SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Nemec

NEJEDNAKOSTI IZMEĐU OSNOVNIH SREDINA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, srpanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Dva matematička izraza povezana znakom $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ili $\neq$ tvore nejednakost. U ovom radu posvetit ćemo se nejednakostima između osnovnih sredina.

Rad ćemo započeti podsjećanjem na neka osnovna svojstva nejednakosti, koja slijede iz aksioma realnih brojeva. Zatim ćemo definirati osnovne sredine za n pozitivnih realnih brojeva, te izreći glavni teorem ovog rada – teorem o nejednakosti između osnovnih sredina.

U drugom ćemo poglavlju najprije dokazati istinitost nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine u slučaju dva, tri i četiri pozitivna realna broja. Zatim ćemo ideje primijenjene u tim dokazima iskoristiti za dokaz nejednakosti u općem slučaju, odnosno za n pozitivnih realnih brojeva. Nakon toga pokazat ćemo kako se ta nejednakost može iskoristiti pri dokazivanju raznih nejednakosti, ali i u nekim drugim problemima koji nisu usko vezani uz nejednakosti. Na kraju poglavlja ponudit ćemo rješenja dva zadatka s Međunarodnih matematičkih olimpijada, koji se mogu riješiti primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine.

U trećem poglavlju dokazat ćemo nejednakost između geometrijske i harmonijske, te između aritmetičke i kvadratne sredine. Slično kao i u drugom poglavlju, nakon dokaza prikazat ćemo i neke primjere korištenja tih nejednakosti pri rješavanju raznih zadataka.

Poglavlje 1

Definicije i osnovna svojstva nejednakosti

1.1 Osnovna svojstva nejednakosti

Podsjetimo se najprije aksiomatike skupa realnih brojeva koja karakterizira sva njegova svojstva s obzirom na algebarsku strukturu i uređaj na njemu. Aksiome zbrajanja i množenja ćemo samo navesti imenom. Detaljnije se može vidjeti u [3].

Na $\mathbb{R}$ su definirane dvije operacije:

- zbrajanje: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- množenje: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

koje zadovoljavaju sljedeće aksiome.

(A1) Zbrajanje je asocijativno.

(A2) Postoji neutralni element (nula) za zbrajanje.

(A3) Svaki element iz $\mathbb{R}$ ima suprotni element, tj. inverz za zbrajanje.

(A4) Zbrajanje je komutativno.

Iz aksioma (A1)–(A4) imamo da je $(\mathbb{R}, +)$ komutativna grupa.

(A5) Množenje je asocijativno.

(A6) Postoji neutralni element (jedinica) za množenje.

(A7) Svaki element iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ima recipročni element, tj. inverz za množenje.

(A8) Množenje je komutativno.

(A9) Vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju.

Iz aksioma (A5)–(A9) imamo da je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna grupa.

Uređenu trojku $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazivamo poljem.

Nama će od interesa posebno biti sljedećih pet aksioma, koji su vezani uz potpuni uređaj.
Na skupu $\mathbb{R}$ zadan je potpun (linearan) uređaj $\leq$ za kojeg vrijede sljedeći aksiomi.

(A10) Potpunost:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

(A11) Antisimetričnost:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y.$$

(A12) Tranzitivnost:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \;\; ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow x \leq z.$$

Uređaj je u skladu s operacijama zbrajanja i množenja.

(A13) Usklađenost sa zbrajanjem:
$$(x \leq y) \Rightarrow (\forall z, (x + z \leq y + z)).$$

(A14) Usklađenost s množenjem:
$$((0 \leq x) \wedge (0 \leq y)) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno polje.

Konačno, aksiom po kojem se skup $\mathbb{R}$ razlikuje od primjerice skupa $\mathbb{Q}$ jest aksiom potpunosti.

(A15) Svaki neprazan odozgo omeđen skup u $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je potpuno uređeno polje.

Neka su a i b realni brojevi. Definiramo:

1. $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$,
2. $a < b \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \neq b)$,
3. $a > b \Leftrightarrow (a \geq b \wedge a \neq b)$.

Sada ćemo izdvojiti neka svojstva nejednakosti koja će se koristiti u nastavku. Ta su svojstva posljedica nabrojanih aksioma.

Neka su a, b, c, d realni brojevi. Tada vrijedi:

1. Ako je $a > b$, tada je $b < a$.
2. Ako je $a > b$ i $b > c$, tada je $a > c$.
3. Ako je $a > b$, tada je $a + m > b + m$ za bilo koji $m \in \mathbb{R}$.
4. Ako je $a > b$ i $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, tada je $a \cdot m > b \cdot m$ i $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.
5. Ako je $a > b$ i $m \in \mathbb{R}$, $m < 0$, tada je $a \cdot m < b \cdot m$ i $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.
6. Ako je $a > b > 0$, tada je $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
7. Ako je $a > b$ i $c > d$, tada je $a + c > b + d$.
8. Ako su a, b, c, d pozitivni realni brojevi i $a > b$ i $c > d$, tada je $a \cdot c > b \cdot d$.
9. Ako su a, b, c, d pozitivni realni brojevi i $a > b$ i $c < d$, tada je $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.
10. Ako su a, b pozitivni realni brojevi, n prirodan broj i $a > b$, tada je $a^n > b^n$.
11. Ako su a, b pozitivni realni brojevi, n prirodan broj i $a > b$, tada je $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.
12. Za svaki realan broj a vrijedi: $a^2 \geq 0$.

1.2 Definicije osnovnih sredina

U svakodnevnom životu često se susrećemo s pojmom *prosjek*. Učenici na kraju školske godine računaju prosjek ocjena, košarkaši se rangiraju prema prosjeku koševa, a vijesti o globalnom zatopljenju potkrepljuju se podatcima o sve većim prosječnim temperaturama. U takvim situacijama pod pojmom *prosjek* gotovo se uvijek podrazumijeva *aritmetička sredina*. Međutim, aritmetička sredina, iako vjerojatno najupotrebljivanija, nije i jedina sredina koju možemo računati.

Definirajmo osnovne sredine za n pozitivnih realnih brojeva.

