $x_n < x_{n+1} < x_0 < z_{n+1} < z_n$, $n \geq 1$ i takvi da vrijedi jedno od sljedećeg:*
(a)Postoji $u_0 \in E$ takav da za $n \geq 1$ vrijedi

$$\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < \omega(x_0) = u_0 < \omega(z_{n+1}) < \omega(z_n) \tag{28}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), u_0) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(z_n), u_0) = 0. \tag{29}$$

(b) Postoje u_0, $v_0 \in E$ takvi da za $n \geq 1$ vrijedi ili
(i) $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < \omega(x_0) = u_0 < v_0 = \omega(z_n)$,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), u_0) = 0 \tag{30}$$

i uvijek kada je $v \in E$, $v > u_0$, vrijedi $v \geq v_0$.
ili
(ii) $\omega(x_n) = u_0 < v_0 = \omega(x_0) < \omega(z_{n+1}) < \omega(z_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(z_n), v_0) = 0 \tag{31}$$

i uvijek kada je $u \in E$ i $u < v_0$, vrijedi $u \leq u_0$.

(c) Postoji $u_0 \in E$ takav da za $n \geq 1$ vrijedi ili
(i) $\omega(x_n) < \omega(x_{n+1}) < \omega(x_0) = u_0 = \omega(z_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\omega(x_n), u_0) = 0 \tag{32}$$

ili

(ii) $\omega(x_n) = u_0 = \omega(x_0) < \omega(z_{n+1}) < \omega(z_n)$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(\omega(z_n), u_0) = 0. \tag{33}$$

(d) Postoje ravnoteže u_0 *i* v_0 *takva da za* $n \geq 1$ *vrijedi*

$$\omega(x_n) = u_0 < \omega(x_0) < v_0 = \omega(z_n). \tag{34}$$

Ako je $u \in E$ *i* $u < \omega(x_0)$, *onda je* $u \leq u_0$. *Ako je* $v \in E$ *i* $\omega(x_0) < v$, *onda je* $v \geq v_0$.

(e) Postoji $u_0 \in E$ *takav da za* $n \geq 1$ *vrijedi ili*

(i) $\omega(x_n) = u_0 < \omega(x_0) = \omega(z_n)$ *i ako* $u \in E$ *zadovoljava* $u < \omega(x_0)$, *onda je* $u \leq u_0$

ili

(ii) $\omega(z_n) = u_0 > \omega(x_0) = \omega(x_n)$ *i ako* $u \in E$ *zadovoljava* $u > \omega(x_0)$, *onda je* $u \geq u_0$.

(f) Za $n \geq 1$, $\omega(x_n) = \omega(x_0) = \omega(z_n) \subset E$.

Niz $x_n(z_n)$ može biti izabran kao podniz bilo kojeg niza $\tilde{x}_n(\tilde{z}_n)$ koji aproksimira x_0 odozdo (odozgo) u X.

2 Stabilnost i konvergencija

2.1 Stabilnost

Neka je X podskup Banachovog prostora Y, s konusom Y_+. Y_+ generira parcijalni uređaj na Y i po restrikciji, također na X. Normu od $y \in Y$ označavamo s $|y|$. Ako $u, v \in Y$ zadovoljavaju $u < v$, onda $[u, v] \equiv \{y : u \leq y \leq v\}$ nazivamo *uređen interval generiran s u i v.* Do iduće napomene, pretpostavljat ćemo da je konus Y_+ *normalan.* To znači da postoji konstanta $k > 0$ takva da za $0 \leq x \leq y$ vrijedi $|x| \leq k|y|$. Ekvivalentno, svi uređeni intervali su ograničeni. Pretpostavljamo da je $\Phi_t(x)$ polutok koji jako čuva uređaj (SOP) na X i da zadovoljava pretpostavku kompaktnosti (C).

Definicija 2.1. *Za $x \in X$ kažemo da je x* stabilna točka *ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi $|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| < \epsilon$ za $t \geq 0$, $y \in X$ ako je $|x - y| < \delta$.*

Neka je S skup svih stabilnih točaka od X, $S \subset X$.

Definicija 2.2. *Točka $x \in X$ je* asimptotski stabilna točka *ako postoji okolina V od x sa svojstvom da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $t_\epsilon > 0$ takav da vrijedi $|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| < \epsilon$ ako je $t \geq t_\epsilon$ i $y \in V$.*

Definicija 2.3. *Neka je A skup svih asimptotski stabilnih točaka. Točka $x \in X$ je* asimptotski stabilna odozgo (odozdo) *ako postoji okolina V od x sa svojstvom da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $t_\epsilon > 0$ tako da vrijedi $|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| < \epsilon$ ako je $t \geq t_\epsilon$, $y \in V$ i $y > x$ ($y < x$).*

Stabilna točka x_0 ima svojstvo da obližnje točke imaju omega-granične skupove koji su u blizini $\omega(x_0)$. Zapravo, lako se vidi da je preslikavanje $x \to \omega(x)$ neprekidno u x_0 u Hausdorffovoj metrici ako je $x_0 \in S$.
Za skupove A i B definiramo udaljenost $\tilde{d}(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} \operatorname{dist}(x, y)$. Tada je Hausdorffova udaljenost skupova A i B jednaka $d(A, B) = \tilde{d}(A, B) + \tilde{d}(B, A)$. To je metrika na skupu svih kompaktnih podskupova kompaktnog metričkog prostora.
Ako je x_0 asimptotski stabilna točka, tada vrijedi $lim_{t \to \infty} |\Phi_t(x_0) - \Phi_t(x)| = 0$ uniformno po $x \in V$. Prema tome, $\omega(x) = \omega(x_0)$ za sve $x \in V$.

Propozicija 2.4. *A je otvoreni podskup od X i $A \subset S$. Ako svaka točka od X može biti aproksimirana ili odozgo ili odozdo u X, onda je $S \subset Q$.*

Dokaz. Ako je $x \in A$, onda svaka točka iz okoline V u definiciji 2.2 pripada u A pa je A otvoren skup. Iz neprekidnosti od Φ slijedi da je $A \subset S$. Ako je $x \in S$, onda njemu obližnje točke imaju granične skupove koji su u blizini $\omega(x)$. Mogući su samo slučajevi (a) i (c) teorema 1.22. Prema tome, $x \in Q$. □

Napomena 2.5. *U (b) i (c) dijelu korolara 1.23, svaki $x \in U$ sa svojstvom $x < x_0$ pripada u A. Zapravo, okolina V od x, u dijelu (b) (ii) korolara 1.23* *može biti uzeta za okolinu V u definiciji asimptotski stabilne točke. Naime, ako je $y \in V$, onda vrijedi*

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| \leq |\Phi_t(x) - u_0| + |\Phi_t(y) - u_0| \leq 2k|\Phi_t(x_N) - u_0|, \ t \geq T. \quad (35)$$

Slično, za slučaj (c), ako je $y \in V$, onda vrijedi

$$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| \leq |\Phi_t(x) - \Phi_t(x_0)| + |\Phi_t(x_0) - \Phi_t(y)| \leq 2k|\Phi_t(x_0) - \Phi_t(x_1)|, \ t \geq T. \quad (36)$$

Kako izraz na desnoj strani nejednakosti teži u nulu, slijedi da je $x \in A$. Slično, ravnoteža u_0 u (b)(i) je asimptotski stabilna odozgo jer za svaki $\epsilon > 0$ postoji $t_\epsilon > 0$ takav da ako je $x \in O$ i $x > u_0$, onda $|\Phi_t(x) - u_0| < \epsilon$ za svaki $t > t_\epsilon$.

Teorem 2.6. *Pretpostavimo da svaki $x \in X$ može biti aproksimiran odozgo ili odozdo u X. Tada je $A \cup \operatorname{Int} C$ gust u X.*

Dokaz. Ako $A \cup \operatorname{Int} C$ nije gust u X, onda postoji otvoren skup U u X takav da je $U \cap A = \emptyset = U \cap \operatorname{Int} C$. Neka je $x \in U$ i pretpostavimo da x može biti aproksimiran odozdo. Tada postoji niz x_n takav da je $x_n < x_{n+1} < x$, $x_n \to x$ i vrijedi jedna od tvrdnji (a), (b) ili (c) iz teorema 1.22 te korolar 1.23. Možemo pretpostaviti da je $x_n \in U$ za svaki n. Kako je $u \cap A = \emptyset$, može vrijediti samo slučaj (a). Dakle, x je konvergentan. Kako je $X \in U$ proizvoljan, dobivamo $U \subset \operatorname{Int} C$, što je kontradikcija s našom pretpostavkom. □

2.2 Trihotomija uređenih intervala

Ovaj odjeljak će nam dati dovoljne uvjete za postojanje tri različite uređene točke ravnoteže.

Propozicija 2.7. *Neka je Φ polutok koji jako čuva uređaj (SOP) na $X = [u, v]$, gdje je $u < v$ i $u, v \in E$. Pretpostavimo da su u i v asimptotski stabilne u X i da je $\overline{\Phi_t([u, v])}$ kompaktan za svaki $t > 0$. Onda postoji $\omega \in [u, v] \cap E$ takav da $\omega \neq u, v$.*

Dokaz. Uzmimo fiksan $t_0 > 0$ i uzmimo da je preslikavanje Φ_{t_0} ograničeno na $[u, v]$. Koristimo index fiksirane točke kako bismo utvrdili postojanje fiksne točke Φ_{t_0} u X, koja je različita od u i v. Zbog toga, sve topološke oznake gledamo u odnosu na X.
Kako je u asimptotski stabilna u X, postoji $r > 0$ takav da svaka točka x u zatvaraču od $B(u) = x \in X : |u - x| < r$ zadovoljava $\omega(x) = u$. Kako je $v \in A$ i po potrebi možemo uzeti manji r pa znamo da svaka točka x iz zatvarača od $B(v) = x \in X : |v - x| < r$ zadovoljava $\omega(x) = v$ te je $B(u) \cap B(v) = 0$. Utvrdit ćemo da su indeksi fiksnih točaka definirani i da zadovoljavaju

$$i(\Phi_{t_0}, B(u), X) = i(\Phi_{t_0}, B(v), X) = i(\Phi_{t_0}, X, X) = +1 \quad (37)$$

Po svojstvu aditivnosti, to implicira da $\overline{\Phi_{t_0}}$ ima fiksnu točku ω u $X \backslash (B(u) \cup B(v))$. Definiramo homotopiju $F : [0, 1] \times \overline{B(u)} \longrightarrow X$ sa $F(\lambda, x) = \lambda u + (1 -$

$\lambda)\Phi_{t_0}(x)$. Ako je $F(\lambda, x) = x$ onda je $x - \Phi_{t_0}(x) = \lambda(u - \Phi_{t_0}(x)) \leq 0$, jer je $[u, v]$ invarijantan sa Φ. Jednakost može vrijediti ako je $x = u$ jer je u jedina fiksna točka od Φ_{t_o} na $\overline{B(u)}$ (podsjetimo da je $\omega(x) = u$). Nejednakost implicira da je $\Phi_{t_0}(x) > x$, što po kriteriju konvergencije povlači da $\Phi_t(x)$ konvergira ravnotežnoj točki većoj od x. No to nije moguće za svaki $x \in \overline{B(u)}$ jer je $\omega(x) = u$. Time smo pokazalii da je skup fiksnih točaka od $F(\lambda, \cdot)$ u $\overline{B(u)}$ točno u. Dakle, svojstvo homotopije za indeks fiksne točke implicira da je

$$i(\Phi_{t_0}, B(u), X) = i(F(1, \cdot), B(u), X) = +1. \tag{38}$$

Potonja jednakost vrijedi jer je indeks konstantnog preslikavanja s vrijednostima u B(u) jednak +1. Slični argumenti pokazuju da je $i(\Phi_{t_0}, B(v), X) = +1$. Homotopiju F možemo gledati na $[0, 1] \times X$. Kako F preslikava produkt dvaju prostora na X, ona nema fiksnih točaka na rubu od X, jer je taj rub prazan skup, pa slijedi da je $i(\Phi_{t_0}, X, X) = +1$. Prema tome postoji $\omega \in X \backslash (B(u) \cup B(v))$ takav da je $\Phi_{t_0}(\omega) = \omega$. Kako je $t_0 > 0$ bio proizvoljno odabran, možemo dobiti fiksnu točnu $\omega_n \in [u, v] \backslash (B(u) \cap B(v))$ od $\Phi_{2^{-n}}$ za sve velike n. Skup $\{\omega_n\}$ je prekompaktan na [u,v], jer je svaki ω_n fiksna točka od $\Phi_{2^{-j}}$ za svaki $n \geq j$ pa je $\omega_n \in \Phi_{2^{-j}}(X)$ i $\overline{\Phi_{2^{-j}}(X)}$ je kompaktan. Po istim argumentima granična točka od $\{\omega_n\}$ je ravnotežna točka od Φ na $[u, v] \backslash (B(u) \cup B(v))$: Neka $\omega_{n_l} \to \omega$ za $l \to \infty$ i $t_l = 2^{-n_l}$, $\overline{\omega}_l = \omega_{n_l} \to \omega$. Neka $t > 0$ predstavlja $t = m_l t_l + r_l$, $0 \leq r_l \leq t_l$, sa nenegativnim cijelim brojevima $m_l, l = 1, 2, ...$ Tada vrijedi

$$\Phi_t(\omega) = \lim_l \Phi_t(\overline{\omega}_l) = \lim_l \Phi_{r_l} \Phi_{m_l t_l}(\overline{\omega}_l) = \omega \tag{39}$$

□

Teorem 2.8. *Neka je Φ polutok koji jako čuva red (SOP) na $X = [u, v]$ gdje je $u < v$ i $u, v \in E$. Ako je $\overline{\Phi_t([u, v])}$ kompaktan za svaki $t > 0$, tada vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*
(i) postoji $\omega \in [u, v] \cap E$, $\omega \neq u, v$
(ii) $\Phi_t(x) \to u$ za svaki $x \in [u, v] \backslash v$
(iii) $\Phi_t(x) \to v$ za svaki $x \in [u, v] \backslash u$.

