Višefaktorska analiza varijance ponovljenih mjerenja

Molnar, Nikolina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Molnar

VIŠEFAKTORSKA ANALIZA VARIJANCE PONOVLJENIH MJERENJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Anamarija Jaz-
bec

Zagreb, srpanj, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Statistika je grana matematike koja obuhvaća sakupljanje, analizu, interpretaciju i prezentaciju podataka te izradu predviđanja koja se temelje na tim podacima. Jedna od vrlo poznatih statističkih metoda analize je Analiza varijance (ANOVA - eng. Analysis of variance) koja će se obraditi u ovome radu te će se posebna pozornost posvetiti njezinoj generalizaciji, višefaktorskoj analizi varijance ponovljenih mjerenja. ANOVA-u je prvi razvio i dao joj ime poznati engleski statističar Ronald A. Fisher 1918. godine te se koristi u situacijama kada želimo uspoređivati parametre očekivanja više normalno distribuiranih populacija.

Za razliku od t-testa koji također testira razliku između dvije aritmetičke sredine, ANOVA nije ograničena brojem sredina koje treba usporediti, te je tako moguće uspoređivati 3, 4, 5...ili n aritmetičkih sredina. Također, moguće je ispitivati utjecaj dvije ili više nezavisnih varijabli u isto vrijeme, te tako vidjeti ne samo utječe li svaka od njih zasebno na zavisnu varijablu, već postoji li i njihov interakcijski učinak.

U prvom dijelu uvest će se osnovni statistički pojmovi potrebni za daljnji rad, te će se obraditi Studentov t-test za zavisne uzorke koji je nužan zbog lakšeg shvaćanja ANOVA-a ponovljenih mjerenja. U nastavku će se doći do modela ANOVA-e. Pored uvođenja primarnih pojmova za razumijevanje analize varijance biti će govora i o jednofaktorskome i o višefaktorskome modelu; postavljanju hipoteza i testiranju istih te testiranju hipoteza o adekvatnosti modela. Nakon toga će se model analize varijance dograditi dodavanjem ponovljenih mjerenja kao faktor koristeći već gore stečena znanja. Na taj način će se obraditi glavni model i tema ovoga rada, višefaktorska analiza varijance ponovljenih mjerenja.

Metode će se ilustrirati kroz primjere riješene pomoću programskoga sustava SAS. Ispis iz SAS-a bit će povezan s pojmovima iz poglavlja, a rezultati će se se interpretirati.

Poglavlje 1

Testiranje statističkih hipoteza o jednakosti sredina

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Neka Ω predstavlja skup elementarnih događaja.

Definicija 1.1.1. *Uređena trojka* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$*, gdje je* $\mathscr{F}$ $\sigma-$*algebra na* Ω *i* P *vjerojatnost na* $\mathscr{F}$*, naziva se vjerojatnosni prostor.*

Ako je Ω prebrojiv ili konačan skup elementarnih događaja onda uređenu trojku $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ zovemo diskretni vjerojatnosni prostor, a ako slučajna varijabla odnosno veličina koja se mjeri u vezi s nekim slučajnim pokusom primi sve realne vrijednosti ili sve realne vrijednosti iz nekog intervala onda imamo opći vjerojatnosni prostor.

Definirat ćemo slučajnu varijablu na općem vjerojatnosnom prostoru. Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Sa $\mathscr{B}$ označimo σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. $\mathscr{B}$ zovemo σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}$, a elemente σ-algebre $\mathscr{B}$ zovemo Borelovi skupovi. Iz definicije slijedi (vidi [5], poglavlje 8) da je svaki otvoreni, zatvoreni, poluotvoreni ili poluzatvoreni interval Borelov skup. Slijedi da su neograničeni intervali, jednočlani skupovi, prebrojivi podskupovi, skup svih racionalnih i skup svih iracionalnih brojeva također Borelovi skupovi. Može se ipak dokazati da postoje skupovi na $\mathbb{R}$ koji nisu Borelovi. Dakle, $\mathscr{B} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Definicija 1.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest slučajna varijabla (na* Ω*) ako je* $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ *za proizvoljno* $B \in \mathscr{B}$*, tj.* $X^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$.

Definicija 1.1.3. *Neka su* $X_1, \ldots, X_n$ *slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

kažemo da su $X_1, \dots, X_n$ *nezavisne ako za proizvoljne* $B_i \in \mathscr{B}$ $(i = 1, \dots, n)$ *vrijedi*

$$P\{X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}. \tag{1.1}$$

Jedan od osnovnih pojmova u teoriji vjerojatnosti jest pojam funkcije distribucije slučajne varijable.

Definicija 1.1.4. *Neka je X slučajna varijabla na* Ω. *Funkcija distribucije od X jest funkcija* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definirana sa*

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Koristit ćemo oznaku $F_x = F$, ako je jasno o kojoj se slučajnoj varijabli odnosno njenoj funkciji distribucije radi. Usko uz pojam funkcije distribucije vezan je i pojam funkcije gustoće.

Definicija 1.1.5. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *i neka je* F_x *njezina funkcija distribucije. Kažemo da je X apsolutno neprekidna, ili, kraće, neprekidna slučajna varijabla ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija* f *na* $\mathbb{R}$ *(*$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*) takva da je*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) d\lambda(t), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Integral u (1.3) je Lebesgueov integral funkcije f u odnosnu na Lebesgueovu mjeru λ. Za funkciju distribucije F_x neprekidne slučajne varijable X, dakle za funkciju oblika (1.3) kažemo da je apsolutno neprekidna funkcija distribucije.

Ako je X neprekidna slučajna varijabla, tada se funkcija f iz (1.3) zove *funkcija gustoće vjerojatnosti od* X, tj. od njezine funkcije distribucije F_x ili, kraće, gustoća od X. Iz (1.3). i poglavlja 9.2. iz [5] slijedi da ako znamo gustoću neprekidne slučajne varijable X, znamo vjerojatnosti svih događaja koji su u vezi s tom slučajnom varijablom. Također slijedi da je funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X u potpunosti određena njezinom gustoćom.
Definirajmo distribucije koje ćemo kasnije koristiti.

Normalna distribucija
Neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Neprekidna slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako joj je gustoća f dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

To ćemo označavati $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

X ima jediničnu normlnu distribuciju ako je $X \sim N(0, 1)$, dakle

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Studentova distribucija
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neprekidna slučajna varijabla X ima Studentovu t-distribuciju sa n stupnjeva slobode ako joj je gustoća f dana sa

$$f(x) = \frac{1}{n\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

gdje je Γ gama funkcija. Danu distribucija označavamo $X \sim t(n)$.

Dalje uvodimo pojam očekivanja i varijance za neprekidnu slučajnu varijablu X u oznaci $\mathbb{E}X$ i $VarX$.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_x. Tada je s

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) d\lambda(x) \tag{1.7}$$

dana formula za računanje očekivanja slučajne varijable X, a s

$$VarX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_x(x) d\lambda(x) \tag{1.8}$$

je dana formula za računanje varijance slučajne varijable X. Pozitivan drugi korijen iz varijance zovemo standardna devijacija od X i označavamo sa σ_x.

Definirat ćemo slučajan uzorak te osnovne statistike uzorka.

Definicija 1.1.6. *Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je X slučajna varijabla na Ω s funkcijom distribucije F. Kažemo da $X_1, X_2, \ldots, X_n$ čine slučajan uzorak duljine n iz populacije s funkcijom distribucije F ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom distribucije F.*

Ako funkcija F ima gustoću f , tj. ako je X neprekidna ili diskretna slučajna varijabla s gustoćom f , kažemo da je uzorak uzet iz gustoće f. Intuitivno slučajan uzorak duljine n odgovara nizu od n nezavisnih mjerenja slučajnog svojstva nekog statističkog skupa (populacije), i to slučajnog svojstva koje se opisuje slučajnom varijablom X.

Definicija 1.1.7. *Neka je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ slučajan uzorak iz funkcije distribucije F i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Slučajnu varijablu $T = g(X)$ zovemo statistika.*

U primjenama se najčešće promatraju sljedeće dvije statistike:

$$\overline{X} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1.9}$$

koju zovemo aritmetička sredina ili očekivanje uzorka i

$$S^2 = S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2, \qquad (n > 1), \tag{1.10}$$

koju zovemo varijanca uzorka.

Definicija očekivanja uzorka i *Propozicija* 11.4 iz [5] sugeriraju da očekivanje uzorka može poslužiti kao "dobra" procjena za očekivanje populacije, ako je to očekivanje nepoznato.

1.2 Testiranje statističkih hipoteza

Mnoge praktične situacije u vezi sa slučajnim pojavama zahtijevaju donošenje odluke tipa DA ili NE. Npr. pri praćenju procesa proizvodnje nekog proizvoda treba, na temelju rezultata mjerenja $x_1, \ldots, x_n$ statističkog obilježja X, donijeti odluku o tome da li proces proizvodnje osigurava ili ne osigurava zahtjevanu kvalitetu. Pretpostavlja se, dakako, da je obilježje X, koje karakterizira kvalitetu pojedinog proizvoda (količina odredenog sastojka npr.) slučajnog karaktera. Teorijski gledano, riječ je o tome da se na temelju n mjerenja slučajne varijable X, odnosno na temelju vrijednosti $(x_1, \ldots, x_n)$ slučajnog uzorka $(X_1, \ldots, X_n)$, donese odluka o prihvaćanju ili odbacivanju određene pretpostavke o svojstvima slučajne varijable X. Takva pretpostavka zove se statistička hipoteza, a postupak donošenja odluke o prihvaćanju ili odbacivanju statističke hipoteze zove se testiranje.

Svaki postupak testiranja polazi od nulte hipoteze i alternativne hipoteze. Sadržaj alternativne hipoteze uvijek proturiječi sadržaju nulte hipoteze. Prilikom donošenja odluke o istinitosti hipoteze, postoji mogućnost pogreške, tj. krive odluke. Dvije su vrste mogućih pogrešaka:

- pogreška 1. vrste: odbacili smo nultu hipotezu ako je ona istinita
- pogreška 2. vrste: prihvatili smo nultu hipotezu ako je ona neistinita

Testiranja hipoteza baziraju se na odgovarajućim pouzdanim intervalima. Ako izračunata vrijednost odgovarajuće test-statistike upadne u pouzdan interval tražene pouzdanosti, tada

	H_0 istinita	H_0 neistinita
prihvaćamo H_0	✓	pogreška 2.vrste
ne prihvaćamo H_0	pogreška 1.vrste	✓

Tablica 1.1: Vrste mogućih pogrešaka

nultu hipotezu ne odbacujemo; ukoliko ona ne upadne u isti interval, nultu hipotezu odbacujemo.

1.3 T-test za zavisne uzorke

T-test je statistički postupak za testiranje značajnosti razlike između dva uzorka. Zavisni uzorci su uobičajeni primjer mjerenja "prije–poslije" kod provjeravanja djelovanja neke terapije ili postupka, odgojnog, obrazovnog, medicinskog, terapeutskog itd. na istoj skupini ljudi.

Hipoteze koje testiramo uključuju novu varijablu d koja se temelji na razlici parova vrijednosti dva skupa podataka

$$d = x_1 - x_2,$$

gdje su x_1 vrijednosti iz prvog skupa podataka, a x_2 vrijednosti iz drugog skupa.
Testiramo sljedeće hipoteze

$$\begin{array}{lll} H_0 : \mu_d = D & H_0 : \mu_d \geq D & H_0 : \mu_d \leq D \\ H_1 : \mu_d \neq D & H_1 : \mu_d < D & H_1 : \mu_d > D \end{array}$$

gdje je D neka pretpostavljena vrijednost i najčešće je $D = 0$.

Postupak za male zavisne uzorke naziva se još 'metoda diferencije'. Temelji se na utvrđivanju prosječne razlike između prvog i drugog mjerenja, te se onda promatra koliko je svaka pojedina razlika udaljena od prosječne razlike.

Testna statistika je oblika

$$T = \frac{\overline{X}_d}{S_d/\sqrt{n}} \tag{1.11}$$

sa $n - 1$ stupnjeva slobode, n je ukupan broj sudionika u mjerenju. $\overline{X}_d$ predstavlja aritmetičku sredinu, a S_d standardnu devijaciju razlike između prvog i drugog mjerenja. Nultu hipotezu odbacujemo ukoliko je

$$T < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \qquad \text{ili} \qquad T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

gdje su $t_{\frac{\alpha}{2}}$ i $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ granice kritičnog područja.

1.4 Primjer

SAS

Programski sustav SAS (Statistical Analysis System) je modularni, integrirani aplikacijski sustav koji na jednostavan i fleksibilan način omogućuje kako elementarnu, tako i sofisticiranu analizu podataka uporabom "point and click" tehnike rada preko grafičkih korisničkih sučelja (Grafical User Interface -GUI), gotovih programa - SAS procedura, ili programiranjem. Glavna područja primjene programskog sustava SAS su rukovanje, deskriptivna i grafička analiza podataka; statistička analiza i podrška u odlučivanju, prezentacija rezultata i razvoj aplikacija. Prednost SAS-a je da ima jednaku sintaksu i jednako sučelje na mikroračunalima, miniračunalima i velikim računalima te se SAS programi mogu izvoditi bez ikakve promjene koda programa interaktivno, te u batch modu.

Programski sustav SAS je nastao 1966. godine u SAD-u za potrebe poljoprivrednih istraživanja na sveučilištu North Carolina. Tvorci sustava su Jim Goodnight i John Sall.

Primjer

Na 10 ispitanika izvršeno je mjerenje sedimentacije krvi prije i poslije primjene antibiotika. Dobiveni rezultati dani su u tablici 1.2 [1].

Ispitanici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prije	18	20	21	25	16	18	14	11	15	15
Poslije	5	13	8	10	6	12	6	8	7	8

Tablica 1.2: Primjer-rezultati mjerenja sedimentacije krvi

Kod i interpretacija

```
proc univariate data=sedimentacija normal;
    var prije poslije;
run;

proc ttest data=sedimentacija;
    paired prije*poslije;
run;
```

[1] Podaci su preuzeti iz [4]

Prvo smo provjeravali normalnost uzoraka sa procedurom *univariate* koja nam daje testove za normalnost koji nam ne odbacuju H_0 za mjerenja prije i poslije primjene antibiotika (tablica 1.3). Procedura *ttest* nam testira jednakost sredina, a naredbom *paired* kažemo da imamo zavisne uzorke.

Osim testova normalnosti procedura *univariate* nam daje i deskriptivnu statistiku za oba mjerenja u tablicama 1.3. Sredina za mjerenje prije primjene antibiotika nam je 17.3 sa standardnom devijacijom 4.00, a za mjerenje poslije 8.3 sa standardnom devijacijom 2.63.