Definicija 1.2.1. *Neka je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ bilo koja n-torka pozitivnih realnih brojeva.*

Harmonijska sredina brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je broj

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Geometrijska sredina brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je broj

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Aritmetička sredina brojeva $a_1, a_2 \dots, a_n$ je broj

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Kvadratna sredina brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ je broj

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Napomena 1.2.2. *Aritmetičku i kvadratnu sredinu možemo definirati za bilo koje realne brojeve, ne nužno pozitivne. Ipak, za potrebe ovog rada koristit ćemo aritmetičku sredinu definiranu samo za pozitivne realne brojeve.*

Cilj rada je dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.2.3 (Nejednakosti između osnovnih sredina)**.** *Neka je a bilo koja n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a).$$

Radi jednostavnosti i kratkoće pisanja, uvest ćemo kratice:

- AG nejednakost – nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine,
- AH nejednakost – nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine,
- AK nejednakost – nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine,
- GH nejednakost – nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine.

Poglavlje 2

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

2.1 AG nejednakost za dva, tri i četiri broja

U ovom ćemo poglavlju dokazati nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine u slučaju dva, tri i četiri pozitivna broja.

Dokažimo najprije nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna realna broja a i b.

Teorem 2.1.1 (AG nejednakost za dva pozitivna broja)**.** *Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{2.1}$$

Pritom jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Dokaz. Krenimo od dane nejednakosti:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ona je redom ekvivalentna s

$$a+b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Sada, budući da su $a, b > 0$, uočavamo da izraz na lijevoj strani možemo zapisati kao kvadrat binoma:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0. \tag{2.2}$$

Došli smo do nejednakosti koja je istinita za bilo koja dva pozitivna realna broja a i b, pa je zato istinita i njoj ekvivalentna početna nejednakost. Jednakost u (2.2) postiže se ako i samo ako je $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, odnosno $a = b$, pa isto vrijedi i za nejednakost (2.1). □

Dokažimo sada da vrijedi nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za četiri pozitivna realna broja.

Teorem 2.1.2 (AG nejednakost za četiri pozitivna broja)**.** *Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}. \tag{2.3}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = d$.

Dokaz. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b+c+d}{2}}{2} &= \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \\ &\overset{(2.1)}{\geq} \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \\ &\overset{(2.1)}{\geq} \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost (2.3) je istinita. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a + b = c + d$ i $a = b,\ \ c = d$, odnosno $a = b = c = d$. □

Dokažimo još da nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi i za tri pozitivna realna broja.

Teorem 2.1.3 (AG nejednakost za tri pozitivna broja)**.** *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \tag{2.4}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Dokaz. Neka su $a, b, c > 0$ i neka je $d = \frac{a+b+c}{3}$. Tada je prema teoremu 2.1.2

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

tj.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

Nakon potenciranja dobivene nejednakosti sa 4 imamo

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3},$$

odnosno nakon dijeljenja s $\frac{a+b+c}{3}$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

Konačno, korjenovanjem (kubni korijen) dobivamo

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Dakle, nejednakost (2.4) je točna, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{a+b+c}{3}$, odnosno $a = b = c$. □

2.2 Nekoliko dokaza AG nejednakosti za n brojeva

Dokažimo sada AG nejednakost u općem slučaju za n brojeva. Prikazat ćemo četiri različita dokaza.

Teorem 2.2.1 (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine)**.** *Neka je a bilo koja n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \geq G_n(a) \tag{2.5}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Prvi dokaz. Ovaj se dokaz u literaturi može pronaći kao Cauchyev dokaz AG nejednakosti.

Dokaz ćemo provesti posebnim oblikom matematičke indukcije. Najprije ćemo dokazati da nejednakost vrijedi za sve brojeve n oblika $n = 2^k$. Zatim ćemo dokazati implikaciju: ako nejednakost vrijedi za n brojeva, tada vrijedi i za $n-1$ brojeva. Iz tog dvoje slijedit će tvrdnja da nejednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Pogledajmo najprije slučaj kada je n neka potencija broja 2, odnosno kada je $n = 2^k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da je nejednakost istinita u tom slučaju. Bazu indukcije ($k = 1$, odnosno $n = 2$) smo već dokazali. Naime, tada se nejednakost (2.5) pretvara u

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

što smo već dokazali da je istinito, s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, tj. da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}}, \tag{2.6}$$

za bilo koje $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k} > 0$.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}}$ pozitivni realni brojevi. Tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k}\right) + \left(\frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2}.$$

Prema teoremu 2.1.1, vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)},$$

a tada primjenom pretpostavke indukcije (2.6) dolazimo do

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}.$$

Na kraju, vidimo da je zadnji izraz jednak $\sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2k+1}}$, odnosno zaključujemo

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2k+1}},$$

čime smo dokazali da nejednakost (2.5) vrijedi za svaki $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Ostalo nam je dokazati implikaciju: ako nejednakost (2.5) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi i za $n-1$. Pretpostavimo da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{2.7}$$

za neki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za bilo koje $a_1, \ldots, a_n$, pa posebno možemo uzeti da je $a_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$, odnosno a_n je aritmetička sredina prvih $n-1$ članova. Na lijevoj strani dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \\
&= \frac{(n-1)a_1 + (n-1)a_2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n(n-1)} \\
&= \frac{na_1 + na_2 + \cdots + na_{n-1}}{n(n-1)} \\
&= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.
\end{aligned}$$

S druge strane, na desnoj strani imamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)} \\
&= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ako sada u (2.7) uvrstimo dobivene rezultate, dolazimo do

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}.$$

Potenciranjem s n dobivamo

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right),$$

a zatim dijeljenjem s $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

Na kraju korjenovanjem ($(n-1)$. korijen) dolazimo do

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

Time smo dokazali da (2.5) vrijedi i za $n-1$ brojeva.

Dakle, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za bilo koji n oblika $n = 2^k$, te smo dokazali da vrijedi implikacija: ako tvrdnja vrijedi za n brojeva, tada vrijedi i za $n-1$ brojeva. Time je tvrdnja dokazana za svaki prirodan broj n.

Dokažimo još da jednakost nastupa ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, tada očito imamo jednakost u (2.5).

Pretpostavimo sada da su bar dva od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a_1 \neq a_2$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} \\
&\overset{AG}{\geq} \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 a_3 \cdots a_n\right]^{\frac{1}{n}} \\
&> (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}$$

jer je

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}, \quad \text{za } a_1 \neq a_2.$$

□

Drugi dokaz. Ovo je veoma poznat dokaz AG nejednakosti. Može se naći u [6].

I ovaj se dokaz provodi matematičkom indukcijom.

Bazu indukcije, odnosno slučaj $n = 2$ smo već dokazali.