Dokaz. Pretpostavimo da (i) ne vrijedi, odnosno da je $X \cap E = u, v$. Očito je Q=C u ovom slučaju i ako je $x \in C$ onda je $\omega(x) = u$ ili $\omega(x) = v$. Prvo ćemo pokazati da je X=C. Ako je $x_0 \in X \backslash C$ onda je $x_0 \neq u, v$ pa može biti aproksimiran odozgo nizom točaka z_n koje se nalaze na segmentu koji povezuje x_0 i u. Kako $x_0 \notin Q$, vrijedi slučaj (d) iz propozicije 1.26:

$$\omega(x_n) = u < \omega(x_0) < v = \omega(z_n) \tag{40}$$

za $n \geq 1$. Po napomeni 2.5, u je asimptotski stabilan odozgo i slično, v je asimptotski stabilan odozdo. To znaači da $u, v \in A$ i po propoziciji 2.7 postoji treća ravnoteža u X. Ta kontradikcija povlači da je X=C.
Pretpostavimo sada da postoje elementi $x, y \in [u, v] \backslash \{u, v\}$ takvi da vrijedi

$\Phi_t(x) \to u$, $\Phi_t(y) \to v$, $t \to \infty$. Kako Φ, po pretpostavci, jako čuva red, možemo naći okoline U,V od u,v i $t_0 > 0$ takve da vrijedi $\Phi_t(U) \leq \Phi_t(x)$, $\Phi_t(V) \geq \Phi_t(y)$ za $t \geq t_0$. Budući da je X normalno uređen, imamo

$$\Phi_t(U \cap [u,v]) \to u, \Phi_t(V \cap [u,v]) \to v, t \to \infty. \tag{41}$$

Dakle, $u, v \in A$ i propozicija 2.7 impliciraju postojanje treće ravnoteže pa dolazimo do kontradikcije. □

2.3 Neki opći rezultati

Ako postoji samo jedna točka ravnoteže u X, onda ona mora biti globalno privlačna točka, prema sljedećem rezultatu. To se često primjenjuje u slučaju kada je $X = Y_+$, pozitivan konus, i e=0. Ipak, uvjet da Φ jako čuva uređaj na cijelom Y_+ je vrlo zahtjevan.

Teorem 2.9. Globalna asimptotska stabilnost *Pretpostavimo da X sadrži točno jednu točku ravnoteže e i da svaka točka iz $X \backslash e$ može biti aproksimirana odozgo i odozdo u X. Tada je $\omega(x) = e$ za svaki $x \in X$.*

Dokaz. Ako je $x \in X \backslash e$, onda mogu vrijediti samo slučajevi (a), (e) i (f) iz propozicije 1.26 jer ostali impliciraju više od jedne točke ravnoteže. Posebno, $x \in Q$ pa je $\omega(x) = e$. □

U nekim primjenama može biti poznato da postoje najviše dvije točke ravnoteže. Na primjer, kada je $X = Y_+$ i postoji jedna točka ravnoteže različita od nule. Kao posebni slučaj idućeg rezultata, možemo zaključiti da sva rješenja konvergiraju prema jednoj od točaka ravnoteže.
Kažemo da je skup X konveksan skup s uređajem ako je zatvoren interval $[u, v] \in X$ za sve $u, v \in X$ takve da je $u < v$.

Teorem 2.10. *Pretpostavimo da je X konveksan skup s uređajem i podskup od Y i da je Φ_t potpuno neprekidna za $t \geq 0$. Uzmimo da svaka točka iz $X \backslash E$ može biti aproksimirama i odozgo i odozdo. Ako X ne sadrži ravnotežne točke u, v, ω, takve da je $u < v < \omega$, onda je $X = Q$.*

Dokaz. Ako je $x \in X \backslash E$ onda ne može vrijediti slučaj (d) iz propozicije 1.26 jer bi postojale tri različite uređene ravnotežne točke po propoziciji 2.7. i napomeni 2.5. Dakle, $x \in Q$. □

Treba spomenuti jednostavnu činjenicu povezanu sa bazenom privlačnosti ravnoteže e monotonog polutoka Φ. Sjetimo se da je bazen privlačnosti od e skup svih $x \in X$ takvih da $\Phi_t(x) \to e$ kad $t \to \infty$. Ako $x, y, z \in X$ zadovoljavaju $x \leq y \leq z$ te ako x, z pripadaju bazenu privlačnosti od e, tada i y pripada bazenu privlačnosti od e, jer kada $t \to \infty$ vrijedi $\Phi_t(x) \leq \Phi_t(y) \leq \Phi_t(z)$. Ovdje moramo pretpostaviti ili da je Y_+ normalan ili da je $\overline{O(y)}$ kompaktan u X.

2.4 Opća konvergencija k ravnoteži

Cilj ovog odjeljka jest pokazati da se teorem 1.25 može poboljšati dodavajući dodatne pretpostavke, kako bismo zaključili da su skoro sve točke konvergentne točke. Neke od dodatnih pretpostavki su neprekidna diferencijabilnost polutoka i da je derivacija kompaktan, strogo pozitivan linearni operator. Prema tome, pretpostavit ćemo da konus Y_+ ima neprazan interior, $\operatorname{Int} Y_+$, u Y. U ovom odjeljku ne pretpostavljamo da je Y_+ normalan. Pretpostavit ćemo da je X konveksno uređen podskup od Y te da je Φ monoton polutok na X. Ostale pretpostavke su sljedeće:

(M) Postoji $\tau > 0$ takav da je $\Phi_\tau(x_1) \ll \Phi_\tau(x_2)$ za $x_1, x_2 \in X$ za koje je $x_1 < x_2$.
(D) $\Phi_\tau : X \to X$ je neprekidno diferencijabilna na X. Pišemo $\Phi'_\tau(x)$ za derivaciju po x
(S) $\Phi'_\tau(e)$ je kompaktan i $\Phi'_\tau(e)(Y_+\backslash 0) \subset \operatorname{Int} Y_+$ za svaki $e \in E$.

(M) je nešto slabija pretpostavka od stroge monotonosti, ali implicira da Φ_τ jako čuva red. (D) je pretpostavka o glatkoći funkcije, a (S) daje implikacije o spektru $\Phi'_\tau(e)$ po Krein-Rutmanovom teoremu, koji slijedi.
Kažemo da je $\Phi'_\tau(e)$ strogo pozitivna ako vrijedi druga pretpostavka iz (S).
Uočimo da ako $x \in X$, $y \in Y_+$, $h > 0$ i $x + hy \in X$, onda (M) i (D) impliciraju

$$\frac{\Phi_T(x+hy) - \Phi_T(x)}{h} \geq 0 \tag{42}$$

pa kada $h \to 0$, dobivamo $\Phi'_\tau(x)y \geq 0$. Odnosno, $\Phi'_\tau(x)$ je pozitivan operator u smislu da je $\Phi'_\tau(x)Y_+ \subset Y_+$. Prema tome, pretpostavka da je $\Phi'_\tau(e)$ strogo pozitivna nije tako zahtjevna, odnosno, morat ćemo je uvijek provjeriti kako bismo dokazali da Φ_τ zadovoljava (M).
Ako vrijedi (S) i $e \in E$, sa $\sigma(\Phi'_\tau(e))$ označit ćemo spektar linearnog operatora $\Phi'_\tau(x)$. Kako je to kompaktan operator, spektar se sastoji od najviše prebrojivo mnogo svojstvenih vrijednosti i moguće da dodatno sadrži $\{0\}$. Svojstvene vrijednosti nemaju gomilišta, osim eventualno $\{0\}$. Neka je $\rho(e)$ spektralni radijus od $\Phi'_\tau(e)$,

$$\rho(e) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Phi'_\tau(e))\}. \tag{43}$$

Slijedi Krein-Rutmanov teorem. Njegova je bitna posljedica da je $\rho(e)$ jednostruka svojstvena vrijednost od $\Phi'_\tau(e)$ i da postoji njoj pridružen pozitivan svojstveni vektor.
U teoremu N(A) označava nul-prostor linearnog operatora A.

Teorem 2.11. Krein-Rutman *Neka je A kompaktan, strogo pozitivan linearan operator na Banachovom prostoru Y. Tada je $r = \rho(A)$, spektralni radijus od A, pozitivna svojstvena vrijednost od A i*

$$N(a - rI) = \bigcup_{k \geq 1} N((A - rI)^k) = span\{z\}, \tag{44}$$

gdje je $z \gg 0$. Ako je $v \in Y_+$ neki drugi svojstveni vektor od A, onda je v pozitivni višekratnik od z. Konačno, $|\lambda| < r$ za sve $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq r$.

Kažemo da r ima algebarsku kratnost 1 ako vrijedi jednadžba (44).

Lema 2.12. *Za svaki $e \in E$ vrijedi $\rho(e) \in \sigma(\Phi_\tau^{'}(e))$ i postoji jedinstveni svojstveni vektor čija norma je 1, $z(e) \gg 0$, takav da je*

$$\Phi_\tau^{'}(e)z(e) = \rho(e)z(e). \tag{45}$$

Dodatno, preslikavanja $e \to z(e)$ i $e \to \rho(e)$ su neprekidna na E.

Dokaz možete naći u knjizi [1].

Daljnji cilj je pokazati da su skoro sve kvazikonvergentne točke također konvergentne.

Lema 2.13. *Neka je $\omega(x) \in E$ kompaktan granični skup. Ako $\omega(x)$ nije jednočlan, onda je $\rho(e) > 1$ za sve $e \in \omega(x)$. Posebno, postoji $\gamma > 1$ takav da je $\rho(e) > \gamma$ za svaki $e \in \omega(x)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\omega(x)$ nije jednočlan. Kako je $\omega(x)$ povezan, svaka točka e iz tog skupa je gomilište od $\omega(x)$. Neka $e_n \in \omega(x)$ zadovoljava $e_n \neq e$ i $e_n \to e$. Tada vrijedi

$$e - e_n = \Phi_\tau(e) - \Phi_\tau(e_n) = \Phi_\tau^{'}(e)(e - e_n) + o(|e - e_n|), \tag{46}$$

gdje je $o(|e - e_n|)/|e - e_n| \to 0$ kad $n \to \infty$. Stavimo $v_n = (e - e_n)/|e - e_n|$. Tada je

$$v_n = \Phi_\tau^{'}(e)v_n + r_n, r_n \to 0, n \to \infty. \tag{47}$$

Kompaktnost od $\Phi_\tau^{'}(e)$ implicira da v_n ima konvergentan podniz v_{n_i} i uzimajući limes tog podniza, dobivamo $v = \Phi_\tau^{'}(e)v$ za neke vektore v s jediničnom normom. Prema tome, $\rho(e) \geq 1$. Ako je $\rho(e) = 1$, onda je po teoremu 2.11, $v = rz(e)$ gdje je $r = \pm 1$. Dakle,

$$(e - e_{n_i})/|e - e_{n_i}| \to rz(e) \tag{48}$$

kad $i \to \infty$. Slijedi da je $e \ll e_{n_i}$ ili $e \gg e_{n_i}$ za sve velike i, što je kontradikcija sa teoremom 1.12. Zaključujemo da je $\rho(e) > 1$ za svaki $e \in \omega(x)$. Zadnja tvrdnja slijedi iz kompaktnosti $\omega(x)$ i neprekidnosti spektralnog radijusa. $\square$

Treba razmotriti neku drugu normu na Y. Ako je $\omega \in \operatorname{Int} Y_+$ fiksiran, onda je $U = \{y \in Y : -\omega \ll y \ll \omega\}$ otvorena okolina izvora. Prema tome, ako je $y \in Y$, onda postoji $t_0 > 0$ takav da je $t_0^{-1} y \in U$ ili $-t_0\omega \ll y \ll t_0\omega$. Definiramo $\omega - normu$ s

$$||y||_\omega = \inf\{t > 0 : -t\omega \leq y \leq t\omega\} \tag{49}$$

Kako je $\omega \in \operatorname{Int} Y_+$, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $y \in Y$, $y \neq 0$, vrijedi $\omega \pm \delta \frac{y}{|y|}$. Prema tome,

$$||y||_\omega \leq \delta^{-1}|y| \tag{50}$$

vrijedi za svaki $y \in Y$, što implicira da je ω-norma slabija od originalne norme. Zapravo, te dvije norme su ekvivalentne ako je Y_+ normalan, ali nam ta ekvivalencija nije potrebna.
Korisno je ponovno normalizirati pozitivan svojstveni vektor $z(e)$ od $\Phi'_\tau(e)$ za $e \in E$. To činimo u sljedećoj lemi.