The UNIVARIATE Procedure
Variable: prije

Moments			
N	10	Sum Weights	10
Mean	17.3	Sum Observations	173
Std Deviation	4.00138865	Variance	16.0111111
Skewness	0.46618098	Kurtosis	0.35096947
Uncorrected SS	3137	Corrected SS	144.1
Coeff Variation	23.1294141	Std Error Mean	1.26535019

Tests for Normality				
Test	Statistic		p Value	
Shapiro-Wilk	W	0.975317	Pr < W	0.9353
Kolmogorov-Smirnov	D	0.130564	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.031125	Pr > W-Sq	>0.2500
Anderson-Darling	A-Sq	0.19926	Pr > A-Sq	>0.2500

The UNIVARIATE Procedure
Variable: poslije

Moments			
N	10	Sum Weights	10
Mean	8.3	Sum Observations	83
Std Deviation	2.62678511	Variance	6.9
Skewness	0.74207645	Kurtosis	-0.3914744
Uncorrected SS	751	Corrected SS	62.1
Coeff Variation	31.6480133	Std Error Mean	0.83066239

Tests for Normality				
Test	Statistic		p Value	
Shapiro-Wilk	W	0.916389	Pr < W	0.3278
Kolmogorov-Smirnov	D	0.245464	Pr > D	0.0863
Cramer-von Mises	W-Sq	0.070617	Pr > W-Sq	0.2491
Anderson-Darling	A-Sq	0.405898	Pr > A-Sq	>0.2500

Tablica 1.3: T-test: Deskriptivna statistika-Ispis iz SAS-a

U tablici 1.4 imamo rezultate t-testa, te deskriptivne statistike (srednja vrijednost, standardna devijacija, standardna pogreška, minimum i maksimum) za razliku između mjerenja 'prije' i 'poslije', sa pripadnim intervalima pouzdanosti za srednju vrijednost i standardnu devijaciju. Testna statistika nam je 7.67, a p-vrijednost je manja od 0.001, pa prema tome odbacujemo nultu hipotezu, tj. sedimentacija krvi značajno je manja nakon primjene antibiotika.

The TTEST Procedure

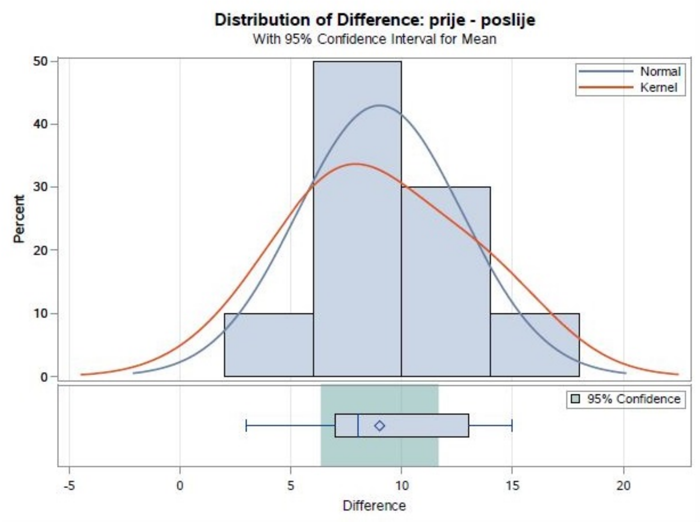
Difference: prije - poslije

N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
10	9.0000	3.7118	1.1738	3.0000	15.0000

Mean	95% CL Mean		Std Dev	95% CL Std Dev	
9.0000	6.3447	11.6553	3.7118	2.5531	6.7764

DF	t Value	Pr > |t|
9	7.67	<.0001

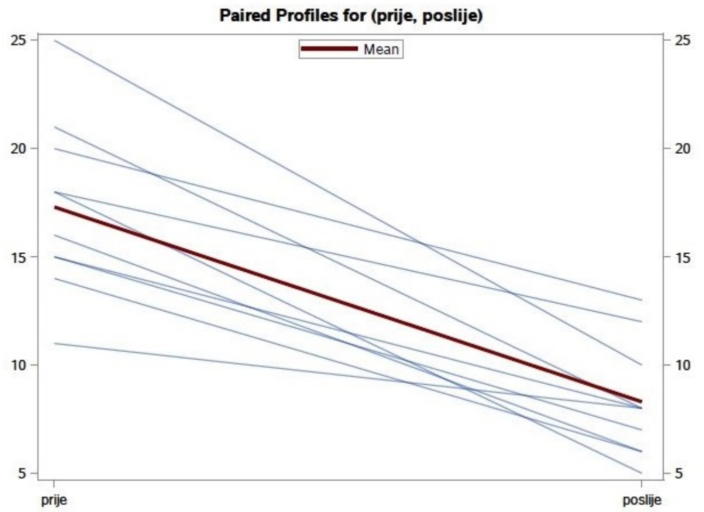
Tablica 1.4: T-test: Rezultati-Ispis iz SAS-a



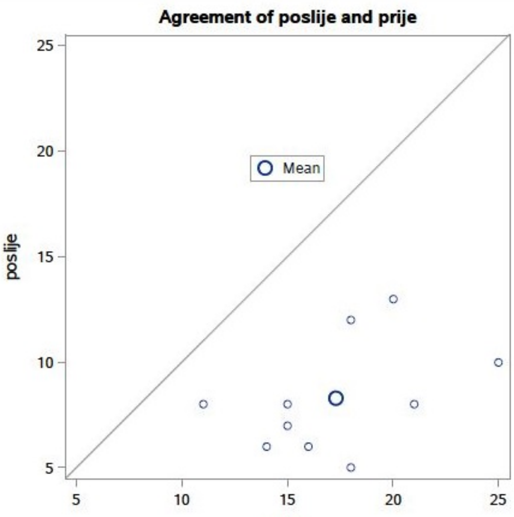
Slika 1.1: Histogram-Ispis iz SAS-a

Na slici 1.1 imamo histogram, krivulju normalne i kernelove gustoće, te box-plot i $100(1-\alpha)\%= 95\%$ interval pouzdanosti razlike "prije-poslije".

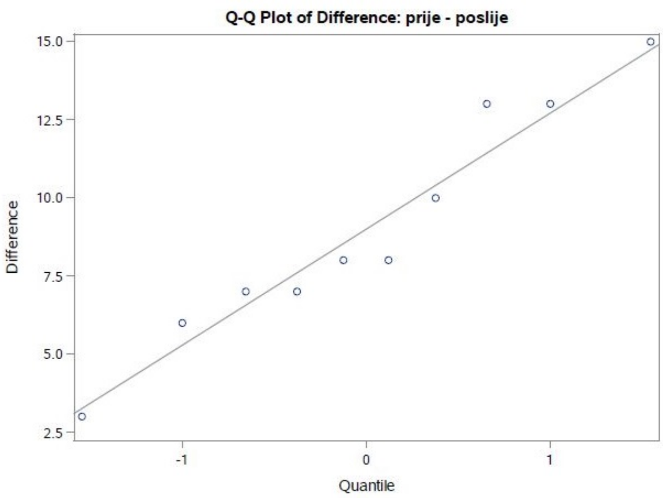
Grafovi 1.2 i 1.3 nam pokazuju vrijednosti sedimentacije prije i poslije uzimanja antibiotika, te vidimo da su svi ispitanici imali veće vrijednosti sedimentacije prije uzimanja. Dok nam graf 1.4 prikazuje Q-Q-plot na kojem vidimo da nam točke relativno dobro aproksimiraju pravac što znači da su nam podaci razlike "prije-poslije" normalno distribuirani.



Slika 1.2: Grafički prikaz razlike "prije-poslije"-Ispis iz SAS-a



Slika 1.3: Grafički prikaz usporedbe rezultata-Ispis iz SAS-a



Slika 1.4: Q-Q plot-Ispis iz SAS-a

Poglavlje 2

ANOVA

2.1 Uvod

T-test je primjenjiv isključivo kada imamo dva uzorka. Međutim često u istraživanjima imamo više uzoraka. Analiza varijance je test koji se primjenjuje u takvim slučajevima.

Primjena analize varijance bit će moguća ako je mjerena varijabla normalno distribuirana i ako su varijance svih promatranih uzoraka jednake. Ideja ANOVA-e sastoji se u razdvajanju varijabilnosti mjerenog varijancom na dva dijela: na varijabilnost među ispitanicima koji pripadaju različitim grupama odnosno uzorcima (engl. between-group variation) i varijabilnost među ispitanicima unutar svake pojedine grupe odnosno uzorka (engl. within-group variation). Ovaj drugi dio varijabilnosti često se naziva neobjašnjenom ili rezidualnom varijabilnošću.

Klasične pretpostavke za valjano testiranje hipoteza su:

- **Nezavisnost uzoraka** - znači da ako znamo kako tretman utječe na jedno opažanje, odnosno kako varira oko aritmetičke sredine tretmana, to nam ništa ne govori o tome kako utječe na drugo

- **Homogenost varijance** - osnovna je pretpostavka da populacije koje su uzete u istraživanje imaju jednake varijance. Ako je to tako, uzorci bi trebali imati podjednake varijance

- **Normalnost distribucije** - potrebno je da populacija iz koje se izabire uzorak bude normalno distribuirana po svojstvu koje mjerimo, jer će samim time pogreška tj. error varijanca biti normalno distribuirana unutar uvjeta.

2.2 Jednofaktorska analiza varijance

Pretpostavimo da je dano m $(m \geq 2)$ nizova podataka

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_{11}, & \dots, & y_{1n_1} \\ y_{21}, & \dots, & y_{2n_2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_{m1}, & \dots, & y_{mn_m} \end{array} \right. \qquad n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

i da je i-ti $(i = 1, ..., m)$ niz dobiven mjerenjem slučajne varijable $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, te da su $Y_1, ..., Y_m$ nezavisne slučajne varijable. y_{ij} $(i = 1, ..., m, j = 1, ..., n_i)$ se može interpretirati kao vrijednost slučajne varijable

$$Y_{ij} = \mu_i + \mathcal{E}_{ij}, \tag{2.2}$$

gdje su $\mathcal{E}_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ nezavisne slučajne varijable.

Možemo reći da je Y_{ij} izlazna slučajna varijabla, čije vrijednosti y_{ij} nastaju djelovanjem i-te razine (μ_i) određenog faktora, uz dodatak slučajne greške $(\mathcal{E}_{ij})$. Djelujući faktor (ulazna varijabla) najčešće ima numeričko obilježje.

Općenito stavljamo

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i, \tag{2.3}$$

pri čemu n_i označava broj podataka u i-tom nizu, a n ukupan broj podataka.

Glavni problem jednofaktorske analize varijance se sastoji u određivanju postupka za testiranje nul-hipoteze

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m, \tag{2.4}$$

naprema alternativnoj hipotezi da barem jedna jednakost u (2.4) nije istinita. Drugim riječima, problem se sastoji u određivanju kritičnog područja, zadane razine značajnosti, pri testiranju hipoteze o jednakosti očekivanja m nezavisnih slučajnih varijabli normalnih razdioba zajedničke nepoznate varijance σ^2, na temelju m nizova podataka (2.1)

Stavimo

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i \mu_i, \qquad \delta_i = \mu_i - \mu, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{2.5}$$

pa se uobičajeno veličina μ zove opća srednja vrijednost, dok se δ_i zove efekt i-te razine djelujućeg faktora. Sada jednadžbu (2.2) možemo zapisati u obliku

$$Y_{ij} = \mu + \delta_i + \mathcal{E}_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n_i, \tag{2.6}$$

a hipotezu H_0 iz (2.4) kao

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_m = 0. \tag{2.7}$$

Jednadžbu (2.6) možemo protumačiti tako da se izlazna vrijednost y_{ij} shvati kao zbroj opće srednje vrijednosti μ, efekta δ_i i-te razine djelujućeg faktora i vrijednosti ε_{ij} slučajne greške $\mathcal{E}_{ij}$. Hipotezom H_0, zapisanom u obliku (2.7), postavlja se teza da su efekti beznačajni.

Uvodimo sljedeće oznake da bi definirali prikladnu test-statistiku pomoću koje ćemo odrediti kritično područje zadane razine značajnosti α

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.8}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \overline{Y}_i, \tag{2.9}$$

gdje je $\overline{Y_i}$ aritmetička sredina $i-$tog niza podataka, tj. onih izlaznih varijabli na koje djeluje i-ta razina promatranog faktora, dok je $\overline{Y}$ aritmetička sredina svih izlaznih varijabli.

Nadalje, sa SST označimo sumu kvadrata zbog tretman, a sa SSE sumu kvadrata pogrešaka

$$SST = \sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{Y}_i - \overline{Y})^2, \tag{2.10}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2, \tag{2.11}$$

$$SS = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y})^2. \tag{2.12}$$

SS označava sumu kvadrata svih odstupanja od sredine i lako se provjeri da vrijedi

$$SS = SST + SSE. \tag{2.13}$$

Stavimo li

$$MST = \frac{SST}{m-1}, \qquad MSE = \frac{SSE}{n-m}, \qquad MSS = \frac{SS}{n-1}, \tag{2.14}$$

možemo reći da je MSS ukupno srednjekvadratno odstupanje, MST srednjekvadratno odstupanje zbog razlika među grupama, dok je MSE srednjekvadratno odstupanje razlika unutar grupa.

Ukoliko je hipoteza H_0 istinita onda vrijedi

$$Y_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n_i \tag{2.15}$$

$$\overline{Y}_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n_i}), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.16}$$

$$\overline{Y} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \tag{2.17}$$

pa na temelju onog što je navedeno u Ž. Pauše VI.4. [3] i iz činjenice da su SST i SSE nezavisne slučajne varijable, proizlazi

$$\frac{1}{\sigma^2} SS = \frac{n-1}{\sigma^2} MSS \sim \chi^2(n-1), \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} SST = \frac{m-1}{\sigma^2} MST \sim \chi^2(m-1), \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} SSE = \frac{n-m}{\sigma^2} MSE \sim \chi^2(n-m). \tag{2.20}$$

Primijenimo li rezultat iz točke 8. u V.6 [3], dobivamo test statistiku

$$F = \frac{MST}{MSE} \sim F(m-1, n-m). \tag{2.21}$$

Da je ta vrijednost zaista prikladna za donošenje spomenute odluke o prihvaćanju ili odbacivanju nulte hipoteze, može se zaključiti iz činjenice da je

$$\mathbb{E}[MST] = \sigma^2 + \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} n_i \delta_i^2, \qquad \mathbb{E}[MSE] = \sigma^2, \tag{2.22}$$

bez obzira na hipotezu H_0. Ako je hipoteza H_0 istinita, onda je, dakako, $\mathbb{E}[MST] = \sigma^2$ pa se može očekivati da će vrijednost test statistike F biti oko jedan,a ukoliko H_0 nije istinita možemo očekivati povećanje MST pa stoga i omjera $F = \frac{MST}{MSE}$. S većom test statistikom povećava se vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze.

Zbog boljeg pregleda i veće jasnoće problema i njegovih rezultata, uobičajeno je da se sve navedene statistike prikazuju u obliku ANOVA tablice. U tablici 2.1 prikazan je opći oblik ANOVA tablice za jednofaktorski model analize varijance.

Izvor varijabilnosti	Broj stupnjeva slobode	Sume kvadrata	Varijanca	Test statistika F	p-vrijednost
Između grupa	m-1	SST	MST	F	p
Unutar grupa	n-m	SSE	MSE		
Ukupno	n-1	SS			

Tablica 2.1: Jednofaktorska ANOVA

2.3 Višefaktorska analiza varijance

Ako nas u analizi zanima utjecaj više od jednog faktora, onda tu vrstu designa zovemo višefaktorski model. U višefaktorskoj ANOVA-i imamo dvije ili više nezavisne kategorijske varijable. Kada jednofaktorsku ANOVA-u proširujemo na višefaktorsku ANOVA-u onda u design dodajemo jednu ili više nezavisnih kategorijskih varijabli. Kod takvog modela nas osim glavnih efekata zanimaju i međusobne interakcije tih efekata.