Radi jednostavnosti zapisa, u nastavku ćemo s A_k označavati aritmetičku, a s G_k geometrijsku sredinu bilo kojih k pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Pretpostavimo da je nejednakost (2.5) istinita za neki $n = k$, tj. da vrijedi

$$A_k \geq G_k. \tag{2.8}$$

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ pozitivni realni brojevi. Označimo

$$A = \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k}$$

i

$$G = \sqrt[k]{a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}}. \tag{2.9}$$

Primijenimo AG nejednakost na k brojeva $a_{k+1}, \underbrace{A_{k+1}, A_{k+1}, \ldots, A_{k+1}}_{k-1 \text{ brojeva}}$ i dobivamo

$$\frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq \sqrt[k]{a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}},$$

tj.

$$A \geq G. \tag{2.10}$$

Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Budući da je

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1},$$

vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = (k+1)A_{k+1}.$$

Uvrstimo to u (2.11)

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k-1}}{k} \\ &= \frac{kA_{k+1} + A_{k+1} + kA_{k+1} - A_{k+1}}{k} \\ &= 2A_{k+1}. \end{aligned}$$

Odavde je

$$A_{k+1} = \frac{A_k + A}{2} \geq \sqrt{A_k A} \geq \sqrt{G_k G},$$

iz AG nejednakosti za dva broja i pretpostavke indukcije (2.8) te međurezultata (2.10). Dalje imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{G_k G} &= (G_k G)^{\frac{1}{2}} = (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} \\ &\overset{(2.9)}{=} (G_k^k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}} \end{aligned}$$

Budući da je

$$G_k^k a_{k+1} = (\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k})^k \cdot a_{k+1} = a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1} = G_{k+1}^{k+1},$$

dobivamo

$$\sqrt{G_k G} = (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}}.$$

Dakle, dobili smo da je

$$A_{k+1} \geq (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}},$$

a to je ekvivalentno s

$$A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1}.$$

Raspišimo tu nejednakost:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1}\right)^{2k} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k+1}) \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k-1},$$

Dijeljenjem sa $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k-1}$ nejednakost postaje

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geq (a_1 a_2 \cdots a_{k+1}).$$

Konačno, zadnja je nejednakost ekvivalentna s

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}},$$

odnosno

$$A_{k+1} \geq G_{k+1},$$

čime je induktivni dokaz završen. □

Treći dokaz. Neka je A aritmetička, a G geometrijska sredina n pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Opet ćemo koristiti matematičku indukciju da bismo pokazali da je $A \geq G$.

Bazu indukcije, odnosno tvrdnju za $n = 2$ smo već dokazali u teoremu 2.1.1. Pretpostavimo sada da su $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ i da tvrdnja vrijedi za $n-1$ brojeva. Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Očigledno je

$$a_1 = \frac{\overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{n \text{ pribrojnika}}}{n} \leq A \leq \frac{\overbrace{a_n + a_n + \ldots + a_n}^{n \text{ pribrojnika}}}{n} = a_n. \tag{2.12}$$

Promatrajmo $n-1$ brojeva $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, (a_1 + a_n - A)$. Iz nejednakosti (2.12) očito je

$$a_1 + a_n - A \geq 0.$$

Primjenom pretpostavke na $n-1$ brojeva $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, (a_1 + a_n - A)$ dobivamo

$$\left(\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A)}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A)}{n-1} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n - A}{n-1} \\
&= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}{n-1} \\
&= \frac{\frac{1}{n}(na_1 + na_2 + \cdots + na_n - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)}{n-1} \\
&= \frac{(n-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n(n-1)} \\
&= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A,
\end{aligned}$$

imamo

$$A^{n-1} \geq a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A),$$

a odavde množenjem nejednakosti sa A dobivamo

$$A^n \geq A \cdot a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Sada želimo pokazati da je

$$A \cdot a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A) \geq a_1 a_2 \cdots a_n = G^n.$$

Ako podijelimo tu nejednakost s $a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$, dobivamo

$$A(a_1 + a_n - A) \geq a_1 a_n.$$

Sada imamo

$$Aa_1 - A^2 + Aa_n - a_1a_n \geq 0,$$

odnosno

$$-A(A - a_1) + a_n(A - a_1) \geq 0,$$

$$(A - a_1)(a_n - A) \geq 0.$$

Zadnja je nejednakost istinita zbog (2.12). Dakle, $A^n \geq G^n$, a jer su A i G pozitivni, vrijedi da je i $A \geq G$, odnosno nejednakost (2.5) vrijedi i za n brojeva. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Pogledajmo još kada vrijedi jednakost.
Pretpostavimo da $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nisu svi međusobno jednaki. Tada je $a_1 < A < a_n$, pa iz prethodnih nejednakosti dobivamo $A^n > G^n$, tj. $A > G$.
Dakle, $A = G$ ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Prije nego ponudimo četvrti dokaz, dokažimo sljedeću tvrdnju.

Lema 2.2.2. *Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Ako je $a_1a_2 \cdots a_n = 1$, tada je*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n, \tag{2.13}$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Kada je $n = 1$, tada je $a_1 = 1$ i nejednakost $a_1 \geq 1$ je očito istinita.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1a_2 \cdots a_na_{n+1} = 1$. Tada su moguća dva slučaja.

Prvi mogući slučaj je da je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1} = 1$. Tada je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = n + 1$ i tvrdnja leme je istinita.

Drugi je slučaj da nisu svi a_i jednaki 1. U tom slučaju među brojevima a_1, a_2, $\ldots$, a_n, a_{n+1} postoje brojevi koji su veći i brojevi koji su manji od 1. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $a_n > 1$ te $a_{n+1} < 1$. Promotrimo sada n brojeva a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}, $(a_n \cdot a_{n+1})$. Po pretpostavci je produkt tih brojeva jednak 1, te je prema pretpostavci indukcije

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \cdot a_{n+1} \geq n. \tag{2.14}$$

Na lijevoj strani želimo doći do izraza $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$. To znači da ćemo htjeti dodati $a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1}$. Raspišimo malo taj izraz:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} - a_n a_{n+1} &= a_n - a_n a_{n+1} + a_{n+1} - 1 + 1 \\ &= a_n(1 - a_{n+1}) - 1(1 - a_{n+1}) + 1 \\ &= 1 + (a_n - 1)(1 - a_{n+1}). \end{aligned}$$

Sada u (2.14) dodamo gornju jednakost i dobivamo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1 + (a_n - 1)(1 - a_{n+1}),$$

a jer je $a_n > 1$ i $a_{n+1} < 1$, vrijedi $(a_n - 1)(1 - a_{n+1}) > 0$ pa imamo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} > n + 1.$$

Dakle, dokazali smo da nejednakost (2.13) vrijedi i za $n + 1$, pa prema principu matematičke indukcije vrijedi za svaki prirodan broj n. Time je nejednakost (2.13) dokazana. Kako smo vidjeli, jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. $\square$

Četvrti dokaz. Dokažimo sada AG nejednakost koristeći prethodnu lemu. (Napomena: ovaj elegantan dokaz, zajedno s navedenom lemom, može se naći u [2].)