Lema 2.14. *Neka je $Z(e) = z(e)/||z(e)||_\omega$ i $\beta(e) = sup\{\beta > 0 : Z(e) \geq \beta\omega\}$. Onda je $\beta(e) > 0$, $Z(e) \geq \beta(e)\omega$ i preslikavanja $e \to Z(e)$ i $e \to \beta(e)$ su neprekidna.*

Dokaz. Kako je ω-norma slabija od originalne norme, preslikavanje $e \to ||z(e)||_\omega$ je neprekidno na E. To implicira da je Z(e) neprekidna na E. Lako je vidjeti da je $\beta(e) > 0$. Neka $\epsilon > 0$ zadovoljava $2\epsilon < \beta(e)$ i neka $e_n \in E$ zadovoljava $e_n \to e$ kad $n \to \infty$. Tada je $-\epsilon\omega \leq Z(e) - Z(e_n) \leq \epsilon\omega$ za sve velike n, po neprekidnosti od Z i zato što je ω-norma slabija od originalne norme. Prema tome, $Z(e_n) = Z(e_n) - Z(e) + Z(e) \geq (\beta(e) - \epsilon)\omega$ pa vrijedi $\beta(e_n) \geq \beta(e) - \epsilon$ za velike n. Slično, $Z(e) = Z(e) - Z(e_n) + Z(e_n) \geq (\beta(e_n) - \epsilon)\omega$ za sve velike n pa je $\beta(e) \geq \beta(e_n) - \epsilon$ za velike n. Prema tome, $\beta(e) - \epsilon \leq \beta(e_n) \leq \beta(e) + \epsilon$ vrijedi za sve velike n. □

Teorem 2.15. *Pretpostavimo da vrijede (M), (S) i (D), da za $x_1, x_2 \in X$ vrijedi $x_1 < x_2$ te da $O(x_1)$ i $O(x_2)$ imaju kompaktne zatvarače u X. Tada vrijedi ili*
(a)$\omega(x_1) < \omega(x_2)$ ili
(b)$\omega(x_1) = \omega(x_2) = \{e\}$ za neki $e \in E$.

Dokaz. Po dihotomiji graničnog skupa, dovoljno je pokazati da ako je $\omega(x_1) = \omega(x_2)$, onda vrijedi (b). $\omega(x_1)$ je kompaktan, povezan i $z_1 < z_2$ ne može vrijediti za niti jedan par točaka $z_1, z_2 \in \omega(x_1)$ po teoremu 1.12. Neka je $v_n = \Phi_{n\tau}(x_1)$, $u_n = \Phi_{n\tau}(x_2)$, $S(x) \equiv \Phi_\tau(x)$ i $K = \omega(x_1)$. Tada je K skup fiksnih točaka od S, $v_{n+1} = Sv_n$, $u_{n+1} = Su_n$ $u_n \gg v_n$ za $n \geq 1$ i $\operatorname{dist}(K, u_n)$, $\operatorname{dist}(K, v_n) \to 0$ kad $n \to \infty$. Pretpostavit ćemo da K sadrži više od jednog elementa.
Fiksiramo $\omega \in \operatorname{Int} Y_+$ i definiramo $\alpha_n = sup\{\alpha > 0 : u_n \geq v_n + \alpha\omega\}$. Tada je $\alpha_n > 0$ i $u_n \geq v_n + \alpha_n\omega$. Pokazat ćemo da $\alpha_n \to 0$ za $n \to \infty$. U suprotnom, postoji podniz α_{n_i} takav da je $\alpha_{n_i} \geq \alpha > 0$. Zbog kompaktnosti od K i činjenice da $u_n, v_n \to K$, možemo pretpostaviti da $u_{n_i} \to u$, $v_{n_i} \to v$ gdje su $u, v \in K$.

Tada je $u \geq v + \alpha\omega$ pa vrijedi i $u > v$, što je u kontradikciji s teoremom 1.12. Prema tome, $\alpha_n \to 0$.
Izaberimo $e_n \in K$ takav da je $v_n - e_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Kako K nije jednočlan, po lemi 2.13, postoji $r > 1$ takav da je $\rho(e) > r$ za svaki $e \in K$. Neka je $z_n = Z(e_n)$ normaliziran pozitivan svojstveni vektor za $S^{'}(e_n) = \Phi^{'}_{\tau}(e_n)$ pa je $||z_n||_\omega = 1$ i $z_n \leq \omega$. Po lemi 2.14, $\beta(e)$ je neprekidna po $e \in E$ i kako je K kompaktan podskup od E, postoji $\epsilon > 0$ takav da je $\beta(e) \geq \epsilon$ za sve $e \in K$. Posebno, $\omega \geq z_n \geq \epsilon\omega$ za sve n.
Izaberimo l, pozitivan cijeli broj, takav da je $r^l\epsilon > 1$. Tada, budući da je $u_n \geq v_n + \alpha_n\omega \gg v_n$ i X konveksno uređen, $v_n + \eta\alpha_n \in X$ za $0 \leq \eta \leq 1$ i po fundamentalnom teoremu diferencijalnog i integralnog računa slijedi:

$$S^l(v_n + \alpha_n\omega) - S^l v_n = (S^l)'(e_n)\alpha_n\omega + \alpha_n\delta_n, \tag{51}$$

gdje S^l označava kompoziciju D sa samom sobom l puta i

$$\delta_n = \int_0^1 [(S^l)'(v_n + \eta\alpha_n\omega) - (S^l)'(e_n)]\omega d\eta. \tag{52}$$

Koristeći da $v_n + \alpha_n\omega - e_n \to 0$, da je K kompaktan i da je $(S^l)'$ neprekidna, lako se pokaže da

$$\max_{0\leq\eta\leq 1} |[(S^l)'(v_n + \eta\alpha_n\omega) - (S^l)'(e_n)]\omega| \to 0, n \to \infty. \tag{53}$$

Slijedi da $d_n = ||\delta_n||_\omega \to 0$ kad $n \to \infty$. Koristeći da je $\omega \geq z_n \geq \epsilon\omega$ i $\delta_n \geq -d_n\omega$, dobivamo

$$\begin{aligned} S^l(v_n + \alpha_n\omega) - S^l v_n &\geq [(S^l)'(e_n)]\alpha_n\omega - \alpha_n dn\omega \\ &\geq [S'(e_n)]^l\alpha_n\omega -_n d_n\omega \\ &\geq r^l\alpha_n z_n - \alpha_n d_n\omega \\ &\geq (r^l\epsilon - d_n)\alpha_n\omega \\ &\geq \alpha_n\omega \end{aligned} \tag{54}$$

za sve velike n. Iz toga slijedi

$$u_{n+l} = S^l(u_n) \geq S^l(v_n + \alpha_n\omega) \geq S^l v_n + \alpha_n\omega = v_{n+l} + \alpha_n\omega \tag{55}$$

za sve velike n. To implicira da je

$$\alpha_{n+l} \geq \alpha_n \tag{56}$$

za sve velike n, što je kontradikcija s $\alpha_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Dakle, K je jednočlan.
□

Po prethodnom teoremu dobili smo ojačanu tvrdnju o dihotomiji graničnog skupa. Ona implicira da ako je x_1 kvazikonvergentna točka koja nije konvergentna i ako je $x_1 < x_2$, onda vrijedi tvrdnja (a). Teorem 2.15 omogućava nam da ojačamo tvrdnju o trihotomiji sekvencijalnoga graničnog skupa. Za to će nam trebati pretpostavka o kompaktnosti (C) iz prvog poglavlja.

Propozicija 2.16. *Pretpostavimo da vrijede (M), (D), (S) i (C). Neka je* $x_0 \in X$ *aproksimiran odozdo u X nizom* $\tilde{x}_n$*. Tada postoji podniz* x_n *od* $\tilde{x}_n$ *takav da vrijedi* $x_n < x_{n+1} < x_0$*,* $n \geq 1$*,* $x_n \to x_0$ *i* $\{x_n\}$ *zadovoljava jednu od dvije alternative (a) ili (b) iz teorema 1.22 ili*
(c)Postoji $u_0 \in E$ *takva da vrijedi* $\omega(x_n) = \omega(x_0) = u_0$ *za* $n \geq 1$*.*

Dokaz. Slijedi direktno, koristeći teorem 2.15 u dokazu teorema 1.22. □

Sada slijedi glavni rezultat ovog odjeljka, koji kaže da je svaka generička točka od X konvergentna točka.

Teorem 2.17. *Pretpostavimo da vrijede (M), (D), (S) i (C) i da svaka točka iz X može biti aproksimirana odozgo ili odozdo u X. Tada je* $\operatorname{Int} C$ *gust u X.*

Dokaz. Dokaz je identičan dokazu teorema 1.25, osim što pretpostavljamo da je $x_0 \in X \setminus \operatorname{Int} C$. Niz y_n u tom dokazu pripada skupu $X \setminus C$. Dokaz teorema 1.25 nas tada dovodi do zaključka da je $x_0 \in \overline{\operatorname{Int} C}$. □

Postoje još i takozvane nestabilne ravnoteže, a više o njima može se pronaći u [[1], poglavlje 2].

3 Kompetitivne i kooperativne diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju fokusirat ćemo se na obične diferencijalne jednadžbe u $\mathbb{R}^n$. Prirodni parcijalni uređaj na $\mathbb{R}^n$ generiran je konusom vektora s nenegativnim komponentama. Obične diferencijalne jednadžbe mogu se riješiti unaprijed i unazad. Kažemo da je sustav običnih diferencijalnih jednadžbi kooperativan ako generira monoton polutok unaprijed (u smjeru budućeg vremena), odnosno kompetitivan ako generira monoton polutok unazad (u smjeru prošlog vremena). U ovom poglavlju neće biti bitno svojstvo jakog čuvanja uređaja, pa je time ono neovisno o prethodnim poglavljima.
Poglavlje ćemo započeti Kamkeovim uvjetom za stvaranje monotonog polutoka u smjeru budućeg vremena za autonomne obične diferencijalne jednadžbe.

3.1 Kamkeov uvjet

Promotrimo autonomni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$x' = f(x) \tag{57}$$

gdje je f neprekidna diferencijabilna funkcija na otvorenom podskupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Malo ćemo promijeniti notaciju kako bismo se prilagodili standardnoj notaciji običnih diferencijalnih jednadžbi. Neka je $\phi_t(x)$ rješenje sustava (57) koje počinje u točki x u trenutku $t = 0$. ϕ_t će označavati tok koji odgovara sustavu (57). Nekad ćemo f promatrati kao vektorsko polje koje generira tok ϕ_t. Ako je ϕ_t definiran za sve $t \geq 0$ $(t \leq 0)$, onda pišemo $\gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : t \geq 0\}$ $(\gamma^-(x) = \{\phi_t(x) : t \leq 0\})$ za pozitivnu orbitu (negativnu orbitu) koja prolazi točkom x. Ako $\gamma^-(x)$ ima kompaktni zatvarač u D, onda je alfa graničan skup definiran slično kao omega graničan skup:

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{\tau \leq t} \phi_\tau(x)}. \tag{58}$$

Nenegativni konus u $\mathbb{R}^n$, koji označavamo sa $\mathbb{R}^n_+$, jest skup svih n-torki sa nenegativnim koordinatama. On pridonosi parcijalnom uređaju na $\mathbb{R}^n$ jer je $y \leq x$ ako $x - y \in \mathbb{R}^n_+$. Manje formalno, to vrijedi ako i samo ako je $y_i \leq x_i$ za sve i. Pišemo $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x_i < y_i$ za neki i te pišemo $x \ll y$ ako je $x_i < y_i$ za svaki i. Prvi cilj je osigurati dovoljne uvjete da bi ϕ bio monoton dinamički sustav u odnosu na uređaj $\leq$.

Definicija 3.1. *Kažemo da je f tipa K u D ako $f_i(a) \leq_i (b)$ vrijedi za svaki i i za svake dvije točke a, b iz D koje zadovoljavaju $a \leq b$ i $a_i = b_i$.*

Sljedeći rezultat tvrdi da je "biti tipa K" dovoljan uvjet da bi vrijedilo svojstvo čuvanja uređaja. To je ujedno i nužan uvjet.

Propozicija 3.2. *Neka je f tipa K na D i $x_0, y_0 \in K$. Neka $<_r$ označava jednu od relacija $\leq$, $<$ ili $\ll$. Ako je $x_0 <_r y_0$, $t > 0$ i ako su definirani $\phi_t(x_0)$ i $\phi_t(y_0)$, tada je $\phi_t(x_0) <_r \phi_t(y_0)$.*

Dokaz. Za m=1, 2,..., neka je $\phi_t^m(x)$ tok koji odgovara

$$, x' = f(x) + (1/m)e \tag{59}$$

gdje je $e = (1, 1, ..., 1)$. Pretpostavimo da je $x_0 \leq y_0$, $t > 0$ i da su definirani $\phi_t(x_0)$ i $\phi_t(y_0)$. Tada je, prema knjizi [10], $\phi_s^m(y_0 + e/m)$ definiran na $0 \leq s \leq t$ za sve velike m, recimo $m > M$, i vrijedi

$$\phi_s^m(y_0 + e/m) \to \phi_s(y_0) \tag{60}$$

kad $m \to \infty$, uniformno po $s \in [0, t]$. Tvrdimo da

$$\phi_s(x_0) \ll \phi_s^m(y_0 + e/m) \tag{61}$$

vrijedi za $0 \leq s \leq t$, za svaki $m > M$. Kako je $x_0 = \phi_0(x_0) \ll y_0 + e/m = \phi_0^m(y_0 + e/m)$, tvrdnja vrijedi za male s zbog neprekidnosti. Ako tvrdnja ne vrijedi, onda postoje t_0 koji zadovoljava $0 < t_0 \leq t$, $\phi_s(x_0) \ll \phi_s^m(y_0 + e/m)$ na $0 \leq s < t_0$ te indeks i takav da je $\phi_{t_0}(x_0)_i = \phi_{t_0}^m(y_0 + e/m)_i$, gdje i označava i-tu komponentu. Dodatno, slijedi

$$\frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s(x_0)_i \geq \frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s^m(y_0 + e/m)_i \tag{62}$$

Ipak, budući da je $\phi_{t_0}(x_0)_j \leq \phi_{t_0}^m(y_0 + e/m)_j$ za $j \neq i$, "biti tipa K" implicira da je

$$f_i(\phi_{t_0}(x_0)) \leq f_i(\phi_{t_0}^m(y_0 + e/m)) < f_i(\phi_{t_0}^m(y_0 + e/m)) + 1/m, \tag{63}$$

ili

$$\frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s(x_0)_i < \frac{d}{ds}|_{s=t_0}\phi_s^m(y_0 + e/m). \tag{64}$$

Ovom kontradikcijom dokazali smo tvrdnju. Ako uzmemo da $m \to \infty$ u jednadžbi (61), dobivamo da je $\phi_t(x_0) \leq \phi_t(y_0)$.
Ako je $x_0 < y_0$, onda je $\phi_t(x_0) \leq \phi_t(y_0)$ i jednakost ne vrijedi jer je ϕ_t injekcija. Prema tome, $\phi_t(x_0) < \phi_t(y_0)$.
Ako je $x_0 \ll y_0$, onda ϕ_t preslikava skup $[x_0, y_0] \cap D$ na skup $[\phi_t(x_0), \phi_t(y_0)]$ po prvom dijelu dokaza. Kako je Φ_t homeomorfizam na D i kako prvi skup ima neprazni interior, onda i potonji skup mora imati neprazan interior. To vrijedi ako i samo ako je $\phi_t(x_0) \ll \phi_t(y_0)$. □

Lako je vidjeti da je neka funkcija tipa K po strukturi predznaka Jakobijeve matrice vektorskog polja na odgovarajućim domenama. Tu strukturu objasnit ćemo u sljedećoj napomeni.