2.3.1 Dvofaktorska analiza varijance

Dvofaktorska ANOVA je proširenje jednofaktorske ANOVA-e koja proučava utjecaj dvije različite nezavisne kategorijske varijable na jednu kontinuiranu zavisnu varijablu.

Pretpostavimo da prvi faktor A ima a razina ($a \geq 2$), a drugi faktor B ima b razina ($b \geq 2$), dok je svaki uzorak duljine l. Opći dvofaktorski model može biti zapisan u obliku

$$Y_{ijk} = \mu_{ijk} + \mathcal{E}_{ijk}, \tag{2.23}$$

$$i = 1, \ldots, a, \qquad j = 1, \ldots, b, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

gdje su $\mathcal{E}_{ijk}$ nezavisne slučajne varijable sa zajedničkom normalnom razdiobom $N(0, \sigma^2)$. Izlaznu vrijednost y_{ijk} tretiramo kao jednu od l vrijednosti u polju (i, j) tablice podataka. Smatra se, dakle, da je y_{ijk} rezultat djelovanja i-te razine prvog faktora (faktora A), j-te razine drugog faktora (faktora B), međusobne interakcije obaju faktora i slučajne greške normalne razdiobe s očekivanjem nula i varijancom σ^2. To se može izraziti tako da se stavi

$$\mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}, \tag{2.24}$$

gdje je

$$\mu = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}, \tag{2.25}$$

$$\mu_i^{'} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}, \qquad \alpha_i = \mu_i^{'} - \mu, \qquad i = 1, \ldots, a, \tag{2.26}$$

$$\mu_j^{''} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{a} \mu_{ij}, \qquad \beta_j = \mu_j^{''} - \mu, \qquad j = 1, \ldots, b, \tag{2.27}$$

pri čemu se μ može shvatiti kao opća srednja vrijednost svih opservacija, μ_i kao srednja vrijednost izlazne varijable uz fiksiranu i-tu razinu prvog faktora (faktora A), a μ_j kao srednja vrijednost izlazne varijable uz fiksiranu j-tu razinu drugog faktora (faktora B). Zato se α_i zove glavni efekt i-te razine prvog faktora, β_j glavni efekt j-te razine drugog faktora, dok se $\alpha\beta_{ij}$ zove interakcijski efekt.

Kao nul-hipoteze se prirodno nameću sljedeće hipoteze

$$H_{01} : \alpha_1 = \ldots = \alpha_a = 0, \tag{2.28}$$

$$H_{02} : \beta_1 = \ldots = \beta_b = 0, \tag{2.29}$$

$$H_{12} : \alpha\beta_{ij} = 0, \qquad za \qquad i = 1, \ldots, a, j = 1, \ldots, b, \tag{2.30}$$

pri čemu se za svaku od njih, kao alternativna hipoteza, uzima da bar na jednom mjestu ne vrijedi znak jednakosti.

Testirati hipotezu H_{01}, odnosno H_{02}, znači odgovoriti na pitanje je li utjecaj prvog, odnosno drugog, faktora na izlazne podatke značajan. Dok se testiranjem hipoteze H_{12} dobiva odgovor na pitanje da li postoji interakcija između ta dva faktora, koja uzrokuje značajne promjene na izlaznim podacima.

Glavni je problem i u ovome modelu da se definiraju prikladne test-statistike za testiranje hipoteza (2.28), (2.29) i (2.30). Ukupno rasipanje podataka, kao i u jednofaktorskom modelu, rastavljamo na komponente. U tu svrhu uvodimo statistike

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{l} Y_{ijk} \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big), \qquad n = abl, \tag{2.31}$$

$$\overline{Y}_i^{'} = \frac{1}{bl} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{l} Y_{ijk} \sim N\Big(\mu + \alpha_i, \frac{\sigma^2}{bl}\Big), \qquad i =, 1, \ldots, a, \tag{2.32}$$

$$\overline{Y}_j^{''} = \frac{1}{al} \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{l} Y_{ijk} \sim N\Big(\mu + \beta_j, \frac{\sigma^2}{al}\Big), \qquad j =, 1, \ldots, b, \tag{2.33}$$

$$\overline{Y}_{ij} = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} Y_{ijk} \sim N\Big(\mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}, \frac{\sigma^2}{l}\Big), \qquad i =, 1, \dots, a, \qquad j =, 1, \dots, b, \tag{2.34}$$

$$SS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{l}(Y_{ijk} - \overline{Y})^2, \tag{2.35}$$

$$SSA = bl\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_i^{'} - \overline{Y})^2, \tag{2.36}$$

$$SSB = al\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_j^{''} - \overline{Y})^2, \tag{2.37}$$

$$SSAB = l\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{ij} - \overline{Y}_i^{'} - \overline{Y}_j^{''} + \overline{Y})^2, \tag{2.38}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{l}(Y_{ijk} - Y_{ij})^2. \tag{2.39}$$

Definirane veličine možemo interpretirati ovako:
$\overline{Y}$ - aritmetička sredina svih mjerenja,
$\overline{Y}_i^{'}$ - aritmetička sredina svih mjerenja iz i-tog retka,
$\overline{Y}_j^{''}$ - aritmetička sredina svih mjerenja iz j-tog stupca,
$\overline{Y}_{ij}$ - aritmetička sredina svih mjerenja iz (i, j)-tog polja,
SS - zbroj kvadrata odstupanja svih mjerenja od njihove aritmetičke sredine,
SSA - zbroj kvadrata odstupanja sredina redaka od zajedničke sredine,
SSB - zbroj kvadrata odstupanja sredina stupaca od zajedničke sredine,
SSAB - interakcijski zbroj kvadrata,
SSE - zbroj kvadrata odstupanja mjerenja od odgovarajućih sredina u polju.

Ukupan izvor varijabilnosti smo rastavili na sljedeći način:

$$SS = SSA + SSB + SSAB + SSE. \tag{2.40}$$

Također se pokazuje da su

$$MSA = \frac{1}{a-1}SSA, \tag{2.41}$$

$$MSB = \frac{1}{b-1}SSB, \tag{2.42}$$

$$MSAB = \frac{1}{(a-1)(b-1)} SSAB \tag{2.43}$$

nepristrani procjenitelji za nepoznati parametar σ^2 samo ako su redom hipoteze (2.28), (2.29) i (2.30) stvarno istinite.

Dok je

$$MSE = \frac{1}{ab(l-1)} SSE \tag{2.44}$$

nepristrani procjenitelji za σ^2 bez obzira na istinitost hipoteza (2.28), (2.29) i (2.30).

Ako su navedene hipoteze neistinite, onda se mogu očekivati veće vrijednosti statistika MSA, MSB i MSAB u odnosu na stvarne istinitosti navedenih hipoteza.

Za hipotezu da utjecaj prvog faktora nije značajan, H_{01} test statistika je

$$F_1 = \frac{MSA}{MSE} \sim F(a-1, ab(l-1)). \tag{2.45}$$

Za hipotezu da utjecaj drugog faktora nije značajan, H_{02} test statistika je

$$F_2 = \frac{MSB}{MSE} \sim F(b-1, ab(l-1)). \tag{2.46}$$

Za hipotezu da utjecaj interakcije nije značajan, H_{12} test statistika je

$$F_{12} = \frac{MSAB}{MSE} \sim F((a-1)(b-1), ab(l-1)). \tag{2.47}$$

Izvor rasipanja	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Varijanca	Test statistika F
Faktor A	SSA	$a-1$	MSA	$F_1 = \frac{MSA}{MSE}$
Faktor B	SSB	$b-1$	MSB	$F_2 = \frac{MSB}{MSE}$
$A \times B$	$SSAB$	$(a-1)(b-1)$	$MSAB$	$F_{12} = \frac{MSAB}{MSE}$
Greška	SSE	$ab(l-1)$	MSE	
Ukupno	SS	$N-1 = abl-1$		

Tablica 2.2: Dvofaktorska ANOVA

Ukoliko je vrijednost navedenih statistika mnogo veća od jedinice, to nas upućuje na odbacivanje hipoteze H_{01}, odnosno H_{02}, odnosno H_{12}.

Slično kao u jednofaktorskom modelu, u tablici 2.2 prikazan je opći oblik ANOVA-tablice za dvofaktorski model analize varijance.

Ukupna značajnost modela

Osim testiranja hipoteza koje smo gore obradili ostaje nam pitanje značajnosti cjelokupnog modela odnosno sljedeće hipoteze:

$$H_{00} = \mu_{11} = \mu_{12} = \ldots = \mu_{1b} = \mu_{21} = \ldots = \mu_{2b} \ldots = \mu_{a1} = \ldots = \mu_{ab} \tag{2.48}$$

kojom testiramo da su sve sredine po svakom faktoru jednake. Ukoliko se pokaže da ona nije značajna odnosno da razlika među sredinama nije značajna tada niti ne trebamo testirati druge hipoteze. Ukoliko je značajna testiramo kako bismo vidjeli gdje je ta varijabilnost odnosno koji faktor čini tu razliku značajnom. Suma kvadrata je jednaka

$$SSM = SSA + SSB + SSAB \tag{2.49}$$

odnosno zbroju sume kvadrata faktora A, B i njihove interakcije. Korigirana varijanca je jednaka

$$MSM = \frac{SSM}{ab - 1}. \tag{2.50}$$

Tada je test statistika kao i prije jednaka omjeru odgovarajućih varijanci te uz istinitost H_{00} ima distribuciju

$$F_m = \frac{MSM}{MSE} \sim F(ab - 1, abl - 1). \tag{2.51}$$

2.3.2 N-faktorska analiza varijance

Dvofaktorsku ANOVA-u možemo nastaviti proširivati na više faktora. N-faktorska ANOVA je generalizacija dvofaktorske ANOVA-e. Npr. model za trofaktorsku ANOVA-u može biti zapisan u obliku

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \mathcal{E}_{ijkl}, \tag{2.52}$$

$$za \qquad i = 1, \ldots, a, \qquad j = 1, \ldots, b, \qquad k = 1, \ldots, c, \qquad l = 1, \ldots, m.$$

gdje je

μ- opća srednja vrijednost

α_i-glavni efekt i-te razine prvog faktora (faktora A)

β_j -glavni efekt j-te razine drugog faktora (faktora B)
γ_k -glavni efekt k-te razine trećeg faktora (faktora C)
$\alpha\beta_{ij}$-interakcijski efekt i-te razine prvog i j-te razine drugog faktora
$\alpha\gamma_{ik}$-interakcijski efekt i-te razine prvog i k-te razine trećeg faktora
$\beta\gamma_{jk}$-interakcijski efekt j-te razine drugog i k-te razine trećeg faktora
$\alpha\beta\gamma_{ijk}$-interakcijski efekt i-te razine prvog, j-te razine drugog i k-te razine trećeg faktora
$\mathcal{E}_{ijkl}$ -nezavisne slučajne varijable sa zajedničkom normalnom razdiobom

Trofaktorska ANOVA testira hipoteze o efektima faktora A, B, C i njihovim interakcijama na izlaznu varijablu y_{ijkl}.

Hipoteze o jednakosti sredina faktora A su:

$$\begin{aligned} &H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a \\ &H_1 : \text{barem jedan } \alpha_i \text{ je različit za } i = 1, \ldots, a. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Hipoteze o jednakosti sredina faktora B:

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b \\ &H_1 : \text{barem jedan } \beta_j \text{ je različit za } j = 1, \ldots, b. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Hipoteze o jednakosti sredina faktora C:

$$\begin{aligned} &H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_c \\ &H_1 : \text{barem jedan } \gamma_c \text{ je različit za } k = 1, \ldots, c. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Hipoteze o interakciji faktora su:

$$\begin{aligned} &H_0 : \alpha\beta_{ij} = 0 \\ &H_1 : \text{barem jedan } \alpha\beta_{ij} \neq 0\ . \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} &H_0 : \alpha\gamma_{ik} = 0 \\ &H_1 : \text{barem jedan } \alpha\gamma_{ik} \neq 0\ . \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} &H_0 : \beta\gamma_{jk} = 0 \\ &H_1 : \text{barem jedan } \beta\gamma_{jk} \neq 0\ . \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} &H_0 : \alpha\beta\gamma_{ijk} = 0 \\ &H_1 : \text{barem jedan } \alpha\beta\gamma_{ijk} \neq 0\ . \end{aligned} \tag{2.59}$$

Pripadne sume kvadrata računamo na sljedeći način:

$$SSA = nbc\sum_{i=1}^{a}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y})^2 \tag{2.60}$$

$$SSB = nac\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y})^2 \tag{2.61}$$

$$SSC = nab\sum_{k=1}^{c}(\overline{Y}_{..k} - \overline{Y})^2 \tag{2.62}$$

$$SSAB = nc\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y})^2 \tag{2.63}$$

$$SSAC = nb\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\overline{Y}_{i.k} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{..k} + \overline{Y})^2 \tag{2.64}$$

$$SSBC = na\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{..k} + \overline{Y})^2 \tag{2.65}$$

$$SSABC = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\overline{Y}_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i.k} - \overline{Y}_{.jk} + \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{..k} - \overline{Y})^2 \tag{2.66}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\Big[\sum_{l=1}^{n}(Y_{ijkl} - \overline{Y}_{ijk})^2\Big] \tag{2.67}$$

Vrijedi

$$SS = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC + SSE. \tag{2.68}$$

Navedene veličine zapisujemo u ANOVA tablici:

Izvor rasipanja	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Varijanca	Test statistika F
Faktor A	SSA	$df_A = a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{df_A}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$
Faktor B	SSB	$df_B = b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{df_B}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$
Faktor C	SSC	$df_C = c - 1$	$MSC = \frac{SSC}{df_C}$	$F_C = \frac{MSC}{MSE}$
$A \times B$	SSAB	$df_{AB} = (a-1)(b-1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{df_{AB}}$	$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$
$A \times C$	SSAC	$df_{AC} = (a-1)(c-1)$	$MSAC = \frac{SSAC}{df_{AC}}$	$F_{AC} = \frac{MSAC}{MSE}$
$B \times C$	SSBC	$df_{BC} = (b-1)(c-1)$	$MSBC = \frac{SSBC}{df_{BC}}$	$F_{BC} = \frac{MSBC}{MSE}$
$A \times B \times C$	SSABC	$df_{ABC} = (a-1)(b-1)(c-1)$	$MSABC = \frac{SSABC}{df_{ABC}}$	$F_{ABC} = \frac{MSABC}{MSE}$
Greška	SSE	$df_E = abc(n-1)$	$MSE = \frac{SSE}{df_E}$	
Ukupno	SS	$N - 1$		

Tablica 2.3: Trofaktorska ANOVA

Iako je ANOVA-u višeg reda teško interpretirati, nikakvi novi principi(u odnosu na 2-faktorsku i 3-faktorsku ANOVA-u) nisu uvedeni.

Općenito, N-faktorska ANOVA ima $2^N - 1$ F-statistika koje mogu biti testirane za značajnost modela, te ima

$$\frac{N!}{(m+1)!(N-m-1)!} \tag{2.69}$$

m-faktorskih interakcija.

Stoga će 4-faktorska ANOVA imati 15 različitih F statistika: 4 za glavne efekte, 6 za interakcije dva efekta, 4 za interakcije tri efekta i 1 za interakciju četiri efekta. Testiranje svakog od tih 15 efekata povećava vjerojatnost pogrške tipa I. Naravno, ta vjerojatnost se samo povećava kako se dodaju faktori.