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi i neka je $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Produkt n pozitivnih brojeva $\frac{a_1}{G}, \frac{a_2}{G}, \ldots, \frac{a_n}{G}$ iznosi

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdots \frac{a_n}{G} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{G^n} = \frac{G^n}{G^n} = 1,$$

pa iz leme 2.2.2 znamo da vrijedi

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} \geq n,$$

tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq G$$

a to je

$$A \geq G.$$

Time je AG nejednakost dokazana.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{a_1}{G} = \frac{a_2}{G} = \ldots = \frac{a_n}{G},$$

tj. ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. $\square$

2.3 Primjena AG nejednakosti pri dokazivanju nejednakosti

U ovom ćemo dijelu na nekoliko primjera pokazati kako se razne nejednakosti mogu dokazati primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine. Takvi zadatci su vrlo česti na matematičkim natjecanjima. Velik broj zadataka, kao i razne strategije i postupci rješavanja nejednakosti mogu se naći u [7]. Primjeri koji slijede mogu se naći u [2].

Primjer 2.3.1. *Dokažimo da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0.$$

Dokaz 1. Nakon množenja, nejednakost postaje

$$a^2b+ab^2-2abc+b^2c+bc^2-2abc+a^2c+ac^2-2abc\geq 0,$$

odnosno

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\geq 6abc. \tag{2.15}$$

Dokažimo da je ta nejednakost istinita.

Ako na izraz na lijevoj strani primijenimo AG nejednakost, dobivamo

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\geq 6\sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot b^2c\cdot bc^2\cdot a^2c\cdot ac^2},$$

odnosno

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2\geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc.$$

Dakle, nejednakost (2.15) je istinita, pa je istinita i njoj ekvivalentna početna nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^2b=ab^2=b^2c=bc^2=a^2c=ac^2$, odnosno $a=b=c$. □

Dokaz 2. Podijelimo danu nejednakost sa $abc>0$. Dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a+b-2c}{c}+\frac{b+c-2a}{a}+\frac{a+c-2b}{b}\geq 0.$$

Ta je nejednakost ekvivalentna s

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-2+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-2\geq 0,$$

odnosno
$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6.$$
Iz AG nejednakosti dobivamo da je
$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}=2.$$
Analogno dobivamo
$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2,$$
te
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$
Zbrajanjem prethodnih triju nejednakosti dolazimo do
$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6,$$
a to je nejednakost koja je ekvivalentna početnoj, pa je i početna nejednakost istinita. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$. □

Primjer 2.3.2. *Dokažimo da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*
$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Dokaz. Krenimo od zadanog izraza na lijevoj strani. Primjenjujući AG nejednakost dolazimo do:
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} &\overset{AG}{\geq} 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b}}}\\ &= 3\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\\ &\overset{AG}{\geq} 3\cdot\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}}\\ &= 3\sqrt{2},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Primjer 2.3.3. *Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a + b + c \leq 3$. Dokažimo da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2}.$$

Dokaz. Primijenimo li AG nejednakost na brojeve $\frac{1}{1+a}$, $\frac{1}{1+b}$, $\frac{1}{1+c}$, dobivamo

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}. \tag{2.16}$$

Sada primijenimo AG nejednakost na brojeve $(1+a)$, $(1+b)$, $(1+c)$, čime dolazimo do

$$(1+a) + (1+b) + (1+c) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)},$$

odnosno

$$3 + a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}. \tag{2.17}$$

Množenjem nejednakosti (2.16) i (2.17) imamo

$$(3 + a + b + c)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq 9,$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{3+a+b+c}. \tag{2.18}$$

Budući da iz uvjeta zadatka znamo da je $a + b + c \leq 3$, vrijedi

$$3 + a + b + c \leq 6,$$

odnosno

$$\frac{1}{3+a+b+c} \geq \frac{1}{6}.$$

Ako prethodnu nejednakost primijenimo u (2.18), dobivamo

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

što je i trebalo dokazati □

Primjer 2.3.4. *Dokažimo da za realne brojeve $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost*

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq \frac{100abc}{a+b+c}.$$

Dokaz. Imamo

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 = (a+b)^2 + (a+2c+b+2c)^2.$$

Iz AG nejednakosti znamo da vrijedi

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

i

$$a+2c \geq 2\sqrt{2ac},$$

pa primjenom tih nejednakosti dobivamo

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 + (2\sqrt{2ac} + 2\sqrt{2bc})^2,$$

odnosno

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq 4ab + 8ac + 8bc + 16c\sqrt{ab}.$$

Pogledajmo sada izraz $\frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}(a+b+c)$. Iz gornjeg razmatranja slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^2 + (a+b+4c)^2}{abc}(a+b+c) &\geq \frac{4ab + 8ac + 8bc + 16c\sqrt{ab}}{abc} \cdot (a+b+c) \\
&= \left(\frac{4}{c} + \frac{8}{b} + \frac{8}{a} + \frac{16}{\sqrt{ab}}\right)(a+b+c) \\
&= 8\left(\frac{1}{2c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + c\right).
\end{aligned}$$

Ako sada još jednom primijenimo AG nejednakost, ovaj put na izraze $\frac{1}{2c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$ i $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + c$, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b)^2 + (a+b+4c)^2}{abc}(a+b+c) \geq \\
&\qquad \geq 8 \cdot 5\sqrt[5]{\frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} \cdot 5\sqrt[5]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot c} \\
&\qquad = 8 \cdot 5\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}} \cdot 5\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{16}} \\
&\qquad = 8 \cdot 5 \cdot 5\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = 100.
\end{aligned}$$

Dobili smo da je

$$\frac{(a+b)^2 + (a+b+4c)^2}{abc} \cdot (a+b+c) \geq 100,$$

a to je ekvivalentno s

$$(a+b)^2 + (a+b+4c)^2 \geq \frac{100abc}{a+b+c},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je aritmetička sredina jednaka geometrijskoj, tj. $a = b = 2c$. □

2.4 Primjena AG nejednakosti pri pronalaženju ekstremnih vrijednosti funkcija

Problem pronalaženja ekstremnih vrijednosti funkcija najčešće se rješava pomoću derivacija. Međutim, u nekim se situacijama ekstremne vrijednosti funkcije mogu brzo naći primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine.