Napomena 3.3. *Svojstvo "biti tipa K" može se izraziti u terminima parcijalnih derivacija od f na odgovarajućim domenama. Kažemo da je D* p-konveksan *ako je $tx + (1-t)y \in D$ za svaki $t \in [0,1]$ i $x, y \in D$ takve da je $x \leq y$. Ako je D konveksan skup, onda je također i p-konveksan. Ako je D p-konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i vrijedi*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geq 0,\ i \neq j,\ x \in D, \tag{65}$$

tada vrijedi fundamentalni teorem diferencijalnog i integralnog računa, koji implicira da je f tipa K u D.
Zapravo, ako je $a \leq b$ i $a_i = b_i$, onda je

$$f_i(b) - f_i(a) = \int_0^1 \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a + r(b-a))(b_j - a_j)dr \geq 0, \tag{66}$$

po jednadžbi (65).

Napomena 3.4. *Propozicija 3.2 očito ima analongon za neautonomne sustave. Na primjer, pretpostavimo da su $f(t,x)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ neprekidne na $\mathbb{R}^+ \times D$. Pri tome je D otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ i za svaki $t \geq 0$, $f(t,\cdot)$ zadovoljava svojstvo "biti tipa K". Ako su $x(t)$ i $y(t)$ dva rješenja od*

$$x' = f(t,x) \tag{67}$$

na intervalu $[a,b]$ koja zadovoljavaju $x(a) <_r y(a)$, onda je $x(b) <_r y(b)$. Ovdje $<_r$ označava jednu od relacija $\leq, <, \ll$. Dokaz ove napomene vrlo je sličan dokazu propozicije 3.2 pa ga ovdje izostavljamo.

Napomena 3.5. *Prethodna napomena se može primijeniti na linearni sustav*

$$y' = Df(x(t))y \tag{68}$$

gdje je x(t) rješenje sustava (57) definirano na $\mathbb{R}^+$, a $Df(x)$ je Jakobijeva matrica od f u točki x i vrijedi (65). U tom slučaju, funkcija $g(t,y) = Df(x(t))y$ zadovoljava pretpostavke iz napomene 3.5. Prema tome, ako je y(t) rješenje linearnog sustava koje zadovoljava $0 <_r y(0)$, onda je $0 <_r y(t)$ za $t > 0$.

Napomena 3.6. *U primjeni se često događa da je prirodna domena za sustav (57) zatvoren skup D i htjeli bismo da rezultati propozicije 3.2 vrijede i na D. Pretpostavimo da je f neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od D, da je D zatvarač otvorenog skupa G na kojem je f tipa K te da je D pozitivno invarijantan za (57). Pretpostavimo, također, da kad za $x, y \in D$ vrijedi $x < y$, postoje nizovi x_n i $y_n \in G$ koji zadovoljavaju $x_n < y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ kad $n \to \infty$. Tada propozicija 3.2 vrijedi za D. Dokaz slijedi iz neprekidnosti rješenja s obzirom na početne uvjete i iz činjenice da propozicija 3.2 vrijedi na G.*

Definicija 3.7. *Sustav (57) nazivamo kooperativni sustav ako (65) vrijedi na p-konveksnoj domeni D. Sustav (57) nazivamo* kompetitivni sustav *na D ako je D p-konveksan i ako su nejednakosti iz (65) obrnute, odnosno ako vrijedi:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \leq 0, \ i \neq j, \ x \in D \tag{69}$$

Uočimo da ako je (57) kompetitivni sustav s tokom ϕ_t, onda je

$$x' = -f(x) \tag{70}$$

kooperativni sustav s tokom ψ_t, gdje je $\psi_t(x) = \phi_{-t}(x)$, i obrnuto. Prema tome, obratom vremena kompetitivni sustav postaje kooperativan sustav i obrnuto.

Kooperativni sustav generira monoton dinamički sustav; tok unaprijed čuva relaciju uređaja $\leq$ po propoziciji 3.2. Kompetitivni sustav ima svojstvo da je tok s obrnutim vremenom monoton; ako je $x \leq y$ i $t < 0$ onda je $\phi_t(x) \leq \phi_t(y)$. Posebno, ako su x i y neusporedivi, odnosno ako ne vrijedi niti $x \leq y$ niti $y \leq x$, i ako je $t > 0$, tada ni $\phi_t(x)$ i $\phi_t(y)$ nisu usporedivi. Prema tome, tok unaprijed kompetitivnog sustava čuva svojstvo da su dvije točke neusporedive.

3.2 Pozitivno invarijantni skupovi i monotona rješenja

Kooperativni i kompetitivni sustavi imaju kanonske pozitivno invarijantne skupove koji su opisani u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.8. *Neka je (57) kooperativan i neka $<_r$ označava jednu od relacija $\leq, <, \ll$. Tada su $P_+ = \{x \in D : 0 <_r f(x)\}$ i $P_- = \{x \in D : f(x) <_r 0\}$ pozitivno invarijantni. Ako je $x \in P_+ (x \in P_-)$, onda je $\phi_t(x)$ nepadajuć (nerastuć) za $t \geq 0$. Ako, dodatno, $\gamma^+(x)$ ima kompaktni zatvarač u D, onda je $\omega(x)$ ravnoteža. Ako je (57) kompetitivan, onda su $U_+ = \{x \in D : f_i(x) > 0 \text{ za neki } i\}$ i $U_- = \{x \in D : f_i(x) < 0 \text{ za neki } i\}$ pozitivno invarijantni. Nadalje, $V_+ = \{x \in D : f_i(x) \geq 0 \text{ za neki } i\}$ i $V_- = \{x \in D : f_i(x) \leq 0 \text{ za neki } i\}$ su pozitivno invarijantni. $V_+ \cap V_-$ je zatvoren, pozitivno invarijantan i sadrži neki kompaktan invarijantan skup koji ne sadrži ravnotežne točke.*

Dokaz. Kada je (57) kooperativan, pozitivna invarijantnost skupova P_+,P_- slijedi izravno iz napomene 3.5 vezane uz linearni sustav

$$y' = Df(x(t))y, \tag{71}$$

gdje je x(t) rješenje sustava (57). Zapravo, ako je x(t) rješenje sustava (57), onda je $y(t) = f(x(t))$ rješenje ovog linearnog sustava. Kako vrijedi (65), Int $\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$ i $\mathbb{R}^n_+$ su pozitivno invarijantni za ovaj linearni sustav. Ako K označava bilo koji od ovih skupova, onda slijedi da je $-K$ isto pozitivno invarijantan za ovaj linearni sustav.

Pretpostavimo sada da je (57) kompetitivan, da je $x_0 \in U_+$ te da postoji $s > 0$

takav da $\phi_s(x_0) \notin U_+$. Tada je $y_0 = \psi_s(x_0) \in G = \{z \in D : -f(z) \geq 0\}$. G je pozitivno invarijantan za kooperativne sustave s obrnutim vremenom $x' = -f(x)$ po gornjem odjeljku. Tok za sustave s obrnutim vremenom je $\phi_{-t}(x)$ pa je $x_0 = \phi_s(y_0) \in G$. Ova kontradikcija (sa činjenicom da je $x_0 \in U_+$) dokazuje da je U_+ pozitivno invarijantan za kompetitivne sustave. Slični argumenti pokazuju pozitivnu invarijantnost skupova U_-, V_+,V_-. Prema tome, $V_+ \cap V_-$ je pozitivno invarijantan. Ako x ne pripada u V_+, onda je $-f(x) \gg 0$ pa je $-f(\phi_{-t}(x)) \gg 0$ za $t > 0$ po prvom odjeljku ovog dokaza. Prema tome, $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x)) \ll 0$ za $t < 0$, pa je $\phi_t(x)$ strogo padajuć na $t < 0$. Ako je, dodatno, $x \in A$, gdje je A kompaktan invarijantan skup, onda slijedi da je $\alpha(x)$ ravnotežna točka u A. Pošto smo pretpostavili da A nema ravnotežu, slijedi da je $A \subset V_+$. Sličan argument pokazuje da je $A \subset V_-$. □

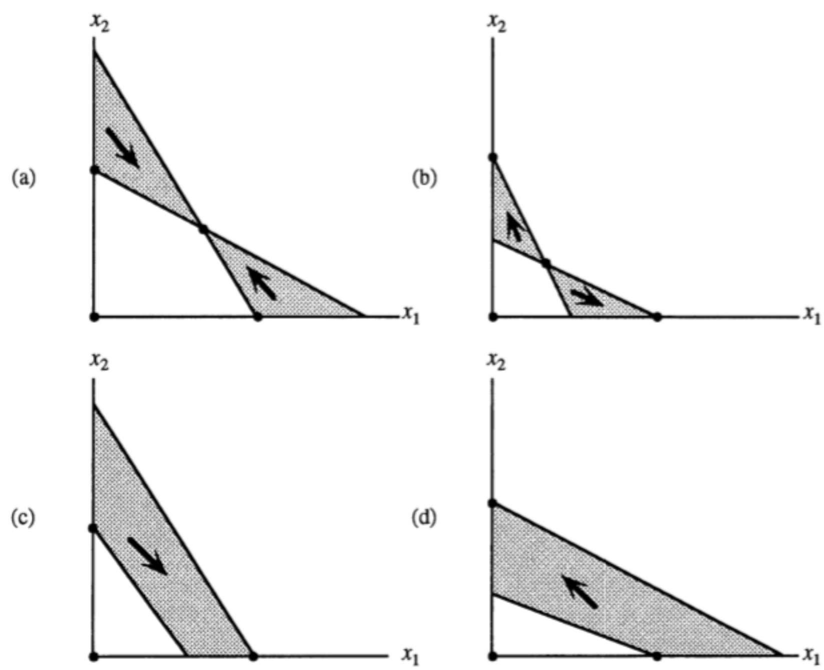
Prema propoziciji 3.8, rješenje $\phi_t(x)$ kompetitivnog sustava koje nikad ne sječe $V_+ \cap V_-$ mora biti strogo rastuće ili stogo padajuće po t. Ako to rješenje generira pozitivnu orbitu s kompaktnim zatvaračem u D, onda ono teži ka ravnoteži. Nadalje, svaka periodična orbita mora biti sadržana u $V_+ \cap V_-$. Slika 1 prikazuje pozitivno invarijantan skup $V_+ \cap V_-$ za dvodimenzionalan kompetitivan Lotka-Volterra sustav.

Teorem 3.9. *Neka je (57) kompetitivan ili kooperativan sustav na domeni D u $\mathbb{R}^2$. Ako je x(t) rješenje definirano za svaki $t \geq 0$ ($t \leq 0$), onda postoji $T \geq 0$ takav da je za svaki i=1, 2, $x_i(t)$ monoton na $t \geq T (t \leq -T)$. Posebno, ako $\gamma^+(x(0))(\gamma^-(x(0)))$ ima kompaktan zatvarač u D, onda je $\omega(x(0))(\alpha(x(0)))$ jedinstvena ravnoteža.*

Dokaz. Dovoljno je razmotriti samo slučaj kada je x(t) definiran za $t \geq 0$ jer je tada odgovarajuće rješenje za sustav s obrnutim vremenom definirano za $t \geq 0$ i taj sustav je također kompetitivan ili kooperativan.
Dokaz se zasniva na jednakosti

$$\frac{d}{dt}(f_1 f_2) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2})(f_1, f_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_1^2 \tag{72}$$

gdje je $\frac{d}{dt}(f_1 f_2)$ derivacija po vremenenu produkta komponenti vektora f, f_i, izračunana u rješenju x(t). Ako je (57) kooperativan, onda je $\frac{d}{dt}(f_1 f_2) \geq (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2})$. Ako je (57) kompetitivan, vrijedi suprotna nejednakost. Kao posljedicu, pokazat ćemo da su u slučaju kompetitivnog sustava skupovi $Q_+ = \{x \in D : f_1(x) \geq 0 \text{ i } f_2(x) \leq 0\}$ i $Q_- = \{x \in D : f_1(x) \leq 0 \text{ i } f_2(x) \geq 0\}$ pozitivno invarijantni. U slučaju kooperativnog sustava, slični argumenti pokazat će da su skupovi $P_+ = \{x \in D : f_1(x) \geq 0 \text{ i } f_2(x) \geq 0\}$ i $P_- = \{x \in D : f_1(x) \leq 0 \text{ i } f_2(x) \leq 0\}$ pozitivno invarijantni.
Kad Q_+ ne bi bio pozitivno invarijantan u kompetitivnom slučaju, onda bi ili postojala točka $x_0 \in Q_+$ koja zadovoljava $f_1(x_0) = 0$, $f_2(x_0) < 0$ tako da je $f_1(\varphi_t(x_0)) < 0$ za proizvoljno male pozitivne t ili bi postojala točka $x_0 \in Q_+$ koja zadovoljava $f_1(x_0) > 0$, $f_2(x_0) = 0$ tako da je $f_2(\varphi_t(x_0)) > 0$ za proizvoljno male pozitivne t.