Za primjenu analize varijance i tumačenje značajnosti razlika važno je napomenuti i tzv. post-hoc testiranja. Naime, ako dobijemo F-omjer koji je značajan, to znači da se promatrane skupine statistički značajno razlikuju u istraživanoj varijabli. No, još ne možemo tvrditi između kojih parova je razlika značajna. Da bi provjerili između kojih parova postoji razlika, moramo primijeniti jedan od naknadih testova (post-hoc) koji slijede nakon analize varijance. Postoje različiti post-hoc testovi (Scheffe, Tukey, Duncan, Newman-Keuls...), ali jedni od najviše korištenih su Scheffe-ov test i Tukey-ev HSD(honest significant difference) test.

Primjer

Uspoređujemo tri vrste terapija kojima se liječi fobija od zmija. Faktor A nam predstavlja stupanj fobije: blagi(BL), umjereni(UM) ili ozbiljni(OZ). Faktor B je tip terapije: desenzitizacija, implozija, uviđanje. Desenzitizacija se odnosi na učenje ljudi da budu opušteni u sitacijama koje ih inače plaše. Implozija je izravno suočavanje pacijenta sa objektom straha. Dok se uviđanje oslanja na razgovor između terapeuta i pacijenta, te pomaže ljudima kroz razumijevanje i izražavanje osjećaja, motivacija, uvjerenja, strahova i želja. Spol nam predstavlja faktor C.

Zavisna varijabla su rezultati BAT testa (Behavior avoidance test), te veći rezultat upućuje na slabiju fobiju. Zanima nas postoji li značajna razlika između rezultata i pojedinih faktora, te pojedinih interakcija faktora. Podaci su dani u tablici 2.4 [1].

	Desensitizacija			**Implozija**			**Uviđanje**		
	BL	UM	OZ	BL	UM	OZ	BL	UM	OZ
	10	12	10	15	12	6	13	11	10
Ž	12	9	11	12	10	7	9	7	6
	13	10	19	14	11	5	11	8	8
	16	11	12	17	14	10	16	10	11
M	14	13	11	18	13	9	12	12	10
	17	15	13	16	12	11	14	14	9

Tablica 2.4: Primjer-Rezultati BAT testa

Kod i interpretacija

```
proc glm data=fobija;
 class spol terapija stupanj;
 model rezultat=spol terapija stupanj spol*terapija spol*stupanj
    terapija*stupanj spol*terapija*stupanj;
 means spol terapija stupanj spol*terapija spol*stupanj
    terapija*stupanj spol*terapija*stupanj / tukey;
run;
```

Procedura koju koristimo je *proc glm* (*General linear models*). Sa *data* definiramo data set na kojem radimo analizu. Naredbom *class* kažemo da imamo tri faktora (spol, terapiju i stupanj), a sa *model* kako nam izgleda model koji testiramo. Naredba *means* je dodatna naredba koja nam ispisuje aritmetičke sredine za svaki faktor i za svaku interakciju. Opcija *tukey* izvodi Tukey-ev post-hoc test na svim sredinama glavnih efekata u naredbi *means*.

[1]Podaci su preuzeti iz [2]

The GLM Procedure

Dependent Variable: rezultat

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	17	368.1666667	21.6568627	9.36	<.0001
Error	36	83.3333333	2.3148148		
Corrected Total	53	451.5000000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	rezultat Mean
0.815430	13.23001	1.521452	11.50000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
spol	1	115.5740741	115.5740741	49.93	<.0001
terapija	2	22.3333333	11.1666667	4.82	0.0139
stupanj	2	183.0000000	91.5000000	39.53	<.0001
spol*terapija	2	0.2592593	0.1296296	0.06	0.9456
spol*stupanj	2	1.8148148	0.9074074	0.39	0.6786
terapija*stupanj	4	39.3333333	9.8333333	4.25	0.0064
spol*terapij*stupanj	4	5.8518519	1.4629630	0.63	0.6429

Tablica 2.5: Tablice rezultata-Ispis iz SAS-a

Prva tablica u 2.5 nam testira sveukupnu značajnost modela. Kako nam je p-vrijednost manja od 0,0001 zaključujemo da nam je model značajan. Sljedeća tablica nam daje deskriptivne statistike (R-kvadrat, koeficjent varijacije, standardnu devijaciju i aritmetičku sredinu svih izmjerenih vrijednosti). Dok nam je zadnja tablica naša ANOVA tablica 2.3 s time da su nam greška modela i SS dani u prvoj tablici. Iz tablice zaključujemo sljedeće: Postoji značajna razlika u rezultatima testa po spolu, terapiji i stupnju fobije (p-vrijednosti su manje od 0,02), te u odnosu na interakciju terapija*stupanj fobije (p-vrijednost je 0.0064). Dok ne postoji značajna razlika u odnosu na dvofaktorske iterakcije spol*terapija i spol*stupanj, te u odnosu na trofaktorsku interakciju spol*terapija*stupanj.

ANOVA nam ne kaže koje su grupe različite od drugih, već samo da razlika postoji. Stoga smo, nakon pronalaska značajne razlike, napravili Tukey-ev post-hoc test na faktorima da istražimo razlike između razina. U tablici 2.6 vidimo da po tipu terapije imamo razliku između desensitizacije i uviđanja, dok u tablici 2.7 vidimo da imamo razliku između sva tri stupnja terapije.

The GLM Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for rezultat

Note: This test controls the Type I experimentwise error rate, but it generally has a higher Type II error rate than REGWQ.

Alpha	0.05
Error Degrees of Freedom	36
Error Mean Square	2.314815
Critical Value of Studentized Range	3.45675
Minimum Significant Difference	1.2396

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping		Mean	N	terapija
	A	12.1111	18	desenzit
	A			
B	A	11.7778	18	implozij
B				
B		10.6111	18	uvid

Tablica 2.6: Tukey-ev post-hoc test za tip terapije-Ispis iz SAS-a

The GLM Procedure

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for rezultat

Note: This test controls the Type I experimentwise error rate, but it generally has a higher Type II error rate than REGWQ.

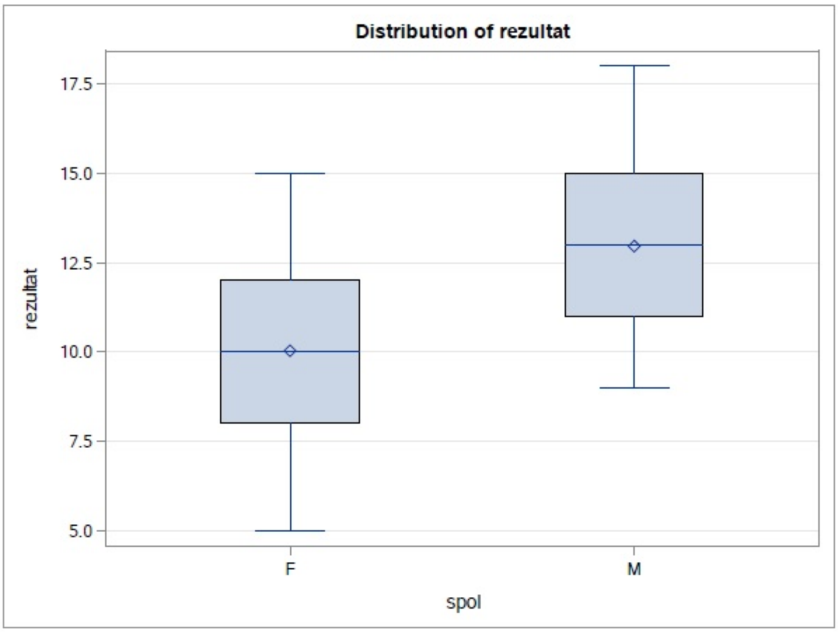
Alpha	0.05
Error Degrees of Freedom	36
Error Mean Square	2.314815
Critical Value of Studentized Range	3.45675
Minimum Significant Difference	1.2396

Means with the same letter are not significantly different.

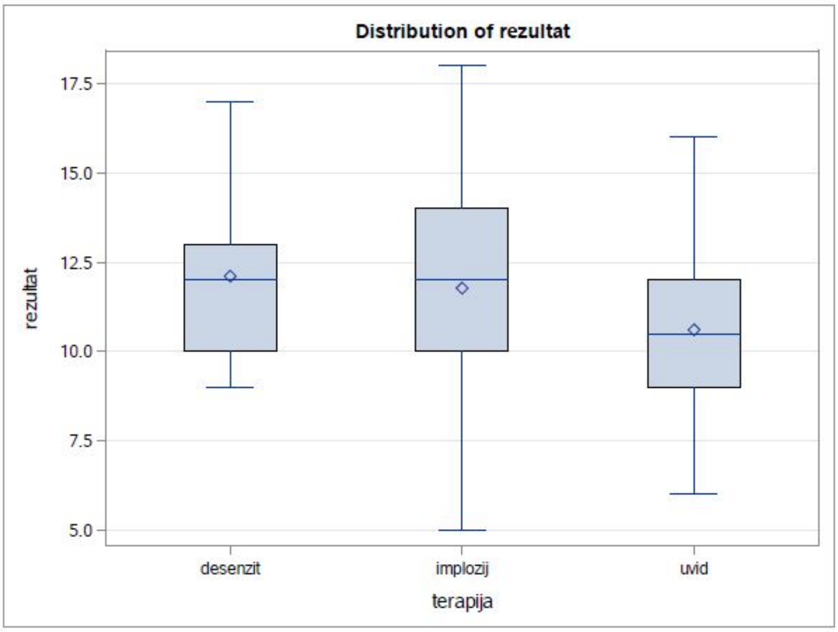
Tukey Grouping	Mean	N	stupanj
A	13.8333	18	blaga
B	11.3333	18	umjerena
C	9.3333	18	ozbiljna

Tablica 2.7: Tukey-ev post-hoc test za stupanj terapije-Ispis iz SAS-a

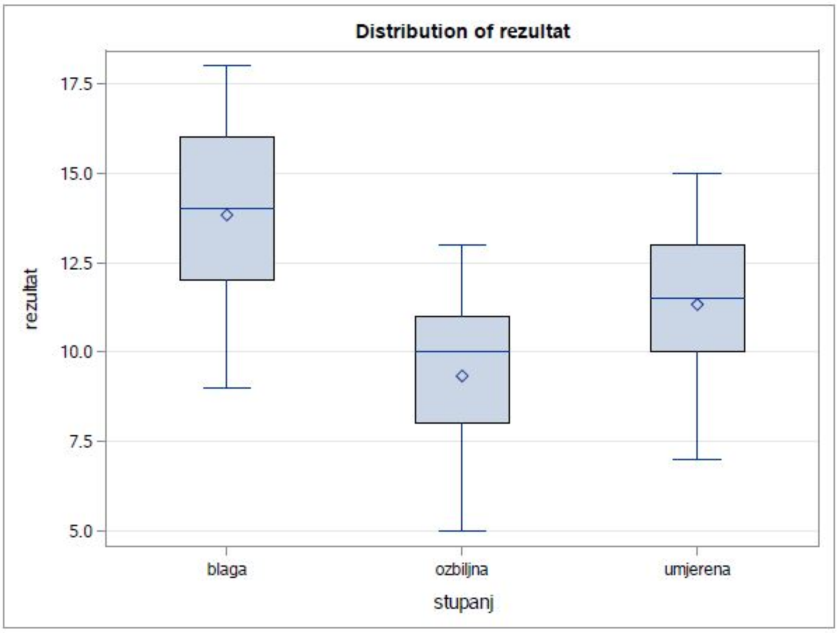
Sljedeći grafovi nam prikazuju box-plotove za pojedine faktore i njihove interakcije. Box-plot se sastoji od pravokutnika koji prikazuje podatke od donjeg do gornjeg kvartila. Crta po pravokutniku označava median. Donje i gornje horizontalne linije se nazivaju whisker. Mogu se različito definirati, ali najčešće predstavljaju najmanji i najveći podatak koji se nalazi unutar 1.5 puta interkvartilnog raspona gledajući od donjeg, odnosno gornjeg kvartila. Sve točke izvan te granice se crtaju posebno i smatraju outlierima (vrijednosti koje odudaraju od ostalih). Izgled box-plota ukazuje na stupanj raspršenosti i asimetričnosti (skewness), te može pokazati outliere među podacima.



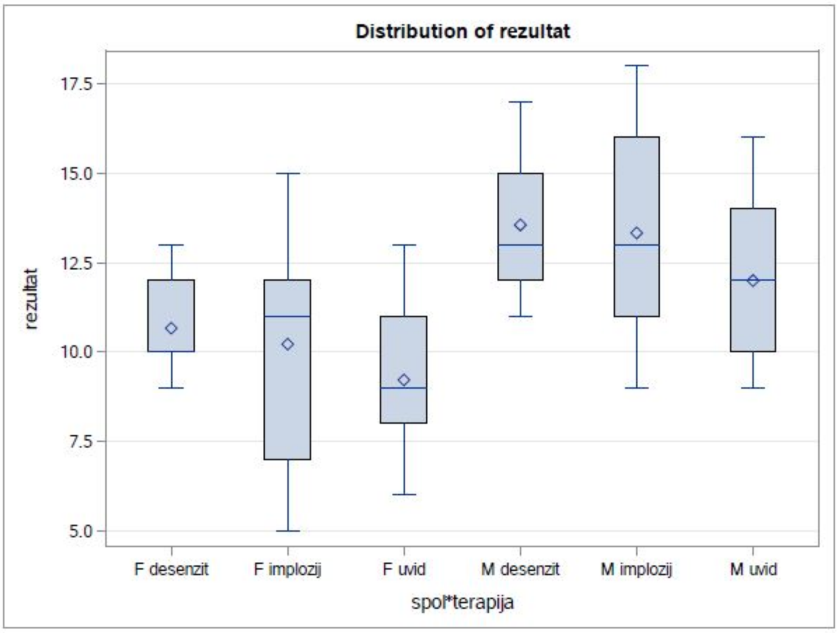
Slika 2.1: Box-plot za faktor ’spol’-Ispis iz SAS-a



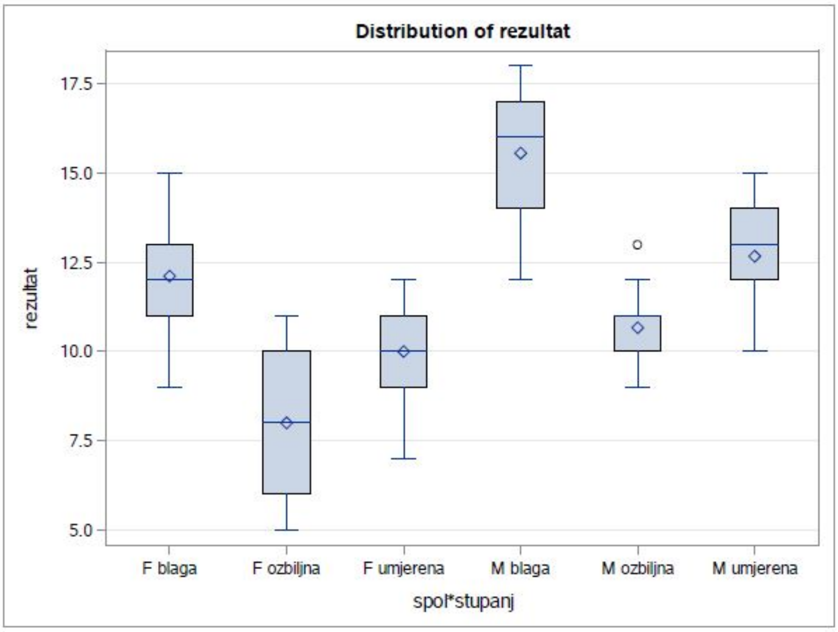
Slika 2.2: Box-plot za faktor 'terapija'-Ispis iz SAS-a