Primjer 2.4.1. *Između svih pravokutnih trokuta čiji je opseg jednak O, odredimo onaj trokut čija je površina najveća.*

Rješenje. Označimo s a i b duljine kateta, a sa c duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta. Znamo da vrijedi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ i $O = a + b + c$. Ako primijenimo AG nejednakost na brojeve a^2 i b^2, dobivamo

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab. \tag{2.19}$$

Znamo da je površina pravokutnog trokuta jednaka

$$P = \frac{ab}{2},$$

pa onda zbog gornje nejednakosti vrijedi

$$P \leq \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Dakle, površina trokuta je uvijek manja ili jednaka vrijednosti izraza $\frac{a^2+b^2}{4}$. To znači da je površina najviše jednaka $\frac{a^2+b^2}{4}$. Tu jednakost ćemo imati ako i samo ako vrijedi jednakost u (2.19), odnosno ako je $a = b$. Tada je

$$P_{\max} = \frac{a^2 + a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Budući da je $O = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$, za $a = b$ imamo $O = 2a + a\sqrt{2}$. Odavde slijedi da je

$$a = \frac{O}{2 + \sqrt{2}} = \frac{O}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

Dakle, radi se o jednakokračnom trokutu čije su katete dugačke $\frac{O}{2}(2 - \sqrt{2})$ i hipotenuza $O(\sqrt{2} - 1)$. Računamo površinu tog trokuta:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{O}{2}(2 - \sqrt{2})\right)^2 = \frac{O^2}{8}(6 - 4\sqrt{2})$$

Konačno,

$$P_{\max} = \frac{O^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}).$$

Primjer 2.4.2. *Odredimo minimum funkcije*

$$F(x, y, z) = (x + y)(y + z),$$

pod uvjetom da je $xyz(x + y + z) = 1$, $x, y, z > 0$.

Rješenje. Krenimo od zadanog izraza

$$\begin{aligned}(x + y)(y + z) &= xy + xz + y^2 + yz \\ &= y(x + y + z) + xz.\end{aligned}$$

Ako sada primijenimo AG nejednakost na brojeve $y(x + y + z)$ i xz, imamo

$$\frac{y(x + y + z) + xz}{2} \geq \sqrt{xyz(x + y + z)} = 1,$$

odnosno

$$y(x + y + z) + xz \geq 2.$$

Dakle

$$F(x, y, z) = (x + y)(y + z) \geq 2.$$

Ako postoje takvi x, y, z, onda je 2 minimum te funkcije.

Mimimum se postiže za primjerice $x = z = 1$ i $y = \sqrt{2} - 1$.

Primjer 2.4.3. *Nađimo maksimalnu vrijednost funkcije*

$$f(x) = \Big|x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7)\Big| \text{ za } x \in [3, 4].$$

Rješenje. Ako je $x = 3$, imamo $f(3) = 0$. Slično, ako je $x = 4$, imamo $f(4) = 0$.

Kada je $x \in \langle 3, 4 \rangle$, tada izraz $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$ sadrži četiri pozitivna i četiri negativna faktora, pa je cijeli izraz pozitivan. Zato je

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(4-x)(5-x)(6-x)(7-x).$$

Primjenjujući AG nejednakost na brojeve x i $7 - x$ imamo

$$\frac{x + (7-x)}{2} \geq \sqrt{x(7-x)},$$

tj.

$$x(7-x) \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Na analogan način dobivamo:

$$(x-1)(6-x) \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2, \ (x-2)(5-x) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ te } (x-3)(4-x) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

U svim ovim nejednakostima jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x = 7 - x, \ \ x - 1 = 6 - x, \ \ x - 2 = 5 - x \text{ te } x - 3 = 4 - x,$$

a to je za

$$x = \frac{7}{2}.$$

Zaključujemo da se maksimum funkcije f na segmentu $[3, 4]$ postiže za $x = \frac{7}{2}$, a iznosi

$$\max f(x) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11025}{256}.$$

2.5 Zadatci s Međunarodne matematičke olimpijade

Na matematičkim natjecanjima nerijetko se pojavljuju zadatci s nejednakostima. Riješit ćemo dva zadatka zadana na Međunarodnim matematičkim olimpijadama te uočiti primjenu AG nejednakosti pri rješavanju problema. Popis svih zadataka zadanih na Međunarodnim matematičkim olimpijadama može se naći na [1].

Primjer 2.5.1 (Međunarodna matematička olimpijada, 2001. godina, zadatak 2)**.** *Dokažite da je*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1 \tag{2.20}$$

za sve pozitivne realne brojeve a, b i c.

Rješenje. Zapišimo nejednakost u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{a}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{b}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{c}}\geq 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{ca}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{ab}{c^2}}}\geq 1,$$

Uvedimo supstitucije

$$x=8\frac{bc}{a^2},$$
$$y=8\frac{ca}{b^2},$$
$$z=8\frac{ab}{c^2}.$$

Tada je

$$xyz=8\frac{bc}{a^2}\cdot 8\frac{ca}{b^2}\cdot 8\frac{ab}{c^2}=8^3=512,$$

a nejednakost koju treba dokazati se pretvara u

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geq 1.$$

Nakon množenja te nejednakosti s $\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}$, dobivamo

$$\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}+\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+z}+\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}\geq\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}.$$

Kvadriranjem dolazimo do

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+y)+(1+x)(1+z)+(1+y)(1+z)+2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+z}\\ &\quad+2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+z}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}+2\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\\ &\qquad\geq(1+x)(1+y)(1+z),\end{aligned}$$

a to je ekvivalentno s

$$\begin{aligned}&1+x+y+xy+1+x+z+xz+1+y+z+yz\\ &\quad+2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\right)\\ &\qquad\geq 1+x+y+z+xy+yz+xz+xyz.\end{aligned}$$

Budući da je $xyz=512$, nakon dokidanja jednakih pribrojnika na obje strane nejednakosti imamo

$$x+y+z+2\sqrt{(1+x)(1+y)(1+z)}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\right)\geq 510. \tag{2.21}$$

Označimo

$$M = x + y + z + 2\sqrt{(1+x)(1+y)(1+z)}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z}\right).$$