Slika 1: *Osjenčana pordručja predstavljaju skup* $V_+ \cap V_-$ *za kompetitivan Lotka-Volterra sustav* $x_1' = x_1(1 - x_1 - a_{12}x_2$*,* $x_2' = \rho x_2(1 - x_2 - a_{21}x_1)$*: a)* $a_{12} < 1$, $a_{21} < 1$*; b)* $a_{12} > 1$, $a_{21} > 1$*; c)* $a_{12} < 1$, $a_{21} > 1$*; d)* $a_{12} > 1$, $a_{21} < 1$

Uzmimo da vrijedi prvi slučaj (drugi se pokaže na sličan način).
Po diferencijalnoj nejednakosti koju zadovoljava $f_1(\varphi_t(x_0))f_2(\varphi_t(x_0))$, slijedi da je $f_1(\varphi_t(x_0))f_2(\varphi_t(x_0)) \leq 0$ za sve $t \geq 0$. No to je u kontradikciji sa zaključkom koji smo donijeli gore, da je $f_1(\varphi_t(x_0))f_2(\varphi_t(x_0)) \geq 0$ za sve proizvoljno male pozitivne t. Time smo dokazali da je Q_+ pozitivno invarijantan. Slično se dobije da je Q_- pozitivno invarijantan.

Očito, zaključak teorema vrijedi ako je $x(t) \in Q_+ \cap Q_-$ za neke $t \geq 0$. Naime, ako je $x(t_0) \in Q_+$, onda je $x_1(t)$ nepadajuć i $x_2(t)$ je nerastuć na $t \geq t_0$. Ako je $x(t) \notin Q_+ \cup Q_-$ za sve $t \geq 0$, onda za svaki $t \geq 0$ vrijedi ili $f(x(t)) \gg 0$ ili $f(x(t)) \ll 0$. Drugim riječima, vektor f(x(t)) mora biti točka unutar otvorenog prvog ili trećeg kvadranta. Sada je $\{f(x(t)) : t \geq 0\}$ povezan i prema tome vrijedi $f(x(t)) \gg 0$ za svaki $t \geq 0$ ili $f(x(t)) \ll 0$ za svaki $t > 0$. U oba slučaja, dokaz je time gotov.
Za kooperativan sustav argumenti su slični. □

Bitno je primijetiti da u dokazu teorema nismo koristili monotonost toka, pa nije potrebno pretpostavljati da je D p-konveksan.

3.3 Glavni rezultati

Glavni rezultat ovog poglavlja jest da kompaktan graničan skup kompetitivnog ili kooperativnog sustava ne može sadržavati dvije točke x_1, x_2 koje zadovoljavaju $x_1 \ll x_2$. Ako je sustav kooperativan i graničan skup je omega graničan skup, onda taj rezultat slijedi po teoremu 1.12, iz prvog poglavlja. Dokaz poopćenog rezultata temelji se na sljedećoj lemi. Potrebna nam je ista notacija. Neka je x(t) rješenje sustava (57) na intervalu I. Podinterval [a,b] od I nazivamo rastući interval ako je $x(a) < x(b)$, odnosno padajuć interval ako je $x(b) < x(a)$.

Lema 3.10. *Neka je x(t) rješenje kooperativnog sustava (57) na intervalu I. Tada x(t) ne može imati rastući interval i padaćuji interval koji su disjunktni.*

Dokaz. Najbitnije opažanje jest da ako je [a,b] rastuć (padajuć) interval sadržan u I i ako je $s > 0$ takav da je $[a+s, b+s]$ sadržan u I, onda je i on rastuć (padajuć) interval u I. Zapravo, ako je $x(a) < x(b)$, onda je po propoziciji 3.2, $x(a+s) = \phi_s(x(a)) < \phi_s(x(b)) = x(b+s)$. Dakle, rastući i padajući intervali ostaju takvi nakon translacije udesno.
Pretpostavimo da I sadrži padajuć interval $[a, r]$ i rastuć interval $[s, b]$ i pretpostavimo da vrijedi $a < r < s < b$. Drugi slučaj se pokaže na sličan način. Neka je $A = \{t \in [s, b] : x(t) \leq x(s)\}$ i $s' = supA$. Tada je $s \leq s' < b$ i $[s', b]$ je rastuć interval koji ne sadrži niti jedan padajuć interval $[s', \eta]$ za svaki $\eta \in (s', b]$. Sada definiramo $s = s'$ tako da rastuć interval $[s, b]$ ima gore navedeno svojstvo. Dobit ćemo kontradikciju za oba slučaja $r - a \leq b - s$ i $r - a > b - s$.
Ako je $r - a > b - s$, onda je $a < a + b - r < s < b$, pa je $[a + b - r, b]$ translacija udesno od $[a, r]$, koja je sadržana u I, pa je i on padajuć interval. Slijedi da je $x(s) < x(b) < x(a + b - r)$. Neka je $c = sup\{t \in [a + b - r, s] : x(b) \leq x(t)\}$. Tada je $c < s < b$ i $x(b) \leq x(c)$ pa je $[c, s]$ padajuć interval koji dodiruje rastući

interval $[s, b]$. Ako je $s-c \leq b-s$ onda je $[s, 2s-c]$ translacija udesno padajućeg intervala $[c, s]$, sadržanog u $[s, b]$ i prema tome, to je padajuć interval. No to je kontradikcija s prijašnjom tvrdnjom da $[s, b]$ ne sadrži takav interval. Ako je $s-c > b-s$, onda je $c < c+b-s < s$ i $[c+b-s, b]$ je desna translacija padajućeg intervala $[c, s]$, pa je padajuć interval. Prema tome, $x(b) < x(c+b-s)$ i to je kontradikcija s definicijom od c. □

Teorem 3.11. *Kompaktan granični skup kompetitivnog ili kooperativnog sustava ne može sadržavati dvije točke za koje vrijedi relacija* $\ll$.

Dokaz. Po potrebi koristimo obrnuto vrijeme, pa možemo pretpostaviti da je (57) kooperativan. Dokazat ćemo teorem za slučaj kada je granični skup L alfa graničan skup, $\alpha(x_0)$. U slučaju da je L omega graničan skup, dokaz je sličan. Pretpostavimo da $L = \alpha(x_0)$ sadrži točke x_1 i x_2 koje zadovoljavaju $x_1 \ll x_2$. Neka je $x(t) = \phi_t(x_0)$ za $t \leq 0$. Kako je $\{x : x_1 \ll x\}$ otvorena okolina od x_2 i kako potonji skup pripada skupu L, postoji $t_1 < 0$ takav da je $x \ll x(t_1)$. Kako je $\{x : x \ll x(t_1)\}$ otvorena okolina od x_1 i kako potonji skup pripada skupu L, postoji t_2 koji zadovoljava $t_2 < t_1$ i $x(t_2) \ll x(t_1)$. Ako tako nastavimo, dobivamo $t_3 < t_2$ takav da je $x(t_3) \ll x_2$ i $t_4 < t_3$ takav da je $x(t_3) \ll x(t_4)$. Prema tome, interval $I = [t_4, t_1]$ sadrži padajuć interval $[t_4, t_3]$ i rastuć interval $[t_2, t_1]$ i ti intervali su disjunktni. To je kontradikcija s lemom 3.10. □

Periodična orbita γ kooperativnog ili kompetitivnog sustava je kompaktan graničan skup i prema tome ne može sadržavati dvije točke za koje vrijedi relacija $\ll$. Primijetimo da ta činjenica onemogućava postojanje periodičnih orbita kooperativnog ili kompetitivnog sustava u $\mathbb{R}^2$, budući da svaka Joradova krivulja na $\mathbb{R}^2$ nužno sadrži dvije točke povezane sa $\ll$.

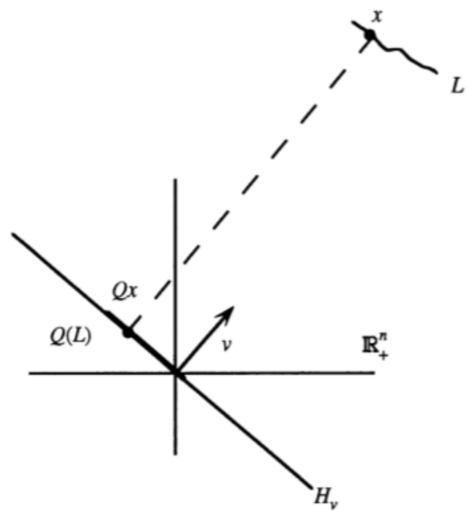
Propozicija 3.12. *Neka je periodična orbita* γ *netrivijalna periodična orbita kompetitivnog ili kooperativnog sustava. Tada* γ *ne može sadržavati dvije točke za koje vrijedi relacija* $<$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je sustav kooperativan. Pretpostavimo da je $y_i \in \gamma$, $i = 1, 2$ tako da vrijedi $y_1 < y_2$. Neka je $T > 0$ najmanji period rješenja $\phi_t(y_2) = x(t)$. Tada postoji $\tau \in (0, T)$ takav da je $x(\tau) = y_1 < y_2 = x(0)$. Prema tome, $[0, \tau)$ je padajuć interval od x(t). Po periodičnosti od x(t), $x(\tau+T) = y_1 < y_2 = x(2T)$, pa je $[\tau+T, 2T]$ rastuć interval disjunktan s $[0, \tau]$. To je kontradikcija s lemom 3.10. □

Neka je A invarijantan skup za (57) s tokom $\phi : t$ i neka je B invarijantan skup za sustav

$$y' = F(y) \tag{73}$$

s tokom ψ_t. Kažemo da je tok Φ_t na skupu A *topološki ekvivalentan* toku ψ_t na skupu B ako postoji homeomorfizam $Q : A \to B$ takav da je $Q(\phi_t(x)) = \psi_t(Q(x))$ za svaki $x \in A$ i $t \in \mathbb{R}$. Veza topološke ekvivalencije je jedna od nekoliko relacija ekvivalencije na skupu svih tokova koja kaže, ugrubo, da je dinamika tih dvaju tokova jednaka. Kažemo da je sustav diferencijalnih jednadžbi



Slika 2: *Prikaz ortogonalne projekcije Q_L skupa L na hiperravninu H_v*

$y' = F(y)$ definiran na $\mathbb{R}^k$ Lipschitzov ako je F Lipschitova, odnosno ako postoji $K > 0$ takav da vrijedi $|F(y_1) - F(y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^k$.

Teorem 3.13. *Tok na kompaktnom graničnom skupu kompetitivnog ili kooperativnog sustava u $\mathbb{R}^n$ je topološki ekvivalentan s tokom na kompaktnom invarijantnom skupu Lipschitzovog sustava diferencijalnih jednadžbi na R^{n-1}.*

Dokaz. Neka je L graničan skup. Neka je v jedinični vektor koji zadovoljava $0 \ll v$ i neka je H_v hiperravnina ortogonalna na v. H_v se sastoji od vektora x takvih da je $x \cdot v = 0$, gdje "$\cdot$" označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$. Neka je Q ortogonalna projekcija na H_v, odnosno $Qx = x - (x \cdot v)v$. Vidi Sliku 2. Po teoremu 3.11, Q je injekcija na L (to ne vrijedi samo ako L sadrži dvije točke za koje vrijedi relacija $\ll$). Prema tome, Q_L, restrikcija Q na L, je Lipschitzov homeomorfizam od L na kompaktni podskup H_v. Preko kontradikcije želimo dokazati postojanje $m > 0$ takvog da vrijedi $|Q_L x_1 - Q_L x_2| \geq m|x_1 - x_2|$ za svaki par točaka $x_1 \neq x_2$ iz L. Kad ne b postojao takav m , onda bi postojali nizovi x_n, $y_n \in L$, $x_n \neq y_n$ takvi da

$$\frac{|Q(x_n) - Q(y_n)|}{x_n - y_n} \to 0 \tag{74}$$

za $n \to \infty$. Ekvivalentno,

$$\frac{|(x_n - y_n) - v[v \cdot (x_n - y_n)]|}{|x_n - y_n|} \to 0 \tag{75}$$

ili

$$|\omega_n - v(v \cdot \omega_n)| \to 0 \tag{76}$$

kad $n \to \infty$, gdje je

$$\omega_n = \frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|}. \tag{77}$$

Možemo pretpostaviti da $\omega_n \to \omega$ kad $n \to \infty$, gdje je $|\omega| = 1$. Tada je, $\omega = v(v \cdot \omega)$ i prema tome, $(v \cdot \omega)^2 = 1$, odnosno $\omega = \pm v$. No tada je

$$\frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|} \to \pm v \tag{78}$$

kad $n \to \infty$ i to implicira da $x_n \ll y_n$ ili $y_n \ll x_n$ za sve velike n, što je u kontradikciji s teoremom 3.11. Prema tome, Q_L^{-1} je Lipschitzova na Q(L). Kako je L graničan skup, on je invarijantan skup za (57). Dakle, dinamički sustavi restringirani na L mogu se prilagoditi kako bi bili dinamički sustavi na H_v. Zapravo, ako je $y \in Q(L)$, onda je $y = Q_L(x)$ za jedinstveni $x \in L$ i $\psi_t(y) = Q_L(\phi_t(x))$ je dinamički sustav na Q(L) generiran pomoću vektorskog prostora

$$F(y) = Q_L(f(Q_L^{-1}(y))) \tag{79}$$

na Q(L). Prema knjizi [11], Lipschitzovo vektorsko polje na proizvoljnom podskupu od H_v se može proširiti na Lipschitzovo vektorsko polje na cijelom H_v, tako da Lipschitzova konstanta ostane ista. Slijedi da F može biti proširen na cijeli H_v, jer je on Lipschitzovo vektorsko polje. Lako je vidjeti da je Q(L) invarijantan skup za H_v. Time smo uspostavili ekvivalenciju toka ϕ_t na L i toka ψ_t na Q(L). Q(L) je invarijantan skup za (n-1)-dimenzionalan dinamički sustav na H_v generiran s pomoću proširenog vektorskog polja. □

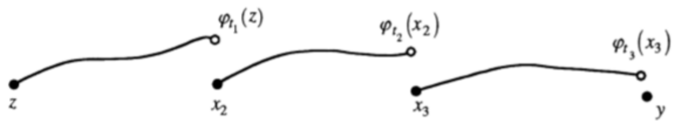
Kao posljedica teorema 3.13, tok na kompaktnom graničnom skupu L kompetitivnog ili kooperativnog sustava dijeli zajednička dinamička svojstva sa tokom sustava diferencijalnih jednadžbi u jednoj dimenziji manje, restringiranim na kompaktan invarijantan skup, Q(L). Ipak, primijetimo da Q(L) ne treba biti graničan skup niti jedne orbite Lipschitzovog vektorskog polja. Očito, Q(L) je povezan jer je L povezan.
Svojstvo rekurentnog lanca je dinamičko svojstvo koje posjeduje svaki graničan skup. Sada ćemo ga definirati.