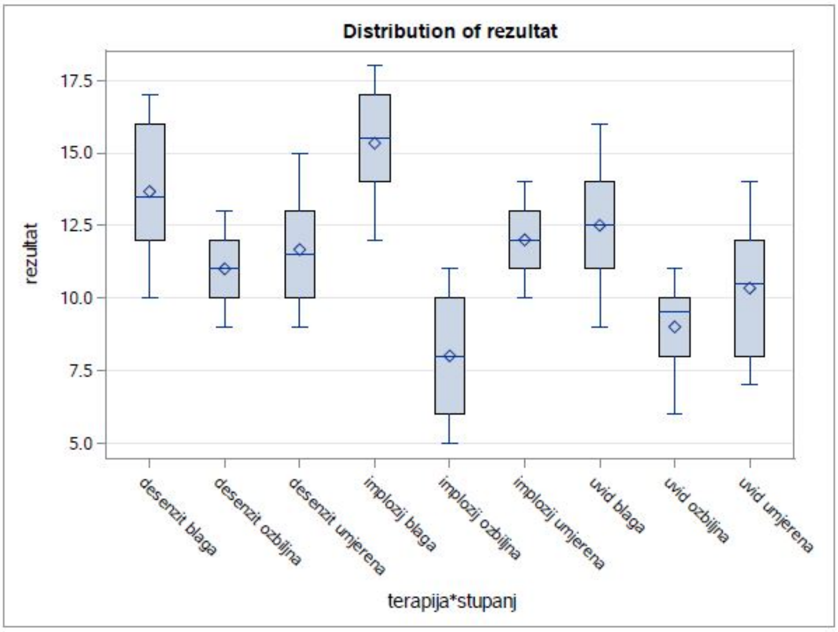
Slika 2.3: Box-plot za faktor 'stupanj'-Ispis iz SAS-a



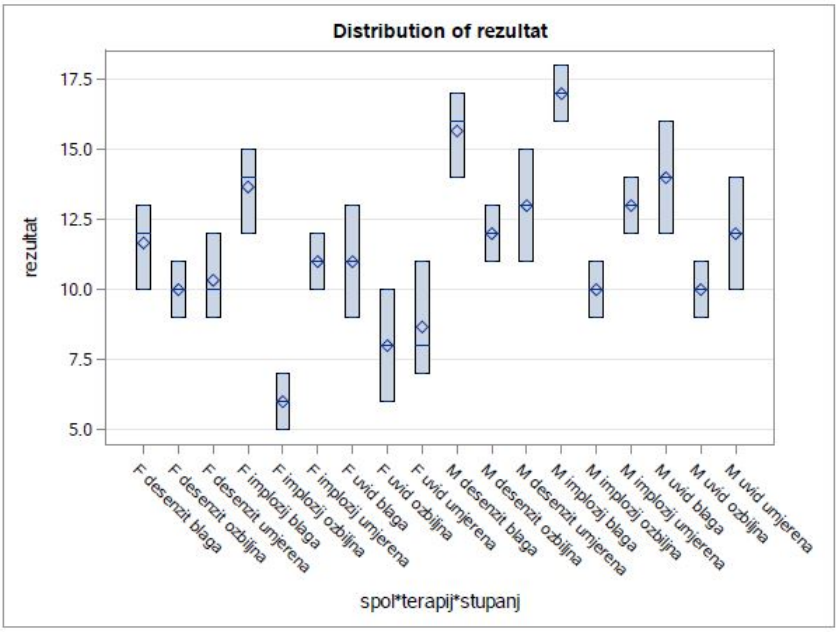
Slika 2.4: Box-plot za interakciju 'spol*terapija'-Ispis iz SAS-a



Slika 2.5: Box-plot za interakciju 'spol*stupanj'-Ispis iz SAS-a



Slika 2.6: Box-plot za interakciju 'terapija*stupanj'-Ispis iz SAS-a



Slika 2.7: Box-plot za interakciju 'spol*terapija*stupanj'-Ispis iz SAS-a

Poglavlje 3

ANOVA ponovljenih mjerenja

3.1 Uvod

Analiza varijance ponovljenih mjerenja je proširenje t-testa za zavisne uzorke. Koristimo ju kod sljedeće dvije vrste designa: kada se ispituju promjene u srednjim vrijednostima tri ili više vremenskih točaka npr. ispitivanje efekta 6-mjesečnog programa vježbanja na krvni tlak (tlak se mjeri prije početka, u sredini i na kraju vježbanja), te kada se ispituju promjene u srednjim vrijednostima tri ili više različitih uvjeta npr. ista grupa subjekata ocjenjuje tri različite vrste kolača. Kod ovog designa je bitno da se više puta provode mjerenja na istoj grupi subjekata za istu zavisnu varijablu.

Ovakav design ima dvije velike prednosti: imamo više podataka o svakom subjektu, te trebamo manje subjekata za istu snagu testa.

U ponovljenim mjerenjima također imamo pretpostavku nezavisnosti unutar jednog ponavljanja, te pretpostavku nezavisnosti između ljudi dok je očito da će postojati korelacija unutar bloka odnosno da će različita mjerenja nad istim subjektom biti povezana. Kako pretpostavljamo da je distribucija multivarijatna normalna koreliranost nam je isto što i zavisnost. Prema tome opservacije unutar svakog bloka (čovjeka) će biti zavisne pa ćemo tu varijabilnost moći bolje objasniti.

Postoji još jedna dodatna pretpostavka koju treba uzeti u obzir, *"sferičnost"*. Budući da su tretmani primijenjeni na istoj eksperimentalnoj jedinici, znamo da naše mjerene reakcije nisu nezavisne; postoji korelacija među ponovljenim mjerenjima. Za ispravan izračun naše F-statistike, trebamo jednake korelacije između parova tretmana; tj. podaci između tretmana 1 i 2 bi trebali imati istu korelaciju kao i između podataka tretmana 1 i 3, i tako dalje.

3.1.1 Sferičnost

Neka je Σ_y kovarijacijska matrica modela. Uvjet cirkularnosti za Σ_y glasi:

$$\sigma_{jj} - \sigma_{j'j'} - 2\sigma_{jj'} = 2\lambda, \qquad \text{za sve } j \neq j', \tag{3.1}$$

za neki $\lambda > 0$. Ukoliko vrijedi sljedeći uvjet

$$\sigma^2_{Y_j - Y_{j'}} = 2\lambda, \qquad \text{za sve } j \neq j', \tag{3.2}$$

tada je opravdano koristiti uobičajenu analizu varijance ponovljenih mjerenja. Ovaj uvjet se još zove Huynh-Feldtov uvjet. Zapravo nam kaže da je razlika varijanca između svaka dva Y-a konstantna. Uvjet cirkularnosti povlači sferičnost matrice Σ_x, koju definiramo kao

$$\Sigma_x = M'\Sigma_y M^*, \tag{3.3}$$

gdje su varijable X normirane ortogonalne transformacije originalnih varijabli Y. Matrica M^* je ortonormirana matrica reda $(k-1) \times k$ čiji su redovi normirani i međusobno ortogonalni. Dakle da bismo provjerili uvjet 3.1 moramo provjeriti uvjet sferičnosti. U SAS-u koristimo Mauchly-jev test za sferičnost. Kada Huynh-Feldtov uvjet nije zadovoljen uzimamo prilagođenu p vrijednost tako da odgovarajuće stupnjeve slobode množimo sa skalarom ε, koji je funkcija elemenata u kovarijacijskoj matrici ponovljenih mjerenja.

3.2 Jednofaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

Pretpostavimo da imamo k tretmana i n osoba. U tablici 3.1 imamo sljedeći zapis odnosno notaciju. Y_{ij} nam predstavlja mjerenja nad $i-$tom osobom pod tretmanom j. Općenito prvi indeks označava osobu, dok drugi indeks označava tretman (ili vrijeme) pod kojim je mjerenje izvršeno.

Simbol P_i predstavlja zbroj svih tretmana nad osobom i tj.

$$P_i = \sum_{j=1}^{k} Y_{ij}. \tag{3.4}$$

Stoga je aritmetička sredina svih opservacija nad osobom i dana sa

$$\overline{P_i} = \frac{P_i}{k}. \tag{3.5}$$

Analogno po recima možemo gledati zbroj i aritmetičku sredinu po stupcima. Sa T_j označit ćemo zbroj svih n opservacija pod $j-$tim tretmanom, tj.

$$T_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{ij}. \tag{3.6}$$

Osoba/Tretman	1	2	...	j	...	k	Zbroj	Sredina
1	Y_{11}	Y_{12}		Y_{1j}		Y_{1k}	P_1	$\overline{P_1}$
2	Y_{21}	Y_{22}		Y_{2j}		Y_{2k}	P_2	$\overline{P_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	Y_{i1}	Y_{i2}		Y_{ij}		Y_{ik}	P_i	$\overline{P_i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Y_{n1}	Y_{n2}		Y_{nj}		Y_{nk}	P_n	$\overline{P_n}$
Zbroj	T_1	T_2	...	T_j	...	T_k	G	
Sredina	$\overline{T_1}$	$\overline{T_2}$	...	$\overline{T_j}$	...	$\overline{T_k}$		$\overline{G}$

Tablica 3.1: Notacija

Stoga je aritmetička sredina svih opservacija u tretmanu j dana sa

$$\overline{T_j} = \frac{T_j}{n}. \tag{3.7}$$

Sa G označimo zbroj svih opservacija i on je jednak

$$G = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{j=1}^{k} T_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} Y_{ij}, \tag{3.8}$$

a sa $\overline{G}$ označimo aritmetičku sredinu svih opservacija

$$\overline{G} = \frac{G}{kn} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j}{k} \tag{3.9}$$

Ukupna varijabilnost u dizajnu je suma kvadrata odstupanja svih opservacija od aritmetičke sredine $\overline{G}$

$$SS = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (Y_{ij} - \overline{G})^2. \tag{3.10}$$

Stupnjevi slobode za SS su $kn-1$. Sada tu varijabilnost kao i u ANOVA-i bez ponovljenih mjerenja rastavljamo na izvore varijabilnosti. Postoje dva izvora varijabilnosti. Jedan izvor je varijabilnost između subjekata (eng. between-subject). Ovdje ćemo tu varijabilnost označiti sa SSB:

$$SSB = n \sum_{i=1}^{n} (\overline{P_i} - \overline{G})^2. \tag{3.11}$$

Ovaj izvor varijabilnosti dolazi od toga da su promatrani subjekti različiti. Kako imamo n aritmetičkih sredina, ovaj izvor varijabilnosti ima $n-1$ stupnjeva slobode.

Drugi izvor varijabilnosti jest varijabilnost unutar subjekta (eng. within-subject) i definira se na sljedeći način: za svaki subjekt i možemo izračunati njegovu kvadratnu udaljenost od njegove aritmetičke sredine P_i. Suma svih odstupanja za sve subjekte jest naša preostala varijabilnost. Zapisano formulom to je

$$SSW = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(Y_{ij} - \overline{P_i})^2. \tag{3.12}$$

Stupnjevi slobode za varijabilnost unutar pojedinog subjekata su $k-1$ pa su stupnjevi slobode za zbroj varijabilnosti unutar subjekta (SSW) jednaki $n(k-1)$. Sada smo ukupnu varijabilnost rastavili na 2 dijela

$$SS = SSB + SSW \tag{3.13}$$

sa pripadnim stupnjevima slobode koji također odgovaraju rastavu ($kn-1 = n-1+n(k-1)$). Kao što vidimo naš SSW nam je jednak SSE u modelu jednofaktorske analize varijance. Razlika u odnosu na taj model je što SSB možemo dalje rastavljati. Još nismo iskoristili varijabilnost zbog različitog tretmana na istim subjektima odnosno efekt ponavljanja. Označimo tu varijabilnost sa SST_b te je ona dana formulom

$$SST_b = k\sum_{j=1}^{k}(\overline{T_j} - \overline{G})^2, \tag{3.14}$$

sa $k-1$ stupnjeva slobode. Sa SSE_b označimo preostalu, neobjašnjenu varijabilnost te je ona dana sa

$$SSE_b = SSW - SST_b = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}((Y_{ij} - \overline{G}) - (\overline{P_i} - \overline{G}) - (\overline{T_j} - \overline{G}))^2. \tag{3.15}$$

Broj stupnjeva slobode za SSE_b se dobije kada od broja stupnjeva slobode za SSW oduzmemo stupnjeve slobode za SST_b. Odnosno $n(k-1)-(k-1) = (k-1)(n-1)$. Prema tome stupnjevi slobode za neobjašnjenu varijabilnost su $(k-1)(n-1)$. Sada smo dakle rastavili ukupnu varijabilnost na tri dijela. Dakle

$$SS = SSB + SSW = SSB + SST_b + SSE. \tag{3.16}$$

Kao i u poglavlju 2., varijance dobijemo kada sume kvadrata podijelimo sa pripadajućim stupnjevima slobode. Nulta hipoteza koju u ovom modelu testiramo je da razlika između tretmana (ili vremena) nije značajna nasuprot alternativnoj hipotezi da se barem dvije sredine značajno razlikuju. Priklada statistika za tu hipotezu nam je kao i u poglavlju 2, F statistika koja u brojniku ima varijancu MST_b, a u nazivniku varijancu MSE.

Sve navedeno možemo prikazati u tablici 3.2.

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Varijanca	Test statistika F
Između subjekata	SSB	$n-1$	$MSB = \frac{SSB}{n-1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
Unutar subjekata	SSW	$n(k-1)$	$MSW = \frac{SSW}{n(k-1)}$	
Efekt tretmana	SST_b	$k-1$	$MST_b = \frac{SST_b}{k-1}$	$F = \frac{MST_b}{MSE}$
Greška	SSE_b	$(n-1)(k-1)$	$MSE = \frac{SSE_b}{(n-1)(k-1)}$	
Ukupno	SS	$nk-1$		

Tablica 3.2: ANOVA tablica - jednofaktorski model s ponovljenim mjerenjima

Matematički model jednofaktorske ANOVA-e ponovljenih mjerenja možemo zapisati na sljedeći način

$$X_{ij} = \mu + \pi_i + \delta_j + \mathcal{E}_{ij}, \tag{3.17}$$

gdje je μ ukupna aritmetička sredina, δ_j efekt j-tog tretmana, $\mathcal{E}_{ij}$ normalno distribuirana i nezavisna greška, dok je π_i nova varijabla koju dobijemo zbog ponovljenih mjerenja nad istim subjektom i ona je po pretpostavci normalno distribuirana.

3.3 Višefaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

3.3.1 Dvofaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

Kao što i sam naziv kaže, u dvofaktorskom modelu imamo dva faktora.