Pokazat ćemo da doista vrijedi

$$M \geq 510.$$

Raspišimo najprije izraz $(1+x)(1+y)(1+z)$. Imamo

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + x + y + z + xz + xz + yz + xyz.$$

Ako primijenimo AG nejednakosti

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

i

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2},$$

tada slijedi

$$\begin{aligned} 1 + (x+y+z) + (xz+xz+yz) + xyz &\geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz \\ &= (1+\sqrt[3]{xyz})^3 \\ &\overset{(xyz=512)}{=} (1+\sqrt[3]{512})^3 \\ &= (1+8)^3 = 729. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pogledajmo još izraz $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z}$. Opet ćemo primijeniti AG nejednakost. Vrijedi

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} &\overset{A \geq G}{\geq} 3\sqrt[3]{\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}\sqrt{1+z}} \\ = 3\sqrt[6]{(1+x)(1+y)(1+z)} &\overset{(2.22)}{\geq} 3\sqrt[6]{729} = 3 \cdot 3 = 9. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sada je

$$M \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 2\sqrt{729} \cdot 9 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 27 \cdot 9 = 24 + 486,$$

odnosno

$$M \geq 510.$$

Dakle, nejednakost (2.21) je istinita, pa je istinita i njoj ekvivalentna početna nejednakost, tj. vrijedi

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1,$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 2.5.2 (Međunarodna matematička olimpijada, 2012. godina, zadatak 2). *Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokaži da vrijedi*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n. \tag{2.24}$$

Rješenje. Pogledajmo izraz $(1+k)^k$. Vrijedi

$$(1+a_k)^k = \left(\underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1}}_{k-1} + a_k\right)^k.$$

Primjenom AG nejednakosti na k brojeva $\frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{1}{k-1}, a_k$ dobivamo

$$(1+a_k)^k \geq \left(k \cdot \sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \cdot a_k}\right)^k,$$

odnosno

$$(1+a_k)^k \geq k^k \cdot \frac{1}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k. \tag{2.25}$$

Sada primjenom (2.25) imamo

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq 2 \cdot 1 \cdot a_2 \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot a_3 \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot a_4 \cdots n^n \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_n,$$

odnosno

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq a_2 a_3 \cdots a_n \cdot n^n.$$

Budući da je iz uvjeta zadatka $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, dobivamo

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geq n^n.$$

Želimo još dokazati da u zadnjoj nejednakosti vrijedi stroga nejednakost.

Jednakost bi vrijedila kada bismo imali jednakost u (2.25) za svaki $k \in \{2, n\}$. To bi značilo da mora biti $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $a_n = \frac{1}{n-1}$. No, tada bi bilo

$$a_2 a_3 \cdots a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cdots \frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!},$$

a to je nemoguće s obzirom na to da je $n \geq 3$ i $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$.

Dakle, vrijedi stroga nejednakost

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Poglavlje 3

Nejednakosti između geometrijske i harmonijske te aritmetičke i kvadratne sredine

U ovom ćemo poglavlju dati dokaz nejednakosti između geometrijske i harmonijske te aritmetičke i kvadratne sredine, a zatim i nekoliko primjera primjene tih nejednakosti pri rješavanju zadataka.

3.1 Dokazi nejednakosti

Dokažimo najprije nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine.

Teorem 3.1.1 (Nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine)**.** *Neka je a bilo koja n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$G_n(a) \geq H_n(a), \tag{3.1}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Želimo dokazati

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ako primijenimo AG nejednakost na brojeve $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, dobivamo:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}. \tag{3.2}$$

Taj izraz možemo zapisati malo drugačije:

$$\sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Ta je nejednakost ekvivalentna s

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \right)^{-1},$$

tj.

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

a to je upravo tvrdnja teorema. Primijetimo da u (3.2) jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n}$, odnosno $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Dokažimo još i nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine.

Teorem 3.1.2 (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine)**.** *Neka je a bilo koja n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada je*

$$A_n(a) \leq K_n(a), \tag{3.3}$$

s jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dokaz. Krenimo od identiteta

$$(a_1 + a_2 \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n.$$

Budući da znamo da je

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

(što slijedi iz $(a-b)^2 \geq 0$), zamjenom $2a_ia_j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j)$ sa $a_i^2 + a_j^2$ dolazimo do

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + \cdots + (a_{n-1}^2 + a_n^2) \\ &\leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),\end{aligned} \tag{3.4}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Budući da su izrazi na obje strane pozitivni, dobivenu nejednakost možemo korjenovati čime dolazimo do

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)},$$

a zatim dijeljenjem s n do

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

što je i bila tvrdnja teorema.

Kako jednakost u (3.4) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, i jednakost u (3.3) vrijedi pod istim uvjetom. □

Napomena 3.1.3. *AK nejednakost vrijedi za bilo koje realne brojeve, ne nužno pozitivne.*

Naime, neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Neka je A_n aritmetička, a K_n kvadratna sredina tih brojeva. Znamo da vrijedi $A_n \leq K_n$.

Pogledajmo $n + 1$ brojeva $0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Označimo njihovu aritmetičku sredinu s A_{n+1}, a kvadratnu s K_{n+1}. Imamo

$$A_{n+1} = \frac{0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{n}{n+1} A_n,$$

te

$$K_{n+1}^2 = \frac{0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} = \frac{n}{n+1} K_n^2.$$

Sada je

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 \leq \frac{n+1}{n} A_{n+1}^2 &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 A_n^2 = \frac{n}{n+1} A_n^2 \\ &\leq \frac{n}{n+1} K_n^2 = K_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Neka su sada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilo koji realni brojevi. Tada je

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

odnosno AK nejednakost vrijedi za bilo koje realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Napomena 3.1.4. *Vidimo da tvrdnja teorema 1.2.3, kojeg smo iskazali u prvom poglavlju, slijedi direktno iz teorema 2.2.1, 3.1.1 i 3.1.2.*

3.2 Primjene nejednakosti

U ovom ćemo dijelu pokazati kako poznavanje GH i AK nejednakosti može znatno olakšati dokazivanje nekih nejednakosti. Također, vidjet ćemo i nekoliko primjera korištenja nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine, koja slijedi iz teorema 1.2.3.

Primjeri navedeni u ovom potpoglavlju mogu se naći u [2], osim ako je drugačije navedeno.