Definicija 3.14. *Neka je A kompaktan invarijantan skup za tok ψ_t. Neka su nam dane dvije točke z i y iz A i pozitivni brojevi ϵ i t.* (ϵ, t)-lanac *od z do y u skupu A je uređen skup*

$$\{z = x_1, x_2, ..., x_n = y; t_1, t_2, ..., t_n\}. \tag{80}$$

To je skup točaka x_i iz A i trenutaka $t_i \geq t$ takvih da vrijedi

$$|\psi_{t_i}(x_i) - x_{i+1}| < \epsilon, \ \ i=1,2,...,n. \tag{81}$$



Slika 3: *Jedan* $(\epsilon, t)-$*lanac*

Slika 3 prikazuje jedan takav lanac. Kažemo da je skup A ima svojstvo rekurentnog lanca ako za svaki $z \in A$, svaki $\epsilon > 0$ i svaki $t > 0$, postoji (ϵ, t)-lanac od z do z u skupu A.
Bitno je naglasiti da alfa i omega granični skupovi imaju svojstvo rekurentnog lanca.

Rekurentnim skupovima se nastavljamo baviti i u sljedećem poglavlju.

4 Frenkel-Kontorovin model

4.1 Fizikalna motivacija

Frenkel-Kontorovin model prvi su put spomenuli Prandt i Dehlinger. To je jednostavni model koji opisuje dinamiku lanca čestica, pri čemu postoji međudjelovanje svake čestice s najbližim susjedom, a sve u prisutnosti vanjskog periodičnog potencijala. Taj su model pojedinačno predstavili Frenkel i Kontorova. Mehanički model može se izvesti iz standardnog Hamiltonijana:

$$H = K + W, \tag{82}$$

gdje su K i W kinetička i potencijalna energija, respektivno. Kinetička energija K je definirana standardno s

$$K = \frac{m_a}{2} * \sum_i (\frac{dx_i}{dt})^2, \tag{83}$$

gdje je m_a masa čestice, x_i koordinata i-te čestice u lancu. Pri tome je $i \in S$, gdje je S konačan ili beskonačan niz uzastopnih cijelih brojeva.

Potencijalna energija W lanca prikazanog na slici 4 sastoji se od dva dijela:

$$W = W_{sub} + W_{int} \tag{84}$$

Prvi član, W_{sub}, kazakterizira interakciju lanca sa vanjskim periodičnim potencijalnom, u najjednostavnijem obliku:

$$W_{sub} = \frac{\epsilon_s}{2} * \sum_i [1 - \cos(\frac{2\pi * x_i}{a_s})], \tag{85}$$

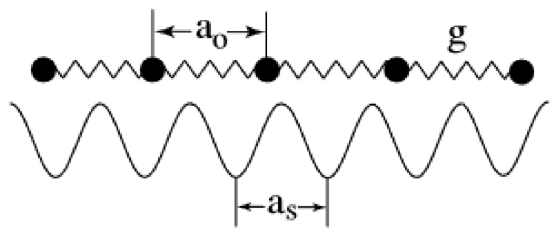
gdje je ϵ amplituda potencijala, a a_s period. Drugi član u jednadžbi (84), W_{int}, opisuje linearno djelovanje između najbližih susjeda u lancu:

$$W_{int} = \frac{g}{2} * \sum_i (x_{i+1} - x_i - a_0)^2 \tag{86}$$

i ono je karakterizirano elastičnom konstantom g i ravnotežnom udaljenosti između čestica pri djelovanju unutarnjeg potencijala, a_0, kada ne postoji djelovanje vanjskog potencijala.

Model (82)-(86) može se pojednostaviti uz sljedeće pretpostavke o fizikalnom sustavu:
(i) Čestice u lancu mogu se kretati u samo jednom smjeru;
(ii) U generaliziranom izrazu za vanjsku potencijalnu energiju

$$W_{sub} = \sum_i V_{sub}(x_i) \tag{87}$$



Slika 4: *Shematski prikaz Frenkel-Kontorovina modela. Lanac čestica koje djeluju jedna na drugu preko opruga koje imaju konstantu elastičnosti g. Na model djeluje periodični potencijal s periodom a_s.*

funkcija $V_{sub}(x_i)$ zapisana je kao Fourierov red, i uzima se u obzir samo prvi član tog reda;
(iii) Energija međudjelovanja čestica u lancu obuhvaća samo interakciju najbližih susjeda

$$W_{int} = \sum_i V_{int}(x_{i+1} - x_i). \tag{88}$$

Kada se $V_{int}(x_i)$ razvije u Taylorov red, uzima se u obzir samo harmonijsko međudjelovanje, tako da je $g = V_{int}^{''}(a_0)$
Uvođenjem bezdimenzionalnih varijabli, dobivamo model (82)-(86) u uobičajenom obliku ($H = 2Hs/\epsilon_s$)

$$H = \sum_i \frac{1}{2}(\frac{dx_i}{dt})^2 + (1 - \cos x_i) + \frac{g}{2}(x_{i+1} - x_i - a_0)^2. \tag{89}$$

Pri tome $a_0 \to (2\pi/a_s)a_0$, $x_n \to (2\pi/a_s)x_n$, $t \to (2\pi/a_s)(\epsilon_s/2m_a)^{\frac{1}{2}}t$, a bezdimenzionalna konstanta elastičnosti se mijenja kako slijedi: $g \to (a_s/2\pi)^2 g(\epsilon_s/2)^{-1}$.
U tom normaliziranom obliku, Hamiltonijan (89) opisuje harmonijski lanac čestica jednakih masa koji se kreće u sinusoidalnom vanjskom potencijalu s periodim $a_s = 2\pi$ i amplitudom $\epsilon_s = 2$.
Kako bismo zadržali sve fizikalne veličine u odgovarajućoj dimezionalnoj formi, trebamo pomnožiti prostorne varijable sa $(a_s/2\pi)$, frekvencije sa $(2\pi/a_s)(\epsilon_s/2m_a)$, mase sa m_a i energije sa $(\epsilon_s/2)$.
Iz Hamiltonijana (89) dobivamo odgovarajuću jednadžbu gibanja diskretnog lanca,

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sin x_i - g(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) = 0 \tag{90}$$

Važno je primijetiti da jednadžba (90) ne sadrži eksplicitno ravnotežnu udaljenost čestica u odsutnosti vanjskog potencijala, a_0.
Više o ovom modelu možete naći u knjizi [5].

Kako bismo proučili svojstva Frenkel-Kontorovina modela, napisat ćemo ga u općem obliku. Potencijalna energija je tada

$$W = \sum_i V_{sub}(x_i) + \sum_i V_{int}(x_{i+1} - x_i). \tag{91}$$

Zapisat ćemo je sada kao jedinstvenu sumu

$$W = \sum_{i \in S} h^i(x_i, x_{i+1}), \tag{92}$$

gdje su funkcije $h^i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uniformno C^2 sa svojstvima:
(i) $h^i(x, x') = h^i(x+1, x'+1)$
(ii) postoji $c > 0$ takav da je $h^i_1 2 \leq -c$, osim na desnom rubu, to jest za $i = N$, gdje je h^N funkcija ovisna samo o x_N. Oznaka h_j označava parcijalnu derivaciju funkcije h po j-tom argumentu te funkcije.

Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da su sve funkcije h^i jednake, i označavamo ih sa h u daljnjem tekstu.

Dodatno, na takav model djelujemo vektorom sila $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_N)$. Pretpostavit ćemo, također, da su sve komponente F_i jednake i označiti ih sa F. Potencijalna energija je konačno

$$W = \sum_i h(x_i, x_{i+1}) - Fx_i, \tag{93}$$

gdje je $F \geq 0$.

U gore navedenom primjeru funkcije h jednake su

$$h(x_i, x_{i+1}) = \frac{g}{2}(x_{i+1} - x_i - a_0)^2 + V(x), \tag{94}$$

za neki periodični potencijal V(x+1)=V(x).
Suma W je formalna ako je S beskonačan, ali je gradijent i dalje dobro definiran.

4.2 Gradijentna dinamika Frenkel-Kontorovina modela

Gradijentna dinamika Frenkel-Kontorovina modela dana je s

$$\dot{x} = -\nabla W(x) \tag{95}$$

pa je

$$\dot{x_i} = -h_2(x_{i-1}, x_i) - h_1(x_i, x_{i+1}) + F \tag{96}$$

pri čemu izostavljamo lijevi kraj, ako on postoji. Tok ψ_t ovog sustava jednadžbi dobro je definiran i neprekidan je za svaki $t \geq 0$.
Dokazat ćemo da za konačan lanac s $\mathbf{F} = 0$ postoji barem jedna ravnoteža. Nadalje, dokazat ćemo i da postoje dovoljno veliki $\mathbf{F}$ za koje ne postoji niti jedna ravnoteža. Za beskonačan niz uvijek postoji ravnoteža.

Prema Middletonu [6], u slučaju kada ne postoji ravnoteža imamo periodično rješenje, odnosno, postoji τ takav da za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x(t + \tau) = x(t) + \mathbf{1}, \tag{97}$$

gdje je $\mathbf{1}$ niz za svim članovima 1. Dodatno, ovo rješenje privlači sve orbite gradijentne dinamike (rješenje je globalni atraktor). To ćemo dokazati.

Pretpostavimo da imamo konačan lanac, x_i, $i \in S$, S=0,1,...N i $\mathbf{F} \geq 0$. Želimo dokazati sljedeće:

Propozicija 4.1. *Na kvocijentnom prostoru $\mathbb{R}^2/ < T >$, gdje je $< T >$ grupa generirana translacijom $Tx = x + 1$, definiran je gradijentni tok ϕ_t i on je klase C^1 za svaki $t \geq 0$ te postoji periodična rekurentna orbita s $\dot{x} \geq 0$*

Propozicija 4.2. *Svaka rekurentna orbita s $\dot{x} > 0$ je periodična, odnosno, postoji $\tau > 0$ takav da je $x(t + \tau) = x(t) + \mathbf{1}$*

Propozicija 4.3. *Svaka periodična orbita, s $\dot{u} > 0$ je globalni atraktor, sa fazom. Na primjer, za početni uvjet y postoji $\theta \in R$ takav da $y(t) - u(t + \theta) \to 0$ kad $t \to \infty$.*

Time dobivamo,

Teorem 4.4. *Za konačan lanac vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*
(i) Postoji ravnotežna točka i ω-graničan skup svake orbite je neuređen povezan podskup skupa svih ravnotežnih točaka sa konstantom W
ili
(ii) Postoji periodična orbita u, takva da je $\dot{u} \gg 0$ te ona privlači svaku orbitu, s fazom.

Ove tri propozicije i teorem dokazat ćemo u nastavku ovog poglavlja.

Skup $\omega(x)$ je *neuređen* ako za svake dvije točke $p \neq q \in \omega(x)$ ne vrijedi niti $p \geq q$ niti $p \leq q$. Općenito, povezan skup više ravnoteža je jedna točka ravnoteže.
Pišemo

$$W(x) = U(x) - \sum_i F x_i, \text{ gdje je } U(x) = \sum_i h(x_i, x_{i+1}). \tag{98}$$

Lema 4.5. *Ako je $h_{12} \leq -c < 0$ i $h(x + 1, x' + 1) = h(x, x')$, tada*
(i) postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$h(x, x') \geq a + b(x' - x) + \frac{c}{2}(x' - x)^2 \tag{99}$$

i
(ii) postoji $H \in \mathbb{R}$ takav da je —$h_1(x, x')| \geq c|x' - x| - H$.