Opći slučaj može biti prikazan kako slijedi u tablici 3.3.

	b_1	$\dots$	b_j	$\dots$	b_q
a_1	G_1	$\dots$	G_1	$\dots$	G_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	G_i	$\dots$	G_i	$\dots$	G_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_p	G_p	$\dots$	G_p	$\dots$	G_p

Tablica 3.3: Dvofaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

Svaki G predstavlja slučajan uzorak veličine n iz uobičajene populacije subjekata. Svaki G_i je promatran pod q različitih kombinacija tretmana, od kojih svaka uključuje razinu a_i faktora A. Stvarno opažanje na subjektima unutar grupe i može biti prikazano na slijedeći način:

	Subjekt	b_1	$\dots$	b_j	$\dots$	b_q
	1	X_{i11}	$\dots$	X_{ij1}	$\dots$	X_{iq1}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	k	X_{i1k}	$\dots$	X_{ijk}	$\dots$	X_{iqk}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	n	X_{i1n}	$\dots$	X_{ijn}	$\dots$	X_{iqn}

Tablica 3.4: Dvofaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

Simbol X_{ijk} predstavlja mjerenje na subjektu k u grupi G_i pod kombinacijom tretmana ab_{ij}. Linearni model na kojem je bazirana analiza je oblika

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \pi_{k(i)} + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \beta\pi_{jk(i)} + \varepsilon_{m(ijk)}. \tag{3.18}$$

Simbol $\pi_{k(i)}$ nam govori da je efekt subjekta k ugnježđen ispod razine a_i faktora A. Ukupnu varijabilnost SS (ukupno kvadratno odstupanje od aritmetičke sredine) možemo podijeliti na dvije sume kvadrata: sumu kvadrata između subjekata ($SS_{Between}$) i sumu kvadrata unutar subjekata (SS_{Within}) koje definiramo na isti način kao i u jednofaktorskome modelu ANOVA-e ponovljenih mjerenja. Broj stupnjeva slobode za $SS_{Between}$ je ukupan broj subjekata minus jedan, a za SS_{Within} broj subjekata što množi broj ponavaljanja minus jedan procijenjeni parametar za svaki subjekt. I jednu i drugu sumu kvadrata možemo dalje podijeliti na sljedeći način:

$$SS_{Between} = SSA + SSE_A \tag{3.19}$$

i

$$SS_{Within} = SSB + SSAB + SSE_B. \tag{3.20}$$

U 3.19 varijabilnost između subjekata možemo djelomično objasniti zbog različitih tretmana (SSA). Ono što nismo uspjeli objasniti jest prirodna varijabilnost zbog različitih tretmana (SSE_A). U 3.20 varijabilnost unutar subjekata djelomično možemo objasniti ponovljenim mjerenjima (SSB), djelomično interakcijom tretmana i vremena ($SSAB$), dok je neobjašnjena varijabilnost (SSE_B) uzrokovana različitim tretmanima i ponovljnim mjerenjima. Uspoređujući s jednofaktorskim modelom ponovljenih mjerenja vidimo da smo, dodajući još jedan faktor, podijelili varijabilnost između subjekata na dvije sume kvadrata, te varijabilnost unutar smo, umjesto na dvije, podijelili na tri sume kvadrata (tablica 3.5). Ukoliko usporedimo ovaj model s dvofaktorskim modelom bez ponovljenih mjerenja (tablica 2.2) možemo primjetiti da smo "samo" podijelili grešku odnosno neobjašnjenu varijabilnost (SSE) na dvije neobjašnjene varijabilnosti (SSE_A i SSE_B) koje proizlaze iz toga da su mjerenja zavisna. Greška SSE_A pripada varijabilnosti između, a SSE_B varijabilnosti unutar subjekata. Neobjašnjene varijance možemo protumačiti na sljedeći način: SSE_A je greška subjekata unutar tretmana, dok je SSE_B greška efekta ponavljanja i subjekata unutar tretmana.

Možemo testirati tri hipoteze. Hipotezu da je efekt grupe (tretmana) beznačajan, da je efekt ponavljanja beznačajan i da je interakcija beznačajna. Prva nulta hipoteza jest da su sredine grupa jednake nasuprot alternativnoj hipotezi da se barem dvije razlikuju. Testa statistika nam je sljedeća:

$$F_1 = \frac{MSA}{MSE_A} \sim F(p-1, p(n-1)) \tag{3.21}$$

Druga nulta hipoteza je da su sredine u svakom ponavljanju jednake nasuprot alternativnoj da se barem dvije razlikuju. Testna statistika je

$$F_2 = \frac{MSB}{MSE_B} \sim F(q-1, p(n-1)(q-1)) \tag{3.22}$$

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Varijanca	Test statistika F
Između subjekata	$SS_{Between}$	$np-1$		
Faktor A	SSA	$p-1$	MSA	$F_1 = \frac{MSA}{MSE_A}$
Greška tretmana(A)	SSE_A	p(n-1)	MSE_A	
Unutar subjekata	SS_{Within}	$np(q-1)$		
Faktor B	SSB	$q-1$	MSB	$F_2 = \frac{MSB}{MSE_B}$
$A \times B$	$SSAB$	$(p-1)(q-1)$	$MSAB$	$F_{12} = \frac{MSAB}{MSE_B}$
Greška	SSE_B	$p(n-1)(q-1)$	MSE_B	
Ukupno	SS	$pqn-1$		

Tablica 3.5: Dvofaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

Treća nulta hipoteza je da su sredine svakog tretmana u svakom ponavljanju jednake nasuprot alternativnoj da se barem dvije značajno razlikuju. Test statistika je

$$F_{12} = \frac{MSAB}{MSE_B} \sim F((p-1)(q-1), p(n-1)(q-1)). \tag{3.23}$$

Testirat ćemo i sveukupnu značajnost modela gdje nam je testna statistika sljedeća:

$$F = \frac{MSA + MSB + MSAB}{MSE_A + MSE_B} \sim F(pq-1, pq(n-1)). \tag{3.24}$$

Kao i u prijašnjim poglavljima veliki brojnik i mali nazivnik sugerirat će odbacivanje nultih hipoteza.

3.3.2 Višefaktorska ANOVA ponovljenih mjerenja

U trofaktorskome modelu imamo sedam različitih kombinacija designa za varijable između i unutar subjekta. Tri kombinacije kada imamo ponovljena mjerenja na samo jednom faktoru (ponovljena mjerenja na faktoru A, faktoru B ili faktoru C), tri kombinacije kada imamo mjerenja na 2 faktora (na faktorima A i B, A i C ili na faktorima B i C) i jednu kombinaciju ponovljenih mjerenja na sva 3 faktora (na A, B i C).

Promatramo slučaj kada imamo ponovljena mjerenja na samo jednom od tri faktora, na faktoru C. To možemo prikazati na sljedeći način

		c_1	c_2	$\dots$	c_r
	b_1	G_{11}	G_{11}	$\dots$	G_{11}
a_1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	b_q	G_{1q}	G_{1q}	$\dots$	G_{1q}
	$\vdots$				
	b_1	G_{p1}	G_{p1}	$\dots$	G_{p1}
a_p	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	b_q	G_{pq}	G_{pq}	$\dots$	G_{pq}

Tablica 3.6: Prikaz ponovljenih mjerenja na jednome od tri faktora

Svaka grupa je promatrana pod svim nivoima faktora C, ali svaka grupa je dodijeljena samo jednoj kombinaciji faktora A i B. Notacija G_{ij} označava grupu subjekata dodijeljenu kombinaciji tretmana ab_{ij}. Subjekt unutar grupe G_{ij} je identificiran indeksom m_{ij}. Ova notacija upućuje na to da je efekt subjekta ugnježđen ispod oba faktora, ispod A i B.

Opservacije za pojedine subjekte u grupi G_{ij} su oblika:

	Subjekt	c_1	$\dots$	c_k	$\dots$	c_r	Ukupno
	$1(ij)$	X_{ij11}	$\dots$	X_{ijk1}	$\dots$	X_{ijr1}	$P_{1(ij)}$
	$2(ij)$	X_{ij12}	$\dots$	X_{ijk2}	$\dots$	X_{ijr2}	$P_{2(ij)}$
a_ib_j	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$m(ij)$	X_{ij1m}	$\dots$	X_{ijkm}	$\dots$	X_{ijrm}	$P_{m(ij)}$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$n(ij)$	X_{ij1n}	$\dots$	X_{ijkn}	$\dots$	X_{ijrn}	$P_{n(ij)}$

Tablica 3.7: Opservacije za pojedine subjekte u grupi G_{ij}

Model na kojem je bazirana analiza je

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \pi_{m(ij)} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \gamma\pi_{km(ij)} + \varepsilon_{0(ijkm)}. \tag{3.25}$$

Kako je faktor subjekta ugnježđen ispod oba faktora A i B, ne možemo imati interakciju između ta dva faktora i faktora subjekta.

Da bi lakše izračunali trofaktorsku ANOVA-u s ponovljenim mjerenjima na jednom faktoru definiramo sljedeće veličine

$$
\begin{aligned}
&(1) = G^2/npqr && (5) = \left(\sum C_k^2\right)\Big/npq && \\
&(2) = \sum X^2 && (6) = \left[\sum (AB_{ij}^2)\right]\Big/nr && (9) = \left[\sum (ABC_{ijk}^2)\right]\Big/n \\
&(3) = \left(\sum A_i^2\right)\Big/nqr && (7) = \left[\sum (AC_{ik}^2)\right]\Big/nq && (10) = \left(\sum P_m^2\right)\Big/r \\
&(4) = \left(\sum B_j^2\right)\Big/npr && (8) = \left[\sum (BC_{jk}^2)\right]\Big/np &&
\end{aligned}
$$

Veličine (1) do (9) se općenito koriste u bilo kojem trofaktorskom eksperimentu u kojem imamo n opservacija u svakoj ćeliji. Dok je veličina (10) jedinstvena faktorskim eksperimentima u kojima imamo ponavljena mjerenja samo na jednom faktoru, faktoru C.

Uz pomoć definiranih veličina zapisujemo pripadne sume kvadrata na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
SS_{Between} &= (10) - (1) \\
SSA &= (3) - (1) \\
SSB &= (4) - (1) \\
SSAB &= (6) - (3) - (4) + (1) \\
SSE_{Between} &= (10) - (6)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
SS_{Within} &= (2) - (10) \\
SSC &= (5) - (1) \\
SS(AC) &= (7) - (3) - (5) + (1) \\
SS(BC) &= (8) - (4) - (5) + (1) \\
SS(ABC) &= (9) - (6) - (7) - (8) + (3) + (4) + (5) - (1) \\
SSE_{Within} &= (2) - (9) - (10) + (6)
\end{aligned}
$$

također zapisujemo pripadne stupnjeve slobode kako slijedi

$$
\begin{aligned}
df_{Between} &= npq - 1 \\
df_A &= p - 1 \\
df_B &= q - 1 \\
df_{AB} &= (p-1)(q-1) \\
df_{E(Between)} &= pq(n-1)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
df_{Within} &= npq(r-1) \\
df_C &= r - 1 \\
df_{AC} &= (p-1)(r-1) \\
df_{BC} &= (q-1)(r-1) \\
df_{ABC} &= (p-1)(q-1)(r-1) \\
df_{E(Within)} &= pq(n-1)(r-1)
\end{aligned}
$$

Iz navedenog imamo sljedeću ANOVA tablicu trofaktorske analize varijance ponovljenih mjerenja na jednom faktoru

Izvor varijabilnosti	Suma kvadrata	Stupnjevi slobode	Varijanca	Test statistika F
Između subjekata	$SS_{Between}$	$df_{Between}$		
A	SSA	df_A	$MSA = \frac{SSA}{df_A}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE_{Between}}$
B	SSB	df_B	$MSB = \frac{SSB}{df_B}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE_{Between}}$
AB	$SSAB$	df_{AB}	$MSAB = \frac{SSAB}{df_{AB}}$	$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE_{Between}}$
Greška(između)	$SSE_{Between}$	$df_{E(Between)}$	$MSE_{Between} = \frac{SSE_{Between}}{df_{E(Between)}}$	
Unutar subjekata	SS_{Within}	df_{Within}		
C	SSC	df_C	$MSC = \frac{SSC}{df_C}$	$F_C = \frac{MSC}{MSE_{C\times within}}$
AC	$SS(AC)$	df_{AC}	$MSAC = \frac{SSAC}{df_{AC}}$	$F_{AC} = \frac{MSAC}{MSE_{C\times within}}$
BC	$SS(BC)$	df_{BC}	$MSBC = \frac{SSBC}{df_{BC}}$	$F_{BC} = \frac{MSBC}{MSE_{C\times within}}$
ABC	$SS(ABC)$	df_{ABC}	$MSABC = \frac{SSABC}{df_{ABC}}$	$F_{ABC} = \frac{MSABC}{MSE_{C\times within}}$
Greška(unutar)	SSE_{Within}	$df_{E(Within)}$	$MSE_{Within} = \frac{SSE_{Within}}{df_{E(Within)}}$	

Tablica 3.8: Trofaktorska ANOVA sa ponovljenim mjerenjima na faktoru C

Primjer

Pretpostavimo da nas zanima utjecaj anksioznosti (faktor A) i napetosti mišića (faktor B) na učenje. Subjekti kod kojih je izmjerena niža anksioznost dodjeljeni su stanju a_1, dok su subjekti sa višom dodijeljeni stanju a_2. Faktor napetosti mišića je određen silom kojom se djeluje na dinamometar. Polovica ispitanika razine a_1 je na slučajan način dodijeljena stanju napetosti mišića b_1, a druga polovica je dodijeljena stanju b_2. Na sličan način su podijeljeni i ispitanici razine a_2. Subjekti su ispitivani četiri puta (faktor C) te je mjeren broj netočnih odgovora u svakom od četiri ispitivanja. Rezultati mjerenja su dani u tablici 3.9[1]

[1]Podaci su preuzeti iz [1]

			Ispitivanja				
		Subjekti	c_1	c_2	c_3	c_4	Ukupno
a_1	b_1	1	18	14	12	6	50
		2	19	12	8	4	43
		3	14	10	6	2	32
	b_2	4	16	12	10	4	42
		5	12	8	6	2	28
		6	18	10	5	1	34
a_2	b_1	7	16	10	8	4	38
		8	18	8	4	1	31
		9	16	12	6	2	36
	b_2	10	19	16	10	8	53
		11	16	14	10	9	49
		12	16	12	8	8	44

Tablica 3.9: Primjer-Rezultati ispitivanja

Kod i interpretacija

```
proc glm data=ispit;
    class anksioznost napetost;
    model c_1 - c_4=anksioznost napetost anksioznost*napetost;
    repeated time 4 polynomial / summary printe;
    means anksioznost napetost anksioznost*napetost;
run;
```

Kao i prije koristimo proceduru *glm*. Naredbom *class* kažemo da su nam varijable anksioznost i napetost grupne varijable. Naredbom *model* definiramo model na kojem ćemo raditi analizu. S lijeve strane su nam zavisne varijable, a s desne nezavisne. Naredbom *repeated* kažemo SAS-u da imamo ponovljena mjerenja. Iza te naredbe moramo dati ime zavisnoj varijabli koje je *'time'*. Broj 4 označava koliko imamo ponovljenih mjerenja. Nakon toga smo dodali opciju *polynomial* te iza kose crte *summary* i *printe*. Opcija *polynomial* kreira tri nove varijable iz četiri zavisnih varijabli. Prva je linearni efekt vremena, druga kvadratni, treća kubični itd.... Opcijom *summary* dobivamo rezultate za tri transformirane varijable, dok opcijom *printe* ispisujemo matrice kojima provjeravamo pretpostavke.