Primjer 3.2.1. *Dokažimo da za pozitivne realne brojeve vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2. \tag{3.5}$$

Dokaz. Primijenimo GH nejednakost na brojeve $\frac{a}{b+c}$ i 1:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b+c}}+\frac{1}{1}}=\frac{2}{\frac{b+c}{a}+1}=\frac{2}{\frac{a+b+c}{a}},$$

odnosno

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

Analogno dobivamo da je:

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geq \frac{2b}{a+b+c}$$

te

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Zbrajanjem tih triju nejednakosti dolazimo do

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Pokažimo još da u (3.5) vrijedi stroga nejednakost, tj. da jednakost nije moguća.

Znamo da je jednakost u GH nejednakosti moguća samo u slučaju kada su svi brojevi koji sudjeluju u nejednakosti jednaki, tj. moralo bi vrijediti

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=1.$$

Odavde zaključujemo da mora vrijediti

$$\begin{aligned} a &= b + c, \\ b &= c + a, \\ c &= a + b. \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih triju jednakosti dolazimo do

$$a + b + c = 2(a + b + c),$$

što je, budući da su brojevi a, b, c pozitivni, nemoguće. Dakle, vrijedi stroga nejednakost

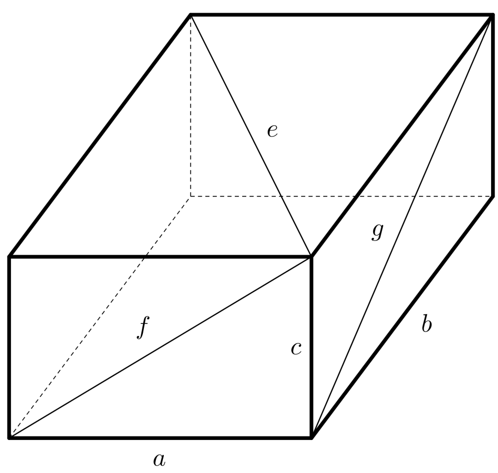
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

□

Primjer 3.2.2. *Neka su a, b, c duljine stranica, a e, f, g duljine dijagonala strana kvadra. Dokažimo da vrijedi nejednakost*

$$e + f + g \geq \sqrt{2}\,(a + b + c) \tag{3.6}$$

Dokaz. Uvedimo oznake kao na slici.



Slika 4.1

Tada po Pitagorinom poučku imamo:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad f = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad g = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Iz AK nejednakosti znamo da vrijedi:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} \geq \frac{a+c}{2}, \quad \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq \frac{b+c}{2},$$

pa iz toga slijedi:

$$e = \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b),$$

$$f = \sqrt{a^2+c^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c),$$

$$g = \sqrt{b^2+c^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c).$$

Zbrajanjem gornjih triju nejednakosti dobivamo

$$e+f+g \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(2a+2b+2c),$$

tj.

$$e+f+g \geq \sqrt{2}\,(a+b+c),$$

što je i bila tvrdnja. Jednakost vrijedi u slučaju kada je kvadratna sredina jednaka aritmetičkoj, tj. $a=b=c$, odnosno kada je zadani kvadar zapravo kocka. $\square$

Primjer 3.2.3. *Dokažimo da za* $a, b > 0$ *i* $a+b \geq 1$ *vrijedi nejednakost*

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Dokaz. Ako primijenimo AK nejednakost na brojeve a^2 i b^2, imamo

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \frac{a^2+b^2}{2},$$

odnosno nakon kvadriranja

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2. \tag{3.7}$$

Primijenimo li AK nejednakost na brojeve a i b, dobivamo

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2},$$

tj. nakon kvadriranja

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \tag{3.8}$$

Sada iz (3.7) i (3.8) slijedi

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4,$$

odnosno

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}(a+b)^4.$$

Iz uvjeta zadatka imamo da je $a+b \geq 1$, pa je

$$a^4+b^4 \geq \frac{1}{8},$$

što je i trebalo dokazati. Vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b = \frac{1}{2}$. □

Primjer 3.2.4 (Zadatak s državnog natjecanja iz matematike u RH, 2012. godina, 1. razred, A varijanta [5])**.** *Dokaži da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi*

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq a^2+b^2+c^2+2(a-b+1).$$

Dokaz. Transformirajmo desnu stranu nejednakosti

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(a-b+1) &= a^2+2a+1+b^2-2b+1+c^2 \\ &= (a+1)^2+(b-1)^2+c^2. \end{aligned}$$

Ako primijenimo AK nejednakost na brojeve $a+1$, $b-1$, c, dobivamo

$$\sqrt{\frac{(a+1)^2+(b-1)^2+c^2}{3}} \geq \frac{(a+1)+(b-1)+c}{3}$$

tj.

$$(a+1)^2+(b-1)^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

□

Primjer 3.2.5. *Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dokaz. Ako primijenimo AK nejednakost na brojeve $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{2n}$ imamo

$$\frac{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}{n} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2n}\right)^2}{n}}.$$

U ovom slučaju imamo strogu nejednakost jer ne može biti

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n+3}=\ldots=\frac{1}{2n}.$$

Nakon množenja s n i kvadriranja, gornja nejednakost prelazi u ekvivalentnu nejednakost

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2 < n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right). \tag{3.9}$$

Budući da je $n \in \mathbb{N}$, znamo da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} &< \frac{1}{n(n+1)},\\ \frac{1}{(n+2)^2} &< \frac{1}{(n+1)(n+2)},\\ &\vdots\\ \frac{1}{(2n)^2} &< \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.\end{aligned}$$

Nakon zbrajanja tih nejednakosti, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2} &< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n} =\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n},\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2n}. \tag{3.10}$$

Sada iz nejednakosti (3.9) i (3.10) dobivamo

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2 < n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Tu nejednakost korjenujemo i dobivamo

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a upravo to je i trebalo dokazati. □

Primjer 3.2.6. *Dokažimo da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{3.11}$$

Dokaz. Primjenom AH nejednakosti na brojeve $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ imamo

$$\frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{\frac{1}{b+c}} + \frac{1}{\frac{1}{c+a}} + \frac{1}{\frac{1}{a+b}}},$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}. \tag{3.12}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \\
&= \frac{a}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\
&= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+c}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} \\
&= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3,
\end{aligned}$$

dobivamo da je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3.$$

Sada zbog (3.12) imamo

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq (a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} - 3,$$

odnosno

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Jednakost u (3.11) vrijedi ako i samo ako imamo jednakost u AH nejednakosti, a to se postiže kada je $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{1}{a+b}$, odnosno $a = b = c$. □

Primjer 3.2.7. *Dokažimo da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0.$$

Dokaz. Ovaj smo zadatak riješili već u poglavlju 2, primjer 2.3.1. Tada smo ponudili dva rješenja pomoću AG nejednakosti, a sada ćemo pokazati rješenje pomoću AH nejednakosti.

Ako danoj nejednakosti dodamo na obje strane $9abc$, dobivamo ekvivalentne nejednakosti:

$$ab(a+b-2c)+3abc+bc(b+c-2a)+3abc+ca(c+a-2b)+3abc\geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)\geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Ako ovu nejednakost podijelimo s $3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, dobivamo

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

a to je AH nejednakost za brojeve a, b, c, za koju znamo da je istinita za sve pozitivne realne brojeve a, b, c. Zbog toga je istinita i njoj ekvivalentna početna nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. □

Primjer 3.2.8. *Dokažimo da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right). \tag{3.13}$$

Dokaz. Vrijedi

$$\frac{4a}{b+c}=2\cdot\frac{2a}{b+c}=2\cdot\frac{2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=2\cdot\frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{a}{c}}},$$

a odavde primjenom AH nejednakosti dobivamo

$$\frac{4a}{b+c}\leq 2\cdot\frac{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}{2}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}.$$

Analogno imamo

$$\frac{4b}{c+a}\leq\frac{b}{c}+\frac{b}{a}$$

i

$$\frac{4c}{a+b} \leq \frac{c}{a} + \frac{c}{b}.$$

Zbrajanjem prethodnih triju nejednakosti dobivamo

$$4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \leq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b},$$

odnosno

$$4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b},$$

a to je upravo (3.13).

Jednakost u (3.13) vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, $\frac{b}{c} = \frac{b}{a}$, $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$, tj. ako je $a = b = c$. □

Primjer 3.2.9. *Dokažimo da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)} \leq \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \tag{3.14}$$

Dokaz. Dokažimo najprije nejednakost

$$\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \tag{3.15}$$

Imamo

$$\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} = \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}} + \frac{1}{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc}} + \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ac}}.$$

Iz AH nejednakosti za brojeve b^2 i ab imamo

$$\frac{b^2+ab}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}},$$

odnosno

$$\frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}} \leq \frac{b^2+ab}{4}.$$

Analogno dobivamo

$$\frac{1}{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{bc}} \leq \frac{c^2+bc}{4} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ac}} \leq \frac{a^2+ac}{4}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &\leq \frac{b^2+ab}{4}+\frac{c^2+bc}{4}+\frac{a^2+ac}{4}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\frac{1}{4}(ab+ac+bc).\end{aligned}$$

Iz AG nejednakosti imamo

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab,$$

i analogno

$$\frac{a^2+c^2}{2}\geq ac,\quad \frac{b^2+c^2}{2}\geq bc,$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a} &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}\right)\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.\end{aligned}$$

Time smo dokazali nejednakost (3.15).

Preostaje nam dokazati nejednakost

$$\frac{9abc}{2(a+b+c)}\leq \frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}. \tag{3.16}$$

Primijenimo AG nejednakost i imamo

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}\leq \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Želimo dokazati da je

$$\frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq \frac{9abc}{2(a+b+c)}.$$

No, ta je nejednakost ekvivalentna s

$$2\cdot(a+b+c)\geq 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

odnosno

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

što je AG nejednakost za brojeve $a+b$, $b+c$, $c+a$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a+b=b+c=c+a$, odnosno ako je $a=b=c$.

Dakle, nejednakost (3.16) je istinita, pa je time i cijela nejednakost (3.14) istinita. □

Bibliografija

[1] *International Mathematical Olympiad – Problems*, dostupno na `https://www.imo-official.org/problems.aspx` (lipanj 2015.).

[2] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[3] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf` (lipanj 2015.).

[4] P. W. Gwanyama, *The HM-GM-AM-QM Inequalities*, The College Mathematics Journal **11** (2004), br. 35, 89–93.

[5] Hrvatsko matematičko društvo, *Matematička natjecanja u Republici Hrvatskoj – 2012. godina*, dostupno na `http://www.matematika.hr/natjecanja/domaca/2012/` (lipanj 2015.).

[6] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.

[7] T. Phuong, *Diamonds in Mathematical Inequalities*, Hanoi Publishing House, Hanoi, 2007.

Sažetak

Dokazivanje nejednakosti važan je dio matematike, a na matematičkim natjecanjima često se pojavljuje zadatak u kojem treba dokazati neku nejednakost. U ovom radu obradili smo nejednakosti između osnovnih sredina, odnosno nejednakosti između aritmetičke, geometrijske, harmonijske i kvadratne sredine.

Najpoznatija od njih je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Iz tog je razloga njoj posvećeno cijelo jedno poglavlje te su ponuđena četiri različita dokaza te nejednakosti. Osim toga, pokazali smo na nekoliko primjera kako se ona koristi pri dokazivanju raznih nejednakosti, ali i pri pronalaženju ekstremnih vrijednosti funkcija.

Također, u tom se dijelu nalaze i dva zadatka s Međunarodne matematičke olimpijade, koja se na elegantan način mogu riješiti primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine.

U preostalom dijelu rada dokazali smo nejednakost između geometrijske i harmonijske te između aritmetičke i kvadratne sredine, a zatim na nekoliko primjera pokazali primjenu tih nejednakosti pri dokazivanju drugih nejednakosti.

Summary

Proving inequalities is an important part of mathematics. It is also an example of problems that are frequently given on mathematics competitions. In this thesis we have worked on inequalities between arithmetic, geometric, harmonic and quadratic means.

The most famous inequality is the one between arithmetic and geometric mean. We have given four different proofs of that inequality. Beside of that, we have shown on a few examples how to use that inequality for proving other inequalities, and also for solving some other problems like finding maximum values of functions.

Also, we have solved two problems from International Mathematical Olympiad, which are good examples of using inequality between arithmetic and geometric mean.

In the remaining part of thesis, one can find proofs of inequalities between geometric and harmonic, and arithmetic and quadratic inequality, and also a few examples of the application of those inequalities.

Životopis

Zovem se Marko Nemec. Rođen sam 31. srpnja 1989. godine u Zagrebu. Prvih pet godina osnovnoškolskog obrazovanja proveo sam u Zagrebu, a preostale tri u Zaprešiću, gdje sam završio i srednju školu. Po završetku srednje škole upisao sam Prirodoslovno-matematički fakultet, gdje sam 2013. godine završio preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički. Nakon toga upisao sam diplomski studij Matematika i informatika, smjer nastavnički, koji sada završavam.