Dokaz. (i) je lako dokaže integriranjem funkcije $h_{12}(\xi, \xi')$ po trokutu čije su stranice vektori (x, x),(x, x') i (x', x').
(ii) se dokazuje slično, koristeći

$$h_1(x, x') = h_1(x, x) + \int_x^{x'} h_{12}(x, \xi) d\xi \tag{100}$$

uz $H = \max\{|h_1(x, x)| : x \in [0, 1]\}$. □

Lema 4.6. *Kada je **F**=0 postoji točka ravnoteže.*

Dokaz. Prema lemi 4.5 (i), U je ograničen odozdo. Neka je $m = \inf U$. Prema lemi 4.5(i), također postoji $A > 0$ i $B > m$ takvi da je $U(x) \geq B$ ako za barem jedan i vrijedi $|x_{i+1} - x_i| \geq A$. Zbog neprekidnosti od U, U postiže svoj infimum u interioru kompaktnog podskupa

$$K = \{x \in \mathbb{R}^S / < T >: \text{ za i } \in \{0, 1, ..., N-1\}, |x_{i+1} - x_i| \geq A\} \tag{101}$$

i kako je U klase C^1 svaki minimum je točka ravnoteže. □

Dokaz propozicije 4.1. Vektorsko polje $-\nabla W$ je klase C^1, pa definira tok φ_t koji je lokalno klase C^1. Jedina prepreka da bi bio globalni tok jest to što tok eksplodira u konačnom vremenu. Respektivno sa standarnim produktom unutar $\mathbb{R}^S$, vrijedi

$$\frac{dU}{dt} = \dot{x} \cdot \nabla U = -(\nabla U - \mathbf{F}) \cdot \nabla U = -|\nabla U|^2 + \mathbf{F} \cdot \nabla U \leq -|\nabla U|^2 + |\mathbf{F}||\nabla U| = -|\nabla U|(|\nabla U| - |\mathbf{F}|). \tag{102}$$

Uz dani $\epsilon > 0$, ako je $|\nabla U| \geq |\mathbf{F}| + \epsilon$ tada U pada brzinom barem ϵ^2. No, kao u dokazu Leme 4.6, U je ograničen odozdo pomoću m, pa U mora zaustaviti pad i tada je $|\nabla U| \leq |\mathbf{F}| + \epsilon$. Za $K \in \mathbb{R}$ definiramo

$$R_K = \{x \in \mathbb{R}^S : |\nabla U(x)| \leq K\} / < T > . \tag{103}$$

Dokazat ćemo da je R_K kompaktan. Zatvoren je, i bez smanjenja općenitosti $x_0 \in [0, 1]$. Sada je

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = h_1(x_0, x_1) \tag{104}$$

pa je po lemi 4.5.(ii)

$$|x_1 - x_0| \leq (K + H)/c, \tag{105}$$

gdje je $H = \max\{|h_1(x, x)| : x \in [0, 1]\}$.
Za $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$ vrijedi

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = h_2(x_{i-1}, x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) \tag{106}$$

pa je slično

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \frac{(K + H + |h_2(x_{i-1}, x_i)|)}{c} \tag{107}$$

Zbog toga se, prema indukciji, svaki x_i nalazi u kompaktnom intervalu. Produkt konačno mnogo kompaktnih skupova je kompaktan.
Uzmimo $\epsilon > 0$ i neka je $K = |\mathbf{F}| + \epsilon$ i $M = \max\{U(x) : x \in R_K\}$. Tada orbita od $x \in R_K$ može napustiti R_K na najduže $T = (M - m)/\epsilon^2$, jer bi se u suprotnom U smanjio ispod svog minimuma.
Neka je

$$C = \bigcup_{t \in [0,T]} \varphi_t(R_K). \tag{108}$$

To je kompaktan i apsorbirajuć skup (svaka orbita jednom uđe u C i kada uđe više ga ne napušta). Posebno, φ_t je definiran za svaki $t \geq 0$.
Postoje x-evi takvi da je $\dot{x} \geq 0$. Uzmimo ravnotežnu točku u slučaju kad je **F**=0 (Lema 4.6); za **F¿0** vrijedi $\dot{x} = \mathbf{F} > 0$. Po monotonosti gradijentnog toka, $\dot{x} \geq 0$ je pozitivno invarijantan. Dakle, omega graničan skup, $\omega(x)$, za kvocjentni tok bilo koje točke x za koju vrijedi $\dot{x} \geq 0$ nalazi se u skupu

$$C_+ = \{x \in C : \dot{x} \geq 0\}. \tag{109}$$

Skup C_+ je kompaktan, pa po Birkoffovom teoremu rekururencije (iz knjige [3]) postoji rekurentna orbita u $\omega(x)$. □

Dokaz propozicije 4.2. Ako je $u/ < T >$ rekurentan i $\dot{u} \geq 0$, onda se on mora nalaziti u C_+. Ako je $\dot{u} > 0$, onda je po monotonosti $\dot{u}(t) > 0$ za svaki $t \geq 0$ pa je $u(t)$ rastuć. Kad bi u(t) bio ograničen onda bi $y = supu(t) : t \geq 0$ bila ravnotežna točka i vrijedilo bi da $u(t) \to y$ kada $t \to \infty$. To bi bila kontradikcija s rekurencijom od $u \ < T >$ (primijetimo da nije moguće da je $y = u + M$ za neki $M \in \mathbb{N}$, jer bi tada vrijedilo $\dot{(u)} = 0$). Prema tome, u(t) je neograničen. Kako u(t) ostaje u C_+, slijedi da je svaka komponenta $u_i(t)$ neograničena.
Neka je

$$\tau_+ = inf\{\tau \geq 0 : u(\tau) \geq z + 1\} \tag{110}$$

$$\tau_- = sup\{\tau \geq 0 : u(\tau) \leq u + 1\}. \tag{111}$$

Kako je svaka komponenta od u(x) rastuća i neograničena, očito je $\tau_+ < \infty$ i $\tau_- > 0$. Kad bi vrijedilo $\tau_+ > \tau_-$, onda bi stroga monotonost implicirala da postoje $\tau'_- > \tau_-$, $\tau'_+ < \tau_+$ i $t_0 > 0$ takvi da $u(\tau'_\pm) - u - 1$ poprima oba predznaka i da vrijedi

$$u(\tau_-^{'} + t_0) \ll u(t_0) + 1 \ll u(\tau_+^{'} + t_0). \tag{112}$$

Da je $u/ < T >$ rekurentan i da je tok neprekidan, postojao bi $t_1 > t_0$ i $M \in \mathbb{Z}$ takav da je $u(t_1)$ dovoljno blizu $u + M$ da bi $u(t_1) + \tau'_\pm - 1$ poprimao oba predznaka. No $t_1 > t_0$, izraz (97) i stroga monotonost impliciraju da vrijedi

$$u(\tau'_- + t_1) \ll u(t_1) + 1 \ll u(\tau'_+ + t_1). \tag{113}$$

Time bismo dobili kontradikciju.

Dakle, $\tau_+ = \tau_-$ i $u(t+\tau) = u(t)+1$ za svaki t, gdje je τ zajednička vrijednost od $\tau_\pm$, pa je $u/<T>$ periodična.

$\square$

Dokaz propozicije 4.3. Neka je dana periodična orbita u za koju vrijedi $\dot{u} > 0$, $u(t+\tau) = u(t)+1$. Za svako stanje y definiramo

$$\tau_+(y) = inf\{\theta \in \mathbb{R} : u(\theta) \geq y\} \tag{114}$$

$$\tau_-(y) = sup\{\theta \in \mathbb{R} : u(\theta) \leq y\}. \tag{115}$$

Obje vrijednosti su konačne jer $u(\theta) \to \pm\infty$ kad $\theta \to \pm\infty$. Primijetimo da je $\tau_-(y) \leq \tau_+(y)$. Definiramo

$$\Delta\tau(y) = \tau_+(y) - \tau_-(y) \tag{116}$$

Uz početno stanje y, ako je $\Delta\tau(y) = 0$, onda je $y = u(\theta)$, gdje je θ zajednička vrijednost od $\tau_\pm$, i vrijedi $y(t) = u(\theta+t)$. Ako je $\Delta\tau > 0$ onda je $\tau_-(y(t)) - t$ rastuća i $\tau_+(y(t)) - t$ padajuća, pa je $\Delta\tau(y(t))$ padajuća. Pretpostavimo da je $\epsilon = inf\{\Delta\tau(y(t)) : t \geq 0\} > 0$. Tada je $L = \{z : \epsilon \leq \Delta\tau(z) \leq 2\epsilon\}/<T>$ kompaktan , pa postoje $z \in L$ i $t_j \to \infty$ tako da $y(t_j) \to z$ kad $j \to \infty$. Funkcija $\Delta\tau : \mathbb{R}^S/<T> \to \mathbb{R}$ je neprekidna pa je $\Delta\tau(z) = \epsilon$. Neka je z početno stanje. Tada je $\Delta\tau(z(t)) < \epsilon$ za $t > 0$. Prema tome, postoji $\eta < \epsilon$ tako da za dovoljni velike j vrijedi $\Delta\tau(y(t_j)) \leq \eta$. To je kontradikcija sa $\epsilon = inf\{\Delta\tau(y(t)) : t \geq 0\}$, pa zaključujemo da $\Delta\tau(y(t)) \to 0$. Ako je $\theta = \{\tau_\pm(y(t)) - t : t \to \infty\}$, onda $y(t) - u(t+\theta) \to 0$. $\square$

Dokaz teorema 4.4 . Po propoziciji 4.1, postoji rekurentna točka x za koju vrijedi $\dot{x} \geq 0$.
Ako je y ravnoteža, onda za svaki $y \in \mathbb{R}^S$ postoje m_-, $m_+ \in \mathbb{Z}$ takvi da vrijedi $x + m_- \leq y \leq y + m_+$, i po monotonosti orbita od y uvijek ostaje između te dvije granice. Zatim upotrijebimo LaSalle-ov princip(iz knjige [4]) na kompaktan skup između $x + m_-$ i $x + m_+$ kako bismo dobili da je ω- graničan skup od y povezan skup ravnotežnih točaka za konstantnim W. Već smo dokazali da je $\omega(y)$ neuređen.
Ako x nije ravnotežna točka, onda propozicija 4.2 kaže da je to periodična orbita za koju je $\dot{x} \gg 0$, a propozicija 4.3. kaže da je ona privlači svaku orbitu, sa fazom. $\square$

Napomena 4.7. *U propozicijama 4.1 i 4.2, izraz "rekurentan" se može zamijeniti sa "ne-lutajuć". Točka a je ne-lutajuća ako za svaku okolinu N od u i* $T > 0$ *postoje* $y \in N$ *i* $t > T$ *takvi da je* $y(t) \in N$. *Posebno, rekurentne točke su ne-lutajuće. Lakše je dokazati postojanje ne-lutajuće točke na kompaktnom skupu, nego postojanje rekurentne točke. Prilagodit ćemo dokaz propozicije 4.2, kako bismo to dokazali.*

Propozicija 4.8. *Svaka ne-lutajuća točka u za koju vrijedi* $\dot{u} > 0$ *je periodična.*

Dokaz. Orbita u(t) ne može doći u ravnotežnu točku. U suprotnom, nazovimo tu točku e i uzmimo okolinu N od u podizaču od C_+ oblika $\{y : y^- < y < y^+\}$ i odaberimo $y \in N$, $t > 0$ i $M \in \mathbb{Z}$ takve da je $y < e + M$, $y(t) \in N$ (modulo $< T >$) i $y(t) > e + M$. Tada y prolazi kroz ravnotežnu točku e+M, što je u kontradikciji s monotonosti. Prema tome, sve komponente od u(t) su neograničene kad $t \to \infty$. Definiramo $\tau_\pm$ kao u dokazu propozicije 4.2. Odaberemo y koji je dovoljno blizu u, $t_1 > t_0$ i $M \in \mathbb{N}$ takve da je $y(t_1) - M$ dovoljno blizu u kako bi vrijedilo $y(\tau_+^{'} + t_0) \gg y(t_0) + \mathbf{1}$. Ali, $y(_+ + t_1) - y(t_1) - \mathbf{1}$ poprima oba predznaka pa opet dolazimo do kontradikcje s monotonosti. Dakle, dobivamo da je $\tau_+ = \tau_-$ i da je u periodična. □

Lema 4.9. *Postoje H_1, H_2 takvi da za $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$ vrijedi*

$$h_1(x_i, x_{i+1}) \leq H_1 - c(x_{i+1} - x_i) \textit{ kad je } x_{i+1} \geq x_i \tag{117}$$

i

$$h_2(x_i, x_{i+1}) \leq H_2 - c(x_i - x_{i+1}) \textit{ kad je } x_i \geq x_{i+1} \tag{118}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, uzimamo slučaj $i = 0$

$$h_1(x_0, x_1) = h_1(x_0, x_0) + \int_{x_0}^{x_1} h_{12}(x_0, \xi) d\xi \leq H_1 - c(x_1 - x_0) \text{ kad je } x_1 \geq x_0 \tag{119}$$

gdje je $H_1 = \max\{h_1(x, x) : x \in [0, 1]\}$.
Slično,

$$h_2(x_0, x_1) = h_2(x_1, x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_{12}(\xi, x_0) d\xi \leq H_2 - c(x_0 - x_1) \text{ kad je } x_0 \geq x_1 \tag{120}$$

gdje je $H_2 = \max\{h_2(x, x) : x \in [0, 1]\}$. □

Propozicija 4.10. *Ako je svaka komponenta od **F** dovoljno velika, ne postoji niti jedna točka ravnoteže.*

Dokaz. Definiramo $\xi_i = x_i - x_{i+1}$. Tada $\dot{x_0} = 0$ implicira da je $h_1(x_0, x_1) = F$. Prema lemi 4.9, za $F \geq H_1$ slijedi da je $\xi_0 \geq 0$. Za $i \in \{1, 2, ..., N-1\}$, $\dot{x_i} = 0$ implicira da je

$$h_2(x_{i-1} - x_i) + h_1(x_i, x_{i+1}) = F. \tag{121}$$

Pretpostavimo da je $F \geq H_1 + H_2$. Tada po lemi 4.9 vrijedi, ako je $\xi_{i-1} \geq 0$, onda je i $\xi_i \geq 0$. Po indukciji dobivamo da je $\xi_{N-1} \geq 0$. Ali, $\dot{x_N} = 0$ implicira da je

$$h_2(x_{N-1}, x_N) + h(x_N) = F, \tag{122}$$

pa je,

$$F \leq H_2 + \max h_1. \tag{123}$$

Ali, ako F prelazi tu granicu, dobivamo kontradikciju. Dakle, za tako velike komponente od **F** ne postoje ravnotežne točke. □

Propozicija 4.11. *Skup funkcija* $\boldsymbol{F}$ *za koje postoji ravnotežna točka je zatvoren skup koji sadrži 0. Nadalje, ako pri djelovanju sile s vrijednostima* $\boldsymbol{F'} > 0$ *ne postoji ravnoteža, tada ne može postojati ravnoteža niti pri djelovanju sile* $\boldsymbol{F} \geq \boldsymbol{F'}$.

Dokaz. Već smo pokazali da za $\mathbf{F}$=0 postoji ravnoteža. Sve ravnotežne točke moraju biti sadržane u kompaktnom skupu C(F) (npr. skup R_K iz dokaza propozicije 4.1, uz $K = |\mathbf{F}| + \epsilon$). Ako je $\mathbf{F}^j$,$j \in \mathbb{N}$, niz sila $\mathbf{F}$ takvih da postoji ravnoteža x^j i $\mathbf{F}^j \to \mathbf{F}^\infty$ kad $j \to \infty$, onda je niz ravnoteža x^j sadržan u kompatnom skupu, pa sadrži graničnu točku x^∞. Zbog neprekidnosti od ∇W u odnosu na x i $\mathbf{F}$, x^∞ je ravnoteža za $\mathbf{F}^\infty$.
Ako za $\mathbf{F'} > 0$ ne postoji niti jedna ravnoteža, onda postoji perodična orbita u' za koju vrijedi $\dot{u}' > 0$. Uzmimo sada bilo koju $\mathbf{F} > \mathbf{F'}$ i usporedimo orbitu u(t) iz početnog uvjeta $u(0) = u'(0)$ sa u'(t). Sličan argument kao u dokazu monotonosti, daje $u(t) \geq u'(t)$. Dokaz možete naći u članku [2]. Neka je $u_\lambda(t)$ rješenje iz početnog uvjeta u'(0) sa silom $(1 - \lambda)\mathbf{F'} + \lambda\mathbf{F}$ i promotrimo $\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda(t)}$.
Dakle, u(t) prelazi x+m, pa ne postoji niti jedna ravnoteža. □

Dakle, kad su sve komponente od $\mathbf{F}$ jednake F, postoji sila $F_d \geq 0$ takva da za sve $F \in [0, F_d]$ postoji ravnoteža, a za sve sile $F > F_d$ postoji periodična orbita.

4.3 Primjene

Opisana dinamika može se primjeniti u različitim područjima. Ovdje ćemo ukratko opisati primjenu u fizici i biologiji.

Primjer 4.12. ***Josephsonov učinak***
Strujni krug sa svojstvom supravodljivosti (bez električnog otpora), prikazan na slici 5, sastoji se od dvije paralelne supravodljive žice sa Josephsonovim spojevima koje ćemo označiti sa j. Model se sastoji se od dva supravodiča između kojih se nalazi vrlo tanka izolatorska barijera (Josephsonov spoj). Josephson je teorijski pokazao da, ako nije prevelika, supravodljiva struja može bez otpora protjecatu kroz tu barijeru. Taj učinak nazivamo tuneliranje. Varijable φ_j *opisuju razlike u fazama između Josephsonovih spojeva. Jednadžba koja opisuje njihovo kretanje kroz vrijeme je*

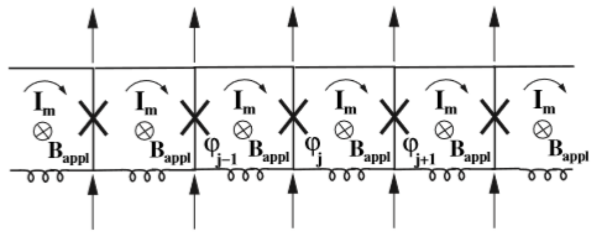
$$\ddot{\varphi}_j + \mu\dot{\varphi}_j + \sin(\varphi_j) = \lambda(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j - \varphi_{j-1}) + F, \tag{124}$$

gdje je F *vanjsko elektromagnetsko polje.*

Za dovoljno veliki μ, *inercijalni efekti su zanemarivi te aproksimiramo dinamiku sustavom jednadžbi*

$$\dot{\varphi}_j + \sin(\varphi_j) = \lambda(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j - \varphi_{j-1}) + F, \tag{125}$$

što je ekvivalentno promatranom teorijskom Frenkel-Kontorovinom modelu. Time teorijski rezultati za Frenkel-Kontovorin model dobro opisuju efekt tuneliranja, te su ta predviđanja potvrđena eksperimentalno u knjizi [7].



Slika 5: *Paralelni spoj više Josephsonovih spojeva*

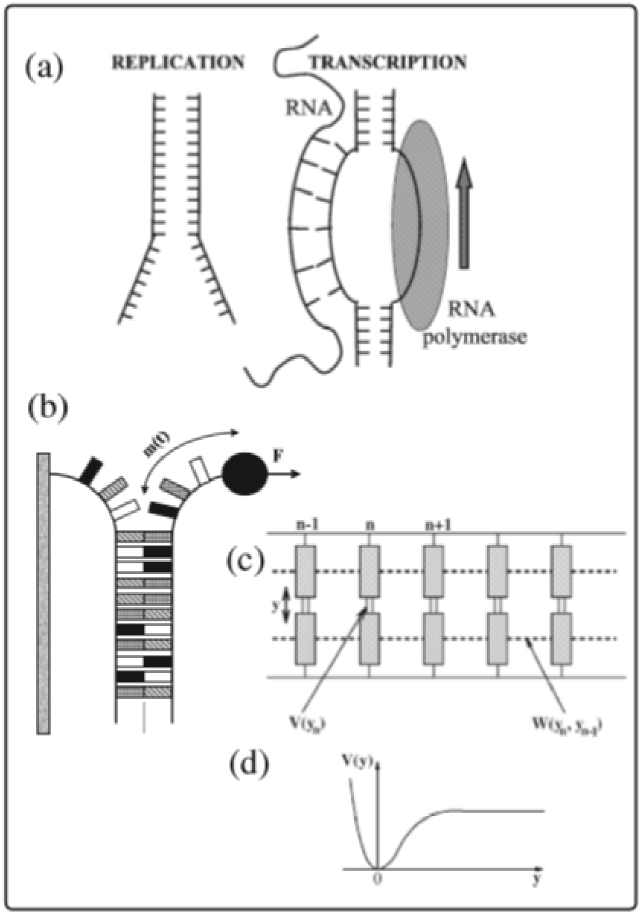
Primjer 4.13. ***Odvajanje lanaca DNK***
Replikacija i transkripcija dvije su osnovne funkcije koje obavlja DNK molekula u živim stanicama. Te funkcije zahtjevaju odvajanje parova baza(A-T,G-C), kao što je nacrtano na slici 6. Motivirani mogućom ulogom otvaranja mjehurića (mjesta početka replikacije) u termalnoj denaturaciji (odvajanje lanaca pod viskom temperaturom) dvolančane DNK, model Peyrard-Bishop-Dauxois, PBD, pokušava definirati energiju koja upravlja rasparivanje tih baza.
Varijabla y_j označava udaljenost j-tog para baza, pa kad se baze odvoje y postaje velik. Prema intermolekularnoj potencijalnoj teoriji, potencijalna energija koja je prisutna pri odvajanju lanaca DNK jednaka je

$$V(y) = D(e^{-ay} - 1)^2 \tag{126}$$

Potencijalna energija spajanja uzastopnih baza preko dvostruke šećerne okosnice, unutar jednog lanca, dana je s

$$W(y_j, y_{j+1}) = \frac{1}{2}C(y_{j+1} - y_j)^2(1 + \rho e^{\alpha(y_{j+1} - y_j)}) \tag{127}$$

PBD model je generalizirani Frenkel-Kontorovin model za elastično-plastična svojstva razdvajanja DNA. Treba primjetiti da prava DNK u stanicama živih bića nema svojstvo periodične simetrije. Taj nedostatak homogenosti je ključan za opis mnogih fenomena opaženih kod DNK molekula živih bića.
Neke zanimljive eksperimenate o odvajanju lanaca DNK možete naći u knjizi [9].



Slika 6: *(a) shematski prikaz replikacije i transkripcije DNK. (b) Odvajanje DNK u tim procesima prikazano je djelovanjem stalne sile, prema PBD modelu. (c) U PBD modelu na slici potencijal* $V(y_j)$ *predstavlja potencijalnu energiju između dva nukleotida (A-T ili G-C), a* $W(y_j,y_{j+1})$ *označava energiju između susjednih parova* j *i* $j+1$*. (d) oblik potencijala* $V(y)$ *danog pomoću jednadžbe (125)*

Literatura

[1] Hal L. Smith, *Monotone Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1995.

[2] C. Baesens, R.S. MacKay , *Gradient Dynamics of tilted Frenkel-Kontorova model*, Nonlinearity 11, 1998.

[3] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1927.

[4] J.P. LaSalle, *An invariance principle in the theory of stability*, Academic Press, 1967.

[5] O.M. Braun, Y.S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova*, Springer, 2004.

[6] A. A. Middleton, *Asymptotic uniqueness of the sliding state for charge-density waves*, Physical Review Letters 68(5), 1992.

[7] X. Chen, *Existence, uniqueness, and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Dierential Equations 2 no. 1, 1997.

[8] J.R. Chazottes, B. Fernandez, *Dynamics of Couplem Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*, Springer, 2004.

[9] P. Goel, B. Ermentrout, *Synchrony, stability, and ring patterns in pulse-coupled oscillators*, Journal Physica D (Volume 163, Issue 3), 2002.

[10] J.K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Krieger, 1980.

[11] E.J. McShane, *Extension of range of functions*, Bulletin of American Mathematical Society, 1934

Sažetak

U ovom radu bavili smo se svojstvima monotonih dinamičkih sustava te smo se posebno fokusirali na Frenkel-Kontorovin model.
Dinamiku nekog modela opisujemo sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi. Monoton dinamički sustav je dinamički sustav na metričkom prostoru koji čuva uređaj, odnosno, ako početna stanja zadovoljavaju neki uređaj, onda i sva buduća stanja zadovoljavaju taj uređaj. Kažemo da sustav običnih diferencijalnih jednadžbi generira polutok. Proučavali smo uvjete konvergencije tako definiranog polutoka i svojstva omega graničnog skupa.
Nadalje, definirali smo kooperativne i kompetitivne diferencijalne jednadžbe. Kažemo da je sustav običnih diferencijalnih jednadžbi kooperativan ako generira monoton polutok unaprijed (u smjeru budućeg vremena), odnosno, da je kompetitavan ako generira monoton tog unazad (u smjeru prošlog vremena).
U zadnjem poglavlju fokusirali smo se na glavnu temu ovog rada, Frenkel-Kontorovin model. To je model koji opisuje dinamiku lanca čestica. Pri tome postoji međudjelovanje svake čestice sa najbližim susjedom u prisutnosti vanjskog periodičnog potencijala. Dodatno, na taj model djelovali smo vanjskom silom **F**. Zaključili smo da za **F**=0 uvijek postoji ravnotežna točka. S druge strane, sigurno možemo naći dovoljno veliku silu **F** takvu da neće postojati niti jedna točka ravnoteže. Frenkel-Kontorovin model ima mnoge praktične primjene i u ovom smo radu naveli dvije od njih.

Summary

In this paper we discussed properties of monotone dynamical systems with a special focus on the Frenkel-Kontorova Model.
We modeled dynamics of a model by the system of ordinary differential equations. A monotone dynamical system is a dynamical system on a metric space which has a property that ordered initial states lead to ordered subsequent states.
We say that a system of ordinary differential equations generates the semiflow. We studied convergence criteria of the semiflow and some properties of the omega limit set.
Furthemore, we defined competitive and cooperative differential equations. We say that the system of ordinary differential equations is cooperative if it generates a monotone semiflow in the forward time direction and competitive if it generates monotone semiflow in the backward time direction.
In the last chapter we focused on the main topic of this master thesis, the Frenkel-Kontorova Model. That is a model which describes the dynamics of a chain of particles interacting with the nearest neighbors in the presence of an external periodic potential. In addition, we applied an external force to the system. We concluded that when $\mathbf{F} = 0$, there always exists an equilibrium for this model. On the other hand, we also proved that we can find a force $\mathbf{F}$ large enough so that there are no equilibria.
Practical applications of Frenkel-Kontorova model are numerous and we described two of them in this thesis.

Životopis

Tena Gregurić rođena je 7. prosinca 1992. godine u Zagrebu. Završava osnovnu školu Petra Zrinskog te potom i XV. gimnaziju u Zagrebu. Godine 2011. upisuje matematiku na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Akademsku godinu 2013./2014. upisuje u Njemačkoj, na sveučilištu Universität Bielefeld, u sklopu Erasmus studentske razmjene. Preddiplomski studij Matematike završava 2014. te tako stječe naziv bacc. univ. math. Iste godine upisuje diplomski studij, smjer Financijska i poslovna matematika.