The GLM Procedure

Class Level Information		
Class	Levels	Values
anksioznost	2	a1 a2
napetost	2	b1 b2

Number of Observations Read	12
Number of Observations Used	12

Tablica 3.10: Općeniti podaci-Ispis iz SAS-a

U tablici 3.10 su nam dani opći podaci o broju opservacija i grupnim varijablama. A u tablici 3.11 su nam dani nivoi zavisne varijable. Vidimo da nam je zavisna varijabla "*ispitivanje*" i da ima četiri mjerenja.

Repeated Measures Analysis of Variance

Repeated Measures Level Information				
Dependent Variable	c_1	c_2	c_3	c_4
Level of time	1	2	3	4

Tablica 3.11: Tablica nivoa zavisne varijable - Ispis iz SAS-a

Zatim nam SAS daje analizu varijance za svaku zavisnu varijablu *ispitivanja* po grupnim varijablama anksioznost i napetost (tablice 3.12 do 3.15) sa pripadnim interakcijskim grafovima. U tablicama vidimo da imamo značajnu razliku samo u slučaju zavisne varijable c_4. Taj ispis možemo spriječiti dodajući opciju *nouni* iza kose crte u naredbi *model*.

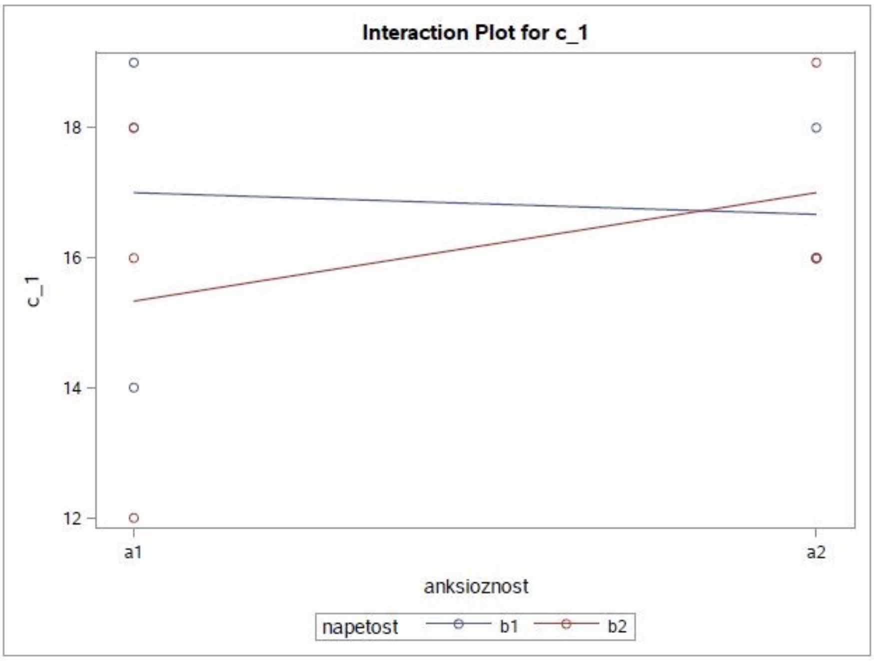
Dependent Variable: c_1

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	5.66666667	1.88888889	0.37	0.7799
Error	8	41.33333333	5.16666667		
Corrected Total	11	47.00000000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	c_1 Mean
0.120567	13.77594	2.273030	16.50000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
anksioznost	1	1.33333333	1.33333333	0.26	0.6252
napetost	1	1.33333333	1.33333333	0.26	0.6252
anksioznost*napetost	1	3.00000000	3.00000000	0.58	0.4679

Tablica 3.12: ANOVA tablica za zavisnu varijablu c_1 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a



Slika 3.1: Interakcijski graf za zavisnu varijablu c_1 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a

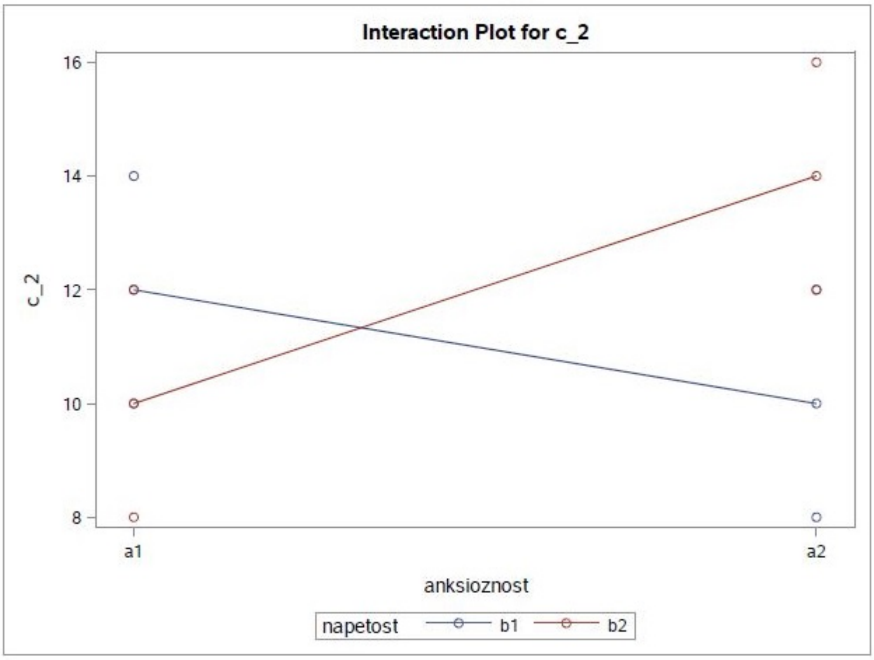
Dependent Variable: c_2

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	33.00000000	11.00000000	2.75	0.1123
Error	8	32.00000000	4.00000000		
Corrected Total	11	65.00000000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	c_2 Mean
0.507692	17.39130	2.000000	11.50000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
anksioznost	1	3.00000000	3.00000000	0.75	0.4117
napetost	1	3.00000000	3.00000000	0.75	0.4117
anksioznost*napetost	1	27.00000000	27.00000000	6.75	0.0317

Tablica 3.13: ANOVA tablica za zavisnu varijablu c_2 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a



Slika 3.2: Interakcijski graf za zavisnu varijablu c_2 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a

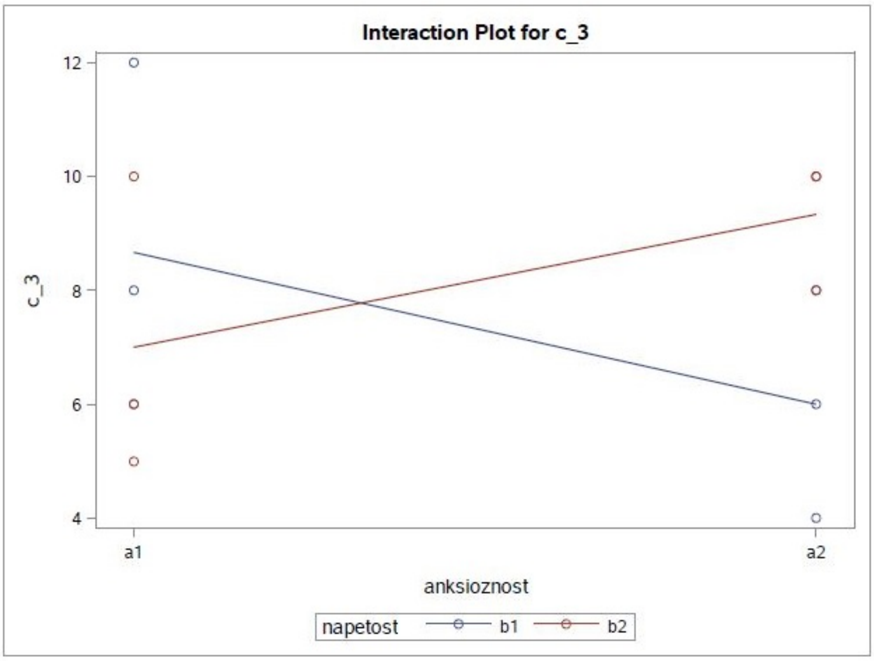
Dependent Variable: c_3

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	20.91666667	6.97222222	1.29	0.3432
Error	8	43.33333333	5.41666667		
Corrected Total	11	64.25000000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	c_3 Mean
0.325551	30.03062	2.327373	7.750000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
anksioznost	1	0.08333333	0.08333333	0.02	0.9043
napetost	1	2.08333333	2.08333333	0.38	0.5524
anksioznost*napetost	1	18.75000000	18.75000000	3.46	0.0999

Tablica 3.14: ANOVA tablica za zavisnu varijablu c_3 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a



Slika 3.3: Interakcijski graf za zavisnu varijablu c_3 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a

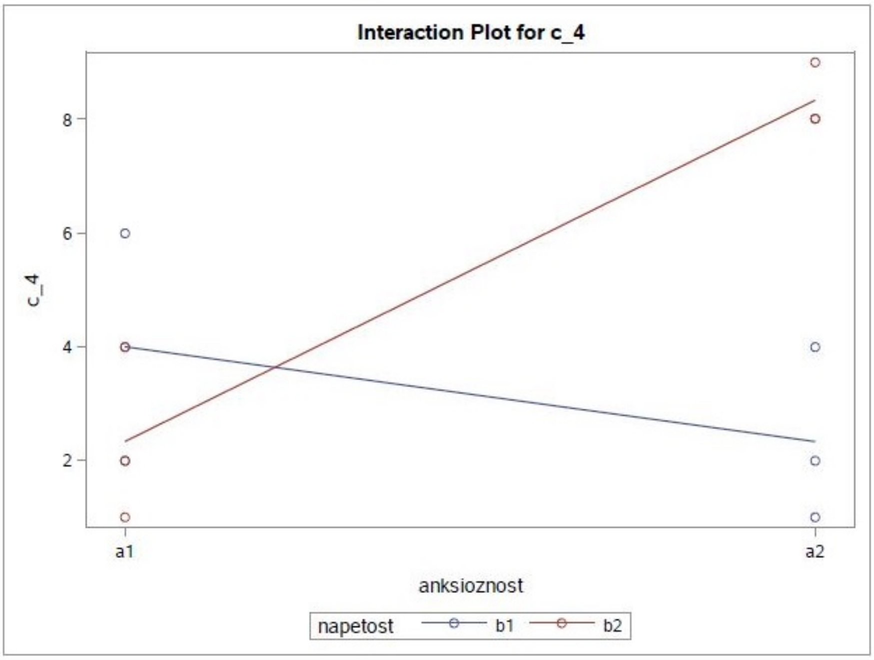
Dependent Variable: c_4

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	72.25000000	24.08333333	10.70	0.0036
Error	8	18.00000000	2.25000000		
Corrected Total	11	90.25000000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	c_4 Mean
0.800554	35.29412	1.500000	4.250000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
anksioznost	1	14.08333333	14.08333333	6.26	0.0368
napetost	1	14.08333333	14.08333333	6.26	0.0368
anksioznost*napetost	1	44.08333333	44.08333333	19.59	0.0022

Tablica 3.15: ANOVA tablica za zavisnu varijablu c_4 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a



Slika 3.4: Interakcijski graf za zavisnu varijablu c_4 po grupnim varijablama anksioznost i napetost-Ispis iz SAS-a

Sljedeći dio ispisa je dan u matrici 3.16. To je korelacijska matrica. Ispod korelacija je p-vrijednost za par vremena.

Partial Correlation Coefficients from the Error SSCP Matrix / Prob > |r|				
DF = 8	c_1	c_2	c_3	c_4
c_1	1.000000	0.494934 0.1755	0.189029 0.6262	0.109985 0.7782
c_2	0.494934 0.1755	1.000000	0.751921 0.0195	0.583333 0.0992
c_3	0.189029 0.6262	0.751921 0.0195	1.000000	0.954820 <.0001
c_4	0.109985 0.7782	0.583333 0.0992	0.954820 <.0001	1.000000

Tablica 3.16: Korelacijska matrica-Ispis iz SAS-a

U tablici 3.17 testiramo pretpostavku sferičnosti za transformirane podatke i na ortogonalnim komponentama tj. nekoreliranim. Važno je da uvijek pogledamo test za ortogonalne komponente. Ukoliko nije značajan znači da je uvjet sferičnosti zadovoljen. U našam slučaju p-vrijednost je 0.0466 što je manje od razine značajnosti 0,05 pa uvjet sferičnosti nije zadovoljen.

Sphericity Tests				
Variables	DF	Mauchly's Criterion	Chi-Square	Pr > ChiSq
Transformed Variates	5	0.1874661	11.254057	0.0466
Orthogonal Components	5	0.1874661	11.254057	0.0466

Tablica 3.17: Test sferičnosti-Ispis iz SAS-a

Tablica 3.18 testira razlike između subjekata (eng. Beetween Subjects Effects). Njome testiramo da anksioznost i napetost nemaju efekt na broj netočnih odgovora u ispitivanju.

Izvore varijabilnosti možemo usporediti sa tablicom 3.8. Oznaka za sumu kvadrata prvog faktora(anksioznost) nam je $SSA = 10.083$, drugog faktora(napetost) $SSB = 8.33$, te njihove interakcije $SSAB = 80.083$ sa pripadnim stupnjevima slobode ($df_A = p - 1 = 2 - 1 = 1, df_B = q - 1 = 2 - 1 = 1, df_{AB} = (p-1)(q-1) = (2-1)(2-1) = 1$), a za neobjašnjenu varijabilnost $SSE_{Between} = 82.5$ sa stupnjevima slobode ($df_{E(Between)} = pq(n-1) = 2 \times 2 \times (3-1) = 8$). Vrijednost F_A statistike je 0.98, a p-vrijednosti 0.3517 pa prema tome ne odbacujemo nultu hipotezu. Odnosno zaključujemo da razlike među sredinama grupa nisu značajne. $F_B = 0.81$, a pripadna p-vrijednost 0.949, pa opet ne odbacujemo nultu hipotezu o jednakosti sredina. Vrijednost F_{AB} interakcije iznosi 7.77, a

The GLM Procedure
Repeated Measures Analysis of Variance
Tests of Hypotheses for Between Subjects Effects

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
anksioznost	1	10.08333333	10.08333333	0.98	0.3517
napetost	1	8.33333333	8.33333333	0.81	0.3949
anksioznost*napetost	1	80.08333333	80.08333333	7.77	0.0237
Error	8	82.50000000	10.31250000		

Tablica 3.18: Tablica između subjekata - Ispis iz SAS-a

p-vrijednost je 0.0237 pa odbacujemo nultu hipotezu, tj. interakcija 'anksioznost*napetost' je značajna.

Druga važna tablica je 3.19 (eng. Within Subjects Efects). U njoj testiramo ostale hipoteze koje smo obradili. Prvi izvor varijabilnosti nam je "ispitivanje" a njegovu sumu kvadrata u tablici 3.8 smo označili sa $SSC = 991.50$ sa 3 stupnja slobode ($df_C = r - 1 = 4 - 1 = 3$). Sljedeći izvor varijabilnosti su nam interakcije dva faktora: $SSAC = 8.42$ (ispitivanje*anksioznost) sa 3 stupnja slobode ($df_{AC} = (p-1)(r-1) = (2-1)(4-1) = 3$) i $SSBC = 12.167$ (ispitivanje*napetost) sa 3 stupnja slobode ($df_{BC} = (q-1)(r-1) = (2-1)(4-1) = 3$).

The GLM Procedure
Repeated Measures Analysis of Variance
Univariate Tests of Hypotheses for Within Subject Effects

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F	Adj Pr > F	
						G - G	H-F-L
ispitivanje	3	991.5000000	330.5000000	152.05	<.0001	<.0001	<.0001
ispitivanje*anksioznost	3	8.4166667	2.8055556	1.29	0.3003	0.3002	0.3021
ispitivanje*napetost	3	12.1666667	4.0555556	1.87	0.1624	0.1967	0.1881
ispitivanje*anksioznost*napetost	3	12.7500000	4.2500000	1.96	0.1477	0.1847	0.1752
Error(ispitivanje)	24	52.1666667	2.1736111				

Greenhouse-Geisser Epsilon	0.5361
Huynh-Feldt-Lecoutre Epsilon	0.6507

Tablica 3.19: Tablica unutar subjekata - Ispis iz SAS-a

Zatim imamo interakciju tri faktora $SSABC = 12.75$ (ispitivanje*anksioznost*napetost) sa 3 stupnja slobode ($df_{ABC} = (p-1)(q-1)(r-1) = (2-1)(2-1)(4-1) = 3$). Na kraju je neobjašnjena varijabilnost $SSE_{Within} = 52.166$ sa stupnjevima slobode ($df_{EWithin} = pq(n-1)(r-1) = 2 \times 2 \times (3-1)(4-1) = 24$).

Dva zadnja stupca u tablici su nam prilagođene p-vrijednosti koje gledamo kada pretpostavka sferičnosti nije zadovoljena, što je naš slučaj. $G-G$ označava Greenhouse-Geisserovu prilagodbu, a $H-F-L$ Huynh-Feldt-Lecoutrovu prilagodbu p-vrijednosti. Vrijednost F_C nam je 152.05, a pripadna prilagođena G-G p-vrijednost nam je manja od 0.0001 pa nam je "ispitivanje" značajno. Vrijednost F_{AC} statistike nam je 1.29, a p-vrijednosti 0.30, odnosno $F_{BC} = 1.87$, a pripadna p-vrijednosti 0.19 pa nam interakcije 'ispitivanje*anksioznost' i 'ispitivanje*napetost' nisu značajne. Također, $F_{ABC} = 1.96$, a p-vrijednosti 0.18 pa ni interakcija ispitivanje*anksioznost*napetost nije značajna.

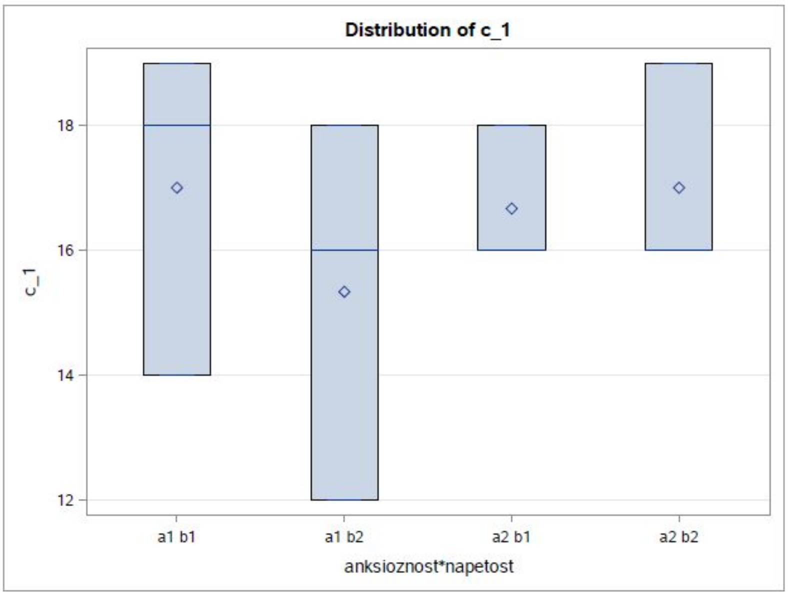
U donjoj tablici su Greenhouse-Geisserov i Huynh-Feldt-Lecoutrovi epsiloni koji se koriste za prilagodbu stupnjeva slobode koji onda produciraju spomenute prilagođene p-vijednosti.

U tablici 3.20 imamo deskriptivne statistike po razinama varijabli 'anksioznost' i 'napetost' za svaku razinu zavisne varijable 'ispitivanja' sa pripadnim box-plotovima.

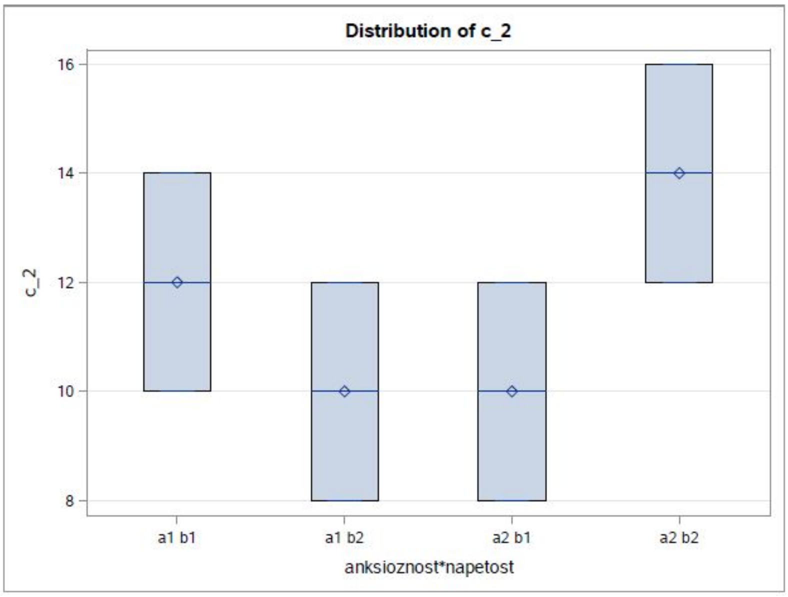
The GLM Procedure

Level of anksioznost	Level of napetost	N	c_1		c_2		c_3		c_4	
			Mean	Std Dev	Mean	Std Dev	Mean	Std Dev	Mean	Std Dev
a1	b1	3	17.0000000	2.64575131	12.0000000	2.00000000	8.66666667	3.05505046	4.00000000	2.00000000
a1	b2	3	15.3333333	3.05505046	10.0000000	2.00000000	7.00000000	2.64575131	2.33333333	1.52752523
a2	b1	3	16.6666667	1.15470054	10.0000000	2.00000000	6.00000000	2.00000000	2.33333333	1.52752523
a2	b2	3	17.0000000	1.73205081	14.0000000	2.00000000	9.33333333	1.15470054	8.33333333	0.57735027

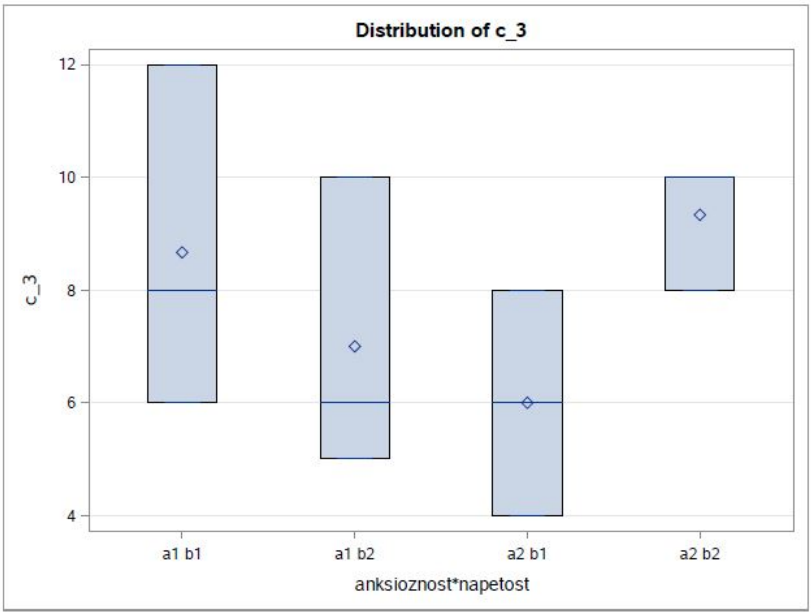
Tablica 3.20: Deskriptivne statistike za zavisnu varijablu'ispitivanja'-Ispis iz SAS-a



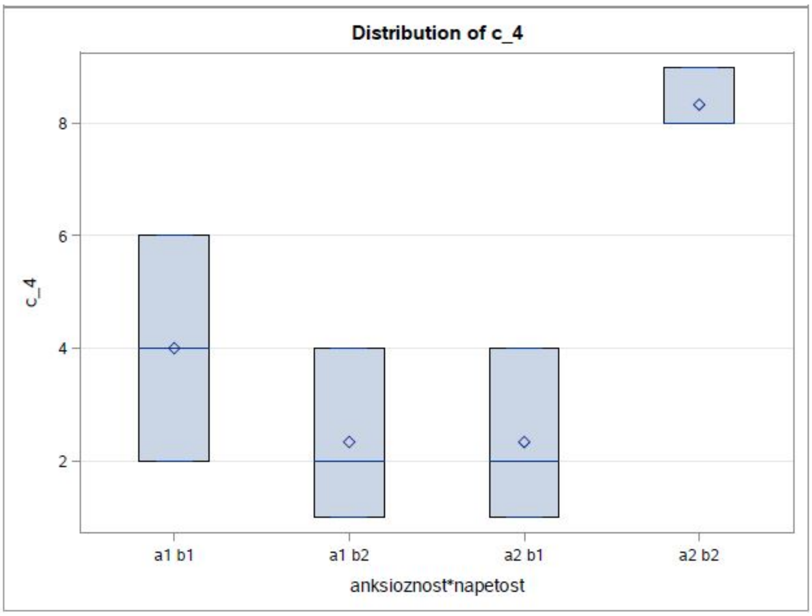
Slika 3.5: Box-plot za interakciju 'anksioznost*napetost' u odnosu na zavisnu varijablu c_1-Ispis iz SAS-a



Slika 3.6: Box-plot za interakciju 'anksioznost*napetost' u odnosu na zavisnu varijablu c_2-Ispis iz SAS-a



Slika 3.7: Box-plot za interakciju 'anksioznost*napetost' u odnosu na zavisnu varijablu c_3-Ispis iz SAS-a



Slika 3.8: Box-plot za interakciju 'anksioznost*napetost' u odnosu na zavisnu varijablu c_4-Ispis iz SAS-a

Bibliografija

[1] B. J. Winer, D. R. Brown, K. M. Michels: *Statistical Principles In Experimental Design*. McGraw-Hill, 1991.

[2] Karpinski, A.: *Factorial ANOVA: Higher order ANOVAs*. Dostupno na `http://astro.temple.edu/~andykarp/Graduate_Statistics/Graduate_Statistics_files/Ch%2008%20Lecture%20Notes.pdf`, 2011 (svibanj 2016.).

[3] Pauše, Ž.: *Uvod u matematičku statistiku*. Školska Knjiga, 1993.

[4] Petrak, Olivera: *T-test*. Dostupno na `https://ldap.zvu.hr/~oliverap/VjezbeIzStatistike/7_T-test%20vje%C5%BEbe.pdf`, 2010 (lipanj 2016.).

[5] Sarapa, N.: *Teorija vjerojatnosti*. Školska Knjiga, 2002.

Sažetak

Glavna tema ovog rada je višefaktorska analiza varijance ponovljenih mjerenja. Analiza varijance ponovljenih mjerenja je statistička metoda kojom testiramo jednakost sredina na podacima čija mjerenja se ponavljaju. U prvom poglavlju,tj. uvodnome, djelomično je obrađen t-test za zavisne uzorke. Zatim je u drugom poglavlju obrađena analiza varijance s jednim i s više faktora. Objašnjena je varijabilnost rastavom na različite sume kvadrata, dan je matematički model, a sve statistike sa sumama kvadrata i pripadnim stupnjevima slobode su onda sažete u standardnim ANOVA tablicama. Nakon toga, obrađena je i analiza varijance ponovljenih mjerenja s jednim i sa više faktora. Nadograđujući već obrađene modele bilo je lakše objasniti i razumjeti daljnje rastavljenje definiranih suma kvadrata. Kao glavni razlog dodatnih suma kvadrata pokazala su se dodatna mjerenja na istim subjektima, kojima homogeniziramo uzorak i smanjujemo neobjašnjenu varijabilnost. Rečeno je koje su prednosti, dan je model, navedene su i obrađene pretpostavke te su opet sve statistike dane u ANOVA tablicama.

Na primjerima su numerički obrađeni modeli i kroz njih smo pokazali konkretnu primjenu obrađenih metoda. Time smo diplomski rad učinili ne samo teoretskim nego i primjenjenim. Također smo se kroz primjere bolje upoznali sa programskim sustavom SAS, jednim od najpopularnijih alata za analizu podataka kako u akademskim krugovima tako i u poslovnom svijetu. Iako se analiza varijance već duže vrijeme primjenjuje za razne statističke probleme, ona nije zastarjela. Štoviše, jedna je od najkorištenijih i najaktualnijih statističkih metoda koja se i dalje aktivno razvija.

Summary

The main topic of this paper was multifactorial analysis of variance of repeated measures. Analysis of variance of repeated measures is a statistical method used to test the equality of means having repeated measurments on same subjects. In first chapter partially was processed t-test for paired samples. In the second section we explained one-way and multi-way analysis of variance. The variability was explained by dividing on various sum of squares, it was given the mathematical model and all statistics with sum of squares and coresponding degrees of freedom are given in standard ANOVA tables. Afterwards, it was elaborated analysis of variance of repeated measures with one and multi factors. Already elaborated models were upgraded and it was easier to explain and understand further dividing of defined sum of squares. It was shown that a main cause of extra sum of squares were additional measurments on same subjects, which caused less unexplained variability as a result of more homogenized sample. The adventages were discussed, mathematical model was given, assumptions were named and elaborated and again all relevant statistics were given in standard ANOVA tables.

Throughtout examples models were numerically analyzed and through them we have shown concrete application processed methods. By that, this paper is not just theoretical but applied as well. Also, throughtout examples was introduced program system SAS, which is one of the most popular tools for data analysis in academic and business world. Although the analysis of variance is used for a long time, for diverse statistical problems, it hasn't become old fashioned. Moreover, it is one of the most used and up to date statistical method, which is still actively developing.

Životopis

Zovem se Nikolina Molnar. Dana 18.02.1989. rođena sam u Zagrebu gdje sam i provela svoje djetinjstvo.

Moje osnovnoškolsko obrazovanje započelo je 1995. u Osnovnoj školi Sesvetski Kraljevec. Nakon završene osnovne, 2003. godine upisala sam Školu za cestovni promet, smjer tehničar cestovnog prometa.

Od 2007. godine studiram na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu na Matematičkom odsjeku. Prve tri godine pohađala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički, dok 2012. nakon završenog preddiplomskog upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